2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, où n est un entier naturel non nul.

Pour λ réel non nul, on définit l'application u_λ qui au polynôme P de E associe le polynôme :

$$u_\lambda(P)(X) = \frac{1}{2}P(X) + \Big(\lambda\int_0^1 P(t)\,dt\Big)X$$

1. Montrer que u_λ est un endomorphisme de E.

2. Pour quelles valeurs de λ, u_λ est-il un automorphisme de E ? Déterminer alors l'automorphisme u_λ^{-1}.

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espace propres de u_λ. L'endomorphisme u_λ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. L'application u_λ est linéaire, par linéarité de l'intégration. Comme $\Big(\lambda\int_0^1 P(t)\,dt\Big)X$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, il vient :

$$\deg\big(u_\lambda(P)\big) \leqslant \max(\deg(P), 1) \leqslant n,$$

ce qui montre que u_λ est un endomorphisme de E.

2. Soit $P \in \mathrm{Ker}(u_\lambda)$.

$\rightarrow$ Si $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0$ ou si $\lambda = 0$, alors $u_\lambda(P) = \frac{1}{2}P = 0$ donne $P = 0$.

$\rightarrow$ Si $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt \neq 0$ et si $\lambda \neq 0$, alors $u_\lambda(P) = 0$ donne $P = -2\Big(\lambda\int_0^1 P(t)\,dt\Big)X$, donc $P(X)$ est de la forme αX, avec $\alpha = -2\lambda\frac{\alpha}{2}$, et :

- Si $\lambda \neq -1$, $\alpha = 0$ et $P = 0$.
- Si $\lambda = -1$, α est quelconque et $\mathrm{Ker}(u_{-1}) = \mathrm{Vect}(X)$.

Ainsi E étant de dimension finie :

$$u_\lambda \in GL(E) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(u_\lambda) = \{0\} \Longleftrightarrow \lambda \neq -1$$

Pour déterminer l'inverse de u_λ, utilisons la linéarité de u_λ^{-1}. Ainsi :

$$P(X) = \frac{1}{2}u_\lambda^{-1}(P) + \Big(\lambda\int_0^1 P(t)\,dt\Big)u_\lambda^{-1}(X)$$

Par ailleurs :

$$u_\lambda(X) = \frac{1}{2}X + X.\lambda\int_0^1 t\,dt = \frac{\lambda+1}{2}X$$

et donc, puisque $\lambda \neq -1$: $u_\lambda^{-1}(X) = \dfrac{2}{\lambda+1}X$.
Finalement :

$$u_\lambda^{-1}(P) = 2P + \frac{2\lambda}{\lambda+1}X\int_0^1 P(t)\,dt$$

3. L'équation $u_\lambda(P) = \alpha P$ s'écrit

$$\big(\alpha - \tfrac{1}{2}\big)P(X) = \lambda X\int_0^1 P(t)\,dt$$

• Pour $\lambda = 0$, on a simplement $u_0(P) = \dfrac{1}{2}P$, et u_0 est l'homothétie de E de rapport $\dfrac{1}{2}$. Tout polynôme est polynôme propre associé à l'unique valeur propre $\dfrac{1}{2}$.

• Supposons donc maintenant $\lambda \neq 0$.

• Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Comme $\lambda \neq 0$, l'équation se réduit à $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0$, donc $\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de u_λ et le sous-espace propre associé est le noyau de l'application linéaire $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$.
Ce noyau est un hyperplan de E, donc est de dimension n.

• Si $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$. Le polynôme P est donc de la forme $P(X) = aX$ et l'équation s'écrit :
$\big(\alpha - \frac{1}{2}\big)aX = \lambda X\,\frac{a}{2}$, soit : $a = 0$ sauf si $\alpha - \frac{1}{2} = \lambda$.
Ainsi, $\alpha = \dfrac{\lambda+1}{2}$ (et comme $\lambda \neq 0$ on a bien $\alpha \neq \frac{1}{2}$) est valeur propre associée au vecteur propre X. Le sous-espace propre associé est donc de dimension 1.

L'homothétie u_0 est diagonalisable. Dans le cas général, u_λ l'est également puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à $n+1$, qui est la dimension de E.

Exercice 2.2.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$ et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E et non réduits au vecteur nul.

Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ et $u_3 \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$.

On note u l'endomorphisme de E tel que :

$$\begin{cases} \forall\, x \in E_1, u(x) = u_1(x) \\ \forall\, x \in E_2, u(x) = u_2(x) + u_3(x) \end{cases}$$

1. Donner la forme de la matrice de u dans une base de E obtenue en mettant « bout à bout » une base de E_1 et une base de E_2.

2. a) Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $x = x_1 + x_2$. Montrer que :

$$u(x) = \lambda x \iff \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$$

b) En déduire que λ est valeur propre de u si et seulement si λ est valeur propre de u_1 ou de u_2.

c) Soit λ un réel qui est valeur propre de u_1 mais pas de u_2. Comparer les sous-espaces propres de u et de u_1 associés à λ.

d) Soit λ un réel qui est valeur propre de u_2 mais pas de u_1. Comparer les dimensions des sous-espaces propres de u et de u_2 associés à λ.

3. On suppose dans cette question que u_1 et u_2 n'ont pas de valeur propre commune. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u_1 et u_2 le sont.

4. Soit $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c) \in \mathbb{R}^7$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & a_1 & b_1 \\ 2 & -1 & 2 & a_2 & b_2 \\ 2 & 2 & -1 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) Montrer que si $c^2 \neq 9$, A est diagonalisable.

Solution :

1. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de E_2. Notons A_1 (resp. A_2) la matrice associée à u_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ (resp. la matrice associée à u_2 dans la base $\mathcal{B}_2$). Enfin, soit A_3 la matrice associée à u_3 par rapport aux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$.
La matrice associée à u par rapport aux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ est alors :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

2. a) On a $u(x) = u(x_1) + u(x_2) = [u_1(x_1) + u_3(x_2)] + u_2(x_2) \in E_1 \times E_2$. De même $\lambda x = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in E_1 \times E_2$.
Comme $E = E_1 \oplus E_2$, l'unicité de la décomposition donne :

$$u(x) = \lambda x \iff \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$$

b) Soit λ une valeur propre de u.
Par la question précédente, il existe $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ avec $(x_1, x_2) \neq (0_E, 0_E)$, tel que :

$$\begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$$

• Si $x_2 \neq 0$, alors λ est valeur propre de u_2.

• Si $x_2 = 0$, alors $x_1 \neq 0$ et λ est valeur propre de u_1.
Ainsi :

$$\mathrm{Spec}(u) \subseteq \mathrm{Spec}(u_1) \cup \mathrm{Spec}(u_2)$$

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_1) \cup \mathrm{Spec}(u_2)$.

• Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_1)$, alors tout vecteur propre x_1 de u_1 associé à λ est vecteur propre de u (avec $x_2 = 0$).

• Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_2) \setminus \mathrm{Spec}(u_1)$, alors $u_1 - \lambda I_{E_1}$ est inversible. Soit $x_2 \in E_2$ un vecteur propre de u_2 associé à λ. Dans ces conditions, le vecteur x défini par :

$$x = x_2 - (u_1 - \lambda I_{E_1})^{-1}(u_3(x_2))$$

est non nul et vérifie $u(x) = \lambda x$. Donc λ est valeur propre de u.

