

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$) est dite à *diagonale propre* si ses valeurs propres (la matrice M étant considérée comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) sont toutes réelles, et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres. On note \mathcal{E}_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre. Une matrice A est antisymétrique si ${}^tA = -A$.

1. Montrer que l'ensemble \mathcal{E}_n n'est pas vide.

2. La matrice antisymétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle à diagonale propre ?

3. Soit A une matrice antisymétrique à diagonale propre.

a) Quelles sont ses valeurs propres ?

b) Montrer qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $A^p = 0$.

c) Calculer $({}^tAA)^p$. En remarquant que tAA est une matrice symétrique, montrer que $A = 0$.

4. Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétriques. Déterminer la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

5. a) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $F \subset \mathcal{E}_n$. Montrer que $\dim F \leq \frac{n(n+1)}{2}$ (on pourra utiliser $\dim(F + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$).

b) Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$?

Solution :

1. L'ensemble \mathcal{E}_n contient les matrices diagonales et les matrices triangulaires.

2. Si la matrice A était à diagonale propre, comme elle est de diagonale nulle, son unique valeur propre serait 0.

Or $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A^2 admet comme valeurs propres 0 et -1 , et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2 + I =$

$(A - iI)(A + iI)$ n'est pas inversible. Une des deux matrices $(A - iI)$ ou $(A + iI)$ n'est pas inversible et A possède au moins une valeur propre complexe non nulle : elle n'est pas à diagonale propre.

3. a) La diagonale d'une matrice antisymétrique n'est formée que de 0. La seule valeur propre de A est donc 0.

b) La matrice A admet un polynôme annulateur (pour p assez grand, la famille (I, A, \dots, A^p) est liée). Sur \mathbb{C} , ce polynôme se factorise sous la forme

$$P(X) = \alpha \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

Si λ_i n'est pas valeur propre de A , la matrice $A - \lambda_i I$ est inversible et le polynôme $\frac{P(X)}{(X - \lambda_i)^{m_i}}$ reste annulateur de A . En choisissant P de degré minimal, toute racine de P est donc valeur propre de A . Comme 0 est l'unique valeur propre de A , le polynôme P est de la forme X^p .

c) On a ${}^tAA = -A^2$; donc $({}^tAA)^p = 0$. La matrice $B = {}^tAA$ est symétrique réelle, donc diagonalisable. Comme $B^p = 0$, sa seule valeur propre est 0 : elle est semblable donc égale à la matrice nulle. Ainsi $A^2 = 0$ et ${}^tAA = 0$.

Or $\text{Ker } A = \text{Ker}({}^tAA)$. En effet $\text{Ker } A \subseteq \text{Ker}({}^tAA)$ est banal et si ${}^tAAX = 0$, alors $\|AX\|^2 = {}^tX{}^tAAX = 0$, donc $X \in \text{Ker } A$. Comme $\text{Ker } {}^tAA = E$, on a $\text{Ker } A = E$ et $A = 0$.

4. On sait que $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$

5. a) On a $F + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\dim(F + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \leq n^2$, soit, par le résultat de la question 3. :
 $n^2 \geq \dim F + \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) - \dim(F \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim F + \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Donc,

$$\dim F \leq n^2 - \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. Ses éléments sont tous à diagonale propre et comme on ne peut pas faire mieux (résultat a) :

la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$ est $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2.2.

On désigne par $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . À tout f de E , on associe l'application $g = \Phi(f)$ définie par : $g(0) = f(0)$ et pour tout réel x non nul,

$$g(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt$$

1. a) Vérifier que la fonction g ainsi définie est un élément de E , ce qui permet d'envisager Φ comme une application de E dans E .

b) Pour tout x de \mathbb{R} , justifier l'égalité : $g(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(xu) du$. Montrer que g est une fonction paire et simplifier l'expression de g lorsque f est une fonction paire ou lorsque f est une fonction impaire.

2. a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E .

b) Montrer que Φ n'est pas injective et préciser son noyau.

c) Soit $f \in E$ et $g = \Phi(f)$. Montrer que g est dérivable en tout point x de \mathbb{R}^* et préciser $g'(x)$.

d) Montrer que Φ n'est pas surjective.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On souhaite déterminer $E_\lambda = \text{Ker}(\Phi - \lambda Id_E)$.

a) Soit $f \in E$ vérifiant $\Phi(f) = \lambda f$. Montrer que f est paire, dérivable sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* , et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \lambda x f'(x) = (1 - \lambda)f(x)$.

b) En déduire l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_-^*$.

c) En déduire la forme possible de f selon $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

d) Conclure en précisant E_λ selon $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Solution :

1. a) La continuité de f prouve la dérivabilité, donc la continuité, de g sur \mathbb{R}^* . En zéro :

$$|g(x) - g(0)| = \left| \frac{1}{2x} \int_{-x}^x (f(t) - f(0)) dt \right| \leq \frac{1}{2|x|} |2x| \sup_{t \in [-x; x]} |f(t) - f(0)|$$

$$|g(x) - g(0)| \leq \sup_{t \in [-x; x]} |f(t) - f(0)|.$$

Cette dernière expression, du fait de la continuité de f en zéro, a pour limite zéro lorsque x tend vers zéro. Cela prouve la continuité de g en zéro. Ainsi g est continue sur \mathbb{R} et elle appartient bien à E .

b) On vérifie tout d'abord le résultat pour $x = 0$. Si x est non nul, le changement de variable $t = xu$ permet de répondre à la question.

La parité de g est évidente sur sa définition.

Quand f est paire, la relation de Chasles permet d'obtenir : $g(x) = \int_0^1 f(xu)du$, et, lorsque f est impaire, g est la fonction nulle.

2. a) On a déjà vu que Φ allait de E dans E . Sa linéarité provient de celle de l'intégration.

b) On a vu dans la première question que toute fonction f impaire appartenait au noyau de Φ , donc cette dernière n'est pas injective. En outre :

$$f \in \text{Ker } \Phi \iff g = 0 \iff [\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0] \\ \iff [f(0) = 0, \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*, \int_{-x}^x f(t)dt = 0]$$

En dérivant la dernière relation, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) - (-1)f(-x) = 0$, ce qui prouve que f est impaire (on a aussi $f(0) = 0$). On a donc la réciproque de la remarque précédente. Ainsi, $\text{Ker } \Phi$ est l'ensemble des fonctions impaires.

c) La dérivabilité de g a déjà été évoquée. Si x est non nul :

$$g'(x) = -\frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x f(t)dt + \frac{1}{2x}(f(x) + f(-x))$$

d) Nous venons de voir que $\text{Im } \Phi$ était incluse dans l'ensemble des fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* . Comme toutes les fonctions continues sur \mathbb{R} ne sont pas dans ce cas (par exemple $x \mapsto |x - 1|$ n'est pas dérivable en 1), Φ n'est pas surjective.

3. a) Soit $f \in E$ vérifiant $\Phi(f) = \lambda f$. Avec les notations précédentes, λ n'étant pas nul, on a : $f = \frac{1}{\lambda}g$. Ainsi, de la parité et de la dérivabilité de g , découlent celles de f . En dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1}{\lambda}g'(x) = -\frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x f(t)dt + \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{2x}(f(x) + f(-x))$$

Ce qui donne, en multipliant par λx et en utilisant la parité de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \lambda x f'(x) = -g(x) + f(x) = -\lambda f(x) + f(x) = (1 - \lambda)f(x)$$

b) Ce qui précède s'écrit encore : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda x} f(x)$.

Comme $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* , sur \mathbb{R}^{*+} et \mathbb{R}^{*-} les solutions sont de la forme :

$$f(x) = \alpha \exp\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \ln|x|\right)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est quelconque. Bilan :

$$\exists \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = \beta(-x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

et :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \gamma x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

c) Comme on a vu que f se devait d'être paire, on a nécessairement $\beta = \gamma$. On doit donc avoir : $\exists \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \beta|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

Pour que f soit continue en zéro, il faut, en outre, qu'elle admette une limite à droite (finie) en ce point (étant paire, elle aura la même à gauche).

C'est le cas si $\beta = 0$ ou $\lambda = 1$ car f est constante égale à β .

Si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ (dont le signe dépend du signe de β), enfin, si $0 < \lambda < 1$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, donc en posant $f(0) = 0$, f est continue en zéro.

d) Faisons la synthèse de ces différents résultats.

- Si $\lambda = 1$, on a E_1 égal à l'ensemble des fonctions constantes, donc 1 est valeur propre de Φ .
 → Si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, nous avons vu que $E_\lambda = \{0\}$, donc λ n'est pas valeur propre de Φ .
 → Supposons $0 < \lambda < 1$. Considérons la fonction f définie par $f(0) = 0$ et :

$$f(x) = |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

En remplaçant dans l'expression initiale, on constate que $\Phi(f) = \lambda f$, ce qui prouve que f appartient à E_λ , de même que toutes les fonctions qui lui sont colinéaires. Ainsi, E_λ est la droite vectorielle de base f et λ est valeur propre de Φ .

Exercice 2.3.

Pour n entier naturel, on note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . On identifiera polynômes et fonctions polynomiales associées. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les polynômes :

$$U_n(X) = (X^2 - 1)^n \text{ et } L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \times U_n^{(n)}(X)$$

où $P^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ du polynôme P , (pour $n = 1$, on notera aussi $P^{(1)} = P'$).

Pour tout polynôme P , on pose :

$$\mathcal{L}(P)(X) = ((X^2 - 1)P)'$$

1. a) Calculer L_0, L_1 et L_2 .
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n .
- c) En déduire que la famille (L_0, L_1, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$.

2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.
3. a) Montrer que \mathcal{L} est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- b) Montrer que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\langle \mathcal{L}(P), Q \rangle = \langle P, \mathcal{L}(Q) \rangle$.
4. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(L_n) = n(n+1)L_n$.
 - a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la famille $(L_n)_{n \in [0, m]}$ est une famille de polynômes orthogonaux.
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$.
5. Montrer que L_{n+1} possède exactement $n+1$ racines réelles distinctes, toutes dans l'intervalle $] -1, 1[$ (on pourra supposer que L_{n+1} change de signe seulement en a_1, \dots, a_r de $] -1, 1[$ et que $r < n+1$ pour obtenir une contradiction).

Solution :

1. a) On remarque que $L_0 = 1, L_1 = X$ et $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.
- b) Comme $\deg(U_n) = 2n, \deg(L_n) = 2n - n = n$.

Le coefficient dominant de L_n est obtenu par dérivations successives du terme X^{2n} . Ainsi, il vaut $\frac{1}{2^n n!} \times \frac{(2n!)}{n!} = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}$.

c) La famille (L_0, \dots, L_n) est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ à degrés échelonnés du degré 0 au degré n . C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Il s'agit bien d'une forme bilinéaire définie positive, les fonctions polynomiales étant des fonctions continues sur $[-1, 1]$, ce qui assure que $\int_{-1}^1 P^2(x) dx = 0$ entraîne que P admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul.

