2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. a) Justifier que A est diagonalisable.

b) Soit v un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Montrer que λ est réel et que les composantes $v_1, \dots, v_n$ de v vérifient la relation :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], v_{k+1} - (2 - \lambda)v_k + v_{k-1} = 0$$

en posant $v_0 = v_{n+1} = 0$.

2. En exploitant la relation (1), montrer que 0 et 4 ne sont pas valeurs propres de A.

3. On suppose que λ est une valeur propre de A telle que $0 < \lambda < 4$.

a) Montrer que les racines distinctes r_1 et r_2 du polynôme $r^2-(2-\lambda)r+1 = 0$ sont complexes et conjuguées. On note $r_1 = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$. Montrer qu'on a nécessairement $\sin((n + 1)\theta) = 0$.

b) En calculant successivement r_1r_2 et $r_1 + r_2$, montrer que $\rho = 1$ puis que les valeurs propres de A dans l'intervalle $]0, 4[$ sont au nombre de n et peuvent s'écrire :

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

avec $k \in [\![1, n]\!]$.

Solution :

1. a) La matrice A est diagonalisable car symétrique réelle.

b) On traduit $Av = \lambda v$ en un système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} -v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1} = \lambda v_i, \quad 2 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 2v_1 - v_2 = \lambda v_1 \\ -v_{n-1} + 2v_n = \lambda v_n \end{cases}$$

En introduisant v_0 et v_{n+1} tels que $v_0 = v_{n+1} = 0$, on a bien le résultat annoncé.

2. On suppose que 0 est valeur propre. Dans ce cas, l'équation caractéristique associée à la récurrence d'ordre 2 sur (v_i) admet 1 comme racine double. Il existe donc α et β dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall\, i \in [\![0, n+1]\!], \quad v_i = \alpha + \beta i$$

Le fait que $v_0 = v_{n+1} = 0$ implique que $\alpha = \beta = 0$ soit $v = 0$, ce qui est contredit le fait que 0 soit valeur propre.
Le raisonnement est identique en supposant que 4 est valeur propre.

3. a) Si $\lambda \in]0, 4[$, le discriminant de l'équation caractéristique, égal à $\lambda(\lambda - 4)$, est donc négatif. Les racines de l'équation sont donc complexes et conjuguées. En notant $r_1 = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ une des racines, on en déduit l'existence de α et β dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout k de $[\![0, n]\!]$:

$$v_k = (\alpha\cos(k\theta) + \beta\sin(k\theta))\rho^k$$

La relation $v_0 = 0$ implique $\alpha = 0$ tandis que la relation $v_{n+1} = 0$ implique que $\beta\sin((n+1)\theta))\rho^{n+1} = 0$, soit nécessairement pour que $v \neq 0$, $\sin((n+1)\theta) = 0$.

b) On a $r_1r_2 = 1$ et $r_1 + r_2 = 2 - \lambda$ (somme et produit des racines).
La première relation implique que $\rho = 1$ tandis que la seconde implique que $\lambda = 2 - 2\cos(\theta)$. En supposant que λ est valeur propre, la question précédente montre que $\sin((n+1)\theta) = 0$, soit θ de la forme $\dfrac{k\pi}{n+1}$ avec k dans $\mathbb{Z}$.
Réciproquement, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, en notant $\lambda_k = 2 - 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$, λ_k est bien une valeur propre de A et un vecteur propre associé peut s'écrire :

$$v_\ell = \beta \sin\big(\ell \frac{k\pi}{n+1}\big) \qquad (\ell \in [\![1,n]\!])$$

avec $\beta \in \mathbb{R}^*$.

On a ainsi trouvé n valeurs propres distinctes de A dans l'intervalle $]0,4[$. Elles y sont toutes !

Exercice 2.2.

On munit l'espace $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, c'est-à-dire vérifiant ${}^tA = -A$.

1. Montrer que la seule valeur propre réelle possible de A est 0.

2. Soit $B = A^2$.
   a) Montrer que B est une matrice symétrique réelle.
   b) Quel est le signe des valeurs propres non nulles de B ?
   c) En déduire la forme des valeurs propres complexes de A.

3. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que la matrice $I_n + A$ est inversible.
   b) Montrer que $P = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ est une matrice orthogonale.

4. Déterminer les valeurs propres réelles possibles de P.

Solution :

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. On peut écrire $AX = \lambda X$ et

$$\lambda ||X||^2 = {}^tXAX = {}^t({}^tAX)X = -{}^tXAX = -\lambda ||X||^2$$

Comme $X \neq 0$, il vient $\lambda = 0$.

2. a) On a ${}^tB = {}^tA^2 = ({}^tA)^2 = A^2 = B$. Ainsi B est une matrice symétrique réelle ; ses valeurs propres sont réelles et B est diagonalisable dans une base orthonormée.

b) Soit $\lambda \neq 0, X \neq 0$ tels que $BX = \lambda X$. Alors :

$$\lambda ||X||^2 = {}^tXA^2X = {}^t({}^tAX)AX = -||AX||^2$$

Comme $AX \neq 0$ (autrement $BX = 0$), il vient : $\lambda < 0$.

c) Soit $\mu = a + ib, b \neq 0$ une valeur propre complexe de A.

Alors $\mu^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ est une valeur propre réelle négative de B. Donc $ab = 0$, et $b \neq 0$ entraîne que $a = 0$ et $\mu = ib$.

Les valeurs propres complexes de A sont des imaginaires purs.

3. a) La matrice $I+A$ est inversible si et seulement si -1 n'est pas valeur propre de A, ce qui est le cas par les questions précédentes.

b) Comme $P=(I-A)(I+A)^{-1}$, on a :
${}^tP={}^t[(I+A)^{-1}]{}^t(I-A)=[{}^t(I+A)]^{-1}.{}^t(I-A)=(I-A)^{-1}(I+A)$.
D'autre part : $P^{-1}=[(I-A)(I+A)^{-1}]^{-1}=(I+A)(I-A)^{-1}$
Or $I-A$ et $I+A$ commutent, donc $I+A$ et $(I-A)^{-1}$ commutent. D'où :
$$ {}^tP=P^{-1}. $$

4. Les valeurs propres réelles d'une matrice orthogonale P ne peuvent être que 1 et/ou -1, car, pour tout vecteur X, $||PX||=||X||$.

Ici, supposons que -1 soit valeur propre de $P=(I-A)(I+A)^{-1}$. Il existe $X\neq 0$ tel que $(I-A)(I+A)^{-1}X=-X$.

Posons $Y=(I+A)^{-1}X$. Alors $X=(I+A)Y$ et :
$$(I-A)Y=-(I+A)Y,\ i.e.\ 2IY=0 \text{ et } Y=0$$
Donc $X=0$, ce qui contredit l'hypothèse.

La seule valeur propre réelle possible de $(I-A)(I+A)^{-1}$ est donc 1.

Exercice 2.3.

1. On considère $n+1$ réels distincts $a_0,a_1,\ldots,a_n$.
Montrer que, pour tout entier k de $[\![0,n]\!]$, il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, noté L_k, tel que : pour tout $j\in[\![0,n]\!]$,
$$L_k(a_j)=\begin{cases}0 & \text{si } j\neq k\\ 1 & \text{si } j=k\end{cases}$$
Montrer que ce polynôme est donné par : $L_k(X)=\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\dfrac{X-a_j}{a_k-a_j}$

2. a) Montrer que $(L_0,L_1\ldots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Donner les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

c) Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n}L_k=1$.

3. On suppose maintenant que les réels a_j sont définis par : $\forall\, j\in[\![0,n]\!], a_j=j$.

a) Montrer que, pour tout k de $[\![0,n]\!]$, $L_k(X)=\dfrac{(-1)^{n-k}}{n!}\dbinom{n}{k}\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(X-j)$

b) Déterminer le polynôme Q défini par : $Q = \sum\limits_{k=1}^{n} kL_k$.

c) Soit A la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $(L_0, L_1 \ldots, L_n)$. On ne demande pas d'écrire la matrice A, mais de donner :

- la première ligne de la matrice A ;
- la somme des éléments de toute autre ligne de A ;
- la somme des éléments des différentes colonnes de A.

d) Donner la matrice A^{-1}.

Solution :

1. $\star$ Pour l'existence, il suffit de vérifier que le polynôme proposé convient effectivement, ce qui est facile.
$\star$ Pour l'unicité : on suppose qu'il existe deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont solutions. On a alors, pour tout j de $[\![0, n]\!]$, $P(a_j) = Q(a_j)$, soit également $(P - Q)(a_j) = 0$.
Le polynôme $P - Q$ qui est de degré inférieur ou égal à n possède $n+1$ racines distinctes, c'est donc le polynôme nul. On a donc $P = Q$, d'où l'unicité.

2. a) La famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une famille de $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$, il suffit donc de montrer que c'est une famille libre pour montrer que c'est une base.
On considère $n+1$ scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k L_k = 0$. On évalue cette égalité en a_j, il reste $\alpha_j = 0$. Comme ceci est vrai pour tout j de $[\![0, n]\!]$, on a bien pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_j = 0$ et la famille est libre.

b) Soit P un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$. P se décompose dans la base sous la forme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k L_k$. En évaluant là encore cette égalité au point α_j, il reste $P(\alpha_j) = \alpha_j$.
Conclusion : P se décompose sous la forme : $P = \sum\limits_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_k$.

c) En appliquant la décomposition précédente au polynôme $P = 1$, on obtient exactement $\sum\limits_{k=0}^{n} L_k = 1$.

3. a) On applique la formule $L_k(X) = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \dfrac{X - a_j}{a_k - a_j}$ en remplaçant a_j par j.

On obtient :

$$L_k(X) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{X-j}{k-j}.$$

Or :

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{k-j} = \frac{1}{k(k-1)\dots 1(-1)(-2)\dots(-(n-k))} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^{n-k}}{n!}\binom{n}{k}$$

Ce qui est bien le résultat attendu.

b) La valeur k est la valeur du polynôme X au point k. On a donc, d'après ce qui précède : $\sum\limits_{k=1}^{n} kL_k = X$.

c) i) Dans la matrice A, la première ligne représente les coordonnées des polynômes L_k sur le vecteur 1. C'est donc la valeur des polynômes L_k en 0, c'est donc $(L_0(0), L_1(0), \dots, L_n(0)) = (1, 0, \dots, 0)$.

ii) Les autres lignes représentent les coordonnées des polynômes sur les vecteurs X^k. Or la coordonnée d'un polynôme P sur X^k est $\dfrac{P^k(0)}{k!}$ (formule de Taylor, exacte pour les polynômes). La somme des coefficients de ces lignes est donc $\dfrac{(L_0+L_1+\ldots+L_n)^{(k)}(0)}{k!}$. Comme $L_0+L_1+\ldots+L_n = 1$, la dérivée est nulle et il en est de même de la somme des coefficients de ces lignes.

iii) La somme des termes d'une colonne représente la somme des coefficients du polynôme considéré et cette somme s'obtient en évaluant le polynôme en 1. Comme $L_k(1) = 0$ pour $k \neq 1$ et que $L_1(1) = 1$, ces $n+1$ sommes sont, dans l'ordre $(0, 1, 0, \dots, 0)$.

d) La matrice A^{-1} est la matrice de passage de la base $(L_0, L_1 \dots, L_n)$ à la base canonique. Ses colonnes sont donc les coordonnées de $1, X, \dots, X^n$ dans $(L_0, L_1 \dots, L_n)$.

