2

ALGÈBRE

Exercice 2.01.

Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
$\forall\,(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$, on pose $[f,g]=f\circ g-g\circ f$.

On dira qu'un endomorphisme f de E est *nilpotent* s'il existe un entier naturel n, tel que $f^n=0$.

1. a) Montrer que : $\forall\,(f,g,h)\in\mathcal{L}(E)^3, [[f,g],h]+[[g,h],f]+[[h,f],g]=0$.

b) Soit $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $[f,g]=[g,f]$.

2. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On souhaite démontrer dans cette question l'équivalence des propositions :

(i) Il existe un projecteur $p\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f=[p,f]$.

(ii) $f^2=0$.

a) On suppose (i). Montrer successivement que $p\circ f\circ p=0$, puis $f\circ p=0$ et conclure.

b) On suppose (ii). En considérant une projection p d'image $\mathrm{Im}(f)$, conclure.

3. Soit g fixé dans $\mathcal{L}(E)$.

a) Démontrer que l'application $\varphi_g:\mathcal{L}(E)\to\mathcal{L}(E), f\mapsto[f,g]$ est linéaire.

b) Démontrer que :

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\forall\,f\in\mathcal{L}(E),(\varphi_g)^n(f)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}g^k\circ f\circ g^{n-k}.$$

c) En déduire que si g est nilpotent alors φ_g est nilpotent.

4. Résoudre l'équation $[f, g] = id_E$, d'inconnues f et g appartenant à $\mathcal{L}(E)$.

Solution

1. a) Soit $(f, g, h) \in \mathcal{L}(E)^3$. Alors :
$[[f, g], h] = [f \circ g - g \circ f, h] = f \circ g \circ h - g \circ f \circ h - h \circ f \circ g + h \circ g \circ f$,
d'où, en faisant tourner les lettres et en écrivant par simple juxtaposition une composition :

$$\begin{aligned}[][[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] &= (fgh - gfh - hfg + hgf)\\ &\quad +(ghf - hgf - fgh + fhg) + (hfg - fhg - ghf + gfh) = 0\end{aligned}$$

b) Pour $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, on a $[f, g] = f \circ g - g \circ f = -(g \circ f - f \circ g) = -[g, f]$.
On a donc $[f, g] = [g, f]$ si et seulement si, $[f, g] = 0$, soit $f \circ g = g \circ f$.

2. a) Supposons qu'il existe un projecteur p tel que $p \circ f - f \circ p = f$.

En composant d'abord à gauche par p, $p \circ f - p \circ f \circ p = p \circ f$, d'où $p \circ f \circ p = 0$.

En revenant au point de départ et en composant maintenant à droite par p, comme $p \circ f \circ p = 0$, il vient : $-f \circ p = f \circ p$, ce qui équivaut à $f \circ p = 0$.
Enfin $f^2 = (p \circ f)^2 = p \circ (f \circ p) \circ f = 0$.

b) Réciproquement, supposons $f^2 = 0$, c'est-à-dire $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. Soit F tel que $\text{Im}(f) \oplus F = E$ et p la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à F.
Soit $x \in E$.
D'une part $p \circ f(x) = f(x)$ car $f(x) \in \text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f) = \text{Im}(p)$.
D'autre part, $f \circ p(x) = 0$ car $p(x) \in \text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

D'où : $[p, f](x) = (p \circ f - f \circ p)(x) = f(x)$ et le résultat.

3. a) Montrons que φ_g est linéaire. Soit $(f, f') \in \mathcal{L}(E)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi_g(\alpha f + \beta f') = [\alpha f + \beta f', g] &= (\alpha f + \beta f') \circ g - g \circ (\alpha f + \beta f')\\ &= \alpha(f \circ g - g \circ f) + \beta(f' \circ g - g \circ f')\\ &= \alpha\varphi_g(f) + \beta\varphi_g(f')\end{aligned}$$

Donc $\varphi_g \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

Enfin, $\text{Ker}(\varphi_g)$ est l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec g.

b) Raisonnons par récurrence et notons encore la composition par simple juxtaposition.
$\rightarrow$ $(\varphi_g)^0(f) = f$, et l'égalité proposée est alors banale.