3. a) \mathcal{L} est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ par linéarité de l'opérateur de dérivation.

b) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

D'après la formule d'intégration par parties, $(x^2 - 1)\frac{dP}{dx}(x)$ étant nul en -1 et 1 :

$$\langle \mathcal{L}(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} [(x^2 - 1)\frac{dP}{dx}(x)] Q(x) dx = \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)\frac{dP}{dx}(x)] \frac{dQ}{dx}(x) dx$$

Sous cette forme, la symétrie des rôles de P et Q est claire et ainsi :

$$\langle \mathcal{L}(P), Q \rangle = \langle \mathcal{L}(Q), P \rangle$$

4. a) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \neq n$. Alors supposons sans restriction que $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} \langle L_n, L_m \rangle &= \frac{1}{n(n+1)} \langle \mathcal{L}(L_n), L_m \rangle = \frac{1}{n(n+1)} \langle L_n, \mathcal{L}(L_m) \rangle \\ &= \frac{m(m+1)}{n(n+1)} \langle L_n, L_m \rangle \end{aligned}$$

Ainsi, $(n(n+1) - m(m+1))\langle L_n, L_m \rangle = 0$. Or, $n(n+1) - m(m+1) \neq 0$, car la fonction $x \mapsto x(x+1)$ est injective sur \mathbb{N} . D'où $\langle L_n, L_m \rangle = 0$.

b) Comme (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout Q polynôme de degré inférieur ou égal à n , il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Q = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$. Ainsi,

$$\langle Q, L_{n+1} \rangle = \sum_{k=0}^n \lambda_k \langle L_k, L_{n+1} \rangle = 0$$

c) On a déjà montré que (L_0, \dots, L_{n+1}) est une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

d) Posons $Q(X) = \prod_{i=1}^r (X - a_i)$. Comme $\deg(L_{n+1}) = n+1$, on a $r \leq n+1$. De plus, le polynôme QL_{n+1} garde un signe constant sur $[-1, 1]$.

Ainsi, $\int_{-1}^1 Q(x)L_{n+1}(x) dx \neq 0$. Comme $L_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$ et $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on en déduit que Q est de degré $n+1$.

Ainsi, $r = n+1$ et L change exactement $n+1$ fois de signe sur $]-1, 1[$.

Exercice 2.4.

Étude matricielle de la lettre C .

$$\text{On considère la matrice } C \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R}) \text{ définie par } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ la base canonique de \mathbb{R}^7 et c l'endomorphisme de \mathbb{R}^7 dont la matrice dans la base canonique est C . Selon l'usage, on identifie les matrices colonnes (à 7 lignes à coefficients réels) à des vecteurs de \mathbb{R}^7 . On note $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ les vecteurs colonnes de la matrice C .

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de c , ainsi que le rang de c .

2. On note F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^7 engendré par les trois premiers vecteurs colonnes f_1, f_2, f_3 de la matrice C .

a) Montrer que F est stable par c .

b) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de F et déterminer la matrice Φ dans cette base de l'endomorphisme φ de F induit par c .

c) Pourquoi 1 est-il valeur propre de Φ ?

d) Montrer que Φ admet 3 valeurs propres réelles distinctes que l'on déterminera.

e) La matrice Φ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

3. Dédurre des questions précédentes le spectre de C et les dimensions des sous-espaces propres associés. Montrer que C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice diagonale semblable à C .

Solution :

1. Comme $f_2 = f_5$, $f_3 = f_4$ et $f_6 = f_7 = 0$, le rang de c est le même que celui de la famille (f_1, f_2, f_3) qui est égal à trois. Comme cette famille engendre l'image de c , elle en constitue une base. En outre, d'après le théorème du rang, le noyau de c est de dimension 4. D'après les remarques liminaires, il a pour base la famille $(e_2 - e_5, e_3 - e_4, e_6, e_7)$.

2. a) On a : $F = \text{Im } c = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

On a également : $c(f_1) = (2, 1, 0, 0, 0, 1, 2) = f_2 + 2f_3 \in F$ et $c(f_2) = f_2 \in F$ et $c(f_3) = f_1 \in F$. Ainsi, F est stable par c .

b) Le fait que (f_1, f_2, f_3) est une base de F a déjà été remarqué. On note $\varphi = c|_F$. Les calculs précédents permettent d'écrire la matrice associée à Φ dans la base proposée :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) On a $c(f_2) = f_2$, donc 1 est élément du spectre de Φ .

d) On cherche les réels λ tels qu'il existe un triplet $u = (x, y, z)$ non nul appartenant à F tel que $\varphi(u) = \lambda u$. Comme φ est bijective (d'après le rang de c), nous savons déjà que zéro ne sera pas valeur propre de φ . Supposons $\lambda \neq 1$. Le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} z = \lambda x \\ x + y = \lambda y, \text{ qui équivaut à : } \\ 2x = \lambda z \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{\lambda^2}{2}x \\ x = (\lambda - 1)y \\ 2x = \frac{\lambda}{2}z \end{cases}$$

Il est clair que si λ est différent de $\sqrt{2}$ et de $-\sqrt{2}$, la seule solution est $u = 0$ et λ n'est pas valeur propre.

Si $\lambda = \sqrt{2}$, le système devient : $z = \sqrt{2}x, y = (\sqrt{2} + 1)x$. Donc $\sqrt{2}$ est valeur propre de φ et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle de base $(1, 1 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$. De façon analogue, $-\sqrt{2}$ est valeur propre de φ associée au sous-espace propre de base $(1, 1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

e) La matrice Φ , étant d'ordre trois et possédant trois valeurs propres, est diagonalisable dans \mathbb{R} .

3. D'après ce qui précède, les valeurs propres de C sont $0, 1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. Les dimensions des sous-espaces propres associés sont : 4 pour la valeur propre zéro (le sous-espace propre est le noyau), 1 pour chacune des trois autres valeurs propres. La somme des dimensions des sous-espaces propres étant égale à 7, la matrice C est diagonalisable dans \mathbb{R} . Une matrice diagonale semblable à C sera, par exemple, de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 2.5.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel réel de dimension n . Soit u un endomorphisme de E . On note id l'endomorphisme identité de E .

1. On suppose dans cette question que u est diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ l'ensemble de ses valeurs propres.

Montrer que le polynôme $m(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_k)$ est annulateur de u .

2. Soit f et g deux endomorphismes de E . En considérant la restriction de f à $\text{Ker}(g \circ f)$, montrer que :

$$\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } g$$

On suppose dans la suite de l'exercice qu'il existe un polynôme

$$P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_k)$$

annulateur de u , où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont des réels distincts.

3. a) Montrer que $n \leq \sum_{j=1}^k \dim \text{Ker}(u - \lambda_j \text{id})$.

b) En déduire que l'endomorphisme u est diagonalisable.

4. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques telles que $A^3 + A^2 + A + I = 0$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution :

1. L'endomorphisme u étant diagonalisable, on note (e_1, \dots, e_n) une base de E formée de vecteurs propres de u . Supposons que e_l soit associé à la valeur propre λ_l . Par commutation, on a :

$$m(u)(e_l) = \left[\prod_{j \neq l} (u - \lambda_j \text{id}) \right] \circ (u - \lambda_l \text{id})(e_l) = 0$$

Ainsi l'endomorphisme $m(u)$ s'annule sur une base de E : il est identiquement nul.

2. Notons \tilde{f} la restriction de f à $\text{Ker}(g \circ f)$. Ainsi $\tilde{f} : \text{Ker}(g \circ f) \rightarrow E$, et

$$\text{Ker } \tilde{f} = \{x \in \text{Ker}(g \circ f) / f(x) = 0\} \subset \text{Ker } f$$

$$\text{Im } \tilde{f} = \{f(x) / g(f(x)) = 0\} \subset \text{Ker } g$$

Le théorème du rang permet d'affirmer que

$$\dim \text{Ker}(g \circ f) = \dim \text{Ker } \tilde{f} + \dim \text{Im } \tilde{f} \leq \dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } g$$

3. a) La relation précédente se généralise par récurrence à un nombre quelconque d'endomorphismes.

Le polynôme P étant annulateur de u , il vient

$$n = \dim E = \dim \text{Ker } P(u) \leq \sum_{j=1}^k \dim \text{Ker}(u - \lambda_j \text{id})$$

b) Des sous-espaces propres associés à un même endomorphisme étant toujours en somme directe, on a :

$$\sum_{j=1}^k \text{Ker}(u - \lambda_j \text{id}) = \bigoplus_{j=1}^k \text{Ker}(u - \lambda_j \text{id})$$

Donc :

$$n \leq \sum_{j=1}^k \dim \text{Ker}(u - \lambda_j \text{id}) = \dim \left(\bigoplus_{j=1}^k \text{Ker}(u - \lambda_j \text{id}) \right) \leq n$$

On a donc égalité, ce qui montre que u est diagonalisable.

4. Le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ est annulateur de A . Sur \mathbb{C} , on peut écrire $P(X) = (X+1)(X+i)(X-i)$. Ainsi la matrice A est diagonalisable sur \mathbb{C} . Or la matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable sur \mathbb{R} et $\pm i$ ne sont pas valeurs propres de A ce qui entraîne que $A + iI$ et $A - iI$ sont inversibles. Donc $A + I = 0$, i.e. $A = -I$.

Exercice 2.6.

Soit n un entier supérieur ou égal à Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de E .

Pour tout x de E on pose : $f(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$.

1. a) L'application f est-elle un endomorphisme de E ?

b) L'application f est-elle injective, surjective ?

c) L'application f est-elle un endomorphisme symétrique de E ?

- d) Caractériser les bases (e_1, e_2, \dots, e_n) telles que f soit un projecteur.
2. a) Montrer que les valeurs propres de f sont strictement positives.
- b) Montrer qu'il existe un automorphisme symétrique s de E à valeurs propres strictement positives tel que $s = (s \circ f)^{-1}$.
- c) Montrer que $(s(e_1), s(e_2), \dots, s(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Solution :

1. a) La linéarité de f résulte de la linéarité à gauche du produit scalaire et des propriétés du calcul vectoriel. D'autre part f est clairement à valeurs dans E , donc f est un endomorphisme de E .

b) Si $f(x) = 0$, on a : $\forall k, \langle x, e_k \rangle = 0$ (car (e_1, \dots, e_n) est une base de E), ce qui prouve que x est orthogonal à une base de E , donc à tout vecteur de E , et en particulier à x . Ainsi $\|x\|^2 = 0$ et $x = 0$. Ceci prouve que f est injective, donc est bijective, puisque f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

c) Pour tous vecteurs x et y , on a :

$$\langle f(x), y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle y, e_k \rangle \langle e_k, x \rangle = \langle f(y), x \rangle$$

Ainsi, f est un automorphisme symétrique.

d) Comme f est un automorphisme, f est un projecteur si, et seulement si, $f = id$.

★ Si $f = id$, alors $\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$.

En particulier, pour tout indice j , $e_j = \sum_{k=1}^n \langle e_j, e_k \rangle e_k$ et l'unicité de l'écriture dans une base donne $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{j,k}$, ce qui prouve que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée.

★ Réciproquement si (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée, alors :

$$\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \text{ et } f = id.$$

$$f \text{ projecteur} \iff (e_1, \dots, e_n) \text{ orthonormée}$$

2. a) Si λ est une valeur propre de f et x un vecteur propre associé, on a :

$$\lambda \|x\|^2 = \langle f(x), x \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, x \right\rangle = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2 > 0 \text{ (car } x \neq 0)$$

Donc $\lambda > 0$.

b) $s = (s \circ f)^{-1}$ équivaut à $s \circ s = f^{-1}$. Puisque f est un endomorphisme symétrique, soit \mathcal{B} une base orthonormée telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On a : $M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$ et on peut donc considérer l'endomorphisme s tel que $M_{\mathcal{B}}(s) = \text{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_n^{-1/2})$.