Comme on a vu que, pour un polynôme quelconque : $P = \sum\limits_{k=0}^{n} P(\alpha_k)L_k$, on a donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 1 & 1 & 1^2 & \dots & \dots & 1^n\\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & \dots & 2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots\\ 1 & n & n^2 & \dots & \dots & n^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2.4.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1 stable par la multiplication matricielle :

$$\forall (M, M') \in F^2,\ MM' \in F.$$

On suppose que $I_n \notin F$, où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

2. a) Soit p le projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à F.
Montrer que $\forall (M, M') \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $p(MM') = p(M)p(M')$.

b) Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M^2 appartienne à F, alors M appartient à F.

c) Soit $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des 0 sauf à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne où se trouve un 1).
Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$ pour $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$.

d) Montrer que F contient la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

e) Conclure.

Solution :

1. Soit $A \in F \cap \mathrm{Vect}(I_n)$.
Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$; si $\lambda \neq 0$, alors $\dfrac{1}{\lambda}A \in F$. Or $\dfrac{1}{\lambda}A = I_n \notin F$.
Donc $\lambda = 0$ et $A = 0$.
Comme $\dim F + \dim \mathrm{Vect}(I_n) = n^2$, on a bien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

2. a) Soit $M = A + \lambda I_n$ et $M' = A' + \lambda' I_n$ avec $A, A' \in F$. Alors

$$MM' = AA' + \lambda A' + \lambda A' + \lambda\lambda' I_n.$$

Or F est stable par produit donc $AA' \in F$ et donc $AA' + \lambda A' + \lambda A' \in F$. Par conséquent on vient de trouver la décomposition de MM' sur $F \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$ et :

$$p(MM') = \lambda\lambda' I_n = p(M)p(M').$$

b) La relation $M^2 \in F$ implique $p(M^2) = 0$. Or $p(M^2) = (p(M))^2$, d'après la question précédente.
En écrivant $M = A + \lambda I_n$ avec $A \in F$, alors $p(M) = \lambda I_n$ et $(\lambda I_n)^2 = 0$. Ainsi $\lambda = 0$ et $M = A \in F$.

c) On sait que $E_{i,j} \times E_{k,l} = 0$ si $k \neq j$. Si $k = j$ alors $E_{i,j} \times E_{j,l} = E_{i,l}$.

d) Si $i \neq j$, alors $(E_{i,j})^2 = 0 \in F$, donc $E_{i,j} \in F$ d'après la question 2.b.

De plus $E_{i,i} = E_{i,j} \times E_{j,i}$ pour un $i \neq j$. Or $E_{i,j}, E_{j,i} \in F$ et F est stable par produit, donc $E_{i,i} \in F$.
Ainsi F contient bien la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

e) Si F contient la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors F contient I_n, ce qui contredit la supposition.

En conclusion tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit contient I_n.

Exercice 2.5.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

À tout P de E on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = XP(X) - \frac{1}{n}(X^2 - 1)P'(X)$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P.

1. Montrer que l'application $T : P \mapsto Q$ est un endomorphisme de E.

2. Écrire la matrice associée à T dans la base canonique de E.

3. Soit P un polynôme propre de T.

a) Montrer que P est de degré n.

b) Soit z_0 une racine de P. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $z_0 \in \{-1, 1\}$.

c) En déduire que si P est un polynôme propre de T, alors P est de la forme : $P(X) = \alpha(X-1)^k(X+1)^{n-k}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $k \in [\![0, n]\!]$.

4. Déterminer les valeurs propres de T. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Solution :

1. L'application T est linéaire par les propriétés de distributivité de la multiplication sur l'addition et parce que la dérivation est linéaire.

On remarque que :

$$T(1) = X, T(X) = \big(1 - \frac{1}{n}\big)X^2 + \frac{1}{n}$$

et, pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, $T(X^k) = \big(1 - \frac{k}{n}\big)X^{k+1} + \frac{k}{n}X^{k-1}$. Enfin $T(X^n) = X^{n-1}$.
Ceci montre que si $\deg(P) \leqslant n$, alors $\deg(T(P)) \leqslant n$ (même pour $n = 1$, car alors $T(X) = -1$).
Ainsi T est un endomorphisme de E.

2. Dans la question précédente, on a montré que la matrice associée à T dans la base canonique de E est tridiagonale, avec des 0 sur la diagonale, $(1, 1-\frac{1}{n}, \ldots, 1-\frac{n-1}{n})$ sur la sous-diagonale et $(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n})$ sur la sur-diagonale.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/n & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ n/n & 0 & 2/n & \ddots & \ldots & 0 \\ 0 & (n-1)/n & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ddots & 0 & n/n \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1/n & 0 \end{pmatrix}$$

3. a) Soit P un polynôme unitaire propre de degré p, avec $p < n$. On écrit $P(X) = X^p + \cdots$, on a alors :

$$T(P) = X(X^p + \cdots + a_0) - \frac{1}{n}(X^2 - 1)(pX^{p-1} + \cdots) = \lambda(X^p + \cdots)$$

En se focalisant sur les termes de plus haut degré, il vient :

$$\big(1 - \frac{p}{n}\big)X^{p+1} + \cdots = \lambda(X^p + \cdots + \cdots)$$

Ceci n'est possible que si $p = n$.

b) Soit z_0 une racine complexe de P, avec $z_0 \notin \{-1, 1\}$.
Comme on a $(X - \lambda)P(X) = \frac{1}{n}(X^2 - 1)P'(X)$, z_0 est également racine de P'. Plus précisément, lorsque z_0 est racine d'ordre r de P, z_0 est aussi racine d'ordre r de P', ce qui est impossible puisque toute racine d'ordre r de P est racine d'ordre $r - 1$ de P'.
Donc $z_0 \in \{-1, 1\}$.

4. Pour $P_k(X) = (X - 1)^k(X + 1)^{n-k}$, un calcul élémentaire donne

$$T(P_k) = \big(1 - \frac{2k}{n}\big)P_k.$$

Les polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sont donc polynômes propres de valeurs propres associées $1, 1 - \frac{2}{n}, 1 - \frac{4}{n} \ldots, -1$.

T est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $(n+1)$ qui admet $n + 1$ valeurs propres : il est donc diagonalisable.

Exercice 2.6.

Soit a un réel non nul. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ a & a & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les éléments propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. On considère l'équation d'inconnue X, $(\star)$: $X^n = A$, où n est un entier supérieur ou égal à 2 et X un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Soit X une solution éventuelle de $(\star)$.

i) Montrer que $XA = AX$.

ii) En déduire que tout vecteur propre de A est vecteur propre de X.

b) Montrer que $(\star)$ n'a pas de solution lorsque n est un entier pair.

3. Soit n un entier impair et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit X une solution de $(\star)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à X. Montrer qu'il existe (α, β, γ) tels que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$, soit :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & 0 \\ \frac{\beta-\alpha}{2} & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

c) Résoudre l'équation $(\star)$ lorsque n est un entier impair.

Solution :

1. $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & a \\ a & a-\lambda & a \\ a & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow aL_1 + \lambda l_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 - \lambda^2 \\ 0 & a-\lambda & a+\lambda \\ a & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

Il suffit de permuter les lignes L_1 et L_3 pour obtenir la forme réduite habituelle et les valeurs propres sont les valeurs de λ qui annulent $a - \lambda$ ou $a^2 - \lambda^2$, donc :

$$\operatorname{Spec} A = \{-a, a\}$$

On détermine les sous-espaces propres associés et on trouve

$$E_{(a)} = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{(-a)} = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. a) i) Comme $X^n = A$, il vient : $AX = X^{n+1} = XA$.

ii) Soit ω un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ $(A\omega = \lambda\omega)$. Alors :

$$A(X\omega) = X(A\omega) = \lambda X\omega$$

Comme $\dim E_{(\lambda)}(A) = 1$, il existe α, éventuellement nul, tel que $X\omega = \alpha\omega$, ce qui signifie que ω est vecteur propre de X.

b) Supposons que $n = 2p$, on suppose également que $a > 0$.
Soit ω un vecteur propre associé à la valeur propre $-a$.
On a vu qu'il existe α réel tel que $X\omega = \lambda\omega$ et :

$$-a\omega = A\omega = X^{2p}\omega = \alpha^{2p}\omega$$

Comme $\omega \neq 0$, il vient : $\alpha^{2p} = -a < 0$, ce qui est impossible.

3. a) L'équation $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3(e_1 - e_3) = 0$ est équivalente à

$$(a_1 - a_3)e_1 + a_2e_2 - a_3e_3 = 0$$

dont la seule solution est clairement $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, ce qui prouve la liberté de la famille, qui est donc une base de $\mathbb{R}^3$, puisque de cardinal 3.

b) La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme associé à A a pour matrice associée dans la base $\mathcal{B}$

$$\widetilde{A} = P^{-1}AP = PAP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$$

Si l'on note Y la matrice associée à u dans la base $\mathcal{B}$, on a Y de la forme

$$Y = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & \alpha & 0 \\ z & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(les deux dernières colonnes correspondent aux vecteurs propres de u qui sont e_2 et $e_1 - e_3$).
alors $Y\widetilde{A} = \widetilde{A}Y$ montre que Y est de la forme :

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & 0 \\ \dfrac{\beta - \alpha}{2} & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

c) Comme $Y^n = \widetilde{A}$ et n impair, on a $\beta = -\alpha$.
On calcule ensuite Y^n par récurrence sur n et on trouve :

$$Y^{2p+1} = \begin{pmatrix} \alpha^{2p+1} & 0 & 0 \\ (2p+1)\alpha^{2p}\gamma & \alpha^{2p+1} & 0 \\ (-\alpha)^{2p+1} & 0 & (-\alpha)^{2p+1} \end{pmatrix}$$

Finalement, en revenant dans la base initiale, on obtient :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ s & r & s \\ r & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$r = a^{\frac{1}{2p+1}}, \quad s = \frac{1}{2p+1} a^{\frac{1}{2p+1}}$$

Exercice 2.7.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^tM = -M\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donner sa dimension.

2. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les éléments propres de J.

b) Soit X un vecteur propre de J. On pose $X = U + iV$, où U et V sont deux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Montrer que U et V sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Dans la suite, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tA = -A$. On pose $B = A^2$.