En conclusion :

$$\mathrm{Spec}(u) = \mathrm{Spec}(u_1) \cup \mathrm{Spec}(u_2)$$

c) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_1) \setminus \mathrm{Spec}(u_2)$. Soit $x = x_1 + x_2 \in E_1 \times E_2$. On sait que :

$$u(x) = \lambda x \iff \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Ceci est équivalent à $x \in \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1})$. Finalement :

$$E_{(\lambda)}(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda I_E) = \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1}) = E_{1(\lambda)}(u_1)$$

d) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_2) \setminus \mathrm{Spec}(u_1)$. L'endomorphisme $u_1 - \lambda I_{E_1}$ est bijectif et

$$\begin{cases} (u_1 - \lambda I_{E_1})(x_1) = -u_3(x_2) \\ x_2 \in \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2}) \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = -(u_1 - \lambda I_{E_1})^{-1}(u_3(x_2)) + x_2 \\ x_2 \in \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2}) \end{cases}$$

Soit $\theta : x_2 \mapsto x_2 - (u_1 - \lambda I_{E_1})^{-1}(u_3(x_2))$. L'application θ est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2})$ sur $\mathrm{Ker}(u - \lambda I_E)$.
En effet, l'application réciproque est l'application qui, à un vecteur x du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u - \lambda I_E)$, associe sa projection sur E_2 parallèlement à E_1 qui est effectivement un élément de $\mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2})$. Ainsi :

$$\dim \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2}) = \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda I_E)$$

3. Les spectres de u_1 et u_2 étant disjoints, on peut écrire, par la question précédente :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_1)} \dim \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1}) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_2)} \dim \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda I_E)$$

Or u est diagonalisable si et seulement si :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda I) = \dim E = \dim E_1 + \dim E_2,$$

ce qui est équivalent à :

$$\Big(\dim E_1 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_1)} \dim \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1})\Big) + \Big(\dim E_2 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_2)} \dim \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2})\Big) = 0$$

Or ces deux entiers étant positifs, ceci est encore équivalent à :

$$
\begin{aligned}
0 &= \dim E_1 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_1)} \dim \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1}) \\
&= \dim E_2 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_2)} \dim \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2})
\end{aligned}
$$

Donc u est diagonalisable si et seulement si u_1 et u_2 sont diagonalisables.

4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ ayant A comme matrice associée dans la base canonique $(e_1, \dots, e_5)$. Posons $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(e_4, e_5)$. Alors u est du type étudié dans les questions précédentes, avec u_1 endomorphisme de E_1 de matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ dans la base } (e_1, e_2, e_3)$$

et u_2 endomorphisme de E_2 de matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ dans la base } (e_4, e_5)$$

L'application $u_3 \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ a pour matrice $A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ dans les bases (e_4, e_5) et (e_1, e_2, e_3).

On remarque que les matrices A_1 et A_2 sont symétriques réelles, donc diagonalisables.

a) On a $A_1 + 3I_3 = J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Cette dernière matrice est de rang 1. Ses valeurs propres sont 0 (le sous-espace propre associé est $\mathrm{Ker}(J)$ qui est de dimension 2) et 6 (le sous-espace propre associé est de dimension 1 engendré par le vecteur $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$).

$\star$ Ainsi le spectre de A_1 est $\{-3, 3\}$ de sous-espaces propres $E_{-3} = \mathrm{Ker}\, J$ et $E_3 = \mathrm{Vect}(x_0)$.

$\star$ Un calcul immédiat donne : $A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'après la question 2. b) : $\mathrm{Spec}(A) = \{3, -3, c, -c\}$.

b) Si $|c| \neq 3$, les matrices A_1 et A_2 sont diagonalisables et sans valeur propre commune. Ainsi A est diagonalisable.

Exercice 2.3.

A. Soient deux réels α et β tels que $\alpha < \beta$. On définit une application F sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$F(x, y) = \frac{\alpha x^2 + \beta y^2}{x^2 + y^2}$$

1. Justifier les inégalités : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \alpha \leqslant F(x, y) \leqslant \beta$.

2. En déduire que F est bornée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et déterminer les points où elle atteint ses bornes.

3. Peut-on prolonger F par continuité à $\mathbb{R}^2$ tout entier ?

B. Le but de cette question est d'effectuer un travail analogue sur :

$$F(x,y) = \frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 + 2xy + 2y^2}.$$

1. Démontrer que φ définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi : ((x,y),(x',y')) \mapsto xx' + xy' + x'y + 2yy'.$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Notations : les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{u} = (x,y)$ et $\overrightarrow{u}' = (x',y')$ étant donnés, on écrira : $\varphi((x,y),(x',y')) = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}' \rangle$.

2. Construire une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, orthonormée pour le produit scalaire φ, contenant le vecteur $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$.
On demande, de plus, de choisir $e_2 = (\gamma, \delta)$, avec $\delta > 0$.

Écrire les formules de changement de bases liant les coordonnées (x,y) et (X,Y) de $\overrightarrow{u} = (x,y) = X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2}$.

3. Rechercher les valeurs propres de l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^2$ qui a pour matrice dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculer en fonction des coordonnées (X,Y) et (x,y) de $\overrightarrow{u}$ le nombre réel $q(\overrightarrow{u}) = \langle \overrightarrow{u}, s(\overrightarrow{u}) \rangle$.

4. Soit $\overrightarrow{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Utiliser une base de vecteurs propres de s pour évaluer $F(\overrightarrow{u}) = \dfrac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 + 2xy + 2y^2}$.

En déduire que F est bornée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et atteint ses bornes.

Solution :

A. 1. Comme $\alpha < \beta$, il vient

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 \leqslant \alpha x^2 + \beta y^2 \leqslant \beta x^2 + \beta y^2$$

Il reste à diviser par $x^2 + y^2 > 0$ pour obtenir le résultat demandé.

2. La question précédente montre que F est bornée sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$ et on remarque que $F(x,0) = \alpha, F(0,y) = \beta$.
De manière générale, si $F(x,y) = \alpha$, alors $\beta y^2 = \alpha y^2$, ce qui entraîne que $y = 0$. Raisonnement identique pour β.

3. Supposons que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \ell$. Alors :

$$\lim_{x\to 0} F(x,0) = \alpha = \ell = \lim_{y\to 0} F(0,y) = \beta$$

Ce qui est absurde, puisque $\alpha < \beta$.
Ainsi, on ne peut prolonger F par continuité en $(0,0)$.

B. 1. On vérifie que φ est une forme bilinéaire, symétrique. La forme quadratique associée est :

$$d(u) = \varphi(x,x) = x^2 + 2y^2 + 2xy = (x+y)^2 + y^2 \geqslant 0$$

De plus, $d(u) = 0 \iff x = y, y = 0$, soit $u = 0$.

Ainsi, φ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Comme $||e_1|| = 1$, il suffit de trouver e_2 unitaire et orthogonal à e_1. Le vecteur $e_2 = (-1, 1)$ convient.
Les formules de changement de base sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{cases} x = X - Y \\ y = Y \end{cases}$$

En particulier si $u = (x, y)$, alors $||u||^2 = x^2 + 2y^2 + 2xy = X^2 + Y^2$.

3. La matrice S est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.
Ses valeurs propres sont les racines de l'équation $(1 - \lambda)(-\lambda) - 4 = 0$, soit $\lambda^2 - \lambda - 4 = 0$, et $\lambda_1 = \alpha = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17})$, $\lambda_2 = \beta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17})$.
Enfin

$$\begin{aligned} q(u) &= \langle u, s(u)\rangle = \langle Xe_1 + Ye_2, (X - 2Y)e_1 - 2Xe_2\rangle = X^2 - 4XY \\ &= x^2 - 2xy - 3y^2 \end{aligned}$$

4. Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base orthonormée de vecteurs propres de s associés aux deux valeurs propres α et β. Dans cette base :

$$q(u) = \alpha x'^2 + \beta y'^2, \quad \text{ et } ||u||^2 = x'^2 + y'^2$$

Ainsi

$$F(x, y) = \frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 + 2xy + 2y^2} = \frac{\alpha x'^2 + \beta y'^2}{x'^2 + y'^2}$$

D'après la partie A, la fonction F est bornée par $\alpha = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17})$ et $\beta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17})$, ces bornes étant atteintes en ε_1 et ε_2.

Exercice 2.4.

Pour $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\theta_f(x) = x^2 f''(x) - 6xf'(x) + 12f(x)$ et on note θ l'application définie sur $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par :

$$\theta : f \longmapsto \theta_f$$

1. a) Montrer que θ est une application linéaire.

b) En déduire que $E = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \theta_f = 0\}$ est un espace vectoriel réel.

2. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales réelles et on pose $F = E \cap \mathcal{P}$.

Soit $f \in F$ avec $f \neq 0$. Montrer que son degré est 3 ou 4. En déduire que l'ensemble F est un espace vectoriel réel de dimension 2 et en donner une base.