Par construction même, $s \circ s = f^{-1}$, s est un automorphisme et s est symétrique, donc s convient.

c) Pour tout couple (i, j) , on a : $\langle s(e_i), s(e_j) \rangle = \langle e_i, s \circ s(e_j) \rangle = \langle e_i, f^{-1}(e_j) \rangle$.

Or : $e_j = f(f^{-1}(e_j)) = \sum_{i=1}^n \langle f^{-1}(e_j), e_i \rangle e_i$, d'où : $\langle f^{-1}(e_j), e_i \rangle = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker).

Ainsi $\langle s(e_i), s(e_j) \rangle = \delta_{i,j}$ et donc $(s(e_1), s(e_2), \dots, s(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Exercice 2.7.

1. Dans cette question, E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 2. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E et l'application linéaire f ayant pour matrice, dans la base \mathcal{B} :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est un projecteur dont on déterminera les éléments caractéristiques.

2. Dans cette question, E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 3. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E . La droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ est notée \mathcal{D} et le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$ est noté \mathcal{P} .

a) Montrer que $\mathcal{D} \oplus \mathcal{P} = E$.

b) Déterminer la matrice, dans la base \mathcal{B} , du projecteur sur \mathcal{P} parallèlement à \mathcal{D} .

3. Dans cette question, E est un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et p est un projecteur de E .

a) Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

b) Réciproquement, on suppose que : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

i) Soit $x \in \text{Im } p$ et $y \in \text{Ker } p$, avec $y \neq 0$. En considérant le vecteur $x + \lambda y$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), montrer que x et y sont orthogonaux.

ii) En déduire que p est un projecteur orthogonal.

Solution :

1. Le calcul prouve que $M^2 = M$, ce qui établit que f est un projecteur. Ses éléments caractéristiques sont son noyau et son image, c'est-à-dire :

$$\text{Ker } f = \text{Vect}(e_1 + e_2) \quad \text{et} \quad \text{Im } f = \text{Vect}(e_1 - 2e_2)$$

2. a) Comme la somme des dimensions de \mathcal{D} et \mathcal{P} vaut celle de E , il suffit de montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre, ce qui se vérifie facilement. On la notera \mathcal{B}' . C'est donc une base de E .

b) Utilisons la base \mathcal{B}' .

On commence par donner la matrice de f dans la base \mathcal{B}' , ce qui est immédiat :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis on utilise la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

d'où l'on déduit : $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -7 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

et la matrice cherchée $M_{\mathcal{B}}(f) = PDP^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

3. a) On suppose que p est le projecteur orthogonal sur F , sous-espace vectoriel de E . On a alors, pour tout x de E :

$$x = p(x) + (x - p(x)) \quad \text{donc} \quad \|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$$

en raison de l'orthogonalité de $p(x)$ à $x - p(x)$. Cela prouve bien que : $\|x\| \geq \|p(x)\|$.

b) Réciproquement, on suppose que : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

i) Soit $x \in \text{Im } p$ et $y \neq 0 \in \text{Ker } p$. On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|p(x + \lambda y)\| \leq \|x + \lambda y\|$$

ou encore :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x\| \leq \|x + \lambda y\|$$

soit, en élevant au carré :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda(\|y\|^2 \lambda + 2(x|y)) \geq 0$$

Ce trinôme du second degré en λ ne peut être de signe constant que si ses deux racines 0 et $-2 \frac{(x|y)}{\|y\|^2}$ sont égales, ce qui donne l'orthogonalité de y à x .

Ayant montré que tout vecteur de $\text{Ker } p$ est orthogonal à tout vecteur de $\text{Im } p$, on en déduit que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 2.8.

Soit n un entier ≥ 2 . On considère le sous-ensemble \mathcal{S} des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A vérifiant les deux propriétés suivantes :

- i) si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $a_{i,j} \geq 0$, pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$;
- ii) si on note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AU = U$.

Ces matrices sont dites stochastiques.

1. a) \mathcal{S} est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
 b) Montrer que le produit de deux éléments de \mathcal{S} est un élément de \mathcal{S} .
 c) Soit $A \in \mathcal{S}$ inversible. Son inverse A^{-1} est-il élément de \mathcal{S} ?
2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n . Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .
 Pour σ permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on définit l'endomorphisme f_σ de E par : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
 On note A_σ la matrice de f_σ dans la base \mathcal{B} .
 a) Montrer que A_σ appartient à \mathcal{S} .
 b) Montrer que A_σ est inversible et que A_σ^{-1} est élément de \mathcal{S} .
 c) Que peut-on dire des valeurs propres (*a priori* complexes) de A_σ ?
3. Dans cette question, soit A un élément de \mathcal{S} inversible tel que son inverse appartienne à \mathcal{S} . Montrer qu'il existe une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $A = A_\sigma$.

Solution :

1. a) \mathcal{S} n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'il ne contient pas la matrice nulle.
 b) Soit $A, B \in \mathcal{S}$. Alors, avec les notations habituelles :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \geq 0, \text{ et } AB(U) = AU = U$$

D'où la conclusion.

- c) La réponse est en général négative. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est stochastique inversible et son inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ n'est pas stochastique.

2. a) La matrice A_σ s'appelle matrice de permutation : chaque ligne et chaque colonne ne contient qu'un seul 1, les autres éléments étant nuls et deux 1 ne peuvent se trouver sur une même colonne. On a alors clairement $A_\sigma \in \mathcal{S}$

b) On remarque que $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma \circ \sigma'}$, ce qui montre que le produit de deux matrices de permutation est une matrice de permutation. Ainsi $f_\sigma^{-1} = f_{\sigma^{-1}} \in \mathcal{S}$.

c) Le groupe des permutations étant fini (de cardinal $n!$), il existe $p > q$ tels que $\sigma^p = \sigma^q$, soit $\sigma^{p-q} = Id$. Donc, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $A_\sigma^r = I$.

Ainsi, si λ est valeur propre de A_σ , $\lambda^r = 1$ et λ est une racine r -ième de l'unité, donc un nombre complexe de module 1.

3. Soient A, B deux éléments de \mathcal{S} tels que $BA = I$. On note $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$. On a alors :

$$\text{pour } i \neq j, \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} = 0, \text{ et } \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i} = 1$$

→ Les éléments de A et B étant positifs, la première relation donne pour tout $i \neq j$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $b_{i,k}a_{k,j} = 0$.

→ Soit k fixé. Il existe $i_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $b_{i_k,k} \neq 0$ (autrement B ne serait pas inversible). Ainsi, pour tout $j \neq i_k$, on a : $a_{k,j} = 0$.

Comme $\sum_{j=1}^n a_{k,j} = 1$, il vient $a_{k,i_k} = 1$. Cet indice i_k est unique (autrement A posséderait deux 1 sur sa ligne k et ne serait pas stochastique).

On définit ainsi une application $i \rightarrow i_k$ injective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même, donc bijective, c'est-à-dire une permutation.

Ainsi, la matrice A est une matrice de permutation tout comme son inverse.

Exercice 2.9.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note respectivement a et j les endomorphismes de \mathbb{R}^3 canoniquement associés aux matrices A et J .

1. a) Calculer J^n pour tout n de \mathbb{N} .

b) En déduire que $A^n = I + \frac{4^n - 1}{3}J$, où I désigne la matrice identité d'ordre 3.

2. Montrer que a admet deux valeurs propres réelles λ et μ avec $\lambda < \mu$.

3. a) Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de \mathbb{R}^3 , tel que pour tout n de \mathbb{N} : $a^n = \lambda^n p + \mu^n q$.

b) Montrer que p et q sont deux projecteurs vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0$.

4. Déterminer les endomorphismes h de \mathbb{R}^3 , combinaisons linéaires de p et q tels que $h^2 = h \circ h = a$.

5. Montrer qu'il existe un endomorphisme h de \mathbb{R}^3 qui n'est pas combinaison linéaire de p et q et qui est tel que $h^2 = a$.

Solution :

1. a) Par calcul, $J^2 = 3J$ et par récurrence, $J^n = 3^{n-1}J$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On remarque que $A = I + J$. Comme I et J commutent, la formule du binôme de Newton donne :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k = I + J \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} = I + \frac{4^n - 1}{3} J$$

2. a) Comme $J^2 = 3J$, les valeurs propres possibles de J sont 0 et 3 ; de plus $\text{rg}(j) = 1$, donc $\dim \text{Ker}(j) = 2$.

Ce noyau est engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. De plus $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

La matrice J symétrique réelle est diagonalisable, tout comme la matrice A . La matrice $A = I + J$ admet comme valeurs propres 1 et 4, des vecteurs propres associés à $\lambda = 1$ étant $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et un vecteur

propre associé à $\mu = 4$ étant $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. a) On sait que $A^n = I + \frac{4^n - 1}{3}J = I - \frac{1}{3}J + \frac{4^n}{3}J$. On pose donc p l'endomorphisme canoniquement associé à $I - \frac{1}{3}J$ et q celui canoniquement associé à $\frac{4^n}{3}J$.

D'autre part la résolution du système $\begin{cases} id = p + q \\ a = \lambda p + \mu q \end{cases}$ montre qu'il n'y avait qu'un choix possible.

b) La relation $J^3 = 3J$ donne $q^2 = q$ et $p^2 = p$. Enfin on vérifie aisément que $p \circ q = q \circ p = 0$. Remarquons que p est la projection sur le sous-espace propre E_1 (de dimension 2) parallèlement à E_4 et q la projection sur le sous-espace propre E_4 (de dimension 1) parallèlement à E_1 .

4. Montrons que la famille (p, q) est une famille libre. En effet si $\alpha p + \beta q = 0$, en composant par p , il vient $\alpha p = 0$, donc $\alpha = 0$, puis en remplaçant il vient $\beta = 0$.

On écrit alors $h = \alpha p + \beta q$. La question précédente donne $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q = p + 4q$. Par la remarque précédente, il vient $\alpha^2 = 1, \beta^2 = 4$, donc $\alpha = \pm 1, \beta = \pm 2$. La réciproque est immédiate.

5. Soit (e_1, e_2) une base de E_1 et e_3 une base de E_4 . Soit h l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par $h(e_1) = e_2, h(e_2) = e_1, h(e_3) = 2e_3$.

On a alors $h^2(e_1) = e_2, h^2(e_2) = e_1, h^2(e_3) = 4e_3$, donc $h^2 = a$. Mais on ne peut écrire $h = \alpha p + \beta q$, puisque $(\alpha p + \beta q)(e_1) = \alpha e_1$ jamais égal à e_2 .

Exercice 2.10.

Soit n entier tel que $n \geq 2$ et a_1, a_2, \dots, a_n des nombres réels. On considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner la valeur du rang de M , suivant les valeurs des $a_i, 1 \leq i \leq n$.

2. Montrer que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de M si et seulement si le polynôme

$$P(X) = X^n - a_1 X^{n-1} - a_2 X^{n-1} - \dots - a_n$$

admet λ pour racine. Préciser alors une base du sous-espace propre associé et la dimension de celui-ci.

3. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si P admet n racines complexes distinctes.

4. Montrer que si $a_n > 0$, alors M admet au moins une valeur propre réelle strictement positive.

5. Dans cette question on suppose que $n = 4$ et $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, -3, 0, -2)$. Déterminer les valeurs propres de M . Est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Les $n - 1$ premières colonnes de M forment une famille échelonnée, donc libre. Ainsi le rang de M est au moins égal à $n - 1$.