3. a) Montrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que les valeurs propres de B sont négatives ou nulles.

c) En déduire que les valeurs propres non nulles de A sont de la forme ia, avec a réel non nul.

4. Soit $X = U + iV$ un vecteur colonne propre de A associé à la valeur propre non nulle ia, où U et V appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Calculer $AU + aV$.

b) En déduire la valeur du produit scalaire $\langle U, V\rangle$.

5. $X = U + iV$ un vecteur colonne propre de A, où U et V appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. A-t-on toujours $\langle U, V\rangle = 0$?

Solution :

1. On vérifie immédiatement que l'ensemble des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$, puisque dire que

$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{T}$, c'est dire que pour tout i, $a_{i,i} = 0$, et pour $i \neq j, a_{i,j} = -a_{j,i}$. Une base de ce sous-espace est donc $(E_{i,j} - E_{j,i})_{i<j}$.

2. a) Les valeurs propres de J sont complexes : i et $-i$. On a

$$E_{(i)}(J) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ et } E_{(-i)}(J) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

b) Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre i. Alors :

$$X = (a+ib)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

et le produit scalaire de $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ est nul.

La démonstration est identique pour tout vecteur propre associé à la valeur propre $-i$, car les vecteurs propres sont conjugués, puisque la matrice J est réelle et les valeurs propres sont complexes et conjuguées.

3. a) On a : ${}^tB = B$ (vérification immédiate)

b) Soit $\lambda \neq 0, X \neq 0$ tels que $BX = \lambda X$. Alors

$$\lambda\|X\|^2 = {}^tXA^2X = {}^t({}^tAX)AX = -\|AX\|^2$$

Comme $AX \neq 0$ (autrement $BX = 0$), il vient $\lambda < 0$.

c) Soit $\mu = a + ib, b \neq 0$ une valeur propre complexe de A.
Alors $\mu^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ est une valeur propre réelle négative de B. Donc $ab = 0$ et $b \neq 0$, ce qui entraîne que $a = 0$ et $\mu = ib$.

Les valeurs propres complexes de A sont des imaginaires purs.

4. a) On a
$$A(U+iV) = ia(U+iV) \implies AU + iAV = -aV + iaU \implies AU + aV = 0$$

b) De même
$${}^t(AU)U = {}^tU{}^tAU = -{}^tUAU = -{}^t(AU)U \implies {}^t(AU)U = 0$$

Or $AU = -aV$ et $a \neq 0$, donc ${}^tVU = 0$.

5. La réponse est non. Soit, par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A donc $(1+i)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aussi et

$$(1+i)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\neq 0.$$

Exercice 2.8.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note e_n l'application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x\geqslant 0, e_n(x)=x^n\exp(-x).$$

On donne un entier N non nul.
Soit E l'espace vectoriel engendré par $(e_0,e_1,e_2,\dots,e_N)$.

1. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel E ?

2. Les éléments de E sont en particulier des applications dérivables. On notera Δ la dérivation dans E : $\forall f\in E, \Delta(f)=f'$.

Démontrer que Δ est un automorphisme de E. Rechercher ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

3. Soit $f\in E$ et x quelconque dans $[0,+\infty[$.

a) Démontrer que la série de terme général $u_n=f(n+x)$ est convergente. On note alors $F: x\mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n+x)$.

b) Vérifier que $F\in E$, et que l'application $\Phi : f\mapsto F$ ainsi définie est un automorphisme de E.

c) Démontrer que $\Phi\circ\Delta=\Delta\circ\Phi$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$. On note X_n une variable aléatoire à densité à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et dont $\dfrac{e_n}{n!}$ est une densité sur $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que X_n a des moments d'ordre 1 et 2, et calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

b) Dans cette question, $n=1$. Calculer une densité de la variable aléatoire D, partie décimale de X_1, définie par : $D=X_1-\lfloor X_1\rfloor$, où $\lfloor X_1\rfloor$ désigne la partie entière de X_1.

Solution :

1. La famille $(e_0,e_1,\dots,e_N)$ est clairement libre, par échelonnement des degrés des parties polynomiales. Ainsi $\dim E=N+1$.

2. La dérivation est une application linéaire. On calcule $e'_n : x\mapsto (nx^{n-1}-x^n)\mathrm{e}^{-x}$ qui se lit $\Delta(e_n)=ne_{n-1}-e_n$.

Ceci montre que Δ est un endomorphisme de E. La matrice M_Δ associée à Δ dans la base $\mathcal{E}$ s'écrit :

$$M_\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & N \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, avec -1 sur sa diagonale. Elle est donc inversible et Δ est un automorphisme de E.

Son unique valeur propre est -1 et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}(e_0)$. L'endomorphisme Δ n'est pas diagonalisable.

3. a) Tout f de E s'écrit comme combinaison linéaire des $(e_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$. Toute combinaison linéaire de séries convergentes étant convergente, il suffit d'étudier la convergence demandée pour $f(x) = x^k \mathrm{e}^{-x}$.
On a alors :

$$n^2 \times f(x+n) = \mathrm{e}^{-x} n^2 (x+n)^k \mathrm{e}^{-n} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \mathrm{e}^{-x} n^{k+2} \mathrm{e}^{-n}$$

Par négligeabilité classique, cette expression est de limite nulle lorsque n tend vers l'infini, ce qui prouve, par la règle de Riemann, que la série proposée est (absolument) convergente.

b) En développant par la formule du binôme :

$$\Phi(e_k)(x) = E_k(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} e_k(\ell + x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+x)^k \mathrm{e}^{-\ell-x}$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \ell^j x^{k-j} \mathrm{e}^{-\ell} \mathrm{e}^{-x} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A_j x^{k-j} \mathrm{e}^{-x}$$

avec $A_j = \sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} \ell^j e^{-\ell}$ (toutes les séries écrites convergent)

Ainsi $\Phi(e_k) \in E$ et la linéarité de Φ étant évidente, Φ est un endomorphisme de E.
La matrice de Φ dans la base $\mathcal{E}$ s'écrit :

$$M_\Phi = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & \cdots & A_N \\ 0 & A_0 & 2A_1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & A_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & NA_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure avec $A_0 \neq 0$ sur sa diagonale. Elle est donc inversible.

c) On vérifie que $M_\Delta M_\phi = M_\phi M_\Delta$ en effectuant le produit matriciel. On peut également comparer $\Phi(e_k')$ et $(\Phi(e_k))'$.

4. La variable aléatoire X_n suit la loi $\Gamma(1, n+1)$. Ainsi

a) $E(X_n) = n+1, V(X_n) = n+1$.

b) La variable aléatoire D est à valeurs dans $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$P(D \leqslant x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n \leqslant X_1 \leqslant x+n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (B(x+n) - B(n))$$

où B est une primitive quelconque de e_1.

D'après M_Δ, on peut prendre $B = -e_0 - e_1$ et, puisque B appartient alors à E, on peut utiliser l'application Φ. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$P(D \leqslant x) = \Phi(B)(x) - \Phi(B)(0)$$

Comme la dérivation commute avec Φ, pour déterminer une densité d de D, il suffit d'écrire, pour tout $x \in [0,1]$:

$$d(x) = (\Phi(B))'(x) = \Phi(B')(x) = \Phi(e_1)(x) = (A_1 e_0 + A_0 e_1)(x)$$

Or : $A_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n} = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}, A_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathrm{e}^{-n} = \dfrac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}$

Donc, pour $x \in [0,1]$:

$$d(x) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\big(x + \frac{1}{\mathrm{e}-1}\big)\mathrm{e}^{-x}$$

Exercice 2.9.

Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p. On se donne $(p+1)$ réels distincts $x_0, \ldots, x_p$.

Soit deux polynômes A et B de $\mathbb{R}_p[X]$; on pose : $\langle A, B\rangle = \dfrac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} A(i)B(i)$.

On note alors :

- $\|A\|^2 = \langle A, A\rangle$;
- $E(A) = \langle A, 1\rangle$;
- $C(A,B) = \langle A - E(A), B - E(B)\rangle$;
- $V(A) = C(A,A)$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_p[X]$.

2. Démontrer, pour tous polynômes A et B de $\mathbb{R}_p[X])^2$, les relations suivantes :

a) $V(A) = \|A\|^2 - E(A)^2$ et $C(A,B) = \langle A, B\rangle - E(A)E(B)$.

b) $|C(A,B)| \leqslant \sqrt{V(A)V(B)}$.
Dans quel cas cette inégalité est-elle une égalité ?

3. Soit $A \in \mathbb{R}_p[X]$ fixé.

a) Déterminer, en fonction de $E(A)$ et de $V(A)$ le projeté orthogonal de A sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_0[X]$, puis la distance de A à ce sous-espace vectoriel.

b) Si $\deg(A) \geqslant 1$, on note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_p[X]$ engendré par les polynômes 1 et A.
Déterminer une base orthonormale de F, dont le premier vecteur est le polynôme 1.

c) Soit B un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ différent de A.
Déterminer, en fonction de $E(A), E(B), V(A)$ et de $C(A,B)$, le projeté orthogonal du polynôme B sur le sous-espace vectoriel F, sous la forme $\lambda A + \mu$. Préciser la distance de B à F.

Solution :

1. On a clairement défini une forme bilinéaire symétrique.
Soit $A \in \mathbb{R}_p[X]$. On a $\langle A, A\rangle = \dfrac{1}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p} A(i)^2 \geqslant 0$, et $\langle A, A\rangle = 0$ si et seulement si $0, \ldots, p$ sont des racines du polynôme A, ce qui implique que A est nul puisque c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à p.

$$\langle ., .\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{R}_p[X].$$

2. Pour tous polynômes A, B de $\mathbb{R}_p[X]$:

a) $C(A,B) = \langle A - E(A), B - E(B)\rangle$, donc :

$$\begin{aligned} C(A,B) &= \langle A, B\rangle - \langle A, E(B)\rangle - \langle E(A), B\rangle + \langle E(A), E(B)\rangle \\ &= \langle A, B\rangle - E(B)\langle A, 1\rangle - E(A)\langle 1, B\rangle + E(A)E(B)\langle 1, 1\rangle \\ &= \langle A, B\rangle - E(B)E(A) - E(A)E(B) + E(A)E(B) \\ &= \langle A, B\rangle - E(A)E(B) \end{aligned}$$

d'où $V(A) = \|A\|^2 - E(A)^2$ en prenant $B = A$.

b) On a : $|C(A,B)| \leqslant \sqrt{V(A)V(B)}$; c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux polynômes $A - E(A)$ et $B - E(B)$. Il y a égalité si ces polynômes sont proportionnels, ce qui revient à dire que A est constant ou qu'il existe des réels λ, μ tels que $B = \lambda A + \mu$.

3. Soit $A \in \mathbb{R}_p[X]$ fixé.

a) Une base orthonormale de $\mathbb{R}_0[X]$ est constituée (par exemple) du polynôme 1.

