

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

A toute matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe le nombre réel $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$, appelé « trace » de la matrice M .

1. Montrer que pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$ et que si deux matrices sont semblables, leurs traces sont égales.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On suppose que chaque coefficient de A vaut 0 ou 1 et qu'il existe un entier naturel non nul k tel que

$$A^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & k & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & k \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que le vecteur colonne $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A . En

déduire que U est vecteur propre de A^2 et que que $n = k^2 - k + 1$.

3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A^2 .

Solution :

1. Avec des notations évidentes, on écrit :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(MN) &= \sum_{i=1}^n (MN)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{i,k} n_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n n_{k,i} m_{i,k} = \sum_{k=1}^n (NM)_{k,k} = \operatorname{tr}(NM) \end{aligned}$$

Soit alors A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables, il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$ et :

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(P^{-1}(AP)) = \operatorname{tr}((AP)P^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$$

2. Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On sait que $a_{i,j} = a_{j,i}$. L'élément générique de A^2 s'écrit $\sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{j,k}$. Donc, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$k = \sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell} a_{i,\ell} = \sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}^2$$

Comme chaque $a_{i,\ell}$ appartient à $\{0, 1\}$, il en résulte que A possède un nombre de 1 exactement égal à k sur chaque ligne, le reste étant des 0. Donc :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = kU$$

Ainsi $A^2U = k^2U$, d'où $k + (n-1) = k^2$, soit :

$$n = k^2 - k + 1$$

3. Posons $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A^2 = J + (k-1)I$.

La matrice J admet 0 comme valeur propre, le sous-espace propre associé étant de dimension $(n-1)$ (car J est de rang 1). C'est l'hyperplan H d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$.

La matrice J est symétrique réelle, donc diagonalisable. La diagonale de la matrice D diagonale semblable à J est formée des valeurs propres de J , et deux matrices semblables ont même trace. La valeur propre manquante de J est donc n et le sous-espace propre associé est de dimension 1. C'est l'orthogonal de l'hyperplan précédent donc, $\operatorname{Vect}(U)$.

Enfin, comme $A^2 = J + (k-1)I$, les valeurs propres de A^2 sont $k-1$, le sous-espace propre étant l'hyperplan H , et $n-k+1 = k^2$ de sous-espace propre associé $\operatorname{Vect}(U)$.

Exercice 2.2.

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $r_i = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

Soit λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

On note

$\|X\| = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$. Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\lambda x_i| \leq r_i \|X\|$ et en déduire qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, tel que $|\lambda| \leq r_i$.

2. Soit $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On pose $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$ et on note $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général :

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ -c_{j-1} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

a) Montrer que les valeurs propres complexes de M sont les racines du polynôme P .

b) On pose $R = \max(|c_0|, 1 + |c_1|, 1 + |c_2|, \dots, 1 + |c_{n-1}|)$.

Déduire de ce qui précède que toutes les racines complexes de P ont un module inférieur ou égal à R .

3. Soit a, b, c, d quatre entiers naturels non nuls deux à deux distincts.

Montrer que l'équation, d'inconnue x ,

$$x^a + x^b = x^c + x^d$$

n'admet pas d'autre solution que 0 et 1 dans \mathbb{N} .

Solution :

1. Par hypothèse, on a $AX = \lambda X$. Donc, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i$. Ainsi :

$$|\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \|X\| = r_i \|X\|$$

De plus, comme $X \neq 0$, il existe i_0 tel que $x_{i_0} = \|X\|$, ce qui entraîne :

$$|\lambda x_{i_0}| = |\lambda| \|X\| \leq r_{i_0} \|X\| \text{ et donc } |\lambda| \leq r_{i_0}$$

2. a) La matrice M s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \dots & \dots & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, λ est valeur propre de M si et seulement s'il existe $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$ c'est-à-dire si et seulement s'il existe $X \neq 0$ tel que :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ -c_0 x_1 - c_1 x_2 - \dots - c_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ P(\lambda)x_1 = 0 \end{cases}$$

Or $X \neq 0$ si et seulement si $x_1 \neq 0$ (car $x_1 = 0$ donne banalement en remplaçant dans les équations successives : $x_2 = x_3 = \dots = 0$) et donc λ valeur propre de $M \implies P(\lambda) = 0$.

b) Les matrices M et M^T ont les mêmes valeurs propres (car $M - \lambda I$ et $(M - \lambda I)^T = M^T - \lambda I$ ont même rang).

Avec les notations de la première question, on a, pour M^T :

$$r_1 = |c_0|, r_2 = 1 + |c_1|, \dots, r_n = 1 + |c_{n-1}|$$

Donc, $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de P si et seulement si λ est valeur propre de M^T et il existe r_i tel que $|\lambda| \leq r_i$. Donc $|\lambda| \leq \max(r_i) = R$.

3. Les solutions de $n^a + n^b = n^c + n^d$ sont les racines d'un polynôme P pour lequel $R = 2$. Les solutions dans \mathbb{N} ne peuvent donc être que 0, 1, 2 (question 2.b).

On remarque que 0, 1 sont solutions. Par contre 2 ne peut être solution. En effet, on peut supposer, par symétrie des rôles, que $a = \min(a, b, c, d)$. On aurait alors

$$1 + 2^{b-a} = 2^{c-a} + 2^{d-a}$$

ce qui est absurde car le membre de gauche est impair et celui de droite pair.

Exercice 2.3.

On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

On considère l'application f de E dans E définie par

$$f(P) = (X - 1)\left(P - \frac{(X - 1)^3}{6}P'''\right)$$

où P''' désigne la dérivée tierce (troisième) de P .

1. a) Montrer que f est linéaire.

- b) Montrer que si $P \in \text{Im } f$, alors 1 est racine de P .
- c) L'application f est-elle surjective ?
2. a) Calculer $\deg f(P)$ en fonction de $\deg P$ si $\deg P \neq 3$.
- b) Soit P un vecteur propre de f . Montrer que $\deg P = 3$.
3. a) Montrer que $f(E_3) \subset E_3$. On appelle g l'endomorphisme de E_3 défini par $f(P) = g(P)$ pour tout $P \in E_3$.
- b) Montrer que g n'est pas injectif.
- c) On note $Q_k = (X - 1)^k$ pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. Donner la matrice A de g dans la base $\mathcal{B} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.
- d) En déduire que A est de rang 3 et que seul 0 est valeur propre de g .
4. On revient à l'étude de f et on recherche les sous-espaces vectoriels de E de dimension finie stables par f , c'est-à-dire tels que $f(F) \subset F$.
- a) Montrer que $\text{Ker } f$, $\text{Ker } f^2$ et $\text{Ker } f^3$ sont des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, stables par f .
- b) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, stable par f . Montrer que $F \subset E_3$ puis que $F = \{0\}$ ou $F = \text{Ker } f$, ou $F = \text{Ker } f^2$ ou $F = \text{Ker } f^3$.

Solution :

1. a) La linéarité de f est celle de la dérivation.
- b) Il est évident que $f(P)(1) = 0$.
- c) L'application f n'est pas surjective, puisque $\text{Im } f$ est contenu dans le sous-espace vectoriel, strictement inclus dans $\mathbb{R}[X]$, des polynômes s'annulant en 1.
2. a) Choisissons comme base de $\mathbb{R}[X]$ la famille $\mathcal{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2, \dots, (X - 1)^n, \dots)$, et regardons, pour tout $k \geq 0$, $f((X - 1)^k)$.
- si $k \leq 2$, $f((X - 1)^k) = (X - 1)^{k+1}$.
 - si $k \geq 3$, $f((X - 1)^k) = (X - 1)^{k+1} \left(1 - \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\right)$.
- Ainsi, pour tout $k \geq 0$:
- $$f((X - 1)^k) = (X - 1)^{k+1} \left(1 - \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\right)$$
- Ainsi, si le degré de P est p , celui de $f(P)$ est $p + 1$.
- b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \neq 0$ tel que $f(P) = \lambda P$. On a alors $\deg f(P) = \deg P$, si $\lambda \neq 0$.
- La seule valeur propre possible est donc $\lambda = 0$ et dans ce cas $f(P) = 0$. En écrivant P dans la base \mathcal{B} , la seule possibilité est $1 - \frac{p(p-1)(p-2)}{6} = 0$, soit $p = 3$

3. a) Le choix de la base \mathcal{B} et l'expression de f dans cette base rend cette question évidente.

b) Comme dans la première question g n'est pas surjective.

c) La matrice demandée est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Il est évident que A est de rang 3 (les trois premières colonnes sont libres, la dernière est nulle) et que $A^4 = 0$. Ainsi 0 est la seule valeur propre de A .

4. a) Un calcul immédiat donne :

$$\text{Ker } f = \text{Vect}((X-1)^3), \text{Ker } f^2 = \text{Vect}((X-1)^3, (X-1)^2),$$

$$\text{Ker } f^3 = \text{Vect}((X-1)^3, (X-1)^2, (X-1)), \text{Ker } f^4 = E_3.$$

b) Soit F un sous-espace de dimension finie stable par f . Supposons que F contienne un polynôme P de degré $p > 3$. Alors F contient $f(P)$ de degré $p+1$, contient également $f^2(P)$ de degré $p+2$, etc. en contradiction avec sa dimension finie. Donc $F \subseteq E_3$.

Evidemment $\{0\}$ est stable. Si $F \neq \{0\}$, notons $k = \dim F$, avec $1 \leq k \leq 3$. L'application restreinte f_F est un endomorphisme de F et est nilpotent (puisque f l'est). L'ordre de nilpotence de f_F est inférieur ou égal à la dimension de F , soit k . Donc $(f_F)^k = 0$, et

$$F = \text{Ker}(f_F)^k \subseteq \text{Ker } f^k$$

On conclut que $F = \text{Ker } f^k$ par égalité des dimensions.

Exercice 2.4.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On suppose qu'il existe deux endomorphismes de E , u et v vérifiant la relation suivante :

$$u^3 + u^2 + u = v.$$

1. Soit λ une valeur propre de u associée à un vecteur propre x . Montrer que x est vecteur propre de v associé à une valeur propre que l'on déterminera.

2. On suppose dans cette question uniquement que u admet n valeurs propres deux à deux distinctes, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Montrer que v admet également n valeurs propres distinctes, μ_1, \dots, μ_n que l'on exprimera à l'aide des $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

3. Montrer que si u est diagonalisable, alors v l'est également.

4. Montrer que si v est inversible, alors u l'est également. Donner un exemple en dimension 2 où la réciproque n'est pas vérifiée.