Effectuons alors une permutation circulaire des colonnes de M , afin d'amener la dernière colonne en tête en repoussant toutes les autres d'un cran ...

On obtient ainsi une matrice M' triangulaire de coefficients diagonaux $a_n, 1, \dots, 1$. Donc M' est inversible si et seulement si $a_n \neq 0$. Ainsi :

$$\text{rg}(M) = \begin{cases} n & \text{si } a_n \neq 0 \\ n - 1 & \text{si } a_n = 0 \end{cases}$$

2. Soit $C = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$MC = \lambda C \iff \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}$$

En remontant les équations de ce système, il vient :

$$MC = \lambda C \iff \begin{cases} x_{n-1} = \lambda x_n \\ x_{n-2} = \lambda^2 x_n \\ \vdots \\ x_1 = \lambda^{n-1} x_n \\ x_n(\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - \dots - a_{n-1} \lambda - a_n) = 0 \end{cases}$$

★ Si $P(\lambda) \neq 0$, la dernière équation donne $x_n = 0$ et on en déduit la nullité de tous les x_k , donc le système n'admet que la solution triviale et $\lambda \notin \text{Spec } M$.

★ Si λ est racine de P , alors x_n est quelconque et les autres x_k s'en déduisent. Donc λ est alors valeur propre de M , le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par la colonne

$$C_\lambda = {}^t (\lambda^{n-1} \quad \lambda^{n-2} \quad \dots \quad \lambda \quad 1)$$

3. Tous les sous-espaces propres étant de dimension 1, M est diagonalisable si et seulement si ils sont au nombre de n , donc si et seulement si P admet n racines (distinctes).

4. Si $a_n > 0$, la fonction polynôme réelle P vérifie $P(0) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$, donc P admet au moins une racine strictement positive.

5. Ici $P = X^4 + 3X^2 + 2 = (X^2 + 1)(X^2 + 2)$, donc :

$$\text{Spec}_{\mathbb{C}}(M) = \{-i, i, -i\sqrt{2}, i\sqrt{2}\}$$

Donc M est \mathbb{C} -diagonalisable, mais pas \mathbb{R} -diagonalisable.

Exercice 2.11.

Soit E l'ensemble des fonctions f de classe C^∞ sur \mathbb{R}^+ , à valeurs dans \mathbb{R} , telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)^2 e^{-x} dx$ converge.

On rappelle les formules de Leibniz (que l'on ne demande pas de redémontrer) pour des fonctions C^∞ sur un intervalle I :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

$$\int_a^b u^{(n)}(t)v(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [u^{(n-k-1)}(t)v^{(k)}(t)]_a^b + (-1)^n \int_a^b u(t)v^{(n)}(t)dt,$$

où $n \geq 1$ et $(a, b) \in I^2$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel (pour a, b réels, on pourra utiliser l'inégalité $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ en la justifiant).

2. Montrer que les fonctions polynomiales appartiennent à E .

3. Prouver que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $E \times E$ par $\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt$ est un produit scalaire sur E .

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions définies pour tout x réel par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = (-1)^n \frac{e^x}{n!} f_n^{(n)}(x).$$

Prouver que

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{x^k}{k!}.$$

Soit $n \geq 1$; vérifier que $f_n^{(p)}(0) = 0$ pour $0 \leq p < n$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n^{(p)}(x) = 0$.

5. Soit $f \in E$; montrer que l'on a : $\langle f, L_n \rangle = \frac{1}{n!} \langle f^{(n)}, X^n \rangle$.

En déduire que $(L_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthonormale.

6. Montrer que pour $n \geq 1$:

$$XL_n(X) = (n+1)L_{n+1}(X) + (2n+1)L_n(X) + nL_{n-1}(X).$$

Solution :

1. Seule la somme pose un problème. On va utiliser l'inégalité proposée qui résulte de la relation $(|a| - |b|)^2 = a^2 + b^2 - 2|ab| \geq 0$.

Si $f, g \in E$, il vient :

$$(f(t) + g(t))^2 e^{-t} = [f(t)^2 + g(t)^2 + 2f(t)g(t)]e^{-t} \leq 2[f(t)^2 + g(t)^2]e^{-t}.$$

On conclut avec le critère de comparaison.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$; comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (|x|^n (1+x^2))e^{-x} = 0$, on en déduit qu'il existe $A > 0$ tel que $|x^n|e^{-x} \leq (1+x^2)^{-1}$ pour tout $x \geq A$. On applique ensuite le critère de comparaison.

3. Il est clair que cette application est bilinéaire et positive. Montrons qu'elle est définie positive. Soit $f \in E$ telle que $0 = \langle f, f \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)^2 e^{-t} dt$. L'intégrande est positive, sa continuité entraîne sa nullité, et par suite $f = 0$ (on peut se ramener à la nullité de l'intégrale sur un intervalle borné si l'on veut).

4. En appliquant la première formule de Leibniz, et en regroupant les cas $p \leq n$ et $p > n$, on obtient :

$$f_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\min(p,n)} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n - \min(p,n) + k)!} x^{n - \min(p,n) + k} (-1)^k e^{-x}$$

On en tire immédiatement que $f_n^{(p)}(0) = 0$ lorsque $0 \leq p < n$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n^{(p)}(x) = 0$. En faisant $p = n$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$L_n(x) = (-1)^n \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k (-1)^k e^{-x} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{x^k}{k!}$$

5. Avec la seconde formule de Leibniz et en tenant compte de la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^b f_n^{(n)}(x) f(x) dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [f_n^{(n-k-1)}(x) f^{(k)}(x)]_0^b + (-1)^n \int_0^b f_n(x) f^{(n)}(x) dx \right\} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f_n^{(n-k-1)}(b) f^{(k)}(b) + (-1)^n \int_0^b x^n e^{-x} f^{(n)}(x) dx \right\} \end{aligned}$$

et par suite en faisant tendre b vers $+\infty$:

$$\langle f, L_n \rangle = \frac{1}{n!} \int_0^b x^n e^{-x} f^{(n)}(x) dx = \frac{1}{n!} \langle f^{(n)}, X^n \rangle.$$

Si $m < n$, on voit facilement avec la formule précédente que $\langle L_m, L_n \rangle = 0$ puisque $\deg L_m = m < n$.

De plus, on a : $\langle L_n, L_n \rangle = \frac{1}{n!} \langle 1, X^n \rangle = \frac{1}{n!} \Gamma(n+1) = 1$

6. Soit $n \geq 1$; comme $(L_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ est une famille échelonnée de polynômes avec $\deg L_k = k$, il existe des scalaires tels que

$$XL_n = a_n L_{n+1} + b_n L_n + c_n L_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} u_k L_k$$

Or, pour $0 \leq k \leq n-2$, $u_k = \langle XL_n, L_k \rangle = \langle L_n, XL_k \rangle = 0$, car $\deg XL_k < n$. On a donc bien :

$$XL_n(X) = a_n L_{n+1}(X) + b_n L_n(X) + c_n L_{n-1}(X)$$

où a_n, b_n, c_n sont trois réels.

En utilisant la formule explicite donnant $L_n(X)$, on trouve :

$$\begin{aligned} b_n &= \langle XL_n, L_n \rangle = \frac{1}{n!} \langle [XL_n]^{(n)}, X^n \rangle = \frac{1}{n!} \langle -n^2 + (n+1)X, X^n \rangle \\ &= \frac{1}{n!} [-n^2 \Gamma(n+1) + (n+1) \Gamma(n+2)] = -n^2 + (n+1)^2 = 2n+1 \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned} a_n &= \langle XL_n, L_{n+1} \rangle = \frac{1}{(n+1)!} \langle [XL_n]^{(n+1)}, X^{n+1} \rangle = \frac{1}{(n+1)!} \langle n+1, X^{n+1} \rangle \\ &= \frac{n+1}{(n+1)!} \Gamma(n+2) = n+1 \end{aligned}$$

et $c_n = \langle XL_n, L_{n-1} \rangle = \langle XL_{n-1}, L_n \rangle = a_{n-1} = n$.

Finalement, on a trouvé :

$$XL_n = (n+1)L_{n+1} + (2n+1)L_n + nL_{n-1}$$

Exercice 2.12.

Soit les ensembles de matrices

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

1. a) Vérifier que le produit de deux éléments de \mathcal{G} appartient à \mathcal{G} .
- b) Justifier que toute matrice de \mathcal{G} est inversible, et que son inverse appartient à \mathcal{G} .
- c) Montrer que, pour toute matrice $G \in \mathcal{G}$ n'appartenant pas à \mathcal{H} , il existe une matrice $H \in \mathcal{H}$ telle que $H^{-1}GH$ soit une matrice diagonale.

Pour toute matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$, on définit l'application Φ_G qui, à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\Phi_G(P)$ défini par

$$[\Phi_G(P)](X) = P(\alpha X + \beta).$$

2. a) Justifier que Φ_G est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- b) Pour deux matrices G et G' de \mathcal{G} et $P \in \mathbb{R}[X]$, comparer $\Phi_{GG'}(P)$ et $\Phi_G(\Phi_{G'}(P))$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
3. a) Soit $G \in \mathcal{G}$. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est stable par Φ_G .
On note Ψ_G la restriction de Φ_G à $\mathbb{R}_n[X]$.
- b) Soit $M_n(G) = (m_{p,q})_{0 \leq p, q \leq n}$ la matrice de Ψ_G dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Expliciter le coefficient générique $m_{p,q}$. (**On prendra garde au fait que les indices commencent à 0.**)
- c) Déterminer les valeurs propres de $M_n(G)$.
- d) Expliciter $M_n(G)$ lorsque G est une matrice diagonale.
4. a) Soit $G \in \mathcal{G}$ n'appartenant pas à \mathcal{H} . Justifier que Ψ_G est diagonalisable.
- b) Écrire la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à une base de vecteurs propres de Ψ_G . Expliciter une base de vecteurs propres de Ψ_G .

Solution :

$$1. \text{ a) On a : } GG' = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta' + \beta\alpha' \\ 0 & \alpha\alpha' \end{pmatrix} \in \mathcal{G}.$$

$$b) \text{ De même } \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta/\alpha \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{G}.$$

$$c) \text{ Si } H = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ alors } H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$H^{-1}GH = \begin{pmatrix} 1 & b + \beta - b\alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

qui est diagonale si et seulement si $b = \frac{\beta}{\alpha - 1}$ ($\alpha \neq 1$ car $G \notin \mathcal{H}$), soit pour

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \beta/(\alpha-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a) α et β étant fixés, la linéarité de Φ_G est banale.

b) On a $\Phi_{GG'}(P) = P[(\alpha\alpha')X + (\beta' + \beta\alpha')]$ et d'autre part :

$$\Phi_G(\Phi_{G'}(P)) = \Phi_G[P(\alpha'X + \beta')] = P[\alpha'(\alpha X + \beta) + \beta'] = \Phi_{GG'}(P)$$

3. a) Il suffit de s'assurer que $\deg(P(\alpha X + \beta)) = \deg(P(X))$, ce qui est clair.

b) Pour $q \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Psi_G(X^q) = (\alpha X + \beta)^q = \sum_{p=0}^q \binom{q}{p} \alpha^p X^p \beta^{q-p}$, d'où :

$$m_{p,q} = \begin{cases} \binom{q}{p} \alpha^p \beta^{q-p} & \text{si } p \leq q \\ 0 & \text{si } p > q \end{cases}$$

c) La matrice $M_n(G)$ est triangulaire, donc ses valeurs propres sont α^p pour $0 \leq p \leq n$.

d) Si $G = D$ diagonale, on a $\beta = 0$ et $M_n(D) = \text{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$ est aussi diagonale.