Le projeté orthogonal de A sur $\mathbb{R}_0[X]$ est donc $p_0(A) = \langle 1, A\rangle 1 = E(A)$.

La distance de A à $\mathbb{R}_0[X]$ est $\|A - p_0(A)\| = \|A - E(A)\| = \sqrt{V(A)}$.

b) Posons $A_1 = A - E(A)$. On a immédiatement $\langle 1, A_1\rangle = 0$; de plus, si $\deg(A) \geqslant 1$, la famille $(1, A_1)$ est libre ; c'est donc une base orthogonale du plan vectoriel F. Il reste à la normaliser, en remplaçant A_1 par $A_2 = \dfrac{A_1}{\|A_1\|} = \dfrac{A - E(A)}{\sqrt{V(A)}}$.

(On a utilisé la méthode d'orthonormalisation de Schmidt.)

c) D'après la question précédente, le projeté orthogonal de B sur F est le polynôme :

$p_F(B) = \langle 1, B\rangle 1 + \langle A_2, B\rangle A_2 = E(B) + \dfrac{\langle A - E(A), B\rangle}{V(A)}(A - E(A))$

Or $\langle A - E(A), B\rangle = \langle A, B\rangle - E(A)\langle 1, B\rangle = \langle A, B\rangle - E(A)E(B) = C(A, B)$, d'où :

$$p_F(B) = \frac{C(A,B)}{V(A)}A + E(B) - \frac{C(A,B)}{V(A)}E(A) = \lambda A + \mu$$

avec : $\lambda = \dfrac{C(A,B)}{V(A)}$ et $\mu = E(B) - \dfrac{C(A,B)}{V(A)}E(A)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
d(B,F)^2 &= \|B - p_F(B)\|^2 = \|B\|^2 - \|p_F(B)\|^2 \\
&= E(B)^2 + V(B) - E(\lambda A + \mu)^2 - V(\lambda A + \mu) \\
&= E(B)^2 + V(B) - (\lambda E(A) + \mu)^2 - \lambda^2 V(A) \\
&= E(B)^2 + V(B) - E(B)^2 - \frac{C(A,B)^2}{V(A)} \\
&= \frac{V(A)V(B) - C(A,B)^2}{V(A)}
\end{aligned}$$

On remarque que c'est cohérent avec la réponse à la question 2.b.

Exercice 2.10.

1. $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire canonique, c'est-à-dire celui pour lequel la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est orthonormée.

Soient deux réels a et b et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. On note $B = {}^tAA$, la matrice produit de la transposée de A par A.

a) Rechercher les valeurs propres de B.

b) Calculer le maximum de ${}^tXBX$ lorsque X décrit l'ensemble des vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de norme 1.

2. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique.

Pour tout réel t, on définit la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} t & 2t & 2-t \\ 0 & 2(t-1) & 0 \\ 2-t & -2t & t \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme $\alpha(t)$ qui a pour matrice $M(t)$ dans la base canonique.

a) Rechercher les valeurs propres et vecteurs propres de $M(0)$ et $M(1)$.

b) Construire une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dont au moins 2 vecteurs soient des vecteurs propres à la fois pour $M(0)$ et pour $M(1)$. On ordonnera ces vecteurs pour que la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3) soit symétrique. Ecrire la matrice de $\alpha(t)$ dans la base (e_1, e_2, e_3).

c) Pour quelles valeurs du paramètre t, $\alpha(t)$ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. Le calcul de $B = {}^tAA$ donne

$$B = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

a) La matrice $B - \lambda I_2$ est non inversible si et seulement si ses deux lignes sont proportionnelles, ce qui est équivalent à :

$$(a^2-\lambda)(a^2+b^2-\lambda) - a^2b^2 = \lambda^2 - (2a^2+b^2)\lambda + a^4 = 0$$

Le discriminant Δ vaut $b^2(b^2+4a^2)$, et les valeurs propres de B sont :

$$\lambda_1 = \frac{(2a^2+b^2) - \sqrt{b^2(b^2+4a^2)}}{2} \ ; \ \lambda_2 = \frac{(2a^2+b^2) + \sqrt{b^2(b^2+4a^2)}}{2}$$

b) La matrice B est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Ainsi, il existe $Q \in O_2(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ telles que $B = {}^tQDQ$.

Ainsi ${}^tXBX = {}^t(QX)D(QX) = {}^tYDY$, avec $\|Y\| = \|X\|$, puisque Q est orthogonale.

Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors :

$${}^tYDY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 \leqslant \max(\lambda_1, \lambda_2)\|Y\|^2$$

Donc :

$$\sup_{\|X\|=1} {}^tXBX = \sup_{\|Y\|=1} {}^tYDY = \frac{(2a^2+b^2)+|b|\sqrt{b^2+4a^2}}{2}$$

ce supremum étant atteint pour un vecteur propre unitaire associé à cette valeur propre.

2. a) La matrice $M(0)$ est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est symétrique réelle, donc diagonalisable. Un calcul *via* le pivot de Gauss permet d'obtenir que ses valeurs propres sont -2 et 2, puis que

$\star$ $E_{(2)}(M(0)) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\star$ $E_{(-2)}(M(0))$ est le plan d'équation $x+z=0$ (l'orthogonal du vecteur précédent).

b) De la même façon, on a $M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est de rang 2. Donc 0 est valeur propre de sous-espace propre associé $E_{(0)}(M(1)) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

En effectuant à nouveau un pivot de Gauss sur la matrice $M(1) - \lambda I_3$, on n'obtient qu'une seule autre valeur propre, qui est 2, de sous-espace propre associé égal à $E_{(2)}(M(1)) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $M(1)$ n'est pas diagonalisable.

b) Un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{cases} a+c=0 \\ a-c=0 \end{cases}$, soit $a=c=0$. On peut choisir $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base est :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a : ${}^tP = P = P^{-1}$, et

$$PM(t)P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(t-1) & 0 \\ 0 & \sqrt{2}t & 2(t-1) \end{pmatrix}$$

qui est triangulaire. Ainsi les valeurs propres de $M(t)$ sont $2, 2(t-1)$. Cette matrice est diagonalisable si et seulement si $t = 0$ (autrement le sous-espace propre associé à la valeur propre $2(t-1)$ est de dimension 1).

Exercice 2.11.

1. Soit $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A - B \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{-1} - B^{-1}$ appartient à $GL_n(\mathbb{R})$ et que

$$(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = B(B-A)^{-1}A.$$

2. Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, il en est de même pour C^{-1}.

3. On suppose que A et B sont les matrices de deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $B - A$ soit aussi la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $B(B-A)^{-1}A = A + A(B-A)^{-1}A$.

b) Montrer que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

En déduire que $A^{-1} - B^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Solution :

1. On a :

$$\begin{aligned}(A^{-1} - B^{-1})[B(B-A)^{-1}A] &= A^{-1}B(B-A)^{-1}A - (B-A)^{-1}A \\ &= A^{-1}(B - A + A)(B-A)^{-1}A - (B-A)^{-1}A \\ &= A^{-1}(B-A)(B-A)^{-1}A + A^{-1}A(B-A)^{-1}A \\ &\qquad - (B-A)^{-1}A \\ &= A^{-1}IA + (B-A)^{-1}A - (B-A)^{-1}A = I\end{aligned}$$

Cela suffit pour affirmer que $A^{-1} - B^{-1}$ est inversible, avec :

$$(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = B(B-A)^{-1}A$$

2. La matrice C est symétrique réelle et pour toute colonne X non nulle, on a ${}^tXCX > 0$, donc $CX \neq 0$ et C est inversible.
Soit alors X une colonne non nulle et $Y = C^{-1}X$, alors $X = CY$ et

$${}^tXC^{-1}X = {}^tYCC^{-1}CY = {}^tYCY > 0$$

Comme C^{-1} est encore symétrique, C^{-1} est bien une matrice de produit scalaire.

3 a) $B(B-A)^{-1}A = (B-A+A)(B-A)^{-1}A = A + A(B-A)^{-1}A$

b) Cette matrice est l'inverse d'une matrice symétrique, donc est elle-même symétrique et pour toute colonne X non nulle :

$$\begin{aligned}{}^tX(A^{-1}-B^{-1})^{-1}X &= {}^tXB(B-A)^{-1}AX = {}^tXAX + {}^tXA(B-A)^{-1}AX\\ &= {}^tXAX + {}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX)\end{aligned}$$

Or, comme $B-A$ est une matrice de produit scalaire, il en est de même de $(B-A)^{-1}$ et ${}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX) > 0$. Comme on a également ${}^tXAX > 0$, il vient ${}^tX(A^{-1}-B^{-1})^{-1}X > 0$ et $(A^{-1}-B^{-1})^{-1}$ est une matrice de produit scalaire.

Il en est de même de son inverse et $A^{-1} - B^{-1}$ est une matrice de produit scalaire.

Exercice 2.12.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (selon l'usage on confondra polynôme et fonction polynôme associée). On munit E du produit scalaire φ défini par :

$$\forall (P,Q)\in E^2, \varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx$$

On définit l'application u qui, à tout polynôme P de E, fait correspondre :

$$u(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.

2. On considère la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de E.

a) Déterminer la matrice $M_u \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de u dans cette base. Montrer que la matrice M_u est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ de u que l'on rangera par ordre croissant. On note E_i le sous-espace propre associé à λ_i.

c) Déterminer E_0 et E_1.

3. Pour tout i, soit Q_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

a) Montrer que : $i \neq j \implies \displaystyle\int_{-1}^{1} Q_i(x)Q_j(x)\,dx = 0.$

b) Déterminer le degré de Q_i.

c) Soit $P \in E$ de degré m. Montrer que si l'on a :

$$\forall i \in [\![0, m-1]\!], \int_{-1}^{1} P(x)Q_i(x)\,dx = 0,$$

alors P est un vecteur propre associé à λ_m.

4. On considère pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = [(X^2-1)^k]^{(k)}$ (dérivée $k^{\text{ème}}$ du polynôme $(X^2-1)^k$)

a) Déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_k.

b) Montrer que P_0 et P_1 sont des vecteurs propres de u associés à λ_0 et λ_1 respectivement.

c) Soient deux entiers ℓ et m vérifiant $0 \leqslant m < \ell \leqslant n$. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_m(x)\,dx = 0$. Qu'en déduit-on pour les $P_i, i \in [\![0, n]\!]$?