3. Trouver toutes les fonctions ϕ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ de classe C^2 telles que $\phi''(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
Montrer qu'elles forment un espace vectoriel réel de dimension 4 et en donner une base.

4. Soit $f \in E$. Montrer que $f(0) = 0$. En déduire qu'il existe φ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ de classe $\mathbb{C}^2$ telle que $f(x) = x^3\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
Montrer qu'alors $\varphi''(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Etudier la réciproque.

5. Montrer que E est de dimension 4 et en donner une base.

Solution :

1. a) La linéarité de l'application θ provient de la linéarité de la dérivation.

b) Il est évident que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, puisque $E = \operatorname{Ker}\theta$.

2. Soit $f \in F$. Supposons que f soit de degré n, de coefficient dominant a_n. Le coefficient dominant de θ_f est alors $[n(n-1)-6n+12]a_n = (n-3)(n-4)a_n$.
Comme $a_n \neq 0$, cela entraîne que $n = 3$ ou $n = 4$.
On vérifie que X^3 et X^4 sont des éléments de F.
Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{4} a_k X^k \in \mathbb{R}_4[X]$ un élément de F. Soit $Q = P - a_4X^4 - a_3X^3$. Le polynôme Q est un élément de F de degré inférieur ou égal à 2. Donc $Q = 0$ et $P = a_4X^4 + a_3X^3$.
On en déduit que F est un espace vectoriel de dimension 2 puisqu'il est engendré par X^3 et X^4.

3. Si $\varphi''(x) = 0$ sur un intervalle I, alors $\varphi(x) = ax + b$ sur I. Ici il est nécessaire de séparer $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et :

$$\varphi(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x > 0 \\ cx+d & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On obtient donc un espace vectoriel de dimension 4 avec pour base $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ définie par :

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \varphi_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \varphi_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et

$$\varphi_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4. $\star$ Par continuité : $\lim\limits_{x\to 0} \theta_f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 12f(x) = 12f(0) = 0$.

$\star$ Soit $f \in E$. Posons $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$. Ainsi $f(x) = x^3g(x)$ et $\theta_f = 0$ est équivalent à $g''(x) = 0$, ce qui entraîne que g est combinaison linéaire de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.
Réciproquement, toute combinaison linéaire de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ est élément de E.

5. Comme les fonctions $x \mapsto x^3g(x)$ se prolongent en fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit que E est un espace vectoriel de dimension 4 engendré par $(x \mapsto x^3\varphi_1(x), x \mapsto x^3\varphi_2(x), x \mapsto x^3\varphi_3(x), x \mapsto x^3\varphi_4(x))$.

Exercice 2.5.

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions de l'équation matricielle

$$A^2 = I_3 \qquad (1)$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose également que $A \notin \{I_3, -I_3\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant (1). Montrer que $\mathrm{Im}(A - I_3) \subset \mathrm{Ker}(A + I_3)$. En déduire que l'une des matrices $A - I_3$ ou $A + I_3$ est de rang inférieur ou égal à 1.

2. Soit B une matrice quelconque de rang inférieur ou égal à 1. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ tels que le terme général de B s'écrive $b_{i,j} = \lambda_i \mu_j$. En déduire que $B^2 = \mathrm{tr}(B)B$, où tr représente la trace de la matrice B, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

3. On suppose que la matrice $B = A - I_3$ de la première question est de rang 1. Montrer que $\mathrm{tr}(B) = -2$.

4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation matricielle (1).

Solution :

1. La matrice A vérifie $A^2 - I = (A + I)(A - I) = (A - I)(A + I) = 0$.
Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}^3$, $(A + I)(A - I)(x) = 0$, ce qui signifie que
$$\mathrm{Im}(A - I) \subset \mathrm{Ker}(A + I).$$
On remarquera qu'on a de même $\mathrm{Im}(A + I) \subset \mathrm{Ker}(A - I)$.

On a donc $\mathrm{rg}(A-I) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(A+I)$. Comme $\mathrm{rg}(A-I) + \dim \mathrm{Ker}(A+I) = 3$ et $A \neq I$, cela entraîne que $\mathrm{rg}(A - I) = 1$ et $\dim \mathrm{Ker}(A + I) = 2$.
L'inclusion $\mathrm{Im}(A + I) \subset \mathrm{Ker}(A - I)$, avec $A \neq -I$, donne de la même façon $\mathrm{rg}(A + I) = 1$ et $\dim \mathrm{Ker}(A - I) = 2$.
On remarquera que si $\mathrm{rg}(A - I) = 0$, alors $A = I$ et si $\mathrm{rg}(A + I) = 0$, alors $A = -I$.

2. $\star$ Si $\mathrm{rg}(B) = 0$, alors $B = 0$ et on choisit les λ_i ou les μ_j tous nuls.
$\star$ Supposons que $\mathrm{rg}(B) = 1$. Cela signifie que les vecteurs colonnes (C_1, C_2, C_3) de B sont engendrés par un vecteur non nul $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$. On peut donc écrire :
$$C_1 = \mu_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, C_2 = \mu_2 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, C_3 = \mu_3 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$
ce qui signifie que $b_{i,j} = \lambda_i \mu_j$.
Notons $L = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}$. On a donc :
$$B = \Lambda L, \text{ d'où } B^2 = \Lambda(L\Lambda)L = (L\Lambda)B$$
(car $L\Lambda$ est une matrice carrée d'ordre 1 que l'on identifie à son unique terme. On vérifie d'ailleurs immédiatement que $L\Lambda = \mathrm{tr}(B)$).

3. On a $B^2 = (A - I)^2 = A^2 - 2A + I = -2(A - I) = -2B$.
La question précédente montre que $\mathrm{tr}(B) = -2$.

4. Si $B = A + I$ est de rang 1, alors
$$B^2 = (A + I)^2 = A^2 + 2A + I = 2(A + I) = 2B$$

Ainsi :
• Si $\text{rg}(A - I) = 1$, alors $A = I + B$ avec $\text{rg}(B) = 1$, soit $A = I + \Lambda L$, avec $L\Lambda = -2$.

• Si $\text{rg}(A + I) = 1$, alors $A = -I + B$ avec $\text{rg}(B) = 1$, soit $A = -I + \Lambda L$, avec $L\Lambda = 2$.
Réciproquement, on vérifie que ces matrices conviennent.

Exercice 2.6.

On désigne par E un espace vectoriel complexe de dimension finie. Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f^2 = f \circ f = g$.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E_\lambda = \text{Ker}(g - \lambda Id_E)$ et $F_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda Id_E)$.

1. Montrer que si f est diagonalisable, g l'est aussi.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, une valeur propre de g et $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \lambda$.
On pose pour $x \in E_\lambda$, $y = x - f\big(\frac{x}{\delta}\big)$ et $z = x + f\big(\frac{x}{\delta}\big)$.
Calculer $f(y)$ et $f(z)$. En déduire que $E_\lambda = F_\delta \bigoplus F_{-\delta}$.

3. En déduire que si g est injective diagonalisable, alors f l'est aussi.

4. On suppose g est diagonalisable et n'est pas injective.
 a) Montrer que $\text{Ker}\, f \subset \text{Ker}\, g$.
 b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}\, f = \text{Ker}\, g$.

5. On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{C}^3$.
Montrer que f n'est pas diagonalisable mais que $g = f^2$ est diagonalisable.

Solution :

1. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f. Pour tout i il existe $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Donc $g(e_i) = \lambda_i^2 e_i$.
Ainsi $(e_1, \ldots, e_n)$ est aussi une base de vecteurs propres de g et g est diagonalisable.

2. On a :
$$f(y) = f(x) - f^2\big(\frac{x}{\delta}\big) = f(x) - \lambda\frac{x}{\delta} = f(x) - \delta x = -\delta(x - f(\frac{x}{\delta})) = -\delta y$$
De même $f(z) = f(x) + \delta x = \delta z$.

$\star$ Soit $u \in \text{Ker}(f - \delta I) \cap \text{Ker}(f + \delta I)$. Alors $f(u) = \delta u = -\delta u$, donc $u = 0$. Ceci montre que $F_{-\delta}$ et F_δ sont en somme directe.