Solution :

1. Soit x un vecteur non nul tel que $u(x) = \lambda x$.

Une récurrence facile montre que, pour tout $k \geq 1$, $u^k(x) = \lambda^k x$, d'où :

$$v(x) = (\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda)x$$

2. On vient que montrer que si λ est une valeur propre de u , alors $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda$ est valeur propre de v . Démontrer la question revient à montrer que, pour tout (λ, μ) valeurs propres de u :

$$\lambda \neq \mu \implies \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda \neq \mu^3 + \mu^2 + \mu$$

Pour cela, il suffit d'étudier la fonction polynomiale $x \mapsto x^3 + x^2 + x$ et de vérifier qu'elle est strictement croissante sur \mathbb{R} . C'est quasiment évident puisque sa dérivée est $x \mapsto 3x^2 + 2x + 1$ qui reste strictement positive sur \mathbb{R} .

3. Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de E formée de vecteurs propres de u . La première question montre que e_1, e_2, \dots, e_n sont des vecteurs propres de v . L'endomorphisme v est donc diagonalisable.

4. a) Supposons que u ne soit pas inversible. Alors 0 est valeur propre de u et il existe au moins un vecteur propre (donc non nul) x associé. La première question montre que 0 est valeur propre de v et que le même vecteur x lui est associé. Donc v n'est pas inversible. Ainsi, par contraposée, v inversible $\implies u$ inversible.

b) En dimension 2, prenons la rotation d'angle $2\pi/3$ de matrice

$$U = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Par calculs, les valeurs propres de U sont complexes et valent $j = e^{2i\pi/3}$ et j^2 . Sur \mathbb{C} , U admet deux valeurs propres distinctes non nulles et donc U est inversible.

Mais comme $0 = j(j^2 + j + 1) = j^3 + j^2 + j$, la seule valeur propre de $V = U^3 + U^2 + U$ est 0 et V n'est pas inversible.

Exercice 2.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On recherche les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AM - MA = A$.

1. Traiter le cas particulier $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que si l'équation proposée a au moins une solution, alors elle en admet une infinité.

3. On suppose que l'équation proposée admet M pour solution.

a) Montrer que pour tout entier naturel p , on a alors $A^p M - M A^p = p A^p$.

b) En considérant l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(N) = NM - MN$, en déduire qu'il existe un entier k tel que $A^k = 0$.

4. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$.

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à la matrice A .

Montrer qu'il existe un vecteur x de \mathbb{R}^n tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de \mathbb{R}^n . En déduire une matrice A' simple semblable à A .

Proposer alors une méthode pour trouver les matrices M solutions.

Solution :

1. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, puis on effectue le calcul $AM - MA$, et on résout l'équation $AM - MA = A$, ce qui donne les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a+1 & b \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

2. S'il existe M telle que $AM - MA = A$, alors pour tout réel λ , $M + \lambda I$ vérifie la même relation.

3. a) La relation demandée est banale pour $p = 0$ et vérifiée pour $p = 1$. Supposons qu'elle soit vérifiée pour un certain entier p , soit : $A^p M - M A^p = p A^p$. Alors :

$$A^{p+1} M - M A^p = p A^{p+1}$$

et en multipliant à droite $AM - MA = A$ par A^p , il vient :

$$A M A^p - M A^{p+1} = A^{p+1}$$

Il reste à sommer ces deux dernières égalités, ce qui donne :

$$A^{p+1} M - M A^{p+1} = p A^{p+1} + A^{p+1} = (p+1) A^{p+1}$$

et la relation est encore valide au rang $p+1$, d'où la conclusion.

b) Soit M une solution de l'équation. Dans ce cas, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p \neq 0$, A^p est vecteur propre de φ associé à la valeur propre p . Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, φ ne peut admettre une infinité de valeurs propres : il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

4. La matrice A vérifie $A^{n-1} \neq 0$, $A^n = 0$; elle représente un endomorphisme de \mathbb{R}^n , nilpotent d'ordre n . Soit x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Il est classique (et on montre aisément) que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre donc constitue une base de \mathbb{R}^n .

Dans cette base, u s'écrit

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}A'P$. On a alors :

$$AM - MA = A \iff A'(PMP^{-1}) - (PMP^{-1})A' = A'$$

soit $A'N - NA' = A'$, ce qui est plus simple à résoudre par un calcul direct, vu le nombre d'éléments nuls de A' .

Exercice 2.6.

Si k est un entier naturel, $\mathbb{R}_k[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à k . Dans l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1. a) Déterminer trois polynômes A, B, C à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2 tels que :

$$\begin{cases} A(-1) = 1 \\ A(0) = 0 \\ A(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B(-1) = 0 \\ B(0) = 1 \\ B(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C(-1) = 0 \\ C(0) = 0 \\ C(1) = 1 \end{cases}$$

b) La famille (A, B, C) obtenue est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

2. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], u(P) = P(-1)A + P(0)B + P(1)C$$

Montrer que u est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on déterminera le noyau et l'image.

3. On note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] v(P) = P(0)A + P(1)B + P(-1)C$$

a) Déterminer les valeurs et vecteurs propres de v .

b) L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

c) Existe-t-il un polynôme R tel que $u = R(v)$? Existe-t-il un polynôme S tel que $v = S(u)$?

Solution :

1. a) Les conditions $A(0) = A(1) = 0$ et $A \in \mathbb{R}_2[X]$ entraînent que

$$A(X) = \lambda X(X - 1).$$

La condition $A(-1) = 1$ donne $\lambda = 1/2$, et $A = \frac{1}{2}X(X - 1)$.

On trouve de même que $B = (1 - X^2)$ et $C = \frac{1}{2}X(X + 1)$.

b) Si $P = \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$, alors :

$$\alpha = P(-1) = 0, \quad \beta = P(0) = 0, \quad \gamma = P(1) = 0$$

La famille (A, B, C) est formée d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, libre de cardinal 3 égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$. C'est une base de cet espace.

2. Au vu de la définition de u , il vient : $u^2(A) = u(A)$, $u^2(B) = u(B)$, et $u^2(C) = u(C)$, donc par linéarité, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$u^2(P) = u(P)$$

ce qui signifie que u est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$.

Le noyau $\text{Ker } u$ est formé des polynômes s'annulant en $\{-1, 0, 1\}$ donc de la forme $(X+1)X(X-1)Q(X)$. L'image $\text{Im } u$ est incluse dans $\mathbb{R}_2[X]$, et comme la restriction de u à $\mathbb{R}_2[X]$ est l'identité, on a $\text{Im } u = \mathbb{R}_2[X]$.

3. a) On constate que :

$$\text{Ker } v = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(-1) = P(0) = P(1) = 0\} = \text{Ker } u$$

D'autre part, $v(A) = C$, $v(B) = A$, $v(C) = B$. Cela montre que $v^3 = u$.

Les valeurs propres de v vérifient $\lambda^3 \in \{0, 1\}$ et comme elles sont réelles, il vient $\lambda \in \{0, 1\}$.

On a vu que $\text{Ker } v = \text{Ker } u$. Donc 0 est valeur propre de v , le sous-espace propre associé étant $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P = (X^3 - X)Q(X)\}$, qui est de dimension $n - 2$.

D'autre part, $v(A + B + C) = A + B + C$ montre que 1 est valeur propre de v . De plus le sous-espace propre $E_1(v)$ est inclus dans $\text{Im } v = \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi l'équation $v(P) = P$ donne $P(0) = P(1) = P(-1)$, et $P \in \text{Vect}(A+B+C)$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est donc une droite vectorielle.

b) La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à $n - 1 < n + 1$. L'endomorphisme v n'est pas diagonalisable.

c) On a $u = R(v)$, avec $R(X) = X^3$. Il ne peut exister un polynôme S tel que $v = S(u)$, car sinon, v serait diagonalisable puisque u l'est.

Exercice 2.7.

Toutes les matrices considérées appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle trace d'une matrice carrée A et on note $\text{tr } A$ la somme de ses coefficients diagonaux. On note \mathcal{S} l'ensemble des matrices symétriques et \mathcal{A} l'ensemble des matrices antisymétriques (c'est-à-dire telles que ${}^t A = -A$).

1. Vérifier que :

\mathcal{S} et \mathcal{A} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

la trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers \mathbb{R} ;

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \text{tr}(A) = \text{tr}({}^t A).$$

En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

2. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$$

On notera $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$.

3. On suppose dans cette question que A est symétrique.

Montrer que $\text{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$ où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les termes diagonaux d'une matrice diagonale D , semblable à A .

4. Calculer $\langle A, I_n \rangle$ et montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\text{tr}(A) \leq \sqrt{n} \sqrt{\text{tr}({}^tAA)}.$$

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\min_{B \in \mathcal{S}} \|A - B\|$.

Solution :

1. Cette question, sur la trace d'une matrice, a été résolue maintes fois dans les annales des années précédentes.

2. Il est évident que $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ est bilinéaire, car l'application trace est linéaire, comme la transposition.

Cette application est symétrique, par la question précédente.

De plus $\text{tr}(A^T A) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 \geq 0$ et donc $\text{tr}(A^T A) = 0 \iff A = 0$.

On définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Si A est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe ainsi une matrice P orthogonale, une matrice D diagonale telle que $A = P^T A P$. Par les deux questions précédentes, il vient :

$$\text{tr}(A^2) = \text{tr}(A^T A) = \text{tr}(P^T D^2 P) = \text{tr}(D^2)$$

et par définition de D , $\text{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$, où les (λ_i) sont les valeurs propres de A .

4. On sait que $\langle A, I_n \rangle = \text{tr}(A)$. De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\text{tr}(A)| = |\langle A, I_n \rangle| \leq \|I_n\| \cdot \|A\| = \sqrt{n} \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$$

5. Le cours nous dit que le minimum recherché est atteint par le projeté orthogonal de A sur \mathcal{S} . Or on sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$. On écrit donc A sous la forme $S + U$, avec $S \in \mathcal{S}, U \in \mathcal{A}$. Mais :

$$\langle S, U \rangle = \text{tr}(SU) = \text{tr}(-US) = -\text{tr}(SU) \implies \langle S, U \rangle = 0$$

Le projeté orthogonal de A sur \mathcal{S} est donc $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$. Ainsi :

$$\min_{B \in \mathcal{S}} \|A - B\| = \|A - S\| = \|U\|.$$

Exercice 2.8.

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, $a \in E$ de norme

1. On désigne par f_a l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E, f_a(x) = x - 2\langle x, a \rangle a.$$

1. Montrer que f_a est un automorphisme de E et déterminer son automorphisme réciproque.

2. Montrer que f_a est diagonalisable.

3. Montrer que f_a est un endomorphisme orthogonal

(c'est-à-dire que l'on a : $\forall (x, y) \in E^2, \langle f_a(x), f_a(y) \rangle = \langle x, y \rangle$).