Solution :

1. On remarque que $u(P) = ((X^2-1)P')'$, donc en intégrant par parties :

$$\varphi(u(P), Q) = \int_{1}^{1} u(P)(x)Q(x)\,dx$$

donne :

$$\begin{aligned}\varphi(u(P), Q) &= \left[(x^2-1)P'(x)Q(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(x^2-1)P'(x)Q'(x)\,dx \\ &= -\int_{-1}^{1}(x^2-1)P'(x)Q'(x)\,dx\end{aligned}$$

Cette dernière expression étant clairement symétrique, on a bien :

$$\varphi(u(P), Q) = \varphi(u(Q), P) = \varphi(P, u(Q))$$

2. a) $u(1) = 0$, $u(X) = 2X$ et pour $i \geqslant 2$,
$u(X^i) = (X^2-1).i(i-1)X^{i-2} + 2X.iX^{i-1} = i(i+1)X^i - i(i-1)X^{i-2}$
d'où :

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & -n(n-1) \\ \vdots & & & & (n-1)n & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

La matrice u est diagonalisable, soit :
$\rightarrow$ parce que ses valeurs propres sont en évidence sur sa diagonale et sont au nombre de $n+1=\dim E$;
$\rightarrow$ parce que M_u traduit un endomorphisme symétrique (mais pas par rapport à une base orthonormée).

b) On vient de le dire :

$$\mathrm{Spec}(u)=\{0,2,6,\dots,n(n+1)\}$$

c) $E_0=\operatorname{Ker} u=\mathbb{R}_0[X]$ et $E_1=\operatorname{Ker}(u-2Id)=\mathrm{Vect}(X)$ (voir 2.a) et le fait que les sous-espaces propres sont tous des droites).

3. a) On a :

$$\begin{aligned}\lambda_i\varphi(Q_i,Q_j)&=\varphi(\lambda_iQ_i,Q_j)=\varphi(u(Q_i),Q_j)=\varphi(Q_i,u(Q_j))=\varphi(Q_i,\lambda_jQ_j)\\&=\lambda_j\varphi(Q_i,Q_j)\end{aligned}$$

et comme $\lambda_i\neq\lambda_j$:

$$\varphi(Q_i,Q_j)=0$$

b) La forme même de la matrice M_u montre que $\deg Q_i=i$.

c) Etant étagée en degrés, la famille $(Q_0,Q_1,\dots,Q_m)$ forme donc une base de l'espace $\mathbb{R}_m[X]$ et P est de la forme $\sum\limits_{j=0}^{m}\alpha_jQ_j$.

$\displaystyle\int_{-1}^{1}P(x)Q_i(x)\,dx=0$ se réduit alors à $\alpha_i\displaystyle\int_{-1}^{1}Q_i^2(x)\,dx$ et comme Q_i n'est pas le polynôme nul, on a $\alpha_i=0$. Ceci étant vrai pour $i\in[\![0,m-1]\!]$, P est bien colinéaire à Q_m, donc est propre pour la valeur propre λ_m.

4. a) $(X^2-1)^k=X^{2k}+\cdots$ donne :

$$[(X^2-1)^k]^{(k)}=(2k)(2k-1)\dots(k+1)X^k+\cdots=\frac{(2k)!}{k!}X^k+\cdots$$

b) $P_0=1$ et $P_1=(X^2-1)'=2X$, donc P_0 est propre pour u pour la valeur propre 1 et P_1 est propre pour la valeur propre 2.

c) Notons $R_k=(X^2-1)^k$, alors $P_k=R_k^{(k)}$ et par une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_\ell(x)P_m(x)\,dx&=\int_{-1}^{1}R_\ell^{(\ell)}(x)R_m^{(m)}(x)\,dx\\&=\big[R_\ell^{(\ell-1)}(x)R_m^{(m)}(x)\big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}R_\ell^{(\ell-1)}(x)R_m^{(m+1)}(x)dx\end{aligned}$$

Comme -1 et 1 sont valeurs propres d'ordre ℓ de R_ℓ, ces nombres sont racines de toutes les dérivées de R_ℓ jusqu'à la dérivée $(\ell-1)^{\text{ème}}$ incluse. Il reste donc :

$$\int_{-1}^{1} R_\ell^{(\ell)}(x) R_m^{(m)}(x)\, dx = -\int_{-1}^{1} R_\ell^{(\ell-1)}(x) R_m^{(m+1)}(x) dx$$

On recommence, et au bout de ℓ intégrations par parties, il vient

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_m(x)\, dx = (-1)^\ell \int_{-1}^{1} R_\ell(x) R_m^{(m+\ell)}(x) dx = 0$$

car $R_m^{(m+\ell)}$ est le polynôme nul.

Comme $(P_0, \dots, P_{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$, on a par linéarité :

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x) Q_i(x)\, dx = 0 \text{ pour tout } i \text{ de } [\![0, m-1]\!]$$

et par le résultat 3. c), P_ℓ est propre pour u pour la valeur propre λ_ℓ.

Exercice 2.13.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

Si $P \in E$, on note P' le polynôme dérivé défini par

$$P' = \sum_{p=1}^{r} p a_p X^{p-1} \text{ lorsque } P = \sum_{p=0}^{r} a_p X^p.$$

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme P de E soit divisible par son polynôme dérivé (c'est-à-dire : il existe $Q \in E$ tel que $P = QP'$)

On pourra distinguer les cas : P est le polynôme nul, P est une constante non nulle, P est de degré 1, P est de degré $\geqslant 2$. Dans ce dernier cas, on cherchera une condition sur le nombre de racines distinctes de P.

2. Soit u l'application définie sur E par :

$$\forall\, P \in E, \forall\, x \in \mathbb{C}, (u(P))(x) = (x^2+1)P'(x) - nxP(x)$$

Montrer que u est un endomorphisme de E.

3. Vérifier que le complexe λ est valeur propre de u si et seulement s'il existe un polynôme P non nul de E tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{C}, (x^2+1)P'(x) = (nx + \lambda)P(x) \qquad (1)$$

4. a) Montrer que $-in$ et in sont valeurs propres de u (avec $i^2 = -1$).

b) Soit $\lambda \notin \{-in, in\}$. Montrer que P ne peut être solution de (1) que s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $P(x) = (x^2+1)^k Q(x)$. Que devient alors l'égalité (1) ?

c) Montrer que $-i(n-2k)$ et $i(n-2k)$ sont valeurs propres de u.

d) En déduire que u est diagonalisable.

Solution :

1. $\star$ Si $P = 0$, alors $P' = 0$ et P' divise P.
$\star$ Si P est un polynôme constant non nul, $P' = 0$ et P' ne divise pas P.
$\star$ Si $\deg P = 1$, P' est constant non nul et P' divise P.

Supposons donc $\deg P \geqslant 2$, soient $z_1, \dots, z_k$ les racines (dans $\mathbb{C}$) distinctes de P' et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ leurs ordres de multiplicité. On a $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = \deg P' = \deg P - 1$.
Comme P' divise P, $z_1, \dots, z_k$ sont aussi racines de P et on sait alors que les ordres de multiplicité sont $\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_k + 1$.
On a donc :
$$(\alpha_1 + 1) + \cdots + (\alpha_k + 1) = \deg P - 1 + k \leqslant \deg P$$
Ainsi $k \leqslant 1$ et comme $k \geqslant 1$, $k = 1$: z_1 est racine de P d'ordre $\alpha_1 = \deg P$, ce qui signifie que P est de la forme :
$$P(X) = a(X - z)^r$$

2. La linéarité de u est claire et si $P = a_n X^n + \cdots + a_0$, alors :
$u(P) = (X^2 + 1)(na_n X^{n-1} + \cdots) - nX(a_n X^n + \cdots) = (na_n - na_n)X^{n+1} + \cdots$
et $u(P)$ est bien de degré inférieur ou égal à n.
$$u \in \mathcal{L}(E)$$

3. Evident.

4. a) Pour $\lambda = -ni$, la relation (1) s'écrit : $\forall\, x \in \mathbb{C}, (x + i)P'(x) = nP(x)$.
D'après la première question $-i$ est la seule racine de P, et la considération des coefficients dominants dans (1) montre que P est de degré exactement n, donc :
$$-ni \text{ est valeur propre de } u \text{ et } E_{(-ni)}(u) = \mathrm{Vect}((X + i)^n)$$
De la même façon ni est valeur propre de u, avec $E_{(ni)}(u) = \mathrm{Vect}((X - i)^n)$

b) La relation (1) montre que si P est solution avec $\lambda \notin \{-in, in\}$, alors $P(i) = P(-i) = 0$ et P est divisible par $(X^2 + 1)$.
Si k est le plus grand des entiers p tels que $(X^2 + 1)^p$ divise P, on écrit :
$$P(X) = (X^2 + 1)^k Q(X), \text{ avec } 2k \leqslant n$$
En remplaçant dans (1), il vient :
$$(X^2 + 1)Q'(X) = ((n - 2k)X + \lambda)Q(X) \quad (2)$$

c) En appliquant les résultats de 4. a) à l'entier $n-2k$ et à Q, on trouve que pour $\lambda = -(n-2k)i$, $Q(X) = (X+i)^{n-2k}$ est solution de (2), donc que $P(X) = (X^2+1)^k(X+i)^{n-2k}$ est solution de (1).

De la même façon, pour $\lambda = (n-2k)i$, $P(X) = (X^2+1)^k(X-i)^{n-2k}$ est solution de (1).

d) Ainsi, $-ni, -(n-2)i, \ldots, -(n-2k)i, \ldots, ni$ sont valeurs propres de u. Ce qui nous fait $n+1$ valeurs propres pour u (k varie de 0 à n) et comme $\dim E = n+1$, u est bien diagonalisable.

Exercice 2.14.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$ muni de sa base canonique $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et du produit scalaire canonique noté $\langle \mid \rangle$. On désigne par $\| \ \|$ la norme associée.
L'ensemble $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p. On confond l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ des matrices à p lignes et 1 colonne et $\mathbb{R}^p$.
Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.
On dit qu'une matrice A est positive si elle est symétrique et si $\langle A(x) \mid x \rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.
On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^p$.

1. Montrer qu'une matrice symétrique est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

2. Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ fixée ; on désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est A. Si λ est une valeur propre de A, on note p_λ le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id)$.

a) Justifier les propriétés suivantes :
- $p_{\lambda_1} \circ p_{\lambda_2} = 0$, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
- $\sum\limits_{\lambda \in \sigma(A)} p_\lambda = Id$.

b) Montrer que l'endomorphisme $v = \sum\limits_{\lambda \in \sigma(A)} \sqrt{\lambda}\, p_\lambda$ vérifie l'égalité : $v \circ v = u$.
En déduire que la matrice R associée à v est solution de l'équation $X^2 = A$.

c) Soit Y une matrice positive telle que $Y^2 = A$. On note w l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est Y. Montrer que $\sigma(Y) = \left\{\sqrt{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\right\}$.

Prouver ensuite que si $\lambda \in \sigma(A)$, on a $F_{\sqrt{\lambda}} = \mathrm{Ker}(w - \sqrt{\lambda}Id) \subset E_\lambda$. En déduire que $w = v$, puis qu'il existe une unique matrice positive $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ solution de l'équation $X^2 = A$.
On définit ainsi la racine carrée de la matrice positive A et on la note $\sqrt{A}$.

d) Montrer que la matrice $\sqrt{A}$ commute avec A.