4. a) D'après les questions 1.c) et 2.b), la matrice G est semblable à une matrice diagonale D , et

$$M_n(D) = M_n(H^{-1}GH) = M_n(H)^{-1} M_n(G) M_n(H)$$

montre que $M_n(G)$ est semblable à la matrice diagonale $M_n(D)$, donc diagonalisable.

b) La matrice de passage est, avec la convention usuelle $\binom{q}{p} = 0$ si $p > q$,

$$M_n(H) = M_n\left(\begin{pmatrix} 1 & \beta/(\alpha-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\binom{q}{p} \left(\frac{\beta}{\alpha-1}\right)^{q-p}\right)_{0 \leq p, q \leq n}$$

Les vecteurs propres correspondants ont pour coordonnées les colonnes de $M_n(H)$, soit :

$$V_q(X) = \sum_{p=0}^q \binom{q}{p} \left(\frac{\beta}{\alpha-1}\right)^{q-p} X^p = \left(X + \frac{\beta}{\alpha-1}\right)^q, (0 \leq q \leq n)$$

Exercice 2.13.

Soit a un nombre réel strictement positif.

1. Montrer que l'on peut définir deux suites réelles strictement positives $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $a_0 = a, b_0 = 1$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{b_k}\right), b_{k+1} = \frac{1}{2}\left(b_k + \frac{1}{a_k}\right)$$

2. Établir une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $u_k = a_k b_k$. En déduire que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

3. Montrer que les suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont proportionnelles et qu'elles convergent. Préciser leurs limites respectives.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique définie positive* lorsqu'elle est symétrique vérifiant

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^t X S X > 0.$$

4.a) Montrer que toute matrice symétrique définie positive est inversible et que son inverse est symétrique définie positive.

b) En déduire que, si A est une matrice symétrique définie positive donnée, on peut définir deux suites de matrices symétriques définies positives $(A(k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(B(k))_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $A(0) = A, B(0) = I_n$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A(k+1) = \frac{1}{2}(A(k) + B(k)^{-1}), B(k+1) = \frac{1}{2}(B(k) + A(k)^{-1})$$

5. Montrer que les suites $(A(k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(B(k))_{k \in \mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

NB : On dit qu'une suite de matrices $(U(k))_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convergente lorsque, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la suite $(u_{i,j}(k))_{k \in \mathbb{N}}$ des coefficients de la i -ème ligne et de la j -ème colonne converge.

Solution :

1. La relation de récurrence voulue est :

$$X_{k+1} = F(X_k) \text{ avec } X_k = (a_k, b_k) \text{ et } F(x, y) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x} \right)$$

Or la fonction F est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et vérifie clairement $F((\mathbb{R}_+^*)^2) \subset (\mathbb{R}_+^*)^2$. On montre ainsi de manière évidente par récurrence sur $k \geq 0$ la relation :

$$\ll X_k \text{ est défini et appartient à } (\mathbb{R}_+^*)^2 \gg.$$

2. On a :

$$u_{k+1} = a_{k+1}b_{k+1} = \frac{1}{4} \left(a_k b_k + 1 + 1 + \frac{1}{a_k b_k} \right) = \frac{1}{4} \left(u_k + 2 + \frac{1}{u_k} \right)$$

Pour tout k , on a donc :

$$u_{k+1} - u_k = \frac{-3u_k^2 + 2u_k + 1}{4u_k} = \frac{(u_k - 1)(-3u_k - 1)}{4u_k}$$

Or l'étude sur \mathbb{R}_+^* de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4} \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right)$ (on a : $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{4x^2}$) montre que f est minimale en 1, donc $\forall x > 0, f(x) \geq f(1) = 1$; donc $u_k \geq 1$ pour tout $k \geq 1$.

Par conséquent $u_{k-1} - u_k \leq 0$, donc la suite (u_k) est décroissante et minorée, et elle converge.

Sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, soit $\ell - 1 = 0$ ou $-3\ell - 1 = 0$; par ailleurs $\ell \geq 1$ car $u_k \geq 1$. Donc $\ell = 1$.

$$3. \text{ On a : } \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \frac{\frac{1}{2} \left(a_k + \frac{1}{b_k} \right)}{\frac{1}{2} \left(b_k + \frac{1}{a_k} \right)} = \frac{a_k b_k + 1}{b_k} \times \frac{a_k}{a_k b_k + 1} = \frac{a_k}{b_k}$$

La suite de terme général $\frac{a_k}{b_k}$ est donc constante et vaut $\frac{a_0}{b_0} = a$, soit $a_k = a b_k$. Comme $a_k \geq 0$, on a, lorsque k tend vers $+\infty$:

$$a_k = \sqrt{a_k^2} = \sqrt{\frac{a_k}{b_k} u_k} = \sqrt{a u_k} \rightarrow \sqrt{a}; \quad b_k = \frac{1}{a} a_k \rightarrow \frac{1}{a} \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

4. Pour toute matrice S symétrique définie positive, si (λ, X) est un couple (valeur propre, vecteur propre) de S , alors :

$$0 < {}^t X S X = {}^t X \lambda X = \lambda \|X\|^2 \text{ d'où } \lambda > 0$$

On a, par le théorème spectral, également la réciproque : si une matrice symétrique réelle n'a que des valeurs propres positives, elle est définie positive.

Donc 0 n'est pas valeur propre de S et S est inversible. En transposant $S S^{-1} = I$, on montre que S^{-1} est symétrique puis définie positive, puisque ses valeurs propres sont les inverses de celles de S .

On montre facilement que l'ensemble des matrices symétriques définies positives est stable par somme et par produit par un scalaire strictement positif. On montre alors de manière évidente par récurrence sur $k \geq 0$ la relation : « $A(k)$ et $B(k)$ sont bien définies et sont symétriques définies positives ».

5. Par le théorème spectral, la matrice symétrique $A(0) = A$ se diagonalise en $A(0) = P D^t P$ avec P orthogonale et D diagonale à valeurs propres strictement positives. Comme $B(0) = I = P I^t P$, une récurrence évidente montre que $A(k) = P D(k)^t P$ et $B(k) = P \Delta(k)^t P$, où les matrices $D(k)$ et $\Delta(k)$ sont diagonales et vérifient :

$$D_0 = D, \quad \Delta_0 = I_n, \quad D_{k+1} = \frac{1}{2} (D_k + \Delta_k^{-1}), \quad \Delta_{k+1} = \frac{1}{2} (\Delta_k + D_k^{-1})$$

Si, pour tout k , on note : $D_k = \text{diag}(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)})$ et $\Delta_k = \text{diag}(b_k^{(1)}, \dots, b_k^{(n)})$, alors, d'après la question 3, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k^{(i)} = \sqrt{a_0^{(i)}}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{a_0^{(i)}}}$$

Or d'après la relation $A(k) = P D(k) P^{-1}$, les coefficients de $A(k)$ sont des combinaisons linéaires de $a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)}$ donc convergent quand k tend vers $+\infty$ et de même avec $B(k)$.

Exercice 2.14.

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère une famille (u_1, u_2, \dots, u_p) de p vecteurs de E , où p est un entier tel que $p \geq 2$. On dit que cette famille est obtusangle si pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $i \neq j$ entraîne que $\langle u_i, u_j \rangle < 0$ (ce qui impose aux vecteurs d'être tous non nuls).

1. On veut montrer par récurrence que si une famille de p vecteurs de E est obtusangle, alors toute sous-famille de $p - 1$ vecteurs est libre.

a) Montrer que cette propriété est vérifiée pour $p = 2$.

b) On suppose que la propriété est vérifiée à un rang $p + 1 \geq 2$, et on envisage une famille (u_1, \dots, u_{p+2}) obtusangle telle que la famille (u_1, \dots, u_{p+1}) soit liée.

i) Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{k=1}^p \lambda_k \langle u_{p+1}, u_k \rangle > 0$.

ii) En déduire qu'il existe $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\lambda_k < 0$ et montrer que l'on peut supposer $k = p$.

iii) En considérant la famille (y_1, \dots, y_{p+1}) définie par :

$$\forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, y_i = u_i, y_p = u_{p+1} - \lambda_p u_p, y_{p+1} = u_{p+2},$$

montrer qu'il y a une contradiction.

iv) Conclure.

2. Soit (e_1, \dots, e_{n+1}) une famille obtusangle de vecteurs unitaires de E et v le vecteur de E défini par $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k$.

On veut montrer que $[\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle v, e_k \rangle \geq 0] \implies [\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k \geq 0]$.

a) Soit p la projection orthogonale de E sur $(\text{Vect}(e_{n+1}))^\perp$. Montrer que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$\langle p(e_i), p(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle - \langle e_i, e_{n+1} \rangle \langle e_j, e_{n+1} \rangle$$

b) Montrer la propriété par récurrence sur n .

Solution :

1. a) Clair puisque qu'une famille réduite à un vecteur non nul est toujours libre.

b) Supposons le résultat acquis à un rang $p + 1$ et soit $(u_1, \dots, u_{p+1}, u_{p+2})$ une famille obtuse. Supposons $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$ liée. La famille (u_1, \dots, u_{p+1}) étant obtuse, l'hypothèse de récurrence montre que (u_1, \dots, u_p) est libre. Dans ce cas, u_{p+1} est combinaison linéaire de (u_1, \dots, u_p) :

$$\text{il existe } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \text{ telle que } u_{p+1} = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k.$$

i) On a : $\|u_{p+1}\|^2 = \langle u_{p+1}, u_{p+1} \rangle = \sum_{k=1}^p \lambda_k \langle u_{p+1}, u_k \rangle > 0$.

ii) La famille étant obtusangle, et la somme précédente strictement positive, il existe k tel que $\lambda_k < 0$. Quitte à modifier l'ordre des vecteurs, on peut supposer que $k = p$, donc $\lambda_p < 0$.

iii) On montre facilement que la famille (y_1, \dots, y_{p+1}) est obtusangle. En effet :

★ Si i et j sont dans $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ et distincts, on a $\langle y_i, y_j \rangle = \langle u_i, u_j \rangle < 0$.

★ Pour $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $\langle y_i, y_p \rangle = \langle u_i, u_{p+1} - \lambda_p u_p \rangle = \langle u_i, u_{p+1} \rangle - \lambda_p \langle u_i, u_p \rangle < 0$

$$\langle y_i, y_{p+1} \rangle = \langle u_i, u_{p+2} \rangle < 0$$

★ Enfin $\langle y_p, y_{p+1} \rangle = \langle u_{p+1}, u_{p+2} - \lambda_p u_p \rangle = \langle u_{p+1}, u_{p+2} \rangle - \lambda_p \langle u_{p+1}, u_p \rangle < 0$.

Par hypothèse de récurrence, la famille (y_1, \dots, y_p) est donc libre. Or :

$$u_{p+1} - \lambda_p u_p = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k - \lambda_p u_p = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k u_k \implies y_p = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k y_k$$

ce qui est contradictoire.

iv) En conclusion, si la propriété est vérifiée au rang $p + 1$, elle reste vérifiée au rang $p + 2$ (car on peut toujours ranger les $p + 2$ vecteurs de la famille obtuse de sorte que les $p + 1$ vecteurs considérés soient les $p + 1$ premiers de cette famille) : elle est donc vérifiée pour tout $p \geq 2$.