4. Montrer que si g est un endomorphisme orthogonal de E , alors $g \circ f_a \circ g^{-1} = f_{g(a)}$.

5. Soit b un vecteur unitaire de E .

a) Montrer que $f_a = f_b$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$.

b) Déterminer les vecteurs unitaires c de E tels que $f_a \circ f_c = f_c \circ f_a$.

Solution :

1. Il est évident que f_a est un endomorphisme de E . Déterminons son noyau.

$$f_a(x) = 0 \iff x = 2\langle x, a \rangle a \implies \langle x, a \rangle = 2\langle x, a \rangle \|a\|^2 = 2\langle x, a \rangle$$

Donc $\langle x, a \rangle = 0$ et $x = 0$. Ainsi f_a est injectif et est un automorphisme de E .

Pour déterminer f_a^{-1} , il suffit de résoudre l'équation $y = x - 2\langle x, a \rangle a$ d'inconnue x . Or :

$$y = x - 2\langle x, a \rangle a \implies \langle y, a \rangle = -\langle x, a \rangle$$

Donc $x = y - 2\langle y, a \rangle a$, soit $f_a^{-1} = f_a$.

2. L'automorphisme f_a est une involution puisque $f_a^2 = I$. C'est donc une symétrie. Ses valeurs propres sont à prendre dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ et :

$$E_1(f_a) = \{x \in E \mid f_a(x) = x\} = (\vec{a})^\perp$$

$$E_{-1}(f_a) = \{x \in E \mid f_a(x) = -x\} = \vec{a}$$

Ainsi f_a est diagonalisable dans une base orthonormée.

3. On a :

$$\begin{aligned} \langle f_a(x), f_a(y) \rangle &= \langle x - 2\langle x, a \rangle a, y - 2\langle y, a \rangle a \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - 2\langle x, a \rangle \langle y, a \rangle - 2\langle y, a \rangle \langle x, a \rangle + 4\langle x, a \rangle \langle y, a \rangle \|a\|^2 \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

4. Soit $x \in E$,

$$f_{g(a)}(g(x)) = g(x) - 2\langle g(x), g(a) \rangle g(a) = g(x) - 2\langle x, a \rangle g(a)$$

$$= g(x - 2\langle x, a \rangle a) = g(f_a(x))$$

Donc, comme g est orthogonal, il est bijectif et

$$f_{g(a)} \circ g = g \circ f_a \text{ et donc } g \circ f_a \circ g^{-1} = f_{g(a)}$$

5. a) Supposons que $f_a = f_b$. Alors pour tout $x \in E$:

$$\langle x, a \rangle a = \langle x, b \rangle b$$

En prenant $x = a$, il vient $a = \langle a, b \rangle b$, ce qui signifie que a et b sont colinéaires. Comme ils sont de norme 1, cela entraîne que $a = \pm b$.

La réciproque est évidente.

b) Soit c unitaire tel que $f_a \circ f_c = f_c \circ f_a$. Alors $f_c \circ f_a \circ f_c^{-1} = f_a$. Par la question 4, il vient $f_{f_c(a)} = f_a$. Comme f_c est un endomorphisme orthogonal et comme a est unitaire, $f_a(c) = b$ est unitaire et par la question précédente, on a

$$a = \pm b = \pm f_a(c) = \pm(c - 2\langle c, a \rangle a)$$

Les vecteurs a et c sont liés et de norme 1. Donc $a = \pm c$.

Exercice 2.9.

On considère \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme associée. Soient u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^n , on note $u \otimes v$ l'endomorphisme défini sur \mathbb{R}^n par :

$$(u \otimes v)(x) = \langle x, v \rangle u.$$

1.a) Soient u, v deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n ; quelle est l'image de l'endomorphisme $u \otimes v$? Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de $u \otimes v$. Quand est-il diagonalisable ?

b) Prouver que

$$(u_1 \otimes v_1) \circ (u_2 \otimes v_2) = \langle u_2, v_1 \rangle (u_1 \otimes v_2)$$

où $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{R}^n$.

c) Soit λ un réel qui n'est pas une valeur propre de $u \otimes v$; montrer que l'inverse de l'endomorphisme $\lambda Id - u \otimes v$ est donné par

$$(\lambda Id - u \otimes v)^{-1} = \frac{1}{\lambda} Id + \frac{1}{\lambda(\lambda - \langle u, v \rangle)} u \otimes v$$

d) On note ${}^t f$ l'adjoint de l'endomorphisme f , il est déterminé par l'égalité

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, {}^t f(y) \rangle$$

valable pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^n$.

Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^n$. Quel est l'adjoint de l'endomorphisme $u \otimes v$?

e) Soient u_1, v_1, u_2, v_2 quatre vecteurs de \mathbb{R}^n ; sous quelles conditions a-t-on $u_1 \otimes v_1 = u_2 \otimes v_2$?

2. Soient g un endomorphisme de \mathbb{R}^n et u, v deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n . Montrer que g commute avec $u \otimes v$ si et seulement si il existe un réel α tel que $g(u) = \alpha u$ et ${}^t g(v) = \alpha v$.

3. On se place dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et on considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices des endomorphismes qui commutent avec $u \otimes v$. Quel est la dimension de cet espace vectoriel ?

Solution :

1. a) Posons $f = u \otimes v$. Il est clair que l'image de f est la droite engendrée par le vecteur u . On voit immédiatement que 0 est valeur propre de f et que $\text{Ker } f$ est l'hyperplan $(\text{Vect}(v))^\perp$.

Comme tout vecteur propre associé à une valeur propre non nulle appartient à $\text{Im } f$, il suffit d'examiner u . Or $f(u) = \langle u, v \rangle u$; donc $\lambda = \langle u, v \rangle$ est valeur propre de f .

- si u est orthogonal à v , la seule valeur propre de f est 0. Comme $f \neq 0$, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable (en revanche $f^2 = 0$).

- si u n'est pas orthogonal à v , f admet deux valeurs propres (0 et λ) et la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E ; l'endomorphisme f est diagonalisable.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (u_1 \otimes v_1) \circ (u_2 \otimes v_2)(x) &= (u_1 \otimes v_1)(\langle x, v_2 \rangle u_2) \\ &= \langle u_2, v_1 \rangle \cdot \langle x, v_2 \rangle u_1 = \langle u_2, v_1 \rangle (u_1 \otimes v_2)(x) \end{aligned}$$

c) Le scalaire λ n'étant pas valeur propre de f , on sait que $\lambda \neq 0$ et que $\lambda \neq \langle u, v \rangle$. L'endomorphisme proposé est donc bien défini.

Il suffit ensuite de faire le produit de $\lambda I - u \otimes v$ par l'endomorphisme proposé dans cette question, et d'utiliser la question précédente pour obtenir le résultat demandé.

d) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \langle (u \otimes v)^T(x), y \rangle &= \langle x, (u \otimes v)(y) \rangle = \langle y, v \rangle \cdot \langle x, u \rangle \\ &= \langle v, y \rangle \cdot \langle x, u \rangle = \langle (v \otimes u)(x), y \rangle \end{aligned}$$

Donc $(u \otimes v)^T = v \otimes u$.

e) Si u_1 ou v_1 est nul et si u_2 ou v_2 est nul, alors $u_1 \otimes v_1 = u_2 \otimes v_2$.

Supposons qu'aucun de ces quatre vecteurs ne soit nul. L'équation $u_1 \otimes v_1 = u_2 \otimes v_2$, s'écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, u_2 \rangle v_2 = \langle x, u_1 \rangle v_1$$

Avec $x = u_2 \neq 0$, il s'ensuit que les vecteurs (v_1, v_2) sont liés ($v_2 = \beta v_1$). En passant au transposé, la même méthode montre que les vecteurs (u_1, u_2) sont liés ($u_2 = \alpha u_1$), et $\alpha\beta = 1$.

Réciproquement, si $v_2 = \beta v_1$, $u_2 = \alpha u_1$, et $\alpha\beta = 1$, on montre immédiatement que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, u_2 \rangle v_2 = \langle x, u_1 \rangle v_1$.

2. On remarque que :

$$g(u) \otimes v = g \circ (u \otimes v) = (u \otimes v) \circ g = u \otimes g^T(v)$$

En utilisant la question précédente, il existe un réel α tel que $g(u) = \alpha u$ et $g^T(v) = \alpha v$. Cette condition est également suffisante.

3. Si M est la matrice associée à v , en utilisant la question précédente, il vient :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \alpha - (a_2 + b_2) \\ a_3 & b_3 & \alpha - (a_3 + b_3) \end{pmatrix}$$

Le commutant de $u \otimes v$ est donc de dimension 5.

Exercice 2.10.

1. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E .

Un sous-espace vectoriel F de E est dit *stable* par f si $f(F) \subseteq F$.

Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par f . A-t-on la réciproque? Qu'en est-il si la dimension de F est égale à 1?

2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien muni d'une base orthonormée \mathcal{B} . Soit f un endomorphisme de E de matrice A dans la base \mathcal{B} et g un endomorphisme de E de matrice A^T (transposée de A) dans la base \mathcal{B} .

a) Vérifier que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle g(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle$.

b) Soit F un sous-espace de E . Montrer que F est stable par f si et seulement si l'orthogonal de F , noté F^\perp , est stable par g .

3. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans

la base canonique de \mathbb{R}^3 .

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

b) En discutant suivant leur dimension, déterminer les sous-espaces F de E stables par f .

c) Montrer que l'un des plans stables obtenus est $\text{Ker}(f - 3id_E)^2$. Quel est l'autre?

Solution :

1. Si x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ , alors $f(x) = \lambda x$. Tout sous-espace propre est donc clairement stable par f .

La réciproque est fautive. Par exemple si $E = \mathbb{R}^3$ muni d'une base (e_1, e_2, e_3) , et si f est défini par $f(e_i) = ie_i$, l'endomorphisme f admet trois sous-espaces propres, et le plan $\text{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par f et n'est pas un sous-espace propre.

En revanche si F est stable par f et de dimension 1, F est engendré par un vecteur e qui vérifie (par stabilité et dimension) $f(e) = \lambda e$. Ainsi F est une droite propre.

2. a) L'écriture matricielle des endomorphismes dans un espace euclidien donne :

$$\langle g(y), x \rangle = (A^T Y)^T X = Y^T A X = \langle y, f(x) \rangle$$

b) Soit $y \in F^\perp$ et $x \in F$, avec F stable par f . On a alors $f(x) \in F$ et :

$$0 = \langle y, f(x) \rangle = \langle g(y), x \rangle, \text{ d'où } g(y) \in F^\perp$$

On a la réciproque puisque $(F^\perp)^\perp = F$.

3. a) Un calcul élémentaire donne les valeurs propres de f qui sont 1, 3 ainsi que les sous-espaces propres associés qui sont

$$E_3 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres étant $2 \neq 3$, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

b) L'endomorphisme f admet deux sous-espaces stables « triviaux » $\{0\}$ et E .