$\star$ On a montré que $y \in F_{-\delta}$ et $z \in F_\delta$.
Comme $x = \dfrac{y + z}{2}$, ceci montre que $E_\lambda \subset F_{-\delta} \oplus F_\delta$

$\star$ Réciproquement, si $x \in F_{-\delta}$, on a $f(x) = -\delta x$, donc
$g(x) = f\big(f(x)\big) = f(-\delta x) = -\delta f(x) = \delta^2 x = \lambda x$ et $x \in E_\lambda$, soit $F_{-\delta} \subset E_\lambda$.
On montre de même que $F_\delta \subset E_\lambda$ et donc $F_{-\delta} \oplus F_\delta \subset E_\lambda$.

Finalement :

$$F_{-\delta} \oplus F_\delta = E_\lambda$$

3. Supposons g injective et diagonalisable. L'espace E est la somme directe des sous-espaces propres de g, et comme 0 n'est pas valeur propre de g, chaque sous-espace propre de g est lui-même somme directe de sous-espaces propres de f (au moins un). Donc E est somme directe des sous-espaces propres de f, ce qui prouve que f est diagonalisable.

4. a) Soit x tel que $f(x) = 0$; alors $g(x) = f^2(x) = 0$. Donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$.

b) Supposons g diagonalisable. L'espace E est la somme directe des sous-espaces propres de g associés aux valeurs propres non nulles et de $\operatorname{Ker} g$. Les sous-espaces propres de g associés aux valeurs propres non nulles se décomposent en somme directe de sous-espaces propres de f (question 3). Donc f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

5. On voit que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice M^2 est diagonalisable car de rang 1 (son noyau est donc de dimension 2) et 1 est valeur propre de M^2.

Par contre M est de rang 2 (son noyau est donc de dimension 1). Par la question précédente, M n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.7.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs colonnes propres des matrices A et B.

b) En déduire les valeurs propres de la matrice

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & -b & a \\ -b & b & -a \\ a & -a & 2b-a \end{pmatrix}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux paramètres réels}$$

2. Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à n.
Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$; on définit l'application θ de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$ par :

$$\theta(P) = \big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\big)$$

a) Montrer que si θ est bijective, alors les nombres $a_0, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts.

b) Réciproquement, montrer que si les a_k sont deux à deux distincts, alors θ est bijective.

3. a) Existe-t-il un polynôme P à coefficients réels tel que $P(A) = B$? Si oui, déterminer un tel polynôme.

b) Répondre à la même question en échangeant les rôles de A et B.

Solution :

1. a) La matrice A possède trois valeurs propres distinctes : $-2, 1, 0$. Les sous-espaces propres associés sont :

$$E_{-2}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\ E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ E_0(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

La matrice A est diagonalisable.

La matrice B possède deux valeurs propres : $2, 0$. On a :

$$E_0(B) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad E_2(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

On constate que la matrice B est diagonalisable dans la même base que la matrice A.

b) On s'aperçoit que $M(a,b) = aA + bB$. Les deux matrices A et B sont simultanément diagonalisables avec la même matrice de passage

$$Q = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$Q^{-1}AQ = D_A = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ Q^{-1}BQ = D_B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

et

$$Q^{-1}M(a,b)Q = \begin{pmatrix}-2a+2b & 0 & 0\\0 & a+2b & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $M(a,b)$ sont donc $-2a+2b, a+2b, 0$ (ces nombres n'étant pas nécessairement deux à deux distincts...)

2. On remarque que l'application θ est manifestement linéaire.

a) Supposons les nombres $a_0, \ldots, a_n$ non deux à deux distincts et soit alors i, j tels que $a_i = a_j$ et $i \neq j$. Soit P le polynôme

$$P(X) = \prod_{k=1, k\neq i}^{n} (X - a_k)$$

Ce polynôme est de degré inférieur ou égal à n, n'est pas le polynôme nul et $\theta(P) = (0, 0, \ldots, 0)$; ceci montre que θ n'est pas injective, donc n'est pas bijective.

b) Si les réels (a_k) sont deux à deux distincts, et si $P \in \operatorname{Ker}\theta$, alors $P = 0$, puisque ce polynôme admet $n+1$ racines distinctes, alors qu'il est de degré inférieur ou égal à n.

3. a) Soit P un polynôme tel que $B = P(A)$. Alors $D_B = P(D_A)$. Ceci équivaut à :

$$\begin{cases}P(-2) = 2\\P(1) = 2\\P(0) = 0\end{cases}$$

D'après la question précédente, un tel polynôme existe. Par exemple le polynôme $P(X) = X + X^2$ convient.

b) Par contre $A = P(B)$ équivaut à : $\begin{cases} P(2) = -2 \\ P(2) = 1 \\ P(0) = 0 \end{cases}$

Les deux premières équations sont incompatibles : il n'existe pas de polynôme P tel que $A = P(B)$.

Exercice 2.8.

On appelle trace d'une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le réel $\operatorname{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$, c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux de A.

1. Démontrer que l'application trace est linéaire .

2. Écrire les matrices de la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle les coordonnées de la matrice $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ sont (a_1, a_2, a_3, a_4). $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question on suppose que $n = 2$. Soient $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer le réel $\operatorname{tr}({}^tBA)$.

(N.B. ${}^tBA$ est le produit de la matrice transposée de B par la matrice A).

a) Vérifier que l'application φ définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\varphi : (A, B) \longmapsto \operatorname{tr}({}^tBA)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) La base $\mathcal{B}$ est-elle base orthonormée pour ce produit scalaire ?

c) Quel est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, espace vectoriel des matrices diagonales ?

d) Calculer les réels a et b qui rendent minimale la norme euclidienne associée au produit scalaire φ de $\begin{bmatrix} a & b-1 \\ b & a-1 \end{bmatrix}$. Que pouvez-vous dire des matrices $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dans l'espace vectoriel euclidien $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \varphi)$?

4. On suppose dans cette question que $n \geqslant 2$ et on admet que l'application φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :$\varphi : (A, B) \longmapsto \operatorname{tr}({}^tBA)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que la base canonique est orthonormée pour ce produit scalaire.

Soit $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

a) Calculer les puissances successives de U, c'est-à-dire les matrices U^k pour k variant de 1 à 5.

b) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ engendré par les puissances successives de U. Déterminer la projection orthogonale de A sur F.

Solution :

1. Si A, B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ réel :

$$\operatorname{tr}(\lambda A+B)=\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{k,k}+b_{k,k})=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{k,k}+\sum_{k=1}^{n}b_{k,k}=\lambda\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$$

2. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$:

la base demandée est bien évidemment la base canonique $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. a) On vérifie que $\operatorname{tr}(A^TB)=\sum_{k=1}^{4}a_kb_k$.

L'application φ est bilinéaire, par linéarité de la transposition et de la trace. Elle est symétrique (voir ci-dessus). De plus :

$$\operatorname{tr}(A^TA)=\sum_{k=1}^{4}a_k^2\geqslant 0,\ \text{ et }\ \operatorname{tr}(A^TA)=0\implies A=0$$

b) La base $(E_{i,j})$ est orthonormée car :

$\operatorname{tr}(E_{i,j}^TE_{i,j})=1$ et $\operatorname{tr}(E_{i,j}^TE_{k,\ell})=\delta_{i,k}\operatorname{tr}(E_{j,\ell})=0$ si $(i,j)\neq(k,\ell)$.

c) L'espace $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est engendré par $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. Par la question précédente, l'orthogonal de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est engendré par $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

d) On cherche le *minimum* de la fonction f définie par :

$$\begin{aligned}f(a,b)&=a^2+(b-1)^2+b^2+(a-1)^2=2a^2-2a+2b^2-2b+2\\&=2\big(a-\tfrac{1}{2}\big)^2+2\big(b-\tfrac{1}{2}\big)^2+1\end{aligned}$$

Le *minimum* vaut 1 et est atteint pour $a=b=\dfrac{1}{2}$.