Solution :

1. $\star$ Soit A positive, λ une valeur propre de A et x un vecteur unitaire propre associé. On a :

$$\lambda = \lambda\langle x, x\rangle = \langle A(x), x\rangle \geqslant 0$$

$\star$ Réciproquement, si toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles, on considère une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres (non nécessairement distinctes) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Pour $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, on a :

$$\langle A(x), x\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k e_k, \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell e_\ell\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geqslant 0$$

2. a) $\star$ Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $E_{\lambda_2} \perp E_{\lambda_1}$, donc $\mathrm{Im}(p_{\lambda_2}) = E_{\lambda_2} \subset E_{\lambda_1}^{\perp} = \mathrm{Ker}(p_{\lambda_1})$, soit :

$$p_{\lambda_1} \circ p_{\lambda_2} = 0$$

$\star$ $\mathbb{R}^p$ est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de A, donc :

$$\sum_{\lambda\in\sigma(A)} p_\lambda = Id.$$

b) On développe :

$$v \circ v = \Big(\sum_{\lambda\in\sigma(A)} \sqrt{\lambda}\, p_\lambda\Big) \circ \Big(\sum_{\mu\in\sigma(A)} \sqrt{\mu}\, p_\mu\Big) = \sum_{\lambda,\mu} \sqrt{\lambda}\sqrt{\mu} p_\lambda \circ p_\mu = \sum_{\lambda} \lambda p_\lambda.$$

Ainsi en revenant à la base $(e_1, \dots, e_n)$ vue à la question 1. :

$$v \circ v(x) = \sum_k \lambda_k x_k = u\Big(\sum_k x_k e_k\Big) = u(x).$$

Par suite la matrice R vérifie bien $R^2 = A$.

c) Soit μ une valeur propre de w et x un vecteur propre associé.

On a $u(x) = w^2(x) = \mu^2 x$ et donc x est vecteur propre de u associé à la valeur propre μ^2. Comme A est positive, ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}^+$ et il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $\mu = \sqrt{\lambda}$. Donc $\sigma(Y) \subset \{\sqrt{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\}$.

Soit $y \in \mathrm{Ker}(w - \sqrt{\lambda}Id)$, on a $w(x) = \sqrt{\lambda}x$ et $u(x) = w^2(x) = \lambda x$, donc $F_{\sqrt{\lambda}} \subset E_\lambda$.

Or u et w sont symétriques, donc :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda \text{ et } E = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} F_{\sqrt{\lambda}}$$

Ainsi, les inclusions vues précédemment sont toutes des égalités, ce qui prouve que $\sigma(Y) = \{\sqrt{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\}$, avec $F_{\sqrt{\lambda}} = E_\lambda$ et donc $w = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \sqrt{\lambda} p_\lambda = v$.
Ce qui est le résultat voulu.

d) Il suffit d'écrire :

$$\sqrt{A}.A = \sqrt{A}.(\sqrt{A})^2 = (\sqrt{A})^3 = (\sqrt{A})^2.\sqrt{A} = A\sqrt{A}$$

Exercice 2.15.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. a) Montrer que A est semblable à une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

b) Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $b_n \neq 0$.

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que B soit une matrice de projecteur.

2. a) Montrer qu'il existe deux vecteurs-colonne U et V appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = U\,{}^tV$, où ${}^tV$ désigne la transposée de V.

b) Soit (U, V) deux vecteurs-colonne tels que $A = U\,{}^tV$.
Déterminer, en fonction de U et V, tous les couples $(U', V') \in \big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2$ tels que $A = U'\,{}^tV'$.

c) En déduire que le réel ${}^tV'\,U'$ est indépendant du couple (U', V') vérifiant $A = U'\,{}^tV'$. On le note $T(A)$.

d) Vérifier que si B est semblable à A, alors $T(B) = T(A)$.

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur $T(A)$ pour que A soit diagonalisable.

Solution :

1. a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ainsi associé à A.

Comme A est de rang 1, on a $\dim \operatorname{Ker} u = n-1$ et on peut construire une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ telle que $(e'_1, \dots, e'_{n-1})$ soit une base de $\operatorname{Ker} u$. Si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

avec $u(e'_n) = \sum_{k=1}^{n} b_k e'_k$.

b) B est trigonale supérieure, donc ses valeurs propres se lisent dans sa diagonale et on distingue deux cas.

$\rightarrow$ Si $b_n = 0$, $\operatorname{Spec}(B) = \{0\}$ et comme B est de rang 1, on a $B \neq 0$ et B n'est pas diagonalisable.

$\rightarrow$ Si $b_n \neq 0$, $\operatorname{Spec}(B) = \{0, b_n\}$â et comme $E_{(0)}(B) = \operatorname{Ker} B$ est de dimension $n-1$, alors on a nécessairement $\dim E_{(b_n)}(B) = 1$ (des sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes sont toujours en somme directe) et B est diagonalisable.

c) B est une matrice de projecteur si et seulement si $b_n = 1$. En effet, B est une matrice de projecteur si et seulement si B est diagonalisable telle que $\operatorname{Spec} B \subset \{0, 1\}$.

2. a) A est de rang 1, il existe donc une colonne U non nulle, telle que toutes les colonnes de A sont proportionnelles à U : $\forall j \in [\![1, n]\!], \exists\, \alpha_j \in \mathbb{R}, C_j = v_j U$. En notant ${}^tV = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$, on a alors :

$$A = U.{}^tV$$

b) La colonne U, qui engendre $\operatorname{Im} A$, est définie à un coefficient multiplicatif non nul près et si on change U en αU, alors V est changée en $\dfrac{1}{\alpha}V$.

c) ${}^tV'U' = \dfrac{1}{\alpha}{}^tV\alpha U = {}^tVU$.

d) Si $B = P^{-1}U.{}^tVP = (P^{-1}U)^t({}^tPV)$, alors :

$$T(B) = {}^t({}^tPV)(P^{-1}U) = {}^tVPP^{-1}U = {}^tVU = T(A)$$

3. Pour la matrice B de l'énoncé, on a :

$$U = {}^t\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}, V = {}^t\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $T(B) = {}^tVU = b_n = T(A)$ et on a vu que :

$$\text{si } \operatorname{rg}(A) = 1, \text{ alors } A \text{ diagonalisable} \iff T(A) \neq 0$$

Exercice 2.16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = I - C^tC \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

où C est un vecteur-colonne non nul, ${}^tC$ la transposée de C et I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On confond $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les vecteurs propres associés.

2. A quelle condition sur C l'application f est-elle une symétrie ? Préciser celle-ci.

3. A quelle condition sur C l'application f est-elle une projection ? Préciser celle-ci.

4. Dans cette question, $n = 4$ et $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On note H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x-y+z-t = 0$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ satisfont l'équation $x - y + z - t = 0$.

a) Quelle est la dimension de H ? On justifiera la réponse.

b) Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le réel α défini par $\alpha = \inf\big\{\|U - X\|, X \in H\big\}$.

La valeur α est-elle atteinte et si oui, préciser pour quel(s) vecteur(s) de H.

c) Déterminer, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice B de la projection orthogonale sur H.

Solution :

1. $\star$ On a ${}^tA = {}^t(I - C.{}^tC) = I - {}^{tt}C.{}^tC = I - C.{}^tC = A$. Donc A est symétrique réelle et par conséquent est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\star$ Soit X une matrice colonne, et λ un scalaire. On a :

$$AX = \lambda X \iff (I - C.{}^tC)X = \lambda X \iff ({}^tCX)C = (1-\lambda)X$$

(en effet, ${}^tCX$ est une matrice carrée d'ordre 1, que l'on confond avec son unique coefficient et on peut placer ce scalaire dans n'importe quelle position)

$\rightarrow$ Si $\lambda = 1$, il reste ${}^tCX = 0$ (C est non nulle), donc 1 est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est l'hyperplan orthogonal à C.

$\rightarrow$ Si $\lambda \neq 1$, X est nécessairement colinéaire à C et comme

$$AC = (I - C.{}^tC)C = C - C({}^tCC) = (1 - {}^tCC)C$$

$\alpha = 1 - {}^tCC = 1 - \|C\|^2$ est valeur propre de A, de sous-espace propre associé la droite engendrée par C.

$$E_{(1)}(A) = \mathrm{Vect}(C)^\perp \ ; \ E_{(\alpha)}(A) = \mathrm{Vect}\, C$$

2. f est une symétrie si et seulement si $\alpha = -1$, soit si et seulement si $\|C\| = \sqrt{2}$, et f est alors la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(C)^\perp$.

3. f est une projection si et seulement si $\alpha = 0$, soit si et seulement si $\|C\| = 1$, et f est alors la projection orthogonale sur l'hyperplan $\mathrm{Vect}(C)^\perp$.

4. a) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle définie sur un espace de dimension 4, donc $\dim H = 3$.

b) On sait que le réel α est atteint pour un vecteur V et un seul, à savoir la projection orthogonale de U sur H. Comme C est unitaire, la question 3. montre ce vecteur V est défini par :

$$V = (I - C^tC)U = U - C({}^tCU) = U - ({}^tCU)C = U - C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

c) Et $B = I - C^tC = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

Exercice 2.17.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que u est périodique s'il existe un entier naturel *non nul* p tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$. On dit alors que p est une période de la suite u. On note p_u la plus petite période non nulle de la suite u, et on admet que toutes les autres périodes sont des multiples de p_u.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites réelles périodiques, et $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$.

2. Soit $u \in \mathcal{P}$. On note $M(u) = \dfrac{1}{p_u}\sum\limits_{k=0}^{p_u-1} u_k$.

a) Calculer $M(u)$ lorsque u est une suite constante.

b) Montrer que, pour toute période p de la suite u, on a : $M(u) = \dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1} u_k$.

c) Démontrer que l'application $M : \mathcal{P} \to \mathbb{R}, u \mapsto M(u)$ est une application linéaire.

d) On note $\mathcal{P}_0$ le noyau de M, et $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites constantes. Démontrer que $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{C}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{P}$.

3. Pour $u \in \mathcal{P}$, on définit la suite réelle u' par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u'_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme $D : \mathcal{P} \to \mathcal{P}, u \mapsto u'$.

b) Déterminer le noyau et l'image de D.

Solution :

1. La suite nulle est périodique, donc $\mathcal{P}$ est non vide et toute suite périodique ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes donc est bornée et $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$.
D'autre part, si u et v sont périodiques de périodes fondamentales respectives p_u et p_v, alors ces deux suites sont, par exemple, $p = p_u \times p_v$-périodiques (on peut aussi prendre le ppcm de ces deux périodes) et il est clair que pour tout scalaire λ, $u + \lambda v$ est encore périodique de période p.
Ainsi $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites bornées (on ne demande pas de montrer que $\mathcal{B}$ est un espace vectoriel).