Les sous-espaces stables de dimension 1 sont les droites engendrées par un vecteur propre, soit E_1 et E_3 .

Soit F un plan stable. Alors F^\perp est une droite stable par g . Les valeurs propres de g sont celle de f , et les sous-espaces propres sont

$$G_3 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi f admet deux plans stables G_1^\perp d'équation $x - y = 0$ et G_3^\perp d'équation $z = 0$

c) On calcule $(A - 3I)^2$. Il vient :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\text{Ker}(f - 3I)^2$ est le plan d'équation $x - y = 0$ soit G_1^\perp . L'autre plan stable, G_3^\perp n'est autre que $E_1 \oplus E_3$.

Exercice 2.11.

Dans cet exercice, toutes les matrices considérées (M, N, P , etc.) sont des matrices d'ordre n ($n \geq 2$) à coefficients réels, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit N une telle matrice.

a) Montrer que les éléments diagonaux de $N^t N$ sont positifs.

b) Montrer que $N^t N$ est symétrique et a toutes ses valeurs propres réelles positives.

2. Montrer que si une matrice M est diagonalisable, alors elle est semblable à sa transposée ${}^t M$, avec une matrice de passage symétrique et dont toutes les valeurs propres sont positives.

3. Soit M une matrice, telle qu'il existe une matrice symétrique P dont toutes les valeurs propres positives, vérifiant $M = P^t M P^{-1}$.

a) Justifier qu'il existe une matrice Q inversible telle que $P = Q^t Q$,

b) Montrer qu'alors $Q^{-1} M Q$ est symétrique, et en déduire que M est diagonalisable.

4. Quel résultat vient-on de démontrer ?

Solution :

1. a) Si $N = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, un calcul immédiat permet d'affirmer que les éléments diagonaux de $N^t N$ sont les nombres $\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2$ qui sont bien positifs ou nuls.

b) La matrice NN^t est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.

Il existe donc une matrice D diagonale réelle, une matrice P orthogonale telles que $D = PNN^t P^t = (PN)(PN)^t$.

Les éléments de D (tous diagonaux) sont ainsi positifs. La matrice NN^t a toutes ses valeurs propres positives.

2. Supposons la matrice M diagonalisable. Il existe une matrice D diagonale, une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$. Alors

$$M^t = (P^{-1})^t D P^t, \text{ d'où } D = P^t M^t (P^{-1})^t$$

D'où

$$M = P P^t M^t (P P^t)^{-1}$$

Ainsi, la matrice M est semblable à sa transposée, la matrice de passage étant symétrique avec ses valeurs propres positives.

3. a) La matrice P est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe une matrice D diagonale, une matrice P_1 orthogonale telles que

$$P = P_1 D P_1^T$$

Les éléments de D sont positifs ou nuls. Soit Δ la matrice diagonale dont les éléments sont les racines carrées (positives) des éléments de D . On a $\Delta^2 = D$, et

$$P = P_1 \Delta \cdot \Delta P_1^T = Q Q^T$$

b) On peut donc écrire

$$M = Q Q^T M^T (Q^{-1})^T Q^{-1}$$

ou

$$Q^{-1} M Q = Q^T M (Q^{-1})^T = (Q^{-1} M Q)^T$$

Ainsi, la matrice $Q^{-1} M Q$ est symétrique, réelle, et donc diagonalisable : il existe une matrice diagonale D_1 , une matrice inversible Q_1 telles que $Q^{-1} M Q = Q_1 D_1 Q_1^{-1}$, et

$$M = Q Q_1 D_1 Q_1^{-1} Q^{-1}$$

ce qui signifie que la matrice M est diagonalisable.

4. On vient de démontrer le résultat suivant :

Une matrice réelle M est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à sa transposée, avec une matrice de passage symétrique, réelle, à valeurs propres positives.

Exercice 2.12.

Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme orthogonal (c'est-à-dire tel que $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$). On pose $v = Id - u$ où Id est l'application identique de E .

1. Montrer que $\text{Im } v$ et $\text{Ker } v$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux et supplémentaires.

2. Vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k$ est un endomorphisme orthogonal de E .

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n = \frac{1}{n} (Id + u + u^2 + \dots + u^{n-1})$ et l'on considère p , la projection orthogonale de E sur $\text{Ker } v$.

a) Soit $x \in E$. En écrivant, après justification, x sous la forme $x = y + z$ où $y \in \text{Ker } v$ et $z \in \text{Im } v$, montrer que :

$$f_n(x) = y + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(z).$$

b) Montrer qu'il existe $t \in E$ tel que : $f_n(x) = y + \frac{1}{n}(t - u^n(t))$.

c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n(x) - p(x)\| = 0$.

Solution :

1. Soit $x \in \text{Ker } v$ et $y \in \text{Im } v$. On sait que $x = u(x)$ et qu'il existe $z \in E$ tel que $y = z - u(z)$. On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, z - u(z) \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x, u(z) \rangle \\ &= \langle x, z \rangle - \langle u(x), u(z) \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x, z \rangle = 0 \end{aligned}$$

On vient de montrer que $\text{Ker } v \subseteq (\text{Im } v)^\perp$.

Or, le théorème du rang et le théorème sur la dimension de l'orthogonal :

$$\dim E = \dim \text{Ker } v + \dim \text{Im } v, \quad \dim E = \dim \text{Im } v + \dim (\text{Im } v)^\perp$$

entraînent que $\dim \text{Ker } v = \dim (\text{Im } v)^\perp$. Finalement :

$$\text{Ker } v = (\text{Im } v)^\perp$$

2. Cette question évidente, se traite par récurrence.

3. a) On a montré que

$$E = (\text{Im } v)^\perp \oplus \text{Im } v = \text{Ker } v \oplus \text{Im } v$$

Aussi, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in \text{Ker } v \times \text{Im } v$ tel que $x = y + z$.

Donc $f_n(x) = f_n(y) + f_n(z)$. Or $y \in \text{Ker } v$ entraîne que $u(y) = y$ et par une récurrence immédiate, on voit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(y) = y$, donc que $f_n(y) = y$. Finalement :

$$f_n(x) = y + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(z)$$

b) Comme $z \in \text{Im } v$, il existe $t \in E$ tel que $z = t - u(t)$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(z) = u^k(t) - u^{k+1}(t)$, et :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(z) = \frac{1}{n} (t - u^n(t))$$

c) On sait que $y = p(x)$. Donc

$$\|f_n(x) - p(x)\| \leq \frac{1}{n} (\|t\| + \|u^n(t)\|) \leq \frac{2\|t\|}{n}$$

Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n(x) - p(x)\| = 0$.

Exercice 2.13.

1. Soit T l'application définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$T : \theta \longmapsto M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $M(\theta + \theta') = M(\theta) \times M(\theta')$.

En déduire l'expression de $M(p\theta)$, lorsque $p \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$.

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer une matrice $A_p \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A_p^p = -I$.

2. Soit n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Soit f l'application définie sur E par :

$$f : P \longmapsto f(P) = (1 + X^2)P''(X) - 2XP'(X).$$

où P' et P'' désignent respectivement les polynômes dérivés de P et de P' .

a) Vérifier que f est un endomorphisme de E .

b) Déterminer les valeurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

c) Déterminer, par exemple par sa matrice dans une base appropriée, un endomorphisme g de E tel que $g^2 = g \circ g = f$.

d) Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}, p > 2$, existe-il un endomorphisme h de E tel que $h^p = f$?

Solution :

1. a) Par les formules d'addition des fonctions trigonométriques, il vient :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix}$$

et par une récurrence immédiate, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$M(p\theta) = M^p(\theta)$$

b) La matrice $A = M(\pi/2)$ vérifie $A^2 = M(\pi) = -I$, et de même la matrice $A_p = M(\pi/p)$ vérifie $A_p^p = M^p(\pi/p) = M(\pi) = -I$, pour tout $p \geq 2$.

2. a) L'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ par linéarité de la dérivation, et parce que $\deg f(P) \leq n$.

b) Calculons l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par f . Il vient, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$f(X^k) = k(k-3)X^k + k(k-1)X^{k-2}$$

La matrice associée à f dans cette base est donc triangulaire supérieure, avec sur sa diagonale :

$$\{0, -2, -2, 0, 4, \dots, k(k-3), \dots, n(n-3)\}$$

Les valeurs propres de f sont ces éléments diagonaux. Ainsi

- 0 est valeur propre, et $\text{Ker } f = \text{Vect}(1, X^3 + 3X)$.
- -2 est valeur propre, et $\text{Ker}(f + 2I) = \text{Vect}(X, X^2 - 1)$.

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{pour } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $T(g)$.

2. a) Montrer que pour tout $f \in E$, $T(f)$ est de classe C^1 et déterminer sa dérivée.

b) Justifier rapidement que l'on peut choisir l'ensemble d'arrivée pour que T soit un endomorphisme de E . Est-il injectif? surjectif? bijectif?

3. a) Montrer que l'on peut restreindre l'ensemble de départ et celui d'arrivée à F et que l'endomorphisme ainsi obtenu est un automorphisme de F .

b) Est-il diagonalisable?

4. Montrer que si f est bornée, il en est de même de $T(f)$ et qu'il existe alors une constante k telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |T(f)(x) - T(f)(y)| \leq k|x - y|$$

Solution :

1. On remarque que la fonction g est continue sur \mathbb{R} . Il vient

• si $x \leq -1$, $Tf(x) = 0$.

• si $-1 \leq x \leq 0$, $Tf(x) = \int_0^{x+1} t dt = \frac{(x+1)^2}{2}$.

• si $0 \leq x \leq 1$, $Tf(x) = \int_0^1 t dt + \int_1^{x+1} (2-t) dt = 1 - \frac{(x-1)^2}{2}$.

• si $1 \leq x \leq 2$, $Tf(x) = \int_{x-1}^1 t dt + \int_1^2 (2-t) dt = 1 - \frac{(x-1)^2}{2}$.

• si $2 \leq x \leq 3$, $Tf(x) = \int_{x-1}^2 (2-t) dt = \frac{(x-3)^2}{2}$.

• si $x \geq 3$, $Tf(x) = 0$.

2. a) La fonction f étant continue, si F désigne une primitive de f , alors

$$T(f)(x) = F(x+1) - F(x-1).$$

Ainsi $T(f)$ est de classe C^1 . Par le théorème fondamental du calcul intégral $T(f)'(x) = f(x+1) - f(x-1)$.

b) Pour tout $f \in E$, $T(f) \in E$.

★ L'application linéaire T n'est pas injective. Par exemple si $f : x \mapsto \sin(\pi x)$, $T(f)(x) = 0$.