La matrice $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ est la projection orthogonale de $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$ sur le sous-espace F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $F=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix},(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

4. a) La matrice U est la matrice associée dans la base canonique $(e_1,\dots,e_5)$ à l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$u(e_i)=e_{i+1},(1\leqslant i\leqslant 4),\ u(e_5)=e_1$$

L'endomorphisme u transforme donc (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) en (e_2,e_3,e_4,e_5,e_1).
Par conséquent u^2 transforme (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) en (e_3,e_4,e_5,e_1,e_2),
u^3 transforme (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) en (e_4,e_5,e_1,e_2,e_3),
u^4 transforme (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) en (e_5,e_1,e_2,e_3,e_4) et u^5 est l'application identité.

b) On remarque que si $h\neq k$, $\langle U^h,U^k\rangle=0$ et que $\langle U^k,U^k\rangle=5$.
La famille $(U^k)_{1\leqslant k\leqslant 5}$ est donc une famille orthogonale. Elle est libre et c'est une base de F.

La projection orthogonale de A sur F est la matrice $A' = \sum\limits_{k=1}^{5} \lambda_k U^k$ de F telle que pour tout h, $\langle A - A', U^h \rangle = 0$.

Or, pour tout h, $\langle A, U^h \rangle = 1$ et $\langle A', U^h \rangle = \langle \sum\limits_{k=1}^{5} \lambda_k U^k, U^h \rangle = 5\lambda_h$

Donc : $A' = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.9.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, a et b deux réels distincts et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$(f - aId) \circ (f - bId) = 0 \quad \text{et } f \text{ n'est pas une homothétie.}$$

(Id représente l'endomorphisme identité de E)

1. Montrer qu'il existe deux réels non nuls λ et μ tels que $\lambda(f - aId)$ et $\mu(f - bId)$ soient des projecteurs, qu'on notera g et h respectivement.

2. Que vaut $g + h$? En déduire que $\mathrm{Im}(f - bId) = \mathrm{Ker}(f - aId)$.

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer f^n en fonction de g et h.

5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que f soit inversible.

Calculer alors, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, f^p en fonction de g et h.

Solution :

1. Posons $g = \lambda(f - aI)$. Alors :

$$\begin{aligned} g^2 &= \lambda^2(f^2 - 2af + a^2 I) = \lambda^2\big((a+b)f - abI - 2af + a^2 I\big) \\ &= \lambda^2(b-a)(f - aI) \end{aligned}$$

Ainsi $g^2 = g$ si et seulement si $\lambda = \dfrac{1}{b-a}$.

De même $h^2 = h$ si et seulement si $\mu = \dfrac{1}{a-b}$.

2. On vérifie immédiatement que $g + h = I$.

• Comme $(f - aI) \circ (f - bI) = 0$, on a $\mathrm{Im}(f - bI) \subset \mathrm{Ker}(f - aI)$.

• Comme $\lambda(f - aI) + \mu(f - bI) = I$, pour tout x de E :

$$\lambda(f - aI)(x) + \mu(f - bI)(x) = x,$$

c'est-à-dire : $E = \mathrm{Im}(f - aI) + \mathrm{Im}(f - bI)$.

Donc

$n = \dim E = \dim \mathrm{Im}(f - aI) + \dim \mathrm{Im}(f - bI) - \dim[\mathrm{Im}(f - aI) \cap (\mathrm{Im}(f - bI)$

D'où :

$\dim \mathrm{Im}(f - bI) \geqslant n - \dim \mathrm{Im}(f - aI) = \dim \mathrm{Ker}(f - aI)$.

Ce résultat, joint à l'inclusion précédente donne :

$$\mathrm{Im}(f - bI) = \mathrm{Ker}(f - aI)$$

3. Comme h est un projecteur, on sait que $E = \mathrm{Im}\, h \oplus \mathrm{Ker}\, h$. Donc, par la question précédente :

$$E = \mathrm{Ker}(f - bI) \oplus \mathrm{Ker}(f - aI)$$

ce qui signifie que f est diagonalisable.

4. On sait que $f^0 = I = g + h$ et que $f = bg + ah$.
Comme $h \circ g = g \circ h = 0$, il vient : $f^2 = b^2 g + a^2 h$, et par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^n = b^n g + a^n h$$

5. Par la question 3, on sait que les valeurs propres de f sont éléments de $\{a, b\}$ et que f est diagonalisable. Comme f n'est pas une homothétie, on en déduit que a et b sont effectivement les valeurs propres de f et f est inversible si et seulement $ab \neq 0$.

Comme $h \circ g = g \circ h = 0$ et que pour tout $n \geqslant 0$, $f^n = b^n g + a^n h$, alors :

$$(b^{-n} g + a^{-n} h) \circ (b^n g + a^n h) = I$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$f^n = b^n g + a^n h$$

Exercice 2.10.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, avec $n \geqslant 2$.

On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

1. Soit f un élément non nul de E^*. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\, f$?

2. Soit H un sous-espace de E de dimension $n - 1$ (on dit que H est un hyperplan de E). Montrer qu'il existe $f \in E^*$ telle que $H = \mathrm{Ker}\, f$.

3. Soient f et g deux éléments non nuls de E^* tels que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$. Montrer qu'il existe un réel non nul a tel que $f = ag$.

4. Soit H un hyperplan de E. Montrer que l'ensemble $D(H)$ des éléments de E^* dont le noyau contient H est un sous-espace vectoriel de E^* dont on précisera la dimension.

On appelle *transvection* de E tout endomorphisme de E possédant les deux propriétés suivantes :

i) $\mathrm{Ker}(f - Id)$ est un hyperplan de E (appelé « base » de f) ;

ii) $\mathrm{Im}(f - Id) \subset \mathrm{Ker}(f - Id)$.

5. Soit f une transvection de E, montrer que $\mathrm{Im}(f - Id)$ est une droite (appelée « direction » de f).

6. Soit f un élément non nul de E^* et u un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\, f$.

Pour tout vecteur x de E, on pose $G_{f,u}(x) = x + f(x)u$.

Montrer que $G_{f,u}$ est une transvection dont on précisera la «base» et la «direction».

Solution :

1. Si f n'est pas identiquement nulle, le théorème du rang implique :

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rg}(f) = n - 1.$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan de E.

2. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H. On complète cette base en une base de E avec un vecteur e_n. Définissons $f \in E^*$ par :

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}$$

On a immédiatement le résultat demandé.

3. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Complétons cette base avec un vecteur e_n. On sait alors que $f(e_n) \neq 0$ et $g(e_n) \neq 0$.
Soit $h \in E^*$ défini par :

$$h = f - \frac{f(e_n)}{g(e_n)}\, g$$

On a immédiatement, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $h(e_i) = 0$. Donc h est identiquement nul et il existe $a = \dfrac{f(e_n)}{g(e_n)}$ tel que $f = ag$.

4. Par définition $D(H) = \{f \in E^* / H \subset \operatorname{Ker} f\}$.
$\star$ Soit $(f, g) \in D(H)^2$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in H$:

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = 0$$

donc $H \subset \operatorname{Ker}(\lambda f + \mu g)$ et $\lambda f + \mu g \in D(H)$.

$\star$ Comme $0 \in D(H)$, H est un sous-espace vcetoriel de E^*.

$\star$ Par la question 3, pour tout $(f, g) \in D(H)^2$ non nuls, on a $\operatorname{Ker} f = H = \operatorname{Ker} g$ et cela entraîne que f et g sont liés. Donc $D(H)$ est de dimension 1.

5. Par le théorème du rang, on sait que $\dim \operatorname{Im}(f - Id) = 1$, puisque son noyau est de dimension $n - 1$.

6. On vérifie d'abord (immédiatement) que $G_{f,u}$ est un endomorphisme de E.
Or :

- $\star$ $(G_{f,u} - Id)x = f(x).u = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$, donc $\operatorname{Ker}(G_{f,u} - Id) = \operatorname{Ker} f$.
- $\star$ $\operatorname{Im}(G_{f,u} - Id) = \operatorname{Vect}(u)$.

Enfin, puisque $u \in \operatorname{Ker} f$, on a $\operatorname{Im}(G_{f,u} - Id) \subset \operatorname{Ker}(G_{f,u} - Id)$. Tout ceci implique que $G_{f,u}$ est une transvection de base $\operatorname{Ker} f$ et de direction $\operatorname{Vect}(u)$.

Exercice 2.11.