$\rightarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\varphi_g)^n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k f g^{n-k}$, alors

$(\varphi_g)^{n+1}(f) = \varphi_g((\varphi_g)^n(f)) = [(\varphi_g)^n(f), g] = (\varphi_g)^n(f) \circ g - g \circ (\varphi_g)^n(f)$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k f g^{n-k+1} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^{k+1} f g^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k f g^{n-k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k-1} g^k f g^{n+1-k}$$

$$(\varphi_g)^{n+1}(f) = f g^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] g^k f g^{n-k+1} + (-1)^{n+1} g^{n+1} f$$

Et, par la formule triangulaire de Pascal et incorporation des termes extrêmes :

$$(\varphi_g)^{n+1}(f) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} g^k f g^{n+1-k}$$

Ce qui prouve que la relation est héréditaire. On conclut par le principe de récurrence.

c) Supposons g nilpotent, soit alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $g^p = 0$. Il vient :

$$(\varphi_g)^{2p-1}(f) = \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k \binom{2p-1}{k} g^k f g^{2p-1-k}.$$

Pour chaque indice k de cette somme, ou bien $k \geqslant p$, ou bien $k \leqslant p-1$ et alors $2p-1-k \geqslant p$; chaque terme $g^k f g^{2p-1-k}$ est donc nul, ce qui prouve que $(\varphi_g)^{2p-1} = 0$. Ainsi, si g est nilpotent, alors φ_g est nilpotent.

4. Evidemment cette équation n'a pas de solution si $n = \dim E > 0$, car on a $\operatorname{tr}([f,g]) = 0 \neq \operatorname{tr}(id_E)$.

Si $\dim E = 0$ le problème est dégénéré car $id_E = 0$!

Exercice 2.02.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Pour tout polynôme P, on note $P^{(k)}$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ de P.

Soit $Q \in E$ de degré n. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $Q_i(X) = Q(X+i)$.

Le but de cet exercice est de montrer que $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ constitue une base de E.

1. Montrer que la famille $(Q, Q', Q'', \ldots, Q^{(n)})$ est une base de E.

2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit l'application linéaire f_k par :

$$f_k : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P^{(k)}(0)$$

a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, f_k est dans E^*.

b) Pour tout couple d'entiers $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$, calculer $f_k(X^\ell)$.

c) Montrer que $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre d'éléments de E^*.

3. Soit $\varphi \in E^*$.

a) Déterminer la dimension de E^*.

b) Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\forall\, P \in E, \varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i P^{(i)}(0)$$

c) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(Q_0) = \varphi(Q_1) = \cdots = \varphi(Q_n) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$.

4. On suppose que $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ n'est pas une base de E.

a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $\dim(H) = n$ et $\mathrm{Vect}(Q_0, Q_1, \dots, Q_n) \subset H$

b) Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $E = \mathrm{Vect}(a) \oplus H$.

c) On définit une application $\psi_a : E \to \mathbb{R}$ comme suit :
pour tout $x \in E$ s'écrivant $x = \mu a + h$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $h \in H$, on pose $\psi_a(x) = \mu$.

Montrer que ψ_a est une forme linéaire sur E et déterminer son noyau.

d) Aboutir à une contradiction et conclure.

Solution

1. Comme $\deg Q = n$, la famille $(Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)})$ est libre car à degrés échelonnés. Cette famille contenant $(n+1)$ polynômes, on en déduit qu'elle constitue une base de E.

2. a) On vérifie facilement que f_k est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

b) Soient $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$. On a : $f_k(X^k) = k!$ et $f_k(X^\ell) = 0$ si $k \neq \ell$.

(si $k > \ell$, il ne reste rien et si $k < \ell$, il reste au moins un facteur X)

c) Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0$.

Soit $\ell \in [\![0, n]\!]$ quelconque . En évaluant cette formule en X^ℓ, on obtient $\lambda_\ell \ell! = 0$, d'où $\lambda_\ell = 0$. On en déduit que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de E^*.