2. a) Si u est constante de valeur λ, on a clairement $M(u) = \lambda$.

b) Toute période p de u est un multiple de p_u : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = np_u$ et :

$$\sum_{k=0}^{p-1} u_k = \sum_{j=0}^{n-1}\ \sum_{k=jp_u}^{(j+1)p_u-1} u_k = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p_u-1} u_{jp_u+k} = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p_u-1} u_k = n\sum_{k=0}^{p_u-1} u_k$$

Donc :

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_k = \frac{n}{p}\sum_{k=0}^{p_u-1} u_k = \frac{1}{p_u}\sum_{k=0}^{p_u-1} u_k = M(u)$$

c) Deux suites u et v périodiques ont une période commune, par exemple $p = p_u p_v$, et $u + \lambda v$ admet p pour période, quel que soit le scalaire λ, d'où immédiatement, par propriété des opérations :

$$M(u+\lambda v) = M(u) + \lambda M(v).$$

d) Toute suite périodique s'écrit d'une façon et d'une seule comme somme d'une suite périodique de moyenne M nulle et d'une suite constante, à savoir :

$u = u - M(u)\mathbf{1} + M(u)\mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est la suite constante égale à 1.

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{C}$$

3. a) Si u est périodique, alors u' est clairement périodique de même période, donc $u' \in \mathcal{P}$ et la linéarité de D est évidente.

b) $\star$ $u \in \operatorname{Ker} D \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \iff u \in \mathcal{C}$.

$$\operatorname{Ker} D = \mathcal{C}$$

$\star$ Si p est une période de u, donc de u' :

$$M(u') = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u'_k = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_{k+1} - u_k = u_0 - u_p = 0, \text{ donc } u' \in \mathcal{P}_0$$

$\star$ Réciproquement, soit $v \in \mathcal{P}_0$ de période p, on définit alors la suite u par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

on a, pour tout n : $u_{n+p} - u_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k = \sum_{k=0}^{p-1} v_k = pM(v) = 0$, donc u est périodique et p est une période de u.

De plus, par construction, $D(u) = v$, donc $v \in \operatorname{Im} D$.

$$\operatorname{Im} D = \mathcal{P}_0$$

Exercice 2.18.

Soit E un espace euclidien. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire de E et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée. On dit qu'un endomorphisme u de E est une contraction, si on a $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$, pour tout vecteur $x \in E$.

1. Dans cette question, on prend pour E l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et on considère l'endomorphisme u dont la matrice A dans le base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux réels non nuls fixés tels que $a^2 + b^2 \leqslant 1$.
Montrer que u est une contraction.

2. On considère un endomorphisme u de E.

a) Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$, on considère l'endomorphisme ${}^t u$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est la transposée de A. Montrer que ${}^t u$ est l'unique endomorphisme v de E qui vérifie, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

En déduire que la définition de ${}^t u$ ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

b) Soit $a \in E$. Prouver que $\|a\|$ est la borne supérieure de l'ensemble des réels $|\langle a, b \rangle|$ lorsque b décrit la boule unité de E, c'est-à-dire que l'on a :

$$\|a\| = \sup \{|\langle a, b \rangle| \, , \|b\| \leqslant 1\}$$

En déduire que si u est une contraction, alors ${}^t u$ est encore une contraction.

3. On considère une contraction u sur l'espace E.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de u, alors $\lambda \in [-1, 1]$.

b) Prouver que $\mathrm{Ker}({}^t u - Id) = \mathrm{Ker}(u - Id)$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

c) Démontrer que $\mathrm{Ker}(u - Id)$ et $\mathrm{Im}(u - Id)$ sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux.

d) Si $x \in E$, on pose, pour tout entier strictement positif n :

$$u_n(x) = \frac{1}{n}(x + u(x) + \cdots + u^{n-1}(x)).$$

Soit $p(x)$ la projection orthogonale de x sur $\mathrm{Ker}(u - Id)$. En utilisant la question précédente, prouver que $(\|u_n(x) - p(x)\|)_n$ converge vers 0.

Solution :

1. Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$, on a :

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= x_1^2 + (ax_2 - bx_3)^2 + (bx_2 + ax_3)^2 = x_1^2 + (a^2 + b^2)(x_2^2 + x_3^2) \\ &\leqslant x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|^2 \end{aligned}$$

donc u est une contraction.

2. a) On a : $\langle u(x), y\rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = {}^tX({}^tAY) = \langle x, {}^tu(y)\rangle$.

Soient v_1, v_2 vérifiant tous deux la relation demandée. On a alors :

$$\forall\, x, y \in E, \langle x, v_1(y) - v_2(y)\rangle = 0$$

et $v_1(y) - v_2(y)$ est orthogonal à tout l'espace, donc est le vecteur nul, ce qui prouve que $v_1 = v_2$.

b) $\star$ Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a : $|\langle a, b\rangle| \leqslant \|a\|.\|b\| = \|a\|$.

Réciproquement, si on prend $b = \dfrac{1}{\|a\|}a$, alors $\langle a, b\rangle = \dfrac{1}{\|a\|}\|a\|^2 = \|a\|$

Donc :

$$\sup\big\{|\langle a, b\rangle|, \|b\| \leqslant 1\big\} = \|a\|$$

Soit alors u une contraction et b un vecteur de la boule unité. On a :

$$|\langle {}^tu(a), b\rangle| = |\langle a, u(b)\rangle \leqslant \|a\|.\|u(b)\| \leqslant \|a\|.\|b\| \leqslant \|a\|$$

En prenant la borne supérieure lorsque b décrit la boule unité, le résultat précédent donne $\|{}^tu(a)\| \leqslant \|a\|$ et ${}^tu$ est encore une contraction.

3. a) Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé. On a :

$$|\lambda|\|x\| = \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

et donc $|\lambda| \leqslant 1$.

b) $\star$ Soit $x \in \mathrm{Ker}({}^tu - Id) \setminus \{0\}$, écrivons $u(x) = \alpha x + y$, avec y orthogonal à x. On a :

$$\alpha\|x\|^2 = \langle u(x), x\rangle = \langle x, {}^tu(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

donc $\alpha = 1$ et par le théorème de Pythagore, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Comme $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$, il reste $\|y\| = 0$ et $y = 0$, soit $u(x) = x$ et $x \in \mathrm{Ker}(u - Id)$.

$\star$ On peut procéder de la même façon pour obtenir $\mathrm{Ker}(u - Id) \subset \mathrm{Ker}({}^tu - Id)$, ou mieux, remarquer que ${}^{tt}u = u$.

c) Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - Id)$ et $y \in \mathrm{Im}(u - Id)$. Il existe $a \in E$ tel que $y = u(a) - a$. On a :

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle x, u(a)\rangle - \langle x, a\rangle = \langle {}^tu(x), a\rangle - \langle x, a\rangle = \langle ({}^tu - Id)(a), a\rangle\\ &= \langle 0, a\rangle = 0\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(u - Id)$ et $\mathrm{Im}(u - Id)$ sont orthogonaux. Comme les dimensions sont *ad hoc*, on conclut :

$$E = \mathrm{Ker}(u - Id) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(u - Id)$$

d) Soit $x \in E$, on écrit $x = a + b$, avec $a = p(x) \in \mathrm{Ker}(u - Id)$, et $b \in \mathrm{Im}(u - Id)$. Il existe donc un vecteur c dans E tel que $b = c - u(c)$ et comme $u(a) = a$, il vient :

$$\begin{aligned}u_n(x) &= a + \frac{1}{n}(b + u(b) + \cdots + u^{n-1}(b))\\ &= a + \frac{1}{n}[c - u(c) + (u(c) - u^2(c)) + \cdots + (u^{n-1}(c) - u^n(c)]\\ &= a + \frac{1}{n}[c - u^n(c)]\end{aligned}$$

et comme u est une contraction, on a donc :

$$\|u_n(x) - p(x)\| = \|u_n(x) - a\| \leqslant \frac{1}{n}(\|c\| + \|u^n(c)\|) \leqslant \frac{2}{n}\|c\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exercice 2.19.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$.
On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

1. Dans cette question, on suppose que A est inversible.

a) Justifier que f vérifie $f \circ f = -id$.

b) Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si la famille $\big(u, v, f(u)\big)$ est libre, alors la famille $\big(u, v, f(u), f(v)\big)$ est libre.

c) En déduire que n ne peut pas être égal à 3.

Dans la suite, on suppose $n = 3$.

2. On note $F = \mathrm{Ker}(f^2 + id)$.

a) Montrer que $E = \mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus F$.

b) Montrer que F est stable par f, et que $\dim(F) \neq 1$.

c) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. a) Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f)$, e_2 un vecteur non nul de F et $e_3 = f(e_2)$.
Justifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

b) Exprimer la matrice B de f dans cette base.

Solution :

1. a) Si A est inversible, la relation $A^3 + A = 0$ est équivalente à $A^2 + I = 0$ et on a bien $f \circ f = -id$.

b) Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha u + \beta v + \gamma f(u) + \delta f(v) = 0$.
En appliquant f, il vient puisque $f^2 = -id$:

$$\alpha f(u) + \beta f(v) - \gamma u - \delta v = 0$$

En éliminant $f(v)$ entre les deux relations, il vient :

$$(\alpha\beta + \gamma\delta)u + (\beta^2 + \delta^2)v + (\beta\gamma - \alpha\delta)f(u) = 0$$

et la liberté de cette famille donne : $\begin{cases} \alpha\beta + \gamma\delta = 0 \\ \beta^2 + \delta^2 = 0 \\ \beta\gamma - \alpha\delta = 0 \end{cases}$, d'où $\beta = \delta = 0$.

Il reste donc $\alpha u + \gamma f(u) = 0$ et la liberté de $(u, f(u))$ donne $\alpha = \gamma = 0$.

$$\big(u, v, f(u)\big) \text{ libre } \implies \big(u, v, f(u), f(v)\big) \text{ libre}$$

c) On a $f \circ f = -id$, donc f n'a aucune valeur propre et pour tout vecteur u non nul, la famille $(u, f(u))$ est libre.

Si on a $n > 2$, alors on peut trouver un vecteur v tel que $(u, f(u), v)$ soit libre et dans ce cas $\big(u, v, f(u), f(v)\big)$ est aussi libre, ce qui impose d'avoir $n \geqslant 4$. On ne peut donc pas avoir $n = 3$ (dans le cas où A est inversible).

2. a) $\star$ Soit $u \in \operatorname{Ker} f \cap F$, alors $f(u) = 0$ et $f^2(u) + u = 0$; il s'ensuit clairement $u = 0$, donc $\operatorname{Ker} f$ et F sont en somme directe.

$\star$ Soit $u \in E$, on écrit $u = [u + f^2(u)] - f^2(u)$.

Comme $f^3 + f = 0$, on a :

$f(u + f^2(u)) = f(u) + f^3(u) = 0$ et

$(f^2 + id)(-f^2(u)) = -f^4(u) - f^2(u) = -f(f^3(u) + f(u)) = 0$.