★ L'application linéaire T n'est pas surjective, puisque si f est continue alors $T(f)$ est de classe C^1 et qu'il existe dans E des fonctions qui ne sont pas de classe C^1 (par exemple la fonction valeur absolue).

3.a) Si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, alors :

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x+1)^{k+1} - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-1)^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} [(x+1)^{k+1} - (x-1)^{k+1}] \end{aligned}$$

Donc $T(f)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , car

$$(x+1)^{k+1} - (x-1)^{k+1} = 2(k+1)x^k + \dots$$

La même démonstration montre que T est bijectif puisque $\deg(T(X^k)) = k$, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

b) La matrice de T dans la base canonique de F est triangulaire, et les éléments de la diagonale sont tous égaux à 2.

L'endomorphisme T n'admet qu'une seule valeur propre (à savoir 2) et n'est donc pas diagonalisable, puisque T n'est pas l'homothétie de rapport 2.

4. Utilisons l'inégalité des accroissements finis

$$\begin{aligned} |T(f)(x) - T(f)(y)| &\leq |F(x+1) - F(y+1)| + |F(x-1) - F(y-1)| \\ &\leq \sup |f| \cdot |x-y| + \sup |f| \cdot |x-y| = (2 \sup |f|) |x-y| \end{aligned}$$

Exercice 2.15.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'objet de cet exercice

est de chercher une solution approchée de l'équation $AY = B$ où $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

est une matrice colonne fixée.

On suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|a_i| > n - 1$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = 0$, on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Montrer que

$X = 0$, en déduire que A est inversible. (On pourra écrire le système $AX = 0$ et utiliser une ligne L_j où j est tel que $|x_j| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$).

2. a) Montrer que l'équation $AY = B$ admet une solution et une seule que

l'on notera $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = A - M$.

Montrer que $Y = -D^{-1}MY + D^{-1}B$.

b) On définit la suite de vecteurs (X_m) par : $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $X_{m+1} = -D^{-1}MX_m + D^{-1}B$.

Exprimer $X_{m+1} - Y$ en fonction de D, M et $X_m - Y$.

c) On pose $X_m = \begin{pmatrix} x_1^m \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix}$ et on définit la suite (u_m) par :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, u_m = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^m - y_i|.$$

Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $u_{m+1} \leq \frac{n-1}{\min_{1 \leq i \leq n} |a_i|} u_m$.

d) En déduire la convergence la suite (X_m) vers Y (c'est-à-dire, la convergence de la suite (x_i^m) vers y_i pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$).

Solution :

1. L'équation $AX = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} a_1x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + a_2x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \end{cases}$$

Supposons $X \neq 0$. Soit alors j tel que $|x_j| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. En utilisant la j -ème ligne, il vient :

$$|a_j||x_j| = \left| \sum_{i \neq j} x_i \right| \leq \sum_{i \neq j} |x_i|$$

et :

$$|a_j| \leq \sum_{i \neq j} \frac{|x_i|}{|x_j|} \leq n - 1$$

en contradiction avec l'hypothèse. Donc $X = 0$.

Le noyau de la matrice carrée A étant réduit à $\{0\}$, A est inversible.

2. a) Comme A est inversible, $Y = A^{-1}B$ est l'unique solution de l'équation $AY = B$.

La matrice D est inversible, car aucun des a_i n'est nul.

Posons $Z = -D^{-1}MY + D^{-1}B$. Alors :

$$DZ = -MY + B = (-M + A)Y = DY, \text{ donc } Z = Y$$

b) On sait que

$$\begin{cases} X_{m+1} = -D^{-1}MX_m + D^{-1}B \\ Y = -D^{-1}MY + D^{-1}B \end{cases}$$

Par soustraction $X_{m+1} - Y = -D^{-1}M(X_m - Y)$.

c) Par calcul immédiat :

$$-D^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 1/a_1 & \dots & 1/a_1 \\ 1/a_2 & 0 & \dots & 1/a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1/a_n & 1/a_n & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} x_1^{m+1} - y_1 = -\frac{1}{a_1} \sum_{i \neq 1} (x_i^m - y_i) \\ \vdots \\ x_n^{m+1} - y_n = -\frac{1}{a_n} \sum_{i \neq n} (x_i^m - y_i) \end{cases}$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $|x_i^{m+1} - y_i| \leq \frac{1}{|a_i|} (n-1)u_m$

et en posant $a = \min_i |a_i|$: $u_{m+1} \leq \frac{n-1}{a} u_m$.

d) Par une itération immédiate, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq u_m \leq \left(\frac{n-1}{a}\right)^m u_0$$

Comme $a > n-1$, il vient $\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = 0$, c'est-à-dire $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_i^m = y_i$.

Exercice 2.16.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. On appelle *projecteur* de E tout endomorphisme f de E vérifiant $f \circ f = f$.

1. Montrer que f est un projecteur si et seulement s'il existe A, B sous-espaces vectoriels de E tels que

i) $E = A \oplus B$

ii) $\forall x \in A, f(x) = 0$

iii) $\forall x \in B, f(x) = x$.

2. Soient f et g deux projecteurs de E .

a) Montrer que f et g sont deux projecteurs tels que $\text{Im } f = \text{Im } g$ si et seulement si $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f et g soient deux projecteurs de même noyau.

3. Soient f, g deux projecteurs de E . On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que :

$$E = (\text{Im } f \cap \text{Im } g) \oplus (\text{Im } f \cap \text{Ker } g) \oplus (\text{Ker } f \cap \text{Im } g) \oplus (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g)$$

Que peut-on dire de $f \circ g$?

Solution :

1. On sait, par le cours, que si f est un projecteur de E , alors $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$, et que $f|_{\text{Im } f} = Id$, $f|_{\text{Ker } f} = 0$.

Réciproquement, si les points i), ii), iii) sont vérifiés, f est le projecteur sur B parallèlement à A .

2. a) Si f, g sont deux projecteurs de E tels que $\text{Im } f = \text{Im } g$, alors pour tout $x \in E$, $f(g(x)) = g(x)$ et $g(f(x)) = f(x)$, puisque $f|_{\text{Im } f} = Id$, $g|_{\text{Im } g} = Id$.

Réciproquement, supposons que f, g soient deux projecteurs de E tels que $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$. Alors :

$$f(x) \in \text{Im } f \implies f(x) = g(f(x)) \in \text{Im } g, \text{ et}$$

$$g(x) \in \text{Im } g \implies g(x) = f(g(x)) \in \text{Im } f.$$

b) Supposons que f, g sont deux projecteurs de E tels que $\text{Ker } f = \text{Ker } g$. Alors :

$$\text{si } x \in \text{Ker } g, f(g(x)) = f(0) = 0$$

$$\text{si } x \in \text{Im } g, g(x) = x \text{ et } f(g(x)) = f(x).$$

Donc $f \circ g = f$. Pour des raisons de symétrie des rôles de f et g , on a également $g \circ f = g$.

Réciproquement, si f et g sont deux projecteurs de E tels que $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$, alors :

$$x \in \text{Ker } f \implies g(x) = g(f(x)) = 0 \implies x \in \text{Ker } g$$

$$x \in \text{Ker } g \implies f(x) = f(g(x)) = 0 \implies x \in \text{Ker } f.$$

3. On sait que $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$. Comme $f \circ g = g \circ f$, l'application linéaire g laisse stable $\text{Im } f$ et $\tilde{g} = g|_{\text{Im } f}$ est un endomorphisme de $\text{Im } f$. L'endomorphisme \tilde{g} reste un projecteur de $\text{Im } f$ (puisque g l'est). Donc :

$$\text{Im } f = \text{Ker } \tilde{g} \oplus \text{Im } \tilde{g}$$

Or, de façon immédiate

$$\begin{cases} \text{Ker } \tilde{g} = \text{Ker } g \cap \text{Im } f \\ \text{Im } \tilde{g} = \text{Im } g \cap \text{Im } f \end{cases}$$

Donc $\text{Im } f = (\text{Im } f \cap \text{Ker } g) \oplus (\text{Im } f \cap \text{Im } g)$.

De même, comme $f \circ g = g \circ f$, l'application linéaire g laisse stable $\text{Ker } f$ et $\bar{g} = g|_{\text{Ker } f}$ est un endomorphisme de $\text{Ker } f$. L'endomorphisme \bar{g} reste un projecteur de $\text{Im } f$ (puisque g l'est). Donc

$$\text{Ker } f = \text{Ker } \bar{g} \oplus \text{Im } \bar{g}$$

Or, de façon immédiate

$$\begin{cases} \text{Ker } \bar{g} = \text{Ker } g \cap \text{Ker } f \\ \text{Im } \bar{g} = \text{Im } g \cap \text{Ker } f \end{cases}$$

Donc $\text{Ker } f = (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) \oplus (\text{Im } g \cap \text{Ker } f)$.

Comme $f \circ g = g \circ f$, $(f \circ g)^2 = f \circ g$, et $f \circ g$ est un projecteur de E . De plus

$$\begin{cases} (f \circ g)|_{\text{Im } f \cap \text{Im } g} = \text{Id}, (f \circ g)|_{\text{Ker } f \cap \text{Ker } g} = 0, \\ (f \circ g)|_{\text{Im } g \cap \text{Ker } f} = 0, (f \circ g)|_{\text{Im } f \cap \text{Ker } g} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $f \circ g$ est le projecteur sur $\text{Im } f \cap \text{Im } g$ parallèlement à la somme directe des trois autres sous-espaces vectoriels.

Exercice 2.17.

Soient f et g deux endomorphismes de \mathbb{C}^2 tels que $f \circ g = g \circ f$. On notera A et B les matrices respectives de f et g dans la base canonique de \mathbb{C}^2 .

1. On suppose dans cette question que f admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

a) Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g . En déduire que f et g sont diagonalisables dans une même base.

b) Montrer qu'on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En déduire qu'il existe deux polynômes P_1 et P_2 et une matrice $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tels que : $A = P_1(K)$, $B = P_2(K)$.

2. On suppose maintenant que f et g n'admettent chacun qu'une seule valeur propre.

a) Montrer que f et g ont un vecteur propre commun que l'on notera e_1 .

b) Montrer qu'il existe une base (e_1, e_2) de \mathbb{C}^2 telle que dans cette base, les matrices respectives de f et g soient de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

c) En déduire qu'il existe deux polynômes P et Q et une matrice $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tels que : $A = P(K)$, $B = Q(K)$.

Solution :

1. a) Soit $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$. Alors :

$$\lambda g(x) = g(f(x)) = f(g(x))$$

Si $g(x) = 0$, $g(x)$ appartient au sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ . Si $g(x) \neq 0$, ce vecteur est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .

Si f est diagonalisable, alors $\mathbb{C}^2 = E_1 \oplus E_2$, chaque sous-espace propre E_i étant de dimension 1. L'endomorphisme g laissant stable chaque E_i , si $x \in E_i$, alors $g(x) = \mu_i x$. Les deux sous-espaces propres de f sont donc sous-espaces propres de g (associés à des valeurs propres différentes). Les endomorphismes f et g sont diagonalisables dans une même base.

b) L'égalité matricielle demandée se vérifie immédiatement. Les matrices A et B étant diagonalisables dans une même base, il existe une matrice de passage P (inversible), deux matrices diagonales D, Δ telles que :

$$A = PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}; B = P\Delta P^{-1} = P \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

En utilisant l'égalité précédente, on peut écrire :

$$D = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} I + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} J; \Delta = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} I + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} J$$

et, en posant :

$$K = PJP^{-1}, P_1(X) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} X, P_2(X) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} X$$

on obtient le résultat demandé.

2. a) Comme on travaille sur \mathbb{C}^2 , f admet au moins une valeur propre λ .

Si la dimension du sous-espace propre associé est égale à 2, alors f est diagonalisable et $f = \lambda Id$; donc f et g ont un vecteur propre en commun, puisque tous les vecteurs non nuls de E sont vecteurs propres de f .

Si la dimension du sous-espace propre associé est égale à 1, soit e_1 un vecteur propre associé (base du sous-espace propre). Alors :

$$\lambda g(e_1) = g(f(e_1)) = f(g(e_1))$$

Donc, $g(e_1) \in \text{Ker}(f - \lambda id) = \text{Vect}(e_1)$ et il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $g(e_1) = \mu e_1$ et f et g ont un vecteur propre en commun.

b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de \mathbb{C}^2 (le vecteur e_1 est celui trouvé précédemment). Dans cette base, les matrices associées à f et g sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Mais, les endomorphismes f et g n'ayant qu'une seule valeur propre, ces matrices sont de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\text{c) Comme } \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + \alpha N,$$

en posant $K = PNP^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{C}^2 à la base \mathcal{B} , et

$$P_1(X) = \lambda + \alpha X, \quad P_2(X) = \mu + \beta X$$

on obtient le résultat demandé.

Exercice 2.18.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Soit a un réel fixé.

Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], u(P)(X) = P(a) + XP'(a) + \frac{X^2}{2} P''(a) + X^3 P'''(X).$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Cet endomorphisme est-il inversible ?
3. a) Déterminer la matrice de u relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Déterminer les valeurs propres de u ainsi que la dimension des sous-espaces propres associés. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Solution :

1. L'application u est clairement linéaire par linéarité de la dérivation.

- Si $n = 1$, alors $u(P)(X) = P(a) + XP'(a) \in \mathbb{R}_1[X]$.
- Si $n = 2$, alors $u(P)(X) = P(a) + XP'(a) + \frac{1}{2}X^2 P''(a) \in \mathbb{R}_2[X]$.
- Si $n \geq 3$, alors $\deg(X^3 P'''(X)) = \deg P(X)$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

Dans tous les cas u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $P \in \text{Ker } u$.

- Si $\deg P \leq 2$, alors $u(P) = P(a) + XP'(a) + \frac{1}{2}X^2 P''(a) = 0$ entraîne que l'on a : $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$, donc que $P = 0$.
- si $\deg P \geq 3$, alors
 $u(P) = P(a) + XP'(a) + \frac{1}{2}X^2 P''(a) + X^3 P'''(X) = P_1(X) + X^3 P'''(X) = 0$.
avec $\deg P_1 \leq 2$ et $\deg(X^3 P'''(X)) \geq 3$. Donc $P_1 = 0$ et $P'''(X) = 0$. Cela entraîne que P est de degré inférieur ou égal à 2 ce qui est contraire à l'hypothèse. Ce cas est donc impossible.

Ainsi $\text{Ker } u = \{0\}$ et u est injectif, donc inversible.

3. a) On cherche la matrice M associée à u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Comme :

$$\begin{cases} u(1) = 1 \\ u(X) = a + X \\ u(X^2) = a^2 + 2aX + X^2 \\ u(X^3) = a^3 + 3a^2X + 3aX^2 + 6X^3 \\ \vdots \\ u(X^n) = a^n + na^{n-1}X + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}X^2 + n(n-1)(n-2)X^3 \end{cases}$$

la matrice recherchée est triangulaire supérieure. Les valeurs propres de u sont ses éléments diagonaux, soit :

$$\{1, 6, 24, \dots, n(n-1)(n-2)\}$$

(si $n < 3$, seule subsiste la valeur propre 1).

b) \star Supposons $n < 3$. Alors 1 est la seule valeur propre et u est diagonalisable si et seulement si $u = id$, ce qui se produit lorsque $a = 0$.

\star Supposons $n \geq 3$.

Pour $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$, par échelonnement, la matrice $M - k(k-1)(k-2)I$ est de rang $n+1-1$, donc le sous-espace propre associé à la valeur propre $k(k-1)(k-2)$ est de dimension 1.

Par conséquent l'endomorphisme u sera diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est de dimension 3.

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et supposons P au moins de degré 3. Alors $u(P) = P$ si et seulement si :

$$P(a) + XP'(a) + \frac{X^2}{2}P''(a) + X^3P'''(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \sum_{k=3}^n a_k X^k$$

En regardant les coefficients dominants de cette égalité ($a_n \neq 0$), il vient :

$$n(n-1)(n-2)a_n = a_n, \text{ soit } n(n-1)(n-2) = 1$$

Ceci n'est pas possible. Donc $P \in E_1 \implies \deg P \leq 2$ et $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. On écrit alors $P(a) + XP'(a) + \frac{X^2}{2}P''(a) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ et il vient :

$$\begin{cases} 2\alpha a = 0 \\ \alpha a^2 + \beta a = 0 \end{cases}$$

- Si $a = 0$, alors $E_1 = \mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3 et u est diagonalisable.
- Si $a \neq 0$, alors $\alpha = \beta = 0$ et $E_1 = \mathbb{R}_0[X]$ qui est de dimension 1 et u n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.19.

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n , f un endomorphisme de E et I l'endomorphisme identité de E .

Soit a un réel donné non nul.

Si $k \in \mathbb{N}$, on notera f^k l'endomorphisme de E défini par récurrence par $f^0 = I$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} f \neq aI, f^{n-1} \neq 0, f^{n-1} \circ (f - aI) = 0 \\ \forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, f^k \circ (f - aI) \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que les valeurs propres de f sont 0 et a .

2. a) Montrer que $\text{Ker}(f^{n-1})$ et $\text{Ker}(f - aI)$ sont supplémentaires dans E .

b) Montrer qu'il en est de même pour $\text{Ker}(f^{n-1})$ et $\text{Im}(f^{n-1})$.

3. a) Montrer que :

$$\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2 \subset \dots \subset \text{Ker } f^p \subset \dots$$

b) Montrer qu'il existe un entier naturel p , avec $p \leq n$, tel que $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$.

c) Montrer qu'alors pour tout $j \geq 1$, on a $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+j})$.

d) Montrer que l'on a également $\text{Im } f^p = \text{Im } f^{p+1}$ et pour tout $j \geq 1$, on a $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+j})$.

e) Montrer qu'alors $\text{Ker}(f^p)$ et $\text{Im}(f^p)$ sont supplémentaires dans E , et qu'il en est de même pour $\text{Ker}(f^p)$ et $\text{Ker}(f - aI)$.

f) En déduire la valeur de p .

Solution :

1. On a : $f^{n-1} \circ (f - aI) = 0$.

Si a n'est pas valeur propre de f , alors $f - aI$ est inversible, et $f^{n-1} = 0$ en contradiction avec l'hypothèse. Il existe donc $x \neq 0$ tel que $(f - aI)(x) = 0$ et a est valeur propre de f .

De même si 0 n'est pas valeur propre de f , l'endomorphisme f , donc f^{n-1} est inversible et $f - aI = 0$, en contradiction avec l'hypothèse.

Finalement, on vient de montrer que 0 et a sont valeurs propres de f .

Réciproquement s'il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$, alors

$$0 = f^{n-1} \circ (f - aI)(x) = \lambda^{n-1}(\lambda - a)x$$

et $\lambda \in \{0, a\}$.

2. a) Soit $x \in \text{Ker } f^{n-1} \cap \text{Ker}(f - aI)$. Alors : $f^{n-1}(x) = 0$, $f(x) = ax$.

Donc $f^{n-1}(x) = a^{n-1}x = 0$ et $x = 0$, soit $\text{Ker } f^{n-1} \cap \text{Ker}(f - aI) = \{0\}$.

Comme $f^{n-1} \circ (f - aI) = (f - aI) \circ f^{n-1} = 0$, il vient :

$$\text{Im } f^{n-1} \subseteq \text{Ker}(f - aI)$$

Par le théorème du rang, on obtient ainsi :

$$n - \dim \text{Ker } f^{n-1} \leq \dim \text{Ker}(f - aI), \text{ soit } \dim \text{Ker } f^{n-1} + \dim \text{Ker}(f - aI) \geq n$$

D'où, la somme étant directe :

$$\dim(\text{Ker } f^{n-1} + \text{Ker}(f - aI)) = \dim \text{Ker } f^{n-1} + \dim \text{Ker}(f - aI) \geq n$$

ce qui entraîne $\dim(\text{Ker } f^{n-1} + \text{Ker}(f - aI)) = n$, et donc :

$$E = \text{Ker } f^{n-1} \oplus \text{Ker}(f - aI).$$

b) On sait déjà que $\text{Im } f^{n-1} \subseteq \text{Ker}(f - aI)$. Le théorème sur les dimensions et l'égalité de la question précédente montrent que $\text{Im } f^{n-1} = \text{Ker}(f - aI)$.

3. a) Les inclusions demandées se démontrent immédiatement.

b) La suite $(\dim(\text{Ker } f^j))_{j \geq 1}$ est une suite croissante d'entiers naturels majorée par $n = \dim E$. Elle converge, et comme ce sont des entiers, elle est stationnaire.