2. a) D'après le cours : $p(e_i) = e_i - \langle e_i, e_{n+1} \rangle e_{n+1}$ pour tout i . Donc :

$$\langle p(e_i), p(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle - \langle e_i, e_{n+1} \rangle \times \langle e_j, e_{n+1} \rangle$$

b) La propriété est vérifiée pour $n = 1$.

Supposons-la vérifiée pour un certain $n \geq 1$ et soit (e_1, \dots, e_{n+1}) une famille obtusangle de vecteurs unitaires. Soit v défini dans l'énoncé tel que $\langle v, e_i \rangle \geq 0$.

On a $p(v) = \sum_{k=1}^n \lambda_k p(e_k)$ (car $p(e_{n+1}) = 0$). Un calcul analogue au précédent donne :

$$\langle p(v), p(e_j) \rangle = \langle v, e_j \rangle - \langle v, e_{n+1} \rangle \times \langle e_j, e_{n+1} \rangle \geq 0$$

D'autre part :

$$\langle p(e_i), p(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle - \langle e_i, e_{n+1} \rangle \times \langle e_j, e_{n+1} \rangle < 0$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence au vecteur $p(v)$ et à la famille obtusangle $(p(e_1), \dots, p(e_n))$.

Il vient, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\lambda_j \geq 0$.

Enfin :

$$0 \leq \langle v, e_{n+1} \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle e_k, e_{n+1} \rangle + \lambda_{n+1} \|e_{n+1}\|^2$$

Comme $\lambda_k \langle e_k, e_{n+1} \rangle \leq 0$, on obtient : $\lambda_{n+1} \geq 0$.

Exercice 2.15.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel réel de dimension n . Soit u un endomorphisme de E . On note I l'endomorphisme identité de E .

On suppose qu'il existe k endomorphismes non nuls de E , p_1, p_2, \dots, p_k et k réels distincts $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ tels que pour tout m de \mathbb{N} :

$$u^m = \sum_{i=1}^k \lambda_i^m p_i$$

1. a) Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on a : $P(u) = \sum_{i=1}^k P(\lambda_i) p_i$.

b) En déduire que le polynôme $M(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_k)$ est annulateur de u . Qu'en déduit-on sur les valeurs propres de u ?

2. Pour tout ℓ de $\llbracket 1, k \rrbracket$, on pose : $L_\ell(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq \ell}} \left(\frac{X - \lambda_i}{\lambda_\ell - \lambda_i} \right)$.

a) Montrer que pour tout ℓ de $\llbracket 1, k \rrbracket$: $p_\ell = L_\ell(u)$.

b) En déduire que $\text{Im } p_\ell \subset \text{Ker}(u - \lambda_\ell I)$, puis que les valeurs propres de u sont exactement les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

3. Montrer que pour tout (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$, on a : $p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } j = i \end{cases}$.

4. Montrer que u est diagonalisable.

Solution :

1. a) La relation proposée est vérifiée pour tout monôme X^k , $k \in \mathbb{N}$. Elle est donc vérifiée pour tout polynôme, par un argument de linéarité.

b) Pour le polynôme M dont les racines sont $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, il vient :

$$M(u) = \sum_{i=1}^k M(\lambda_i) p_i = 0.$$

Ainsi le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de M donc dans $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

2. a) On remarque que les polynômes proposés sont les polynômes de Lagrange aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, c'est-à-dire que l'on a $L_\ell(\lambda_i) = \delta_{i,\ell}$ (symbole de Kronecker).

Il suffit alors d'appliquer le résultat de la question 1.a) au polynôme L_ℓ , et :

$$L_\ell(u) = p_\ell$$

b) On a $(u - \lambda_\ell I) \circ L_\ell(u) = M(u) = 0$, donc $(u - \lambda_\ell I) \circ p_\ell = 0$, ce qui entraîne que $\text{Im } p_\ell \subset \text{Ker}(u - \lambda_\ell I)$. Comme $\dim(\text{Im } p_\ell) \neq 0$, il en résulte que $\text{Ker}(u - \lambda_\ell I) \neq \{0\}$ et λ_ℓ est valeur propre de u .

3. On a pour $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$, car $p_i \circ p_j = L_i(u) \circ L_j(u) = L_i L_j(u) = 0$, puisque $L_i L_j$ est divisible par M .

Pour $m = 0$, l'hypothèse de l'exercice donne $I = \sum_{i=1}^k p_i$. Donc

$$p_j = I \circ p_j = \sum_{i=1}^k p_i \circ p_j = p_j^2.$$

4. La relation $I = \sum_{i=1}^k p_i$ permet d'obtenir, pour tout vecteur s de $E : x = \sum_{i=1}^k p_i(x)$, ce qui montre que

$$E = \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2) + \dots + \text{Im}(p_k)$$

Cette somme est directe. En effet, si $0 = x_1 + x_2 + \dots + x_k$, avec $x_i \in \text{Im}(p_i)$, c'est-à-dire $x_i = p_i(x_i)$, alors, par la question 3. :

$$0 = p_j(0) = p_j^2(x_j) = p_j(x_j) = x_j.$$

Donc :

$$E = \text{Im}(p_1) \oplus \text{Im}(p_2) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_k)$$

Enfin, comme $\text{Im } p_\ell \subseteq \text{Ker}(u - \lambda_\ell I)$, il vient, car les sous-espaces propres sont toujours en somme directe :

$$E \subset \text{Ker}(u - \lambda_1 I) \oplus \text{Ker}(u - \lambda_2 I) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(u - \lambda_k I)$$

D'où en fait l'égalité et u est diagonalisable.

Exercice 2.16.

Soit n un entier de \mathbb{N}^* . On note S_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle matrice symétrique strictement positive, tout élément de S_n dont les valeurs propres sont strictement positives : on note S_n^{++} , l'ensemble de ces matrices.

Soit A une matrice de S_n^{++} .

1. Justifier qu'il existe une matrice P de $GL_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A , et telles que $A = PD^tP$.

2. Montrer qu'il existe R de S_n^{++} telle que $A = R^2$. On dit que R est une racine carrée de A .

3. Soient B et C deux racines carrées de A , toutes deux strictement positives.

Montrer que B et C ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres. En déduire que la matrice A admet une unique racine carrée dans S_n^{++} que l'on note $A^{1/2}$.

4. On cherche dans cette question à exprimer $A^{1/2}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout j de $[[1, p]]$, on pose :

$$L_j(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq j}} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$$

a) Montrer que (L_1, \dots, L_p) est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme T de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que, pour tout i de $[[1, p]]$, $T(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

c) En déduire une expression de $A^{1/2}$ en fonction de A .

5. Soit $A = \begin{pmatrix} n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n \end{pmatrix}$. Montrer que A est dans S_n^{++} et déterminer $A^{1/2}$.

Solution :

1. La matrice A est symétrique réelle : elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe donc une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont strictement positifs et une matrice orthogonale P telles que $A = PD^tP$.

2. En notant Δ la matrice diagonale dont les éléments sont les racines carrées positives des éléments de D , il vient :

$$R = P\Delta^tP \implies R^2 = P\Delta^{2t}P = A$$

3. Montrons que B et C ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres.

Soit λ réel, et X matrice colonne tels que $BX = \lambda X$. Alors $B^2X = \lambda^2X = AX = C^2X$. Ainsi $(C^2 - \lambda^2I)X = 0$. Or $0 = (C^2 - \lambda^2I)X = (C + \lambda I)(C - \lambda I)X$. La matrice C n'ayant que des valeurs propres strictement positives, la matrice $C + \lambda I$ est inversible et $(C - \lambda I)X = 0$. Ceci montre que λ est valeur propre de C de vecteur propre associé X . En échangeant les rôles de B et C , on obtient le résultat escompté.

4. a) Ces polynômes sont de degré $p - 1$ et si $\sum_{i=1}^p \alpha_i L_i(X) = 0$, alors, pour tout indice j , $\sum_{i=1}^p \alpha_i L_i(\lambda_j) = \alpha_j = 0$, ce qui montre que la famille donnée est libre, donc est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

b) L'écriture de tout polynôme P de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ dans cette base est :

$$P = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) L_i$$

Il suffit donc de choisir $P(X) = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} L_i$. L'unicité provient du fait que (L_1, \dots, L_p) est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c) On pose $B = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} L_i(A)$ qui est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si λ est une valeur propre de A de vecteur propre associé X , alors pour tout polynôme $P : P(A)(X) = P(\lambda)X$. Ainsi $L_i(A)(X) = L_i(\lambda)X$.

Or $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$ montre que si X_j est vecteur propre associé à la valeur propre λ_j , $P(A)(X_j) = \sqrt{\lambda_j} X_j$.

On en déduit que $B^2 = A$. La matrice B est symétrique (car A l'est) et dans S_n^{++} puisque ses valeurs propres sont $(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p})$. On conclut par l'unicité de la racine carrée.

5. La matrice A est symétrique réelle. On peut l'écrire $A = (n + 1)I - J$, où la matrice J n'est formée que de 1. Les valeurs propres de J sont 0 et n ; les valeurs propres de A sont $n + 1$ et 1. Elle est donc dans S_n^{++} .

Par les questions précédentes, $A^{1/2} = L_1(A) + \sqrt{n + 1} L_{n+1}(A)$, avec

$$L_1(X) = \frac{X - n - 1}{-n} \text{ et } L_{n+1}(X) = \frac{X - 1}{n}$$

Après calculs :

$$A^{1/2} = \frac{1}{n} ((\sqrt{n + 1} - 1)A - (\sqrt{n + 1} - (n + 1))I)$$

Exercice 2.17.

1. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x \neq 1$:

$$Q(x) = \frac{1}{x - 1} \int_1^x P(t) dt.$$

b) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P \mapsto Q$ ainsi définie est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1} .

3. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ puis calculer son inverse A^{-1} . Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?

4. a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$. Le complexe α est-il racine de $f^{-1}(Q)$? Avec quel ordre de multiplicité ?

b) En déduire les sous-espaces propres de l'endomorphisme f^{-1} puis montrer qu'ils sont aussi les sous-espaces propres de f .

Solution :

1. a) Une primitive F du polynôme P est un polynôme de degré $n + 1$; ainsi :

$$\frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt = \frac{F(x) - F(1)}{x-1}$$

Comme 1 est racine du polynôme $F(X) - F(1)$, on peut simplifier par $(x-1)$ et le quotient est bien une fonction polynôme de degré n .

De plus Q est parfaitement définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donc en une infinité de points et le polynôme associé encore noté Q est parfaitement défini.

b) La linéarité de f résulte de la linéarité de l'intégration et donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2. On a montré : $\forall P, \deg f(P) = \deg P$. Donc f est une application linéaire conservant le degré, l'image par f de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille graduée en degré qui est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, f transforme une base en une base : elle est donc bijective.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)Q(x) = (x-1)f(P)(x) = \int_1^x P(t) dt$, d'où en dérivant les deux membres et en revenant à la notation polynomiale : $(X-1)Q' + Q = P$ et

$$f^{-1} : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]; Q \mapsto (X-1)Q' + Q$$

3. En écrivant l'image par f de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$:

$f(X^k) = \frac{1+X+\dots+X^k}{k+1}$, soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

et A^{-1} est la matrice de f^{-1} relativement à la même base.