3. a) On a : $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = n + 1$.

b) La famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de E^* et elle compte $(n+1)$ éléments. C'est donc une base de E^*. Par unicité de la décomposition dans la base, il existe un unique $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\varphi = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_{n+1} f_{n+1}$.

En appliquant cette égalité à un polynôme quelconque P de E, on trouve

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a_0 f_0(P) + a_1 f_1(P) + \ldots + a_{n+1} f_{n+1}(P)\\ &= a_0 P(0) + a_1 P'(0) + \ldots + a_n P^{(n)}(0)\end{aligned}$$

c) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(Q_0) = \varphi(Q_1) = \ldots = \varphi(Q_n) = 0$.
En utilisant la question précédente, on obtient :
$$\forall j \in [\![0,n]\!], 0 = \varphi(Q_j) = a_0 Q_j(0) + a_1 Q_j'(0) + \ldots + a_n Q_j^{(n)}(0)$$
Comme $Q_j(X) = Q(X+j)$, cette formule se réécrit sous la forme :
$$\forall j \in [\![0,n]\!], 0 = a_0 Q(j) + a_1 Q'(j) + \ldots + a_n Q^{(n)}(j)$$
On pose alors $R(X) = a_0 Q(X) + a_1 Q'(X) + \ldots + a_n Q^{(n)}(X)$.
Les relations précédentes montrent que $R(0) = R(1) = \cdots = R(n) = 0$. Le polynôme R, de degré au plus n, admet ainsi $(n+1)$ racines distintes : c'est donc le polynôme nul. Il vient :
$$0 = R(X) = a_0 Q(X) + a_1 Q'(X) + \ldots + a_n Q^{(n)}(X)$$
Comme la famille $(Q, Q', Q'', \ldots, Q^{(n)})$ est libre (cf. question 1), on en déduit que $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. En revenant à la définition des coefficients a_i, on conclut que $\varphi = 0$.

4. a) On suppose que $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ n'est pas une base de E. Comme c'est une famille de cardinal $(n+1)$, elle n'est donc ni libre ni génératrice.
Ainsi, $V = \text{Vect}(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est un sous-espace vectoriel strict de E et $\dim(V) \leqslant n$. En utilisant le théorème de la base incomplète, on construit un sous-espace vectoriel H de E de dimension n et tel que $V \subset H$.

b) Comme $H \subsetneq E$, il existe un vecteur a de E tel que $a \in E$ et $a \notin H$. Le vecteur a est donc non nul et la droite $\text{Vect}\, a$ n'est pas incluse dans H. Ainsi $E = \text{Vect}(a) \oplus H$.

c) $\psi_a(x)a$ n'est autre que le projeté de x dans la projection sur $\text{Vect}\, a$ parallèlement à H. La linéarité de ψ_a est alors claire et son noyau n'est autre que H.

d) La forme linéaire ψ_a s'annule sur H, donc en particulier en $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ puisque ces polynômes sont contenus dans H. On déduit de la question 3 que ψ_a est la forme linéaire nulle, ce qui est faux puisque $\psi_a(a) = 1$. On aboutit donc à une contraction. On a ainsi montré par un raisonnement par l'absurde que $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de E.

Exercice 2.03.

1. Montrer pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la convergence de l'intégrale
$$\int_0^1 t^2 (\ln t - xt - y)^2 \, dt$$
On note alors $\varphi(x, y)$ la valeur de cette intégrale.

2. Montrer que les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$ sont strictement positives.

3. a) Montrer que la fonction φ définie en 1. est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique (x_0, y_0) que l'on déterminera.

b) Montrer que $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0)$.

4. Montrer que l'ensemble E des fonctions continues $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^2 f^2(t)\, dt$ converge est un espace vectoriel et que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)\, dt$$

5. Montrer que si X est un ensemble et si $h : X \to \mathbb{R}_+$ est une fonction, alors $\inf\limits_X h^2 = \big(\inf\limits_X h\big)^2$.
En déduire à l'aide de la question 4., mais indépendamment des résultats de la question 3., comment retrouver que $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0)$.