Soit p le premier entier tel que $\dim \text{Ker } f^p = \dim \text{Ker } f^{p+1}$.
L'inclusion $\text{Ker } f^p \subseteq \text{Ker } f^{p+1}$ entraîne que $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$.

c) Soit $x \in \text{Ker } f^{p+2}$. Alors :

$$0 = f^{p+2}(x) = f^{p+1}(f(x)), \text{ d'où } f(x) \in \text{Ker } f^{p+1} = \text{Ker } f^p \text{ et } f^p(f(x)) = f^{p+1}(x) = 0, \text{ donc } x \in \text{Ker } f^{p+1}.$$

On vient donc de montrer que $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1} \implies \text{Ker } f^{p+1} = \text{Ker } f^{p+2}$.

d) Il est immédiat que :

$$\text{Im } f \supseteq \text{Im } f^2 \supseteq \dots \supseteq \text{Im } f^j \supseteq \dots$$

Si $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$, le théorème du rang et les inclusions précédentes montrent que $\text{Im } f^p = \text{Im } f^{p+1}$ et de même que $\text{Im } f^{p+1} = \text{Im } f^{p+2}$.

e) Soit $x \in \text{Ker } f^p \cap \text{Im } f^p$. Alors $f^p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. Donc :

$$0 = f^p(x) = f^{2p}(y) \implies y \in \text{Ker } f^{2p} = \text{Ker } f^p \implies x = f^p(y) = 0$$

Ainsi $\text{Ker } f^p \cap \text{Im } f^p = \{0\}$ et on sait alors (par le théorème du rang) que

$$E = \text{Ker } f^p \oplus \text{Im } f^p$$

Par la définition de p et la question 2. b) , on sait que $p \leq n - 1$. Par les questions 3. c), 3. d) et par le fait que $\text{Im } f^{n-1} = \text{Ker}(f - aI)$, il vient :

$$E = \text{Ker } f^p \oplus \text{Ker}(f - aI)$$

f) Si $p \leq n - 2$, on sait que $f^p \circ (f - aI) \neq 0$. Or $E = \text{Ker } f^p \oplus \text{Ker}(f - aI)$ entraîne que $f^p \circ (f - aI) = 0$.

En effet, pour tout $x \in E$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \text{Ker } f^p \times \text{Ker}(f - aI)$ tel que $x = x_1 + x_2$ et :

$$\begin{aligned} f^p \circ (f - aI)(x) &= f^p \circ (f - aI)(x_1 + x_2) \\ &= (f - aI)(f^p(x_1)) + f^p((f - aI)(x_2)) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 2.20.

1. Pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$, on pose $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$.

a) Étudier l'inversibilité de $M_{a,b}$ et calculer son inverse lorsqu'elle existe.

b) La matrice $M_{a,b}$ est-elle diagonalisable ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

- \mathcal{S}_n l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.
 - \mathcal{S}_n^+ l'ensemble des matrices de \mathcal{S}_n à coefficients positifs ou nuls.
 - J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
2. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n$ si et seulement $AJ_n = J_n$.
- b) Vérifier que \mathcal{S}_n est stable pour la multiplication (c'est-à-dire que le produit de deux éléments de \mathcal{S}_n est un élément de \mathcal{S}_n).
- c) Soit $A \in \mathcal{S}_n$ inversible. Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n$.
- d) Vérifier que \mathcal{S}_n^+ est stable pour la multiplication. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$ inversible. A-t-on $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$?
3. Soit σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n et f_σ l'endomorphisme de \mathbb{R}^n défini, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
- a) Quelle est la matrice M_σ de f_σ dans la base \mathcal{B} ? Vérifier que $M_\sigma \in \mathcal{S}_n^+$.
- b) Justifier que M_σ est inversible et déterminer son inverse en fonction de σ . Vérifier que $M_\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$.
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$ inversible telle que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$. On note $A^{-1} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
- a) Montrer que pour tout $(i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3$ on a : $(i \neq j) \implies b_{i,k}a_{k,j} = 0$.
- b) En déduire que chaque colonne de A contient un unique élément non nul.
- c) En déduire qu'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que $A = M_\sigma$.

Solution :

1. a) La matrice $M_{a,b}$ est inversible si et seulement si $a \neq b$ et dans ce cas :

$$M_{a,b}^{-1} = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 1-b & a-1 \\ -b & a \end{pmatrix}$$

b) La somme des coefficients de chaque ligne valant 1, on sait que 1 est valeur propre associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La seconde valeur propre est $a-b$.

- Si $a-b=1$, comme $0 \leq a, b \leq 1$, alors $a=1, b=0$ et $M_{1,0} = Id$ qui est diagonale.
- Si $a-b \neq 1$, la matrice $M_{a,b}$ admet deux valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

2. a) La matrice J_n n'étant formée que de 1, un calcul immédiat donne $AJ_n = J_n$ si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n$.

b) Si $A, B \in \mathcal{S}_n$, alors $(AB)J_n = A(BJ_n) = AJ_n = J_n$. Cela prouve que \mathcal{S}_n est stable par produit matriciel.

c) On a $AJ_n = J_n \implies J_n = A^{-1}J_n$. Ainsi $A^{-1} \in \mathcal{S}_n$.

d) Si $A, B \in \mathcal{S}_n$ dont les coefficients sont positifs, la formule du produit matriciel entraîne que les coefficients de AB sont positifs. Donc $A, B \in \mathcal{S}_n^+ \implies AB \in \mathcal{S}_n^+$.

La question 1.a) fournit un contre exemple à la seconde partie de cette question.

3. a) La matrice de $M_\sigma = (a_{i,j})$ dans la base \mathcal{B} vérifie :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $M_\sigma \in \mathcal{S}_n^+$.

b) Comme $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}}$, il vient $M_\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$.

4. a) Avec les hypothèses de la question, on peut écrire :

$$\forall i, \forall j \neq i, \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = 0$$

avec $a_{i,k} \geq 0, b_{k,j} \geq 0$. Donc :

$$\forall i, \forall j \neq i, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,k} b_{k,j} = 0$$

b) Chaque colonne de A possède au moins un coefficient non nul (autrement A ne peut être inversible). Supposons que deux colonnes de A aient un coefficient non nul sur la même ligne : $a_{k,j} \neq 0, a_{k,j'} \neq 0$. Alors, par la question précédente, $b_{i,k} = 0, \forall i \neq j, b_{i,k} = 0, \forall i \neq j'$, ce qui signifie que la k ème colonne de A^{-1} est nulle, en contradiction avec A^{-1} inversible.

Ainsi A ne possède qu'un unique élément non nul par ligne et par colonne.

c) On vient de montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un unique $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_{i,j} = 1$ (car $A \in \mathcal{S}_n$). Il existe donc une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $A = M_\sigma$.

Exercice 2.21.

Soit $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

On considère l'ensemble F des applications Φ de E qui vérifient la relation :

$$(R) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \Phi''(x) = (1 + x^2)\Phi(x)$$

1. Montrer que F est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

2. Montrer que si v et w appartiennent à F , alors la fonction $v'w - vw'$ est constante sur \mathbb{R} .

3. Soient f et g les applications définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2/2}; g(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Montrer que f et g appartiennent à F .

4. Soit h un élément de F .

a) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h = \alpha f + \beta g$.

(On pourra calculer la dérivée de la fonction $\frac{h}{f}$.)

b) En déduire la dimension de F .

Solution :

1. F est un sous-espace vectoriel de E par linéarité de la dérivation.

2. Soient $(u, v) \in F^2$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u''(x) = (1+x^2)u(x), \quad v''(x) = (1+x^2)v(x)$$

En multipliant la première équation par $v(x)$ et la seconde par $u(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 = u''(x)v(x) - v''(x)u(x) = (v'u - uv')'(x)$$

La fonction $v'u - uv'$ est donc constante sur l'intervalle \mathbb{R} .

3. Il suffit de dériver les fonction f et g . On obtient :

$$f'(x) = xf(x), \text{ d'où : } f''(x) = xf'(x) + f(x) = (1+x^2)f(x)$$

et si $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$:

$$\begin{cases} g'(x) = f'(x)F(x) + e^{-x^2/2} \\ g''(x) = f''(x)F(x) + f'(x)e^{-x^2} - x.e^{-x^2/2} = (1+x^2)g(x) \end{cases}$$

4. a) Utilisons l'indication donnée dans la question. Comme $f(x) \neq 0$, pour tout x réel, il vient, par la question 2. :

$$\left(\frac{h}{f}\right)' = \frac{fh' - hf'}{f^2} = \frac{\beta}{f^2}$$

D'autre part

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{1}{f^2}$$

Donc, pour tout $h \in F$, il existe β tel que $\left(\frac{h}{f}\right)' = \beta\left(\frac{g}{f}\right)'$

et pour tout $h \in F$, il existe β , et il existe α tels que

$$\frac{h}{f} = \alpha + \beta\frac{g}{f}$$

b) L'inclusion réciproque étant évidente, on en déduit que $F = \text{Vect}(f, g)$ et que F est de dimension 2, puisque la famille (f, g) est clairement libre.

Exercice 2.22.

Soit $n \geq 2$.

Soient a_1, a_2, \dots, a_n des nombres complexes tels que $a_1 \neq 0$ et $s = \sum_{i=1}^n a_i^2 \neq 0$.

On désigne par ω une racine carrée de s .

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$

1. a) Déterminer le rang de M .

Montrer que 0 est valeur propre de M , déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b) Montrer que M admet deux autres valeurs propres distinctes et donner pour chacune d'elles un vecteur propre associé. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{C}^{n+1} canoniquement associé à M .

Montrer que $\mathbb{C}^{n+1} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

2. a) On suppose maintenant que les a_i , $1 \leq i \leq n$ sont réels. On considère \mathbb{R}^{n+1} muni de sa structure euclidienne canonique et on appelle f l'endomorphisme associé à M sur la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .

Montrer que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont orthogonaux.

b) Ecrire la matrice relativement à la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} de la projection orthogonale sur $\text{Im}(f)$.

Solution :

1. a) Les $(n-1)$ dernières colonnes de M étant toutes proportionnelles à la seconde colonne, et les deux premières colonnes étant manifestement libres, il s'ensuit que $\text{rg}(M) = 2$, et donc que $\dim \text{Ker } M = n-1$.

Ainsi 0 est valeur propre, le sous-espace propre associé étant de dimension $n-1$; ses équations sont, par exemple :

$$\{(x_0, \dots, x_n) \mid x_0 = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0\}$$

b) Pour déterminer les autres valeurs propres non nulles, on résout le système $MX = \lambda X$. Il vient :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i = \lambda x_0 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i x_0 = \lambda x_i \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{C} \\ \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{\lambda} = \lambda \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \frac{a_i}{\lambda} x_0 \end{cases}$$

Les deux valeurs propres manquantes sont donc $\lambda = \pm\omega$.

$$\text{On a : } E_\omega(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} \omega \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ et } E_{-\omega}(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -\omega \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

La matrice M est donc diagonalisable.