Soit p un entier tel que $p \geqslant 2$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$ muni de sa base canonique $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et du produit scalaire canonique noté $\langle . \mid . \rangle$. On désigne par $\|.\|$ la norme associée. L'ensemble $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p. On dit qu'une matrice A est positive si elle est symétrique et si $\langle A\,(x) \mid x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$. On l'écrit sous la forme $A \succeq 0$.

1. a) Montrer qu'une matrice symétrique est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

b) Soit $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Prouver que les matrices $({}^tT)T$ et $T({}^tT)$ sont positives.

2. Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ fixée. On rappelle qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $D = ({}^tP)AP$.

a) Montrer que si X est une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, alors la matrice $Y = ({}^tP)XP$ est positive.

b) Prouver qu'une matrice positive X de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est solution de l'équation $X^2 = A$ si et seulement si la matrice positive $Y = ({}^tP)XP$ est solution de l'équation $Y^2 = D$.

c) Soient α un réel strictement positif et Y une matrice positive ; montrer que la matrice $Y+\alpha I_p$ est inversible (I_p est la matrice de l'identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$). Résoudre l'équation $Y^2 = D$ avec $Y \succeq 0$.

d) En déduire qu'il existe une unique matrice positive $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ qui est solution de l'équation $X^2 = A$. On définit ainsi la racine carrée de la matrice positive A et on la note $\sqrt{A}$.

3. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la matrice A est positive.

b) Déterminer sa racine carrée.

Solution :

1. a) Soit A une matrice symétrique réelle positive. Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé. On a alors :

$$0 \leqslant \langle Ax, x\rangle = \lambda ||x||^2$$

Donc $\lambda \geqslant 0$.

Réciproquement, A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (non nécessairement deux à deux distinctes).

Soit $x \in E$. Il existe $(x_1, \ldots, x_n)$ réels tels que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Alors :

$$\langle Ax, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$$

b) On peut écrire matriciellement :

$$\langle ({}^tT)Tx, x\rangle = {}^tX({}^tT)TX = ||TX||^2 \geqslant 0$$

et

$$\langle T({}^tT)x, x\rangle = {}^tXT{}^tTX = ||{}^tTX||^2 \geqslant 0$$

2. a) On peut écrire, pour tout vecteur colonne U :

$${}^tUYU = {}^tU({}^tP)XPU = {}^t(PU)X(PU) = {}^tVXV \geqslant 0$$

b) Soit X une matrice positive telle que $X^2 = A = PD(^tP)$.
Alors
$$(^tP)X^2P = [(^tP)XP]^2 = D \Longleftrightarrow Y^2 = D$$
La réciproque est identique.

c) $\star$ La matrice $Y+\alpha I_p$ est symétrique réelle. Comme pour tout vecteur U, $(Y+\alpha I_p)(U) = YU+\alpha U$, λ est une valeur propre de $Y+\alpha I_p$ si et seulement si $\lambda-\alpha$ est une valeur propre de Y. Comme $\alpha > 0$, les valeurs propres de $Y+\alpha I_p$ sont strictement positives et cette matrice est inversible.

$\star$ On a : $D(e_i) = \lambda_i e_i$, avec $\lambda_i \geqslant 0$.

• Si $\lambda_i = 0$, alors $||Ye_i||^2 = \langle Y^2e_i, e_i\rangle = \langle De_i, e_i\rangle = 0$, et $Ye_i = 0$.

• Si $\lambda_i > 0$, on a :
$$0 = (Y^2 - \lambda_i I_p)e_i = (Y + \sqrt{\lambda_i}I_p)(Y - \sqrt{\lambda_i}I_p)e_i$$
Or la matrice $(Y+\sqrt{\lambda_i}I_p)$ est inversible (première partie de la question). On a donc $(Y-\sqrt{\lambda_i}I_p)e_i = 0$, soit $Ye_i = \sqrt{\lambda_i}e_i$. On en conclut qu'il existe une unique solution positive qui est :
$$Y = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$$

d) Cette question est la conséquence des deux questions précédentes.

3. La matrice A est symétrique réelle. Ses valeurs propres sont 5 et 45. Elle est donc positive. Une matrice de passage diagonalisante orthogonale est :
$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
et
$$\sqrt{A} = P\begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}{}^tP = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Exercice 2.12.

1. À tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ on associe $\varphi(P) = (X^2-1)P'(X) - (4X+1)P(X)$.

a) Vérifier que φ réalise un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

b) Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

c) Démontrer que -5 est valeur propre de φ.

2. Soit λ un nombre réel.

a) Résoudre l'équation différentielle :
$$(E) \qquad f'(x) = \left[\frac{5+\lambda}{2(x-1)} + \frac{3-\lambda}{2(x+1)}\right]f(x)$$
d'inconnue f.

b) Pour quelles valeurs de λ cette équation admet-elle des solutions qui sont des fonctions polynômes ?

c) En déduire des valeurs propres et des sous-espaces propres de φ.

3. Montrer que pour tout P de $\mathbb{R}_4[X]$ il existe un unique quintuplet $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5$ tel que :
$$P(X) = \sum_{i=0}^{4} a_i(X-1)^i(X+1)^{4-i}.$$

Solution :

1. a) $\star$ L'application φ est linéaire par linéarité de l'application dérivation.
Si $P = a_4X^4 + \cdots$, alors :

$$(X^2-1)P' = 4a_4X^5 + \cdots \text{ et } (4X+1)P = 4a_4X^5 + \cdots$$

Donc $\deg(\varphi(P)) \leqslant 4$, ce qui montre que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

b) La matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. a) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. On sait la résoudre sur tout intervalle où $x \mapsto \dfrac{5+\lambda}{2(x-1)} + \dfrac{3-\lambda}{2(x+1)}$ est continue soit sur $I_1 =]-\infty, -1[$, ou $I_2 =]-1, 1[$, ou $I_3 =]1, +\infty[$.
Sur chacun de ces intervalles I_i, la solution générale est de la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= K_i \exp\big(\frac{5+\lambda}{2}\ln|x-1| + \frac{3-\lambda}{2}\ln|x+1|\big) \\ &= K_i|x-1|^{\frac{5+\lambda}{2}}|x+1|^{\frac{3-\lambda}{2}}, \text{ avec } K_i \text{ réel } (1 \leqslant i \leqslant 3). \end{aligned}$$

b) Une solution (autre que la fonction nulle) est polynomiale si et seulement si :

$$\begin{cases} \dfrac{5+\lambda}{2} = n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{3-\lambda}{2} = m \in \mathbb{N} \\ n+m \leqslant 4 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \lambda = 2n-5 \\ \lambda = 3-2m \\ n+m \leqslant 4 \end{cases}$$

On trouve ainsi 5 solutions, pour n variant de 0 à 4 :
$\to \lambda = -5$ et $f_0(x) = (x+1)^4$
$\to \lambda = -3$ et $f_1(x) = (x+1)^3(x-1)$
$\to \lambda = -1$ et $f_2(x) = (x+1)^2(x-1)^2$
$\to \lambda = 1$ et $f_3(x) = (x+1)(x-1)^3$
$\to \lambda = 3$ et $f_4(x) = (x-1)^4$

c) On a trouvé 5 valeurs propres distinctes ; comme $\dim(R_4[X] = 5$, on sait que ce sont les valeurs propres de φ et que φ est diagonalisable.

3. La famille $(f_0, \ldots, f_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ de vecteurs propres de φ. Tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ se décompose dans cette base. C'est la réponse à la question posée.

Exercice 2.13.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre 2, symétriques, de rang inférieur ou égal à 1 et dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

1. Donner un exemple d'un élément de $\mathcal{T}$.

2. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $U.^tU$ est élément de $\mathcal{T}$.

3. a) Réciproquement, soit M une matrice réelle d'ordre 2 de rang égal à 1. Montrer qu'il existe deux vecteurs non nuls U, V de $\mathbb{R}^2$ tels que $M = U.^tV$.

b) On suppose de plus que M est symétrique. Montrer que la famille (U, V) est liée.

c) En déduire que si M est un élément non nul de $\mathcal{T}$, alors il existe un vecteur X de $\mathbb{R}^2$ tel que $M = X.^tX$.