Solution

1. En développant $t^2(\ln t - xt - y)^2$, les intégrales qui posent problème sont de la forme $\displaystyle\int_0^1 t^p \ln^q t dt$ pour $2 \leqslant p \leqslant 4$ et $0 \leqslant q \leqslant 2$ qui sont faussement impropres ou convergentes en 0.

En développant la fonction dans l'intégrale $f(x, y)$, il vient :

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= I_{2,2} + x^2 I_{4,0} + y^2 I_{2,0} + 2xI_{3,1} + 2yI_{2,1} + 2xyI_{3,0}\\ &= I_{2,2} + \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} + \frac{x}{8} + \frac{2}{9}y + \frac{1}{2}xy.\end{aligned}$$

2. Les valeurs propres de A sont les racines de l'équation $\lambda^2 - \frac{16}{15}\lambda + \frac{1}{60} = 0$. Le discriminant est positif et il y a donc deux racines réelles. Etant de somme et de produit strictement positifs elles sont bien strictement positives.

3. a) Comme φ est polynomiale, elle est de classe C^2 et on a :

$$\nabla\varphi(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}y = 0\\ \frac{2}{3}y + \frac{2}{9} + \frac{1}{2}x = 0\end{cases}$$

La résolution de ce système donne : $(x_0, y_0) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{19}{12}\right)$.

b) Comme la matrice Hessienne de φ est A, de valeurs propres strictement positives, φ admet au point critique un minimum global (on peut faire le calcul de $\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)$ et observer les simplifications des termes du premier degré)

Donc $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0)$.

3. Il est évident que l'ensemble E contient la fonction nulle, est stable par produit par un scalaire et que le produit scalaire est bilinéaire, symétrique et positif (si l'intégrale converge).

Par théorème de comparaison pour les intégrales :

• comme
$0 \leqslant t^2(f(t)+g(t))^2 \leqslant t^2(f(t)+g(t))^2 + t^2(f(t)-g(t))^2 = 2t^2f(t)^2 + 2t^2g(t)^2$,
l'ensemble E est stable par somme ;

• comme $0 \leqslant t^2|f(t)g(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}(t^2f(t)^2 + t^2g(t)^2)$, l'intégrale qui définit le produit scalaire est absolument convergente.

• Si $\langle f,f\rangle = 0$, pour tout $x \in]0,1]$, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_x^1 t^2f^2(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \langle f,f\rangle = 0$, donc, en dérivant par rapport à x (ou aussi par un argument continuité), on a $-x^2f^2(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1]$, donc $f = 0$

4. De $0 \leqslant \inf_X \alpha \leqslant \alpha$ on déduit que $\left(\inf_X \alpha\right)^2$ est un minorant de α^2, donc $\left(\inf_X \alpha\right)^2 \leqslant \inf_X \alpha^2$.

De $0 \leqslant \inf_X \alpha^2 \leqslant \alpha^2$ on déduit que $(\inf_X \alpha)^{\frac{1}{2}}$ est un minorant de α, donc

$$\left(\inf_X \alpha^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \inf_X \alpha.$$

Ainsi en posant $u_0(t) = 1$, $u_1(t) = t$ et $\theta(t) = \ln t$, on a $u_0, u_1, \theta \in E$ et :

$$\begin{aligned} \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) &= \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \|\theta - xu_1 - yu_0\|^2 \\ &= \left(\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \|\theta - xu_1 - yu_0\|\right)^2, \end{aligned}$$

qui est le carré de la distance de θ à l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_0,u_1)$ dans l'espace euclidien $\mathrm{Vect}(u_0,u_1,\varphi)$.

Donc cette distance est atteinte en un unique point $x_0u_1 + y_0u_0$ qui est le projeté orthogonal de θ sur $\mathrm{Vect}(u_0,u_1)$.

Exercice 2.04.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit (u,v) une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, U et V les matrices colonnes canoniquement associées à u et v et α un réel non nul.

I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On considère la matrice $A = I_n + \alpha\, U.{}^tU$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) Soit Q une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que ses valeurs propres réelles (s'il y en a) appartiennent à l'ensemble $\big\{-1, 1\big\}$.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle orthogonale ?