Comme $f^{-1}(X^k) = (k+1)X^k - kX^{k-1}$, il vient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n & -n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices sont triangulaires. Elles possèdent chacune $n+1$ valeurs propres distinctes (qui se lisent sur leurs diagonales), ce qui est une condition suffisante de diagonalisabilité.

4. a) On écrit $Q = (X-\alpha)^k Q_1$ avec $Q_1(\alpha) \neq 0$, alors :

$f^{-1}(Q) = P = (X-1)Q' + Q$, donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}(Q) &= (X-1)[k(X-\alpha)^{k-1}Q_1 + (X-\alpha)^k Q_1'] + (X-\alpha)^k Q_1 \\ &= (X-\alpha)^{k-1}[k(X-1)Q_1 + (X-\alpha)(Q_1 + (X-1)Q_1')] \\ &= (X-\alpha)^{k-1}R(X) \end{aligned}$$

en notant R la quantité $k(X-1)Q_1 + (X-\alpha)(Q_1 + (X-1)Q_1')$. De plus $R(\alpha) = k(\alpha-1)Q_1(\alpha)$. On a : $k \neq 0$ et $Q_1(\alpha) \neq 0$ d'où :

- Si $\alpha \neq 1$: α est racine d'ordre $k-1$ de $f^{-1}(Q)$.
- Si $\alpha = 1$: $R = (X-1)[(k+1)Q_1 - (X-1)Q_1'] = (X-1)S$ en posant $S = (k+1)Q_1 - (X-1)Q_1'$. On a : $S(1) = (k+1)Q_1(1) \neq 0$ car $k+1 \neq 0$ et $Q_1(1) = Q_1(\alpha) \neq 0$ et 1 est racine d'ordre k de P .

b) Soit Q un vecteur propre de f^{-1} ; $f^{-1}(Q) = \lambda Q$, avec $\lambda \neq 0$ car f^{-1} est inversible. Donc toute racine complexe de Q a le même ordre de multiplicité dans Q et dans $f^{-1}(Q)$. D'après la question précédente, 1 est la seule racine possible de Q , d'où :

$$Q(X) = \alpha(X-1)^k, \quad 0 \leq k \leq n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$$

On a alors : $f^{-1}(Q) = (X-1)Q' + Q = (k+1)Q$. Ainsi Q est associé à la valeur propre $k+1$. Les sous-espaces propres de f^{-1} sont : E_0, E_1, \dots, E_n avec $E_k = \text{Vect}((X-1)^k)$.

Si Q est vecteur propre de f^{-1} alors $f^{-1}(Q) = \lambda Q$, donc $Q = \lambda f(Q)$ et $f(Q) = \frac{1}{\lambda}Q$. Donc les vecteurs propres de f^{-1} sont vecteurs propres de f et il n'y en a pas d'autres car f et f^{-1} sont diagonalisables.

Exercice 2.18.

Soit n un entier ≥ 2 . On considère le sous-ensemble \mathcal{S} des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $a_{i,j} \geq 0$, pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$;

ii) si on note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AU = U$.

1. \mathcal{S} est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2. a) Soit $A \in \mathcal{S}$. Montrer que 1 est valeur propre de A .

b) Soit λ une valeur propre (réelle ou complexe) de A . Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. En considérant une coordonnée de module maximal de X , montrer que $|\lambda| \leq 1$.

3. Soit z_1, \dots, z_p , p nombres complexes non nuls ($p \geq 2$) vérifiant :

$$\left| \sum_{i=1}^p z_i \right| = \sum_{i=1}^p |z_i|$$

Montrer qu'il existe des réels positifs ρ_1, \dots, ρ_p et $i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$, tels que pour tout j de $\llbracket 1, p \rrbracket$, on a : $z_j = \rho_j z_{i_0}$.

4. Soit λ une valeur propre complexe de A telle que $|\lambda| = 1$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. On

pose : $|x_k| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$

a) Montrer qu'il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_j = \lambda x_k$.

b) En déduire qu'il existe un entier naturel non nul q tel que $\lambda^q = 1$.

Solution :

1. a) \mathcal{S} n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'il ne contient pas la matrice nulle.

2. a) Le réel $\lambda = 1$ est valeur propre, puisque le vecteur U est un vecteur propre associé.

b) Soit k un indice tel que $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. En considérant la $k^{\text{ème}}$ équation du système $AX = \lambda X$, il vient :

$$\lambda x_k = \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j.$$

$$\text{Donc : } |\lambda| |x_k| = \left| \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{k,j} |x_j| \leq 1 \times |x_k|.$$

Comme $x_k \neq 0$ (autrement on aurait $X = 0$), il vient : $|\lambda| \leq 1$.

3. On effectue une démonstration par récurrence sur p .

• si $p = 1$, alors $z_1 = 1 \times z_1$.

• supposons la propriété vérifiée pour $(p-1)$ nombres complexes. Soit z_1, \dots, z_p , p nombres complexes qui vérifient : $\left| \sum_{i=1}^p z_i \right| = \sum_{i=1}^p |z_i|$.

On pose : $u = z_1 + \dots + z_{p-1}$ et $v = z_p$. On a alors, par l'inégalité triangulaire :

$$\sum_{i=1}^p |z_i| = \left| \sum_{i=1}^p z_i \right| = |u + v| \leq |u| + |v| \leq \sum_{i=1}^{p-1} |z_i| + |z_p|$$

On a donc en fait égalité dans ces inégalités et $|u + v| = |u| + |v|$ ainsi que $\left| \sum_{i=1}^{p-1} z_i \right| = \sum_{i=1}^{p-1} |z_i|$. Par hypothèse de récurrence, il existe un réel $\rho \geq 0$ tel que $v = \rho u$ et il existe $\rho_1, \dots, \rho_{p-1}$ réels positifs tels que $z_i = \rho_i z_1$ (par exemple). La relation $v = \rho u$ donne enfin

$$z_p = \rho \left(\sum_{i=1}^{p-1} z_i \right) = \rho \left(\sum_{i=1}^{p-1} \rho_i \right) z_1$$

On conclut par le principe de récurrence.

4. On suppose dans cette question que $|\lambda| = 1$. En reprenant la méthode développée dans la question 2, il vient :

$$|x_k| = \left| \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{k,j} |x_j| \leq |x_k|$$

On a donc égalité dans les inégalités précédentes, et :

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{k,j} x_j|$$

Par la question 3, il existe i_0 , des réels positifs ρ_1, \dots, ρ_n tels que pour tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{k,j} x_j = \rho_j a_{k,i_0} x_{i_0}$.

Notons $J = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket / a_{k,j} \neq 0\}$. Ainsi : $\lambda x_k = \sum_{j \in J} a_{k,j} x_j = a_{k,i_0} x_{i_0} \sum_{j \in J} \rho_j$.

Soit : $|x_k| \leq (a_{k,i_0} \sum_{j \in J} \rho_j) |x_{i_0}| \leq (a_{k,i_0} \sum_{j \in J} \rho_j) |x_k|$, ce qui montre que $a_{k,i_0} \sum_{j \in J} \rho_j = 1$ et $\lambda x_k = x_{i_0}$.

Donc $|x_k| = |x_{i_0}|$, et x_{i_0} est également une coordonnée de module maximal. On recommence ce processus, et comme le vecteur X n'a qu'un nombre fini de coordonnées, on finira par retrouver une coordonnée déjà obtenue, il existe donc $q \in \mathbb{N}^*$ et k_1 tels que $x_{k_1} = \lambda^q x_{k_1}$.

Donc $\lambda^q = 1$.

Exercice 2.19.

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n ($n \geq 1$) à coefficients réels.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le produit de Schur $A \otimes B$ des matrices A et B en posant :

$$A \otimes B = (a_{i,j} b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} b_{1,1} & a_{1,2} b_{1,2} & \dots & a_{1,n} b_{1,n} \\ a_{2,1} b_{2,1} & a_{2,2} b_{2,2} & \dots & a_{2,n} b_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} b_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} b_{n,n} \end{pmatrix}$$

On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on confond vecteur de \mathbb{R}^n et matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associée. On dit qu'une matrice A est positive (notation $A \geq 0$) si elle est symétrique et a toutes ses valeurs propres positives ou nulles. Lorsque A et B sont symétriques, on écrit $A \leq B$ si $B - A \geq 0$.

1. Montrer qu'une matrice A est positive si et seulement si elle est symétrique et vérifie $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En déduire que la somme de deux matrices positives est encore une matrice positive.

2. Soit V un vecteur colonne de \mathbb{R}^n . Montrer que la matrice $B = V^t V$ est positive.

3. Soit R une matrice positive non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un entier $m \in \{1, \dots, n\}$ et une famille (V_1, \dots, V_m) de vecteurs (colonnes) orthogonaux non nuls de \mathbb{R}^n tels que :

$$R = \sum_{k=1}^m V_k {}^t V_k$$

4. Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et V un vecteur colonne. Montrer que $A \otimes V^t V$ est une matrice positive. En déduire que le produit de Schur $A \otimes B$ de deux matrices positives A et B est encore une matrice positive.

Solution :

1. Soit A une matrice positive. La matrice A est symétrique réelle, il existe donc P orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale telles que $A = PD^tP$. Comme A est positive, ses valeurs propres sont positives et donc les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positifs ou nuls.

Alors, pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n , on a :

$$\langle Ax, x \rangle = {}^t x^t Ax = {}^t x Ax = {}^t x PD^t Px = {}^t y Dy$$

avec $y = {}^t Px = (y_1, \dots, y_n)$. Ainsi :

$$\langle Ax, x \rangle = (y_1 \quad \dots \quad y_n) \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0$$

Réciproquement, si A est une matrice symétrique telle que $\langle Ax, x \rangle \geq 0$, alors pour $\lambda \in \text{Spec } A$, en notant x un vecteur propre associé, on a :

$$0 \leq \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

et donc $\lambda \geq 0$.

Si A et B sont positives, alors $A + B$ est symétrique réelle et pour tout vecteur x , on a : $\langle (A + B)x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle + \langle Bx, x \rangle \geq 0$ et $A + B$ est encore positive.

2. Comme ${}^t B = {}^t (V^t V) = {}^t ({}^t V)^t V = V^t V = B$, on voit déjà que B est symétrique (et réelle).

De plus, pour tout vecteur x , on a :

$$\langle Bx, x \rangle = {}^t x Bx = {}^t x V^t Vx = {}^t ({}^t Vx) ({}^t Vx) = ({}^t Vx)^2 \geq 0$$

(la matrice ${}^t Vx$ est produit d'une matrice ligne par une matrice colonne, donc est une matrice carrée d'ordre 1, identifiée à son unique terme)

Ainsi B est une matrice positive.

3. On peut écrire $R = PD^tP$, avec P orthogonale et D diagonale. Quitte à permuter les colonnes de P , on peut supposer que D est de la forme

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0)$$

où les nombres λ_1, λ_m , qui sont positifs ou nuls puisque R est positive, sont en fait strictement positifs.

Notons $P = (p_{i,j})$ et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $V_k = \sqrt{\lambda_k} \begin{pmatrix} p_{1,k} \\ \vdots \\ p_{n,k} \end{pmatrix}$.