On définit l'application ψ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Soit p un réel de $]0, 1/2[$ et $q = 1 - p$. Soit $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

Dans ce qui suit, on cherche à déterminer $\inf\limits_{M \in \mathcal{T}} \psi(A - M)$.

4. a) Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Exprimer $F(x, y) = \psi(A - U.^tU)$ en fonction de x et y.

b) Déterminer les points critiques de F.

c) En déduire les extremums de F.

d) En déduire le minimum de $\psi(A - U.^tU)$, lorsque U décrit $\mathbb{R}^2$.

Solution :

1. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

2. On a : $U^tU = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$.

C'est une matrice symétrique de rang inférieur ou égal à 1 car si l'on note C_1, C_2 les deux colonnes de U^tU, on a $C_1 = xU$ et $C_2 = yU$.

3. a) Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à M. Si la matrice M est de rang 1, on sait que $\operatorname{Im} f$ est de dimension 1, donc de la forme $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((a, b)\big)$, où (a, b) est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Les colonnes de M sont alors proportionnelles à la colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda a & \mu a \\ \lambda b & \mu b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} = U \cdot {}^tV$$

et comme $M \neq 0$, la colonne V n'est pas non plus la colonne nulle.

b) Si la matrice M est en plus symétrique, on a $\lambda b = \mu a$ et :

$\star$ Si $\mu \neq 0$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{b}{\mu} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

$\star$ Si $\lambda \neq 0$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a}{\lambda} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

Donc il existe α réel tel que $V = \alpha U$.

c) Il existe donc α non nul et une colonne U non nulle tels que : $M = \alpha U^t U$. Montrons que $\alpha > 0$.
La matrice M est diagonalisable et à valeurs propres positives ou nulles. Si M n'admettait que 0 pour valeur propre, on aurait $M = 0$, ce qui est exclu. On peut donc considérer une valeur propre λ de M, avec $\lambda > 0$.
Il existe un vecteur colonne X non nul tel que $MX = \lambda X$, soit $\alpha U^t UX = \lambda X$. On a donc :

$$^tX \alpha U^t UX = \lambda^t XX, \text{ soit } \alpha ||^tUX||^2 = \lambda ||X||^2$$

Donc $\alpha > 0$. On pose alors $X = \sqrt{\alpha} U$ et on a $M = X^t X$.

4. a) Après un calcul élémentaire :

$$F(x,y) = (p - x^2)^2 + 2(xy - q)^2 + (p - y^2)^2$$

b) On a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = xy^2 - xp - yq + x^3 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x^2 y - xp - yq + y^3 \end{cases}$$

Or :

$$(S) : \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$(S) \iff \begin{cases} (x+y)(x^2+y^2-1) = 0 \\ (x-y)(x^2+y^2+q-p) = 0 \end{cases}$$

Comme $0 < p < \dfrac{1}{2}$, on a $q > \dfrac{1}{2}$ et $q - p > 0$. Donc le système ci-dessus est équivalent à :

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2-1) = 0 \\ x = y \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} 2x(2x^2-1) = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Les solutions sont $(0,0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

c) Le troisième point critique donnant la même matrice $U^t U$ que la solution $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, il ne reste que deux cas à étudier.

• pour $(0,0)$, en utilisant les notations de Monge, il vient :

$$H = \begin{pmatrix} -p & -q \\ -q & -p \end{pmatrix}$$

On a donc un point col.

• pour $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, il vient :

$$H = \begin{pmatrix} 2-p & p \\ p & 2-p \end{pmatrix}$$

En ce point F admet un minimum local.

d) Ainsi $F(x,y) = F\big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\big)$ est un minimum local atteint pour la matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Il reste à montrer que ce minimum est global. Or :
$F(x,y) - F(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2px^2 - 2py^2 - 4qxy + 1$

$= (x^2 + y^2 - 1)^2 + 2q(x - y)^2 \geqslant 0$. D'où le résultat.

Exercice 2.14.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie $n \geqslant 1$. On considère un endomorphisme u de E et on note φ l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même définie par :

$$\forall\, v \in \mathcal{L}(E), \varphi(v) = u \circ v$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de φ, alors λ est une valeur propre de u.

b) Etablir la réciproque (on pourra faire intervenir un projecteur).

3. a) Notons $E(\lambda, \varphi)$ le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre λ et $E(\lambda, u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.
Montrer que $E(\lambda, \varphi) = \mathcal{L}(E, E(\lambda, u))$.

b) En déduire que φ est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Solution :

1. Il suffit de dire que $u \circ v \in \mathcal{L}(E)$, la linéarité résultant banalement des propriétés des opérations.

2. a) Soit λ valeur propre de φ : il existe un endomorphisme non nul v de E tel que $u \circ v = \lambda v$. Il existe un vecteur x de E non nul tel que $v(x) \neq 0$ et :

$$u\big(v(x)\big) = \lambda v(x)$$

Ce qui signifie que λ est valeur propre de u.

b) Soit λ une valeur propre de u. Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit F un supplémentaire de $E_\lambda(u)$ dans E ($E = E_\lambda(u) \oplus F$). Soit v le projecteur sur $E_\lambda(u)$ de noyau F. On a :

$$v(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in E_\lambda(u) \\ 0 & \text{si } x \in F \end{cases}$$

Soit $x \in E$; il existe un unique couple $(y, z) \in E_\lambda(u) \times F$ tel que $x = y + z$ et :

$$\begin{aligned} u\big(v(x)\big) &= u\big(v(y) + v(z)\big) = u\big(v(y)\big) = u(y) = \lambda y = \lambda\big(v(y) + v(z)\big) \\ &= \lambda v(x) \end{aligned}$$

Ceci montre que λ est une valeur propre de φ.

3. a) On a :

$$v \in E_\lambda(\varphi) \Longleftrightarrow \forall\, x \in E, u\big(v(x)\big) = \lambda v(x) \Longleftrightarrow \forall\, x \in E, v(x) \in E_\lambda(u)$$

Donc $E_\lambda(\varphi) = \mathcal{L}(E, E_\lambda(u))$.

b) Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de φ. On a

$$\varphi \text{ diagonalisable } \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i}(\varphi) = n^2 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \dim \mathcal{L}(E, E_{\lambda_i}(u)) = n^2$$

$$\iff n\sum_{i=1}^{k}\dim E_{\lambda_i}(u)=n^2 \iff \sum_{i=1}^{k}\dim E_{\lambda_i}(u)=n$$
$$\iff u \text{ diagonalisable}$$

Exercice 2.15.

Dans l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n qu'on munit du produit scalaire défini par $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1. Pour tout polynôme P de E, on note $s(P)$ le polynôme tel que, pour tout réel x, $s(P)(x)=P(1-x)$.

a) Montrer que s définit un endomorphisme de E.

b) Expliciter, pour P appartenant à E, le degré de $s(P)$ en fonction de celui de P.

c) Qu'en déduit-on pour la matrice de s dans la base canonique de E ?

d) Montrer que s est diagonalisable.

2. Soit d l'endomorphisme de E tel que pour tout polynôme P de E,

$$d(P)=X(1-X)P''-(2X-1)P'.$$

a) Montrer que pour tout couple (P,Q) d'éléments de E,

$$\langle d(P),Q\rangle = -\int_0^1 x(1-x)Q'(x)P'(x)\,dx.$$

b) L'endomorphisme d admet-il pour valeur propre 0 ? Si oui, préciser l'espace propre associé.

c) Montrer que les valeurs propres non nulles de d sont strictement négatives.

d) Montrer que d est diagonalisable.

3. a) Montrer que les sous-espaces propres de s sont stables par d.

b) Montrer qu'il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres communs à s et à d.

Solution :

1. a) On vérifie immédiatement que s est linéaire.

b) Si le polynôme P est de degré k, alors $s(P)$ également. Ceci montre que s est un endomorphisme de E ...

c) ... et que la matrice associée à s dans la base canonique est triangulaire supérieure.

d) On a $s^2=I$, donc s est une symétrie et est diagonalisable.