2. Dans cette question, on considère la matrice $B = I_n + U.{}^tV + V.{}^tU$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice B relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer qu'un vecteur x de matrice colonne canoniquement associée X est vecteur propre de g associé à la valeur propre λ, si et seulement si :

$$(\lambda - 1)x = \langle x, u\rangle\, v + \langle x, v\rangle\, u$$

b) En déduire les valeurs propres de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

Solution

1. a) $A - I_n = \alpha\, U.{}^tU$ est de rang 1, de valeurs propres 0 associée à $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ et $\mu = \mathrm{tr}(\alpha\, U.{}^tU) = \alpha\, \|u\|^2 \neq 0$ associée à $\mathrm{Vect}(u)$, d'où :

$$\mathrm{spec}(f) = \big\{1, 1+\mu\big\}, \mathrm{Ker}(f - id) = \mathrm{Vect}(u)^\perp, \mathrm{Ker}(f - (1+\mu)\, id) = \mathrm{Vect}(u)$$

f est diagonalisable car $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ou en remarquant que la somme (directe) de ses sous-espaces propres est égale à $\mathbb{R}^n$.

b) $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $Q\, X = \lambda\, X$ donnent

$\lambda^2\, \|X\|^2 = {}^t(Q\, X)\, (Q\, X) = {}^tX\, {}^tQ\, Q\, X = {}^tX\, X = \|X\|^2$, d'où $\lambda^2 = 1$ et $\lambda \in \{-1, 1\}$.

c) $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\mu = 1 + \alpha\, \|U\|^2 = \pm 1$. Comme $\alpha \neq 0$, la valeur 1 est à exclure et donc :

$$A \in O_n(\mathbb{R}) \implies \alpha = -2/\|u\|^2$$

Alors$1 + \mu = -1$ et f est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$, donc A est bien orthogonale.

2. a) On a :

$$\begin{aligned} B\, X = \lambda\, X &\iff \lambda\, X = X + U.{}^tV\, X + V.{}^tU\, X \\ &\iff (\lambda - 1)\, x = \langle x, v\rangle\, u + \langle x, u\rangle\, v \in \mathrm{Vect}(u, v) \end{aligned}$$

b) On distingue deux cas :

• Si $\lambda = 1$, il vient : $g(x) = x \iff \langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle = 0 \iff x \in \big(\mathrm{Vect}(u, v)\big)^\perp$, donc si $n > 2$, 1 est valeur propre de g la dimension du sous-espace propre associé valant $n - 2$.

• Si $\lambda \neq 1$, alors $x \in V = \mathrm{Vect}(u, v)$ et s'écrit $x = a\, u + b\, v$; puis :

$g(x) = \lambda x \iff (\lambda - 1)(au + bv) = \langle au + bv, v\rangle u + \langle au + bv, u\rangle v$

$$\iff \begin{cases} a(\langle u,v\rangle + 1 - \lambda) + b\|v\|^2 = 0 \\ a\|u\|^2 + b(\langle u,v\rangle + 1 - \lambda) = 0 \end{cases}$$

Ce système a des solutions non triviales si et seulement si λ est solution de l'équation : $(\langle u,v\rangle + 1 - \lambda)^2 - \|u\|^2\|v\|^2 = 0$, soit :

$$\lambda = 1 + \langle u,v\rangle \pm \|u\|\|v\|$$

Comme u et v ne sont pas colinéaires on a $|\langle u,v\rangle| < \|u\|\|v\|$ et on vient de trouver deux valeurs propres différentes et différentes de 1. Chacune a un sous-espace propre associé de dimension au moins 1, donc de dimension exactement 1 et par somme des dimensions des sous-espaces propres, g est diagonalisable.

Exercice 2.05.

Dans tout cet exercice, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathbb{Z}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\varphi_n(P)$ le quotient dans la division de $P(-1) - P(X)$ par $X + 1$.

a) Démontrer que φ_n ainsi définie est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer son noyau.

c) L'application φ_n est-elle une surjection de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?