Les colonnes V_1, \dots, V_m sont non nulles et deux à deux orthogonales, tandis que les colonnes V_{m+1}, \dots, V_n (si $m < n$) sont nulles.

On a : $(V_k^t V_k)_{i,j} = \lambda_k p_{i,k} p_{j,k}$, donc pour tout couple (i, j) :

$$\left(\sum_{k=1}^m V_k^t V_k \right)_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^n V_k^t V_k \right)_{i,j} = \sum_{k=1}^n p_{i,k} \lambda_k p_{j,k} = (PD^tP)_{i,j}$$

Ainsi :

$$R = PD^tP = \sum_{k=1}^m V_k^t V_k$$

4. Posons : $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $C = A \oplus V^t V = (c_{i,j})$.

On a : $c_{i,j} = a_{i,j} v_i v_j$, et comme A est symétrique, il en est de même de C . De plus, on a pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\langle Cx, x \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_i v_j x_i x_j = \langle Ay, y \rangle \geq 0$$

avec $y = (v_1 x_1, \dots, v_n x_n)$.

Par conséquent, la matrice C est bien positive.

En utilisant la question précédente et la question 1, on écrit $B = \sum_{k=1}^m V_k {}^t V_k$ et on en déduit immédiatement que

$$A \otimes B = \sum_{k=1}^m A \otimes (V_k {}^t V_k) \geq 0 \text{ comme somme de matrices positives.}$$

Exercice 2.20.

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note U la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 1, I la matrice identité d'ordre n et $E = \text{Vect}(I, U)$, le sous-espace vectoriel engendré par U et I .

1. Montrer que (I, U) forme une base de E .
2. Les éléments de E sont-ils inversibles avec un inverse dans E ? Sont-ils diagonalisables?
On pose : $M_0 = \frac{1}{n}U$ et $M_1 = I - M_0$.
3. a) Montrer que M_0 et M_1 sont deux matrices de projecteurs formant une base de E .
b) Soit $A = \alpha I + \beta U \in E$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer A^p dans la base (M_0, M_1) .

Soit S l'ensemble des matrices $H = (h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\begin{cases} \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, h_{i,j} \geq 0 \\ 1 \leq i \leq n \implies \sum_{j=1}^n h_{i,j} = 1 \end{cases}$.

4. Soit A un élément de $E \cap S$. Montrer que les deux suites réelles $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p = a_p M_0 + b_p M_1$$

sont convergentes sauf éventuellement lorsque $n = 2$.

Solution :

1. U n'est pas une matrice scalaire, donc la famille (I, U) est libre. Etant génératrice de E , c'est une base de E et $\dim(E) = 2$.
2. ★ La matrice $A = \alpha I + \beta U$ est inversible **dans** E si et seulement s'il existe $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ tels que $(\alpha I + \beta U)(\alpha' I + \beta' U) = I$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \alpha \alpha' = 1 \\ \beta'(\alpha + n\beta) = -\beta \alpha' \end{cases}$$

Ainsi, A est inversible dans E si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -n\beta$. Son inverse est alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha} I - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + n\beta)} U$$

★ La matrice U est de rang 1 ; ses valeurs propres sont 0, de sous-espace propre associé $\text{Ker } U$, et n de sous-espace propre de dimension 1 engendré par une colonne de U . La matrice I est diagonale. Il existe une matrice P orthogonale (car U est symétrique tout comme I) telle que $U = P D {}^t P$. Et $A = \alpha U + \beta I = P(\alpha D + \beta I) {}^t P$. Ainsi toutes les matrices de E sont diagonalisables. Enfin, dans une base de diagonalisation de U , il vient :

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \alpha & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n\beta + \alpha \end{pmatrix} {}^t P$$

3. a) On vérifie que $M_0^2 = \frac{1}{n}U^2 = M_0$, et $M_1^2 = I + M_0^2 - 2M_0 = I - M_0 = M_1$.
On remarque que $M_0 M_1 = M_1 M_0 = 0$.

On a $\alpha M_0 + \beta M_1 = 0 \iff \beta I + (\frac{\alpha - \beta}{n})U = 0$, qui n'admet que $\alpha = \beta = 0$ comme solution. Donc, M_0 et M_1 sont deux matrices de projecteurs appartenant à E et formant une base de E .

- b) En écrivant $A = \alpha I + \beta U = \alpha(M_0 + M_1) + n\beta M_0$, il vient :

$$A = (\alpha + n\beta)M_0 + \alpha M_1$$

Les matrices M_0 et M_1 commutant, on peut utiliser la formule du binôme et par la remarque précédente :

$$A^p = (\alpha + n\beta)^p M_0 + \alpha^p M_1.$$

4. Dire que $A = \alpha I + \beta U \in E \cap S$ équivaut à dire que
$$\begin{cases} \beta \geq 0 \\ \alpha + \beta \geq 0 \\ \alpha + n\beta = 1 \end{cases}.$$

Or $\beta \geq 0$ entraîne $\alpha = 1 - n\beta \leq 1$, et $\beta \geq -\alpha$ entraîne $\alpha \leq 1 + n\alpha$, soit $\alpha \geq \frac{-1}{n-1}$. Ainsi :

$$\alpha \in \left[\frac{-1}{n-1}, 1 \right] \subset [-1, 1]$$

On a donc : $A^p = M_0 + \alpha^p M_1$.

- Si $-1 < \alpha < 1$: $\lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha^p = 0$ et $(A^p)_p$ converge vers M_0 .
- Si $\alpha = 1$, alors $\beta = 0$ et $A = M_0 + M_1 = I$, donc $A^p = I$.
- Si $\alpha = -1$, alors $\beta = \frac{2}{n}$, $A = M_0 - M_1 \implies A^p = M_0 + (-1)^p M_1$ et la suite $(A^p)_p$ ne converge pas.

Mais dans ce cas $\alpha + \beta \geq 0 \implies \beta = \frac{2}{n} \geq 1 \implies n \leq 2 \implies n = 2$.

Dans ce cas : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^{2p} = I, A^{2p+1} = A$.

Ainsi, la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ diverge si et seulement si $n = 2$ et $\alpha = -1$.

Exercice 2.21.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 4. On note U l'ensemble des vecteurs de norme 1 de E .

Un endomorphisme q de E est dit orthogonal si : $\forall x, y \in E, \langle q(x), q(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Un endomorphisme orthogonal q est appelé quart de tour si $q^2 = -Id$, où Id représente l'application identité.

On note Q l'ensemble des quarts de tour de E et on pose :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer qu'un quart de tour transforme tout vecteur x de E en un vecteur orthogonal à x .
2. a) Soit q un endomorphisme de E dont la matrice dans une base orthonormée est égale à M . Montrer que q est un quart de tour.
 b) Soit q un quart de tour. Montrer que quel que soit $u \in U$, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E avec $e_1 = u$ et telle que la matrice de q dans \mathcal{B} soit égale à M .
3. Soit $q \in Q$ et $u \in U$. On note P le plan engendré par u et $q(u)$.
 a) Montrer que $(u, q(u))$ est une base orthonormée de P .
 b) Montrer que le plan P est invariant par q . Décrire géométriquement la restriction de q au plan P .
 c) Si v est un vecteur unitaire de P , il existe un nombre réel θ tel que

$$v = \cos(\theta)u + \sin(\theta)q(u)$$

Déterminer les matrices de passage de la base $(u, q(u))$ à la base $(v, q(v))$ et de la base $(v, q(v))$ à la base $(u, q(u))$.

4. Soit $q \in Q$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f = \cos(\alpha)Id + \sin(\alpha)q$.

- a) Montrer que f est un automorphisme orthogonal.
- b) Montrer que tout vecteur unitaire u est contenu dans un plan P invariant par f . Décrire géométriquement la restriction de f à P .

Solution :

1. Soit $x \in E$ et $q \in Q$. On calcule le produit scalaire entre x et son image par q .

$$\begin{aligned}\langle q(x), x \rangle &= \langle q(x), -q^2(x) \rangle && (\text{car } q^2 = -Id) \\ &= -\langle q(x), q(q(x)) \rangle && (\text{car } q \text{ est orthogonal})\end{aligned}$$

Ainsi, $\langle q(x), x \rangle = 0$ et $q(x)$ est orthogonal à x

2. a) \star On vérifie aisément que $M^2 = -I_4$.

\star On vérifie également que ${}^tMM = I_4$ et donc pour toutes colonnes X et Y :

$${}^tXY = {}^tX({}^tMM)Y = {}^t(MX)(MY)$$

Ce qui traduit exactement la propriété : $\forall x, y, \langle x, y \rangle = \langle q(x), q(y) \rangle$.

b) Remarquons que pour tout vecteur x , on a en particulier $\|q(x)\| = \|x\|$, donc $\text{Ker } q = \{0\}$ et un endomorphisme orthogonal est un automorphisme.

\star Soit $u \in U$, $q(u)$ est orthogonal à u . On note $e_1 = u$ et $e_2 = q(u)$. On remarque que $q(e_2) = q^2(u) = -u = e_1$. Comme e_1 et e_2 sont orthogonaux et de norme 1, donc non nuls, ils forment une famille libre.

\star Soit e_3 un vecteur unitaire orthogonal à e_1 et e_2 et posons $e_4 = q(e_3)$. Le vecteur e_3 est orthogonal à e_1 et e_2 , donc e_4 est orthogonal à $q(e_1) = e_2$ et à $q(e_2) = -e_1$, donc à e_1 . En clair (e_3, e_4) est en fait une base (orthonormée) du supplémentaire orthogonal de $\text{Vect}(e_1, e_2)$ et (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base orthonormée de \mathbb{R}^4 .

Relativement à cette base, la matrice de q est M .

3. a) D'après la question 1, u et $q(u)$ sont deux vecteurs orthogonaux de norme 1, donc la famille $(u, q(u))$ est libre. Comme P est engendré par u et $q(u)$, cette famille est bien une base orthonormée de P .

b) Soit $x \in P$. Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda u + \mu q(u)$.

Ainsi, $q(x) = \lambda q(u) - \mu u \in P$ et P est stable par q . Comme la matrice de $q|_P$ dans la base $(u, q(u))$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $q|_P$ est la rotation d'angle $\pi/2$ (dans le plan P ainsi orienté par la base $(u, q(u))$).

c) On remarque que $q(v) = -\sin \theta u + \cos \theta q(u)$. Ainsi, la matrice de passage de la base $(u, q(u))$ à la base $(v, q(v))$ vaut $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. On retrouve une matrice de rotation et la matrice de passage de la base $(v, q(v))$ à la base $(u, q(u))$ est $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

4. a) Soient $x, y \in E$.

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y) \rangle &= (\cos^2 \alpha) \langle x, y \rangle + \cos \alpha \sin \alpha (\langle x, q(y) \rangle + \langle q(x), y \rangle) \\ &\quad + (\sin^2 \alpha) \langle q(x), q(y) \rangle \\ &= \langle x, y \rangle + \cos \alpha \sin \alpha (\langle -q^2(x), q(y) \rangle + \langle q(x), q(y) \rangle) \\ &= \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

Ainsi, f est bien un endomorphisme orthogonal.

b) Soit $u \in U$. Comme précédemment, on définit le plan P engendré par la famille $(u, q(u))$. On montre aisément que ce plan est stable par f . De plus, la matrice de $f|_P$ dans la base $(u, q(u))$ est $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Ainsi, la matrice de $f|_P$ dans la base $(u, q(u))$ est une matrice de rotation.