On voit, enfin, que :

$$\text{Im } f = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) = E_\omega \oplus E_{-\omega}$$

2. a) La matrice M est désormais symétrique réelle ; elle est diagonalisable dans une base orthonormée, ce qui signifie que les sous-espaces propres sont orthogonaux.

b) Notons p la projection orthogonale sur $\text{Im } f$. On sait que si (u, v) est une base orthonormée de $\text{Im } f$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$p(x) = \langle u, x \rangle u + \langle v, x \rangle v$$

Une base orthonormée de $\text{Im } f$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc si } x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ il vient } P(x) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \frac{a_1}{s} \sum a_i x_i \\ \vdots \\ \frac{a_n}{s} \sum a_i x_i \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$M_p = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} s & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ 0 & a_2 a_1 & a_n^2 & \dots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.23.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E . On note Id l'endomorphisme identité de E et on définit la suite $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'endomorphismes de E par $f^0 = Id$ et $\forall k \in \mathbb{N}, f^{k+1} = f^k \circ f$. On a ainsi, $f^1 = f, f^2 = f \circ f$ et :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, f^p \circ f^q = f^{p+q}.$$

On suppose qu'il existe un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et un réel a non nul tels que :

$$\begin{cases} f^n = af^{n-1} \\ f^{n-1} \neq af^{n-2} \\ f^{n-1} \neq 0 \end{cases}$$

1. a) Montrer que la dimension de E est supérieure ou égale à 2.
 - b) Déterminer les valeurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. a) Montrer que $\text{Ker } f^{n-1}$ et $\text{Ker}(f - aId)$ sont supplémentaires dans E .
 - b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $\text{Ker } f^k$ et $\text{Ker}(f - aId)$ soient supplémentaires dans E .
3. a) Comparer les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(f - aId)$ et $\text{Im } f^{n-1}$ de E .
 - b) Déterminer le plus petit entier naturel ℓ non nul tel que $\text{Ker } f^\ell$ et $\text{Im } f^\ell$ soient supplémentaires dans E .

Solution :

1. a) E n'est pas réduit au vecteur nul car par hypothèse $f \neq 0$. De plus, E n'est pas une droite vectorielle car sinon f serait une homothétie de rapport non nul (toujours parce que $f \neq 0$) donc f serait bijective et de $f^n = af^{n-1}$ on déduirait, en composant à gauche par f^{-1} , $f^{n-1} = af^{n-2}$ contrairement aux hypothèses.

Finalement, on a $\dim E \geq 2$.

b) $P = X^{n-1}(X - a)$ est un polynôme annulateur de f donc $\text{Spec}(f) \subset \{0, a\}$. Par ailleurs, 0 est bien valeur propre de f car, comme vu en a), f ne peut être bijectif. De même, a est effectivement valeur propre car sinon $f - aId$ serait bijectif et de $f^{n-1} \circ (f - aId) = 0$ on déduirait $f^{n-1} = 0$. Finalement, $\text{Spec } f = \{0, a\}$.

Si $\dim E = 2$, f est diagonalisable car endomorphisme d'un espace de dimension 2 admettant 2 valeurs propres distinctes ; si $\dim E \geq 3$, f n'est pas diagonalisable car sinon on aurait $f \circ (f - aId) = 0$ (vérification facile dans une base de vecteurs propres) d'où l'on déduirait $f^{n-2} \circ (f - aId) = 0$ contrairement aux hypothèses.

2. a) On montre que tout vecteur de E se décompose de manière unique en somme d'un vecteur de $\text{Ker } f^{n-1}$ et d'un vecteur de $\text{Ker}(f - aId)$.

★ **Non multiplicité.** Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in \text{Ker } f^{n-1} \times \text{Ker}(f - \text{aid})$, alors $f^{n-1}(x) = 0 + a^{n-1}z$ donc nécessairement $z = \frac{1}{a^{n-1}}f^{n-1}(x)$ et $y = x - \frac{1}{a^{n-1}}f^{n-1}(x)$ d'où l'unicité de y et z possibles pour un x donné.

★ **Existence.** Soit $x \in E$. Posons $y = x - \frac{1}{a^{n-1}}f^{n-1}(x)$ et $z = \frac{1}{a^{n-1}}f^{n-1}(x)$. Alors $x = y + z$, $f(z) = \frac{1}{a^{n-1}}f^n(x) = \frac{1}{a^{n-1}}af^{n-1}(x) = az$ et $f^{n-1}(y) = f^{n-1}(x) - \frac{1}{a^{n-1}}f^{2n-2}(x) = 0$. En effet, on montre facilement par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{n+k} = a^{k+1}f^{n-1}$.

b) On remarque $\text{Im}(f - \text{aid}) \subset \text{Ker } f^{n-1}$ et $\text{Im}(f - \text{aid}) \not\subset \text{Ker } f^{n-2}$ puisque $f^{n-1} \circ (f - \text{aid}) = 0$ et $f^{n-2} \circ (f - \text{aid}) \neq 0$ donc $\text{Ker } f^{n-2} \neq \text{Ker } f^{n-1}$. Or pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $\text{Ker } f^k \subset \text{Ker } f^{n-2} \subset \text{Ker } f^{n-1}$. Donc pour $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $\text{Ker } f^k$ est strictement inclus dans $\text{Ker } f^{n-1}$ et $\text{Ker } f^k$ et $\text{Ker}(f - \text{aid})$ ne sont pas supplémentaires dans E . L'entier cherché est donc $n-1$.

3. a) On a $(f - \text{aid}) \circ f^{n-1} = 0$ donc $\text{Im } f^{n-1} \subset \text{Ker}(f - \text{aid})$.

Réciproquement, si $x \in \text{Ker}(f - \text{aid})$, $x = f^{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}}x\right)$ donc $x \in \text{Im } f^{n-1}$.

Finalement, $\text{Ker}(f - \text{aid}) = \text{Im } f^{n-1}$.

b) D'après a) et 2., $\text{Ker } f^{n-1}$ et $\text{Im } f^{n-1}$ sont supplémentaires dans E .

Si $n = 2$, l'entier ℓ cherché est donc $1 = n-1$.

Supposons $n \geq 3$ et montrons par l'absurde que si $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, $\text{Ker } f^k$ et $\text{Im } f^k$ ne sont pas supplémentaires dans E .

En effet, si on avait $E = \text{Ker } f^k \oplus \text{Im } f^k$ pour un $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, alors pour tout x de E , il existerait $(y, z) \in \text{Ker } f^k \times E$ tel que $x = y + f^k(z)$ d'où l'on déduirait $f^{n-2}(x) = 0 + f^{n+k-2}(z) = f^{n+k-2}(z)$ et $f^{n-1}(x) = f^{n-1+k}(z) = f^n(f^{k-1}(z)) = af^{n-1}(f^{k-1}(z)) = af^{n+k-2}(z) = af^{n-2}(x)$,

donc $f^{n-1} = af^{n-2}$ contrairement aux hypothèses. Le plus petit entier naturel non nul ℓ tel que $\text{Ker } f^\ell$ et $\text{Im } f^\ell$ soient supplémentaires dans E est donc dans tous les cas $n-1$.

Exercice 2.24.

Pour tout p entier positif, on note E_p l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p ; on note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} indéfiniment dérivables. Si ψ est un endomorphisme d'un espace vectoriel et k un entier positif, on note ψ^k l'itéré k fois de ψ . Soient m et n deux entiers strictement positifs fixés. Pour $P \in E_m$ fixé de degré m , on note :

$$\varphi : E_n \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), Q \mapsto (PQ)^{(n)}$$

(où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction f).

1. Justifier le fait que φ est linéaire ; déterminer $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$ puis donner une condition nécessaire et suffisante sur (m, n) pour que φ soit inversible.

2. On suppose $P(X) = X^n$; déterminer les éléments propres de φ .

3. On suppose $m = n$ et on pose $P(X) = a_n X^n + \dots + a_0$. Établir la formule :

$$\varphi(X^k + b_{k-1}X^{k-1} + \dots + b_0) = \sum_{r=0}^k \frac{(n+r)!}{r!} \left(\sum_{\ell=r}^k b_\ell a_{n+r-\ell} \right) X^r$$

pour $k \leq n$. En déduire les valeurs propres de φ .

4 On suppose $m < n$; montrer qu'il existe un unique entier n_0 tel que $\varphi^{n_0-1} \neq 0$ et $\varphi^{n_0} = 0$.

Solution :

1. $Q \mapsto PQ$ est linéaire ainsi que la dérivation (n fois) donc φ aussi. On a $\deg \varphi(Q) = \deg Q + m - n$, avec la convention $\deg R < 0 \iff R = 0$. Il s'ensuit que si $m \leq n$, $\text{Im } \varphi = \text{Vect}\{\varphi(1), \dots, \varphi(X^n)\} = E_m$, parce que ces derniers vecteurs, s'ils ne sont pas nuls, sont de degrés échelonnés, et $\text{Ker } \varphi = E_{n-m-1}$.

Si $m > n$, les degrés de $\varphi(1), \dots, \varphi(X^n)$ sont encore échelonnés donc cette famille est libre et engendre un sous-espace de dimension $n+1$ de E_m . Dans ce cas, $\text{Ker } \varphi = \{0\}$, mais φ ne peut plus être considérée comme un endomorphisme.

Si $m = n$, φ est un automorphisme, si $m > n$, φ est injective donc $\varphi : E_n \rightarrow \text{Im } \varphi$ est inversible, et si $m < n$, φ n'est pas inversible.

2. Dans ce cas, $\varphi(X^k) = \frac{(n+k)!}{k!} X^k$, donc la base canonique est une base de vecteurs propres pour les valeurs propres distinctes $n!, \dots, \frac{(2n)!}{n!}$.

3. On a $(PQ)(X) = \sum_{\ell=0}^{n+k} \left(\sum_{i=0}^{\ell} b_i a_{\ell-i} \right) X^\ell$, avec la convention

$$a_{n+1} = \dots = a_{n+k} = b_{k+1} = \dots = b_{n+k} = 0 \text{ et } b_k = 1$$

donc

$$\varphi(Q)(X) = \sum_{\ell=n}^{n+k} \frac{\ell!}{(\ell-n)!} \left(\sum_{i=0}^{\ell} b_i a_{\ell-i} \right) X^{\ell-n} = \sum_{r=0}^k \frac{(n+r)!}{r!} \left(\sum_{i=r}^k b_i a_{n+r-i} \right) X^r$$

(après le changement d'indice $\ell = n+r$). Donc $\varphi(Q) = \lambda \cdot Q$ est équivalent au système (triangulaire) :

$$\begin{cases} a_n \frac{(n+k)!}{k!} = \lambda \\ \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} (b_{k-1} a_n + a_{n-1}) = \lambda b_{k-1} \\ \vdots \\ n!(b_0 a_n + \dots + b_k a_{n-k}) = \lambda b_0 \end{cases}$$

Ce système admet encore une unique solution (en les inconnues b_0, \dots, b_{k-1}), donc le spectre de φ est le même que précédemment à la constante multiplicative a_n près.

4. On a $\deg(\varphi^k(X^n)) = n - k(n - m)$, donc on cherche le plus petit entier n_0 tel que $n - n_0(n - m) < 0$, soit $n_0 = \lfloor \frac{n}{n-m} \rfloor + 1$.