2. Ecrire la matrice de φ_n dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3. Soit $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{R}_n[X]$. Démontrer que $\varphi_n(P)$ s'écrit $\sum\limits_{i=0}^{n-1} b_i X^i$ avec, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

$$b_i = (-1)^i \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^k a_k$$

Dans la suite de cet exercice, on considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = 1 - 2X$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2}(X) = 2(1 - 2X)T_{n+1}(X) - T_n(X).$$

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = T_n(-1)$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver l'expression de v_n en fonction de n.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est un entier strictement positif.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n et montrer que $T_n \in \mathbb{Z}[X]$.

6. Démontrer que $\varphi_n(T_n) \in \mathbb{Z}[X]$.

Solution

1. a) Le polynôme $Q = P(-1) - P(X)$ s'annule en -1 et est donc divisible par $X+1$: la division «tombe juste». La linéarite de φ_n est banale, car : soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned}(aP+bQ)(-1) - (aP+bQ)(X) &= a(P(-1) - P(X)) + b(Q(-1) - Q(X))\\ &= a(X+1)\varphi_n(P) + b(X+1)\varphi_n(Q)\\ &= (X+1)(a\varphi_n(P) + b\varphi_n(Q))\end{aligned}$$

Donc par définition de φ_n : $\varphi_n(aP+bQ) = a\varphi_n(P)+b\varphi_n(Q)$ et φ_n est linéaire et le degré de $\varphi_n(P)$ ne saurait excéder $n-1$:

$$\varphi_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $P \in \operatorname{Ker}(\varphi_n)$ si et seulement si $P(X) = P(-1)$, c'est-à-dire si et seulement si P est constant. Ainsi, $\operatorname{Ker}(\varphi_n) = \mathbb{R}_0[X]$, qui est de dimension 1.

c) Par le théorème du rang $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = 1 + \operatorname{rg}(\varphi_n)$, donc $\operatorname{rg}(\varphi_n) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$. Ainsi

$$\operatorname{Im}(\varphi_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

2. Puisque $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on regarde chaque image des vecteurs de la base, et ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$(-1)^k - X^k = -(1+X)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}X^i = (1+X)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}X^i$$

tandis que $\varphi_n(1) = 0$.

On en déduit donc que la matrice associée à φ_n, dans les bases précédentes est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & (-1)^n\\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-1}\\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1\end{pmatrix}$$

3. Comme a_i est la $(i+1)^{\text{ème}}$ coordonnée de P et que b_i est la $(i+1)^{\text{ème}}$ coordonnée de $\varphi_n(P)$, on obtient, en notant $(m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1}$, les coefficients de M, définie précédemment :

$$b_i = \sum_{k=1}^{n+1} m_{i+1,k}a_{k-1} = \sum_{k=0}^{n} m_{i+1,k+1}a_k = \sum_{k=i+1}^{n}(-1)^{k-i}a_k$$

4. a) D'après la relation de récurrence sur la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit immédiatement : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n$. Il s'agit d'une suite

récurrente d'ordre 2, et d'après les formules classiques, en utilisant $v_0 = 1$ et $v_1 = 3$, on obtient :

$$v_n = \frac{1}{2}(3-\sqrt{8})^n + \frac{1}{2}(3+\sqrt{8})^n$$

b) On voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$. Ensuite, en faisant une récurrence double, on prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \mathbb{N}$, ou alors on dit que si on développe, les termes contenant une puissance impaire de la racine se détruisent.

5. Toujours par récurrence double, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$ et que $T_n \in \mathbb{Z}[X]$.

6. Comme $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ et comme M est à coefficients entiers, on en déduit que $\varphi_n(T_n) \in \mathbb{Z}[X]$.

Exercice 2.06.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} > 0 \text{ et } \forall\, i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.

2. Montrer que toutes les valeurs propres réelles ou complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.

(on pourra considérer une colonne propre $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ associée et un indice i tel que $j \neq i \implies |x_j| \leqslant |x_i|$)

3. a) Soit z un nombre complexe non nul vérifiant $|1+z| = 1 + |z|$. Montrer que z est un réel strictement positif.

b) Montrer que si z_1 et z_2 sont des complexes non nuls tels que

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|,$$

alors z_1 et z_2 ont même argument.

c) Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des complexes non nuls tels que

$$|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

Montrer que ces complexes ont même argument.