Ainsi le premier vecteur est dans $\operatorname{Ker} f$ et le second dans $\operatorname{Ker}(f^2 + id)$ et E est somme de ces deux espaces. Finalement :

$$E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + id)$$

b) $u \in F \implies f^2(u) + u = 0 \implies f(f^2(u) + u) = 0 \implies f^2(f(u)) + f(u) = 0$
$\implies f(u) \in F$, donc F est stable par f.

Si on avait $\dim F = 1$, alors tout vecteur u non nul de F serait tel que $f(u)$ soit proportionnel à u (par stabilité de F), on aurait alors $f(u) = \lambda u$ et $f^2(u) + u = 0$ devient $\lambda^2 + 1 = 0$, ce qui n'est pas raisonnable dans $\mathbb{R}$.

c) On a donc $\dim \operatorname{Ker} f \neq 2$. Or f n'est pas bijectif (on est dans le cas $n = 3$, voir fin de la question 1.) et f n'est pas l'application nulle. Ne reste que la possibilité :

$$\dim \operatorname{Ker} f = 1$$

3. a) F est stable par f et la restriction de f à F est sans vecteur propre, donc la famille $(e_2, f(e_2))$ est une base de F. Ainsi, par concaténation, (e_1, e_2, e_3) est une base de E adaptée à la somme directe $\operatorname{Ker} f \oplus F$.

b) On a $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = f^2(e_2) = -e_2$, car $e_2 \in \operatorname{Ker}(f^2 + id)$, donc :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On confondra dans cet exercice polynôme et fonction polynôme sur le segment $[-1, 1]$ associée.

1. a) Montrer que pour tous P et Q éléments de E_n, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ est convergente.

b) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ est un produit scalaire sur E_n.

2. Soit φ définie sur E_n par :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$$

où P' et P'' désignent les deux premiers polynômes dérivés du polynôme P.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de E_n.

b) φ est-il inversible ?

c) Montrer que φ est diagonalisable.

3. a) Montrer que pour tous P et Q de E_n :

$$\langle\varphi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,dt$$

b) Retrouver ainsi le fait que φ est diagonalisable.

Solution :

1. a) La fonction à intégrer est continue sur $]-1, 1]$ et :

$$\lim_{t \to -1^+} (1+t)^{2/3}P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = 0$$

Ainsi, la règle de Riemann donne la convergence demandée.

b) $s : (P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est clairement une forme bilinéaire symétrique et positive.

Enfin si $s(P, P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = 0$, ceci prouve, par continuité et positivité de la fonction à intégrer, que la fonction à intégrer est nulle en tout point de $]-1,1[$, donc que P admet une infinité de racines et est le polynôme nul.

2. a) $\star$ La linéarité de φ résulte de la linéarité de la dérivation et des propriétés des opérations.

$\star$ Si $\deg(P) \leqslant n$, alors $\deg\big((X^2+1)P''\big) \leqslant n$ et $\deg\big((2X+1)P'\big) \leqslant n$, donc $\deg \varphi(P) \leqslant n$

$$\varphi \subset \mathcal{L}(E_n)$$

b) $\operatorname{Ker}\varphi$ contient $E_0 = \mathbb{R}_0[X]$, donc φ n'est pas injective et *a fortiori* pas inversible.

c) On a :

$$\varphi(1) = 0, \varphi(X) = 2X+1, \ldots, \varphi(X^k) = k(k+1)X^k + \cdots, \ldots$$

Ainsi la matrice dans la base canonique de φ est trigonale supérieure, de coefficients diagonaux : $0, 2, 6, \ldots, k(k+1), \ldots, n(n+1)$.

Les valeurs propres de φ sont ainsi mises en évidence, car se lisent sur la diagonale. Donc φ admet $(n+1)$ valeurs propres, ce qui prouve que φ est diagonalisable.

3. a) On part de l'expression de droite et on intègre par parties :

$v'(t) = Q'(t) \Longleftarrow v(t) = Q(t)$

$u(t) = (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t) \implies$

$$u'(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\big((1-t^2)P''(t) - (2t+1)P'(t)\big)$$

Comme $u(1)v(1) = 0$ et $u(-1)v(-1) = 0$ et u, v de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert d'intégration, on peut procéder directement sur le segment $[-1,1]$, et

$$I = \int_{-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\big((1-t^2)P''(t) - (2t+1)P'(t)\big)dt = \langle \varphi(P), Q\rangle$$

b) On vient de trouver une expression de $\langle \varphi(P), Q\rangle$ clairement symétrique par rapport à P et Q, donc $\langle \varphi(P), Q\rangle = \langle P, \varphi(Q)\rangle$ et φ est un endomorphisme de E_n symétrique pour le produit scalaire considéré. On retrouve bien le fait que φ est diagonalisable.

Exercice 2.21.

Soit a, b, c trois réels et M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{C}(M) = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid XM = MX\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. On suppose dans cette question que $ac > 0$.
Déterminer les éléments propres de M. En déduire que M est diagonalisable.

On suppose désormais que $ac > 0$ et $b^2 \neq ac$.

3. a) Soit X un élément de $\mathcal{C}(M)$. Soit λ une valeur propre de M et u un vecteur propre associé. Montrer qu'il existe un réel α tel que $Xu = \alpha u$.

b) En déduire que X est diagonalisable.

4. a) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(M)$.

b) Donner une base de $\mathcal{C}(M)$, lorsque $a = c$. L'espace vectoriel $\mathcal{C}(M)$ est-il alors constitué de matrices symétriques ?

Solution :

1. La matrice nulle commute avec M et si A, B commutent avec M, alors pour tout scalaire λ :

$$(A + \lambda B)M = AM + \lambda BM = MA + \lambda MB = M(A + \lambda B)$$

Et $\mathcal{C}(M)$ est stable par combinaison linéaire, donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. $M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & c \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ a & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 0 & -\lambda \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & c \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} a & 0 & -\lambda \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & ac-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi M admet pour valeurs propres b, $\sqrt{ac}$ et $-\sqrt{ac}$.

$\rightarrow$ Si $b^2 \neq ac$, M a trois valeurs propres et donc est diagonalisable.

$\rightarrow$ Si $b = \sqrt{ac}$, on voit que E_b est engendré par les vecteurs $(0, 1, 0)$ et $(1, 0, \sqrt{a/c})$, tandis que $E_{-\sqrt{ac}}$ est engendré par $(1, 0, -\sqrt{a/c})$, donc M est encore diagonalisable.

$\rightarrow$ Si $b = -\sqrt{ac}$, E_b est engendré par $(0,1,0)$ et $(1,0,-\sqrt{a/c})$, tandis que $E_{\sqrt{ac}}$ est engendré par $(1,0,\sqrt{a/c})$, donc M est encore diagonalisable.

3. Les hypothèses faites montrent que M admet trois valeurs propres et les sous-espaces propres sont donc de dimension 1.

a) $Mu = \lambda u$ donne $XMu = \lambda Xu$, soit $MXu = \lambda Xu$ et $Xu \in E_\lambda(M)$, donc Xu est colinéaire à u :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, Xu = \alpha u$$

b) En particulier X est diagonalisable, puisque la base

$$\mathcal{B} = (0,1,0), (1,0,\sqrt{a/c}), (1,0,-\sqrt{a/c}))$$

est propre à la fois pour M et pour X.

4. a) Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, alors X est de la forme PDP^{-1}, où D est une matrice diagonale quelconque (car $X = P\Delta P^{-1}$, avec Δ diagonale et les matrices diagonales commutent entre-elles), donc :

$$\dim \mathcal{C}(M) = 3$$

b) Si $a = c$, on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et il est alors plus agréable de normaliser les vecteurs propres, pour prendre $P' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, qui est une matrice othogonale et les matrices de $\mathcal{C}(M)$ sont alors de la forme $P'DP'^{-1} = P'D\,{}^tP'$, et ce sont des matrices symétriques.

Exercice 2.22.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ et on note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.

On appelle isométrie de $\mathbb{R}^n$ tout endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$, vérifiant, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

1. Montrer que u est une isométrie si et seulement si pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

2. Soit u un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^2 = I$, où I représente l'application identité de $\mathbb{R}^n$. Montrer que u est une isométrie.

3. Soit u un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$, montrer que u est une isométrie. A-t-on la réciproque ?

4. Soit l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$. Montrer que u est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $u(S) = S$.

5. Soit u une isométrie de $\mathbb{R}^n$. L'endomorphisme u est-il toujours diagonalisable ?

Solution :

1. $\star$ Si l'endomorphisme u est une isométrie, alors pour tous vecteurs u et v :

$$\begin{aligned}\langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{4}\big(\|u(x)+u(y)\|^2 + \|u(x)-u(y)\|^2\big)\\ &= \frac{1}{4}\big(\|u(x+y)\|^2 + \|u(x-y)\|^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big)\\ &= \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

$\star$ Réciproquement, si u est une application linéaire qui conserve le produit scalaire, il est clair que u conserve *a fortiori* la norme donc est une isométrie.

2. L'endomorphisme u est symétrique et est involutif, donc u est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Ker}(f-I)$ (parallèlement à $\mathrm{Ker}(f+I)$).

3. Soit P la matrice de u relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a ${}^tP = P^{-1}$, donc pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, et en notant X la matrice colonne associée :

$$\|PX\|^2 = {}^t(PX)(PX) = {}^tX\,{}^tPPX = {}^tXX = \|X\|^2$$

et u est bien une isométrie.

Réciproquement, si u est une isométrie, alors u conserve le produit scalaire, donc transforme une base orthonormée en une base orthonormée et sa matrice relativement à une base orthonormée est orthogonale.

4. $\star$ Si u est une isométrie, $\|x\| = 1 \implies \|u(x)\| = 1$, donc $u(S) \subset S$; comme u^{-1} existe et est ausi une isométrie, on a également $u^{-1}(S) \subset S$, soit $S \subset u(S)$ et l'égalité.

$\star$ Réciproquement, si $u(S) = S$, alors $\|x\| = 1 \implies \|u(x)\| = 1$ et pour tout vecteur y non nul :

$$\frac{1}{\|y\|}y = 1 \implies \|u\big(\frac{1}{\|y\|}y\big)\| = \frac{1}{\|y\|}\|u(y)\| = 1, \text{ soit } \|u(y)\| = \|y\|$$

Le résultat vaut clairement pour le vecteur nul et u est une isométrie.

5. La réponse est évidemment oui si $n = 1$ et est non si $n \geqslant 2$.

Il suffit en effet de considérer l'endomorphisme u dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est :

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & (0) \\ (0) & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

(on a pris la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan formé par les deux premiers vecteurs de base, et l'identité sur l'espace engendré par les $n-2$ autres vecteurs de base ; ainsi 1 est la seule valeur propre et le sous-espace propre n'est pas $\mathbb{R}^n$).