2. a) On remarque que $d(P)=\dfrac{d}{dx}\big(x(1-x)P'(x)\big)$. Une intégration par parties donne alors :

$$\langle d(P),Q\rangle = \int_0^1 \frac{d}{dx}\big(x(1-x)P'(x)\big)Q(x)\,dx$$

$$= \left[x(1-x)P'(x).Q(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x(1-x)P'(x)Q'(x)\,dx$$
$$= -\int_0^1 x(1-x)P'(x)Q'(x)\,dx$$

La symétrie de cette dernière expression montre que d est un endomorphisme symétrique de E.

b) Pour tout λ, $d(\lambda) = 0$, donc 0 est bien valeur propre de d.
Soit P tel que $d(P) = 0$. Alors :

$$0 = \langle d(P), P\rangle = -\int_0^1 x(1-x)\big(P'(x)\big)^2\,dx$$

Comme $x \mapsto x(1-x)\big(P'(x)\big)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, il vient $P'(x) = 0$, pour tout $x \in]0,1[$, puis $P' = 0$, puisque P' a une infinité de racines, ce qui entraîne que P est constant.

Ainsi 0 est valeur propre de d et $E_{(0)}(d) = \operatorname{Ker} d = \mathbb{R}_0[X]$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et P de E tels que $d(P) = \lambda P$. Alors :

$$\lambda||P||^2.\langle d(P), P\rangle = -\int_0^1 x(1-x)\big(P'(x)\big)^2\,dx \leqslant 0$$

Donc si λ est une valeur propre non nulle de d, on a $\lambda < 0$.

d) On sait que d est un endomorphisme symétrique de E, donc est diagonalisable.

3. a) Comme $s^2 = I$, on sait que les sous-espaces propres possibles de s sont :

$E_1 = \operatorname{Ker}(s - I) = \{P \in E/s(P) = P\}$ et

$E_{-1} = \operatorname{Ker}(s + I) = \{P \in E/s(P) = -P\}$.

• Soit $P \in E_1$, donc tel que $P(1-x) = P(x)$. Alors :

$$d(P)(x) = x(1-x)P''(x) - (2x-1)P'(x)$$

et

$$d(P)(1-x) = (1-x)xP''(1-x) - (1-2x)P'(1-x) = d(P)(x)$$

• Soit $P \in E_{-1}$ donc tel que $P(1-x) = -P(x)$. Alors

$$d(P)(x) = x(1-x)P''(x) - (2x-1)P'(x)$$

et

$$d(P)(1-x) = (1-x)xP''(1-x) - (1-2x)P'(1-x) = -d(P)(x)$$

b) $d_{|E_1}$ est un endomorphisme symétrique de E_1 : il existe une base orthonormale de E_1 formée de vecteurs propres de d.
De même, il existe une base orthonormale de E_{-1} formée de vecteurs propres de d.

Comme $E = E_1 \oplus^\perp E_{-1}$, il existe une base de vecteurs propres communs à d et s.

Exercice 2.16.

Dans cet exercice, p est un entier naturel non nul fixé. On note I_p la matrice unité d'ordre p et O_p la matrice carrée d'ordre p nulle.
On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

1. On suppose dans cette question qu'il existe deux complexes distincts et non nuls λ et μ et deux matrices non nulles $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ tels que

$$\begin{cases} I_p = A + B, \\ M = \lambda A + \mu B, \\ M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B. \end{cases}$$

a) Vérifier que $(M - \lambda I_p)(M - \mu I_p) = O_p$. Montrer que M est inversible.

b) Exprimer A et B en fonction de I_p et M.

c) En déduire que $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA = O_p$. Que peut-on dire de A et de B ?

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \lambda^n A + \mu^n B$, puis que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $M^n = \lambda^n A + \mu^n B$.

e) Montrer que M est diagonalisable et que l'ensemble de ses valeurs propres est $\{\lambda, \mu\}$.

2. On suppose dans cette question qu'il existe un entier $r \geqslant 1$, un r-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ de complexes non nuls, deux à deux distincts, et un r-uplet $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ d'éléments non nuls de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ tels que, pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $M^k = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j^k A_j$.

a) Montrer que le polynôme $P = \prod\limits_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)$ annule M. Montrer que M est inversible.

b) Que peut-on dire de l'ensemble des valeurs propres de M ?

c) Soit un entier $n > r$. On note R le reste de la division euclidienne de X^n par P. Montrer que $M^n = R(M)$ et en déduire que $M^n = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j^n A_j$.

Solution :

1. a) On a :

$$\begin{aligned}(M - \lambda I_p)(M - \mu I_p) &= M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p \\ &= \lambda^2 A + \mu^2 B - (\lambda + \mu)(\lambda A + \mu B) + \lambda\mu(A + B) = 0\end{aligned}$$

La matrice M est inversible, d'inverse $M' = \dfrac{1}{\lambda\mu}\big((\lambda + \mu)I_p - M\big)$, puisque l'on vérifie aisément que $MM' = I_p$.

b) On a $M - \mu I_p = (\lambda - \mu)A$. Comme $\lambda \neq \mu$, on a : $A = \dfrac{1}{\lambda - \mu}(M - \mu I_p)$

De même : $B = \dfrac{1}{\mu - \lambda}(M - \lambda I_p)$

c) Comme M et I_p commutent, on peut écrire :

$$A^2 = \frac{1}{(\lambda - \mu)^2}(M - \mu I_p)^2 = A$$

et de même $B^2 = B$ et $AB = BA = 0$.
Les matrices de A et B sont donc celles de projecteurs supplémentaires.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme A et B commutent :

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} A^k B^{n-k} = \lambda^n A + \mu^n B$$

car $AB = 0$ et $A^k = A, B^k = B$, pour $k \geqslant 1$.
D'autre part $\big(\frac{1}{\lambda}A + \frac{1}{\mu}B\big)(\lambda A + \mu B) = A + B$. Donc

$$M^{-1} = \frac{1}{\lambda}A + \frac{1}{\mu}B$$

On déduit comme ci-dessus que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$M^n = \lambda^n A + \mu^n B$$

e) La matrice A est celle d'un projecteur. Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont contenues dans l'ensemble $\{0, 1\}$.
Mais, comme $A \neq 0$ et $B \neq 0$, on a $A \neq 0$ et $A \neq I$, donc $\operatorname{Spec}(A) = \{0, 1\}$.
Comme $M = (\lambda - \mu)A + \mu I_p$, la matrice M est diagonalisable et

$$\operatorname{Spec}(M) = \{(\lambda - \mu){\times}1 + \mu, (\lambda - \mu){\times}0 + \mu\} = \{\lambda, \mu\}.$$

2. a) Notons $P(X) = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j) = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$.
Alors :

$$\begin{aligned} P(M) &= \sum_{k=0}^{r} a_k M^k = \sum_{k=0}^{r} a_k \big(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j^k A_j \big) = \sum_{j=1}^{r} \big(\sum_{k=0}^{r} a_k \lambda_j^k \big) A_j \\ &= \sum_{j=1}^{r} P(\lambda_j) A_j = 0 \end{aligned}$$

Le polynôme P est ainsi annulateur de M.
Le monôme de degré 0 de P est $a_0 = (-1)^r \prod_{j=1}^{r} \lambda_j$. Il est non nul. En conséquence, en notant Q le quotient de la division euclidienne de P par X, on a $P = XQ + a_0$, donc $0 = P(M) = MQ(M) + a_0 I_p = Q(M)M + a_0 I_p$.
En posant $M' = -\frac{1}{a_0}Q(M)$, on a $MM' = M'M = I_p$. La matrice M est donc inversible.

b) Comme le polynôme P annule M, les valeurs propres de M sont incluses dans l'ensemble des racines de P soit $\operatorname{Spec}(M) \subset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$.

c) On sait que R est de degré strictement inférieur à r. Soit Q le quotient de la division euclidienne de P par X^n, soit $X^n = PQ + R$. Il s'ensuit que

$$M^n = Q(M)P(M) + R(M) = R(M)$$

Comme dans la question 2. a, on montre que $R(M) = \sum_{j=1}^{r} R(\lambda_j) A_j$.
Or pour tout $j \in [\![1, r]\!]$:

$$\lambda_j^n = Q(\lambda_j)P(\lambda_j) + R(\lambda_j) = R(\lambda_j)$$

On conclut que

$$M^n = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^n A_j$$