4. On considère une valeur propre λ de A de module 1 et X une colonne propre associée.

a) Montrer que tous les coefficients de X sont non nuls.

b) Montrer que tous les coefficients de X ont le même argument.

c) Montrer que tous les coefficients de X ont le même module.

d) En déduire que 1 est la seule valeur propre de module égal à 1.

5. Ce dernier résultat est-il encore vrai si on suppose seulement :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, a_{i,j}\geqslant 0 \text{ et } \forall\, i\in[\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=1\,?$$

Solution

1. Pour $X={}^t(\,1 \quad \cdots \quad 1\,)$, on a $AX=X$ et donc 1 est valeur propre de A.

2. Soit λ une valeur propre de A, $X={}^t(\,x_1 \quad \cdots \quad x_n\,)$ une colonne propre associée. Soit i un indice tel que $\forall\, j\neq i, |x_j|\leqslant|x_i|$. Alors $AX=\lambda X$ donne en particulier :

$$a_{i,1}x_1+\cdots+a_{i,i}x_i+\cdots+a_{i,n}x_n=\lambda x_i$$

Ainsi : $|\lambda|.|x_i|\leqslant|x_i|\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}=|x_i|$ et $|\lambda|\leqslant 1$.

3. a) Ecrivons $z=a+ib$, avec a et b réels. Alors :

$$|1+z|=\sqrt{(a+1)^2+b^2} \text{ et } 1+|z|=1+\sqrt{a^2+b^2}$$

On a donc égalité si et seulement si : $a^2+2a+1+b^2=1+a^2+b^2+2\sqrt{a^2+b^2}$ ou encore : $\sqrt{a^2+b^2}=a$, soit $,b=0,a\geqslant 0$ et comme $z\neq 0$, $a>0$.

b) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|\iff|1+\frac{z_2}{z_1}|=1+|\frac{z_2}{z_1}|\iff\frac{z_2}{z_1}\in\mathbb{R}_+^*\iff z_1$ et z_2 ont même argument (modulo 2π).

c) $\star$ On vient de montrer le résultat pour $n=2$.

$\star$ Supposons le résultat pour un certain rang $n-1$, et considérons $z_1,\ldots,z_n$ vérifiant la condition imposée.

Alors : $|z_1|+\cdots+|z_n|=|z_1+\cdots+z_n|\leqslant|z_1+\cdots+z_{n-1}|+|z_n|$.

Donc $|z_1|+\cdots+|z_{n-1}|\leqslant|z_1+\cdots+z_{n-1}|$ et l'inégalité contraire étant banale :

$$|z_1|+\cdots+|z_{n-1}|=|z_1+\cdots+z_{n-1}|$$

Par l'hypothèse de récurrence $z_1,\ldots,z_{n-1}$ ont tous le même argument θ et il reste :
$|(\rho_1+\cdots+\rho_{n-1})\mathrm{e}^{i\theta}+z_n|=\rho_1+\cdots+\rho_{n-1}+|z_n|$

On est donc revenu du rang 2, avec les points $(\rho_1+\cdots+\rho_{n-1})\mathrm{e}^{i\theta}$ et z_n. Ainsi z_n a le même argument θ.
On conclut par le principe de récurrence.

4. Avec les notations de la question 2. : $\forall\, i\in[\![1,n]\!], \sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j=\lambda x_i$ et on choisit encore un indice i tel que : $j\neq i\implies|x_j|\leqslant|x_i|$.

a) On a donc : $\lambda = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}\dfrac{x_j}{x_i}$. S'il existait un coefficient x_k nul, on aurait : $\lambda = \sum\limits_{j\neq k}^{n} a_{i,j}\dfrac{x_j}{x_i}$, d'où : $|\lambda| \leqslant \sum\limits_{j\neq k}^{n} a_{i,j} = 1 - a_{i,k} < 1$.
Par contraposée : $|\lambda| = 1 \implies \forall\, k, x_k \neq 0$.

b) On a alors :
$|x_i| = |\lambda x_i| = \big|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\big| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n}\big|a_{i,j}x_j\big| = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_i| = |x_i|$
Cette succession d'inégalités est donc en fait une succession d'égalités et en particulier :

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\Big| = \sum_{j=1}^{n}\big|a_{i,j}x_j\big|$$

Ce qui prouve que tous les nombres non nuls $a_{i,j}x_j$ ont le même argument et il en est de même des nombres non nuls x_j.

c) Affinons le raisonnement fait en a) : s'il existait un indice k tel que $|x_k| < |x_i|$, on aurait : $|\lambda| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}\Big|\dfrac{x_j}{x_i}\Big| < \sum\limits_{j\neq k} a_{i,j} + a_{i,k} < 1$

d) Ainsi le vecteur colonne X est colinéaire au vecteur ${}^t\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ donc propre pour la valeur propre 1 et $\lambda = 1$.

5. On considère la matrice A telle que $i \in [\![1, n-1]\!] \implies a_{i,i+1} = 1$, $a_{n,1} = 1$ tous les autres coefficients étant nuls. Elle est stochastique et toutes ses valeurs propres sont de module 1.

Exercice 2.07.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$f(M) = M - 2\,\mathrm{tr}(M)A$$

où tr désigne l'application « trace ».

1. L'application f est-elle linéaire ? Montrer que $f(A) = 0$ si et seulement si $\mathrm{tr}(A) = \dfrac{1}{2}$ ou $A = 0$.

2. a) Montrer que si $\mathrm{tr}(A) \neq \dfrac{1}{2}$, alors $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

b) Montrer que f est bijective si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq \dfrac{1}{2}$.

3. Dans cette question on suppose que $\mathrm{tr}(A) = \dfrac{1}{2}$.
On note $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

a) Montrer que H et $\mathrm{Vect}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que f est le projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur H parallèlement à $\mathrm{Vect}(A)$.

4. Montrer que $f \circ f = id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ si et seulement si $\mathrm{tr}(A) = 1$ ou $A = 0$. Quels sont alors les sous-espaces propres de f ?

5. Dans cette question on ne fait aucune hypothèse sur $\mathrm{tr}(A)$.

a) Déterminer un polynôme annulateur de f.

b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ ou $A = 0$.

Solution

1. L'application f est linéaire d'après la linéarité de la trace. On a :

$$f(A) = 0 \iff (1 - 2\,\mathrm{tr}(A))A = 0 \iff \mathrm{tr}(A) = \frac{1}{2} \text{ ou} A = 0$$

2. a) $\to$ Si $A = 0$, alors $f = id$ et $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.
$\to$ Si $A \neq 0$, alors : $M \in \mathrm{Ker}\, f \iff M = \mathrm{tr}(M)A \implies M = \lambda A$.
Réciproquement, comme $A \neq 0$ et $\mathrm{tr}(A) \neq \frac{1}{2}$, d'après la question 1, λA appartient à $\mathrm{Ker}\, f$ si et seulement si $\lambda = 0$. Donc $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

b) Comme f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, il est bijectif si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$. C'est vrai si $\mathrm{tr}(A) \neq \frac{1}{2}$ (cf question 2a). Si $\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{2}$, alors $A \neq 0$ et (question 1) $A \in \mathrm{Ker}\, f$, donc f non bijectif.

3. a) Par le théorème du rang, on a :

$$\dim(H) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) = \dim \mathcal{M}_n - \mathrm{rg}(\mathrm{tr}) = n^2 - 1.$$

Or $\dim \mathrm{Vect}(A) = 1$, donc $\dim H + \dim \mathrm{Vect}(A) = \dim \mathcal{M}_n$.
De plus $\mathrm{Vect}(A) \cap H = \{0\}$ par calcul facile, d'où la conclusion.

b) On a : $\mathrm{tr}(f(M)) = \mathrm{tr}(M) - 2\,\mathrm{tr}(M)\,\mathrm{tr}(A) = 0$ car $\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{2}$.
Donc, pour tout M, on a : $M = \underbrace{2\,\mathrm{tr}(M)A}_{\in \mathrm{Vect}(A)} + \underbrace{f(M)}_{\in H}$.

4. On calcule :

$$\begin{aligned} f(f(M)) &= (M - 2\,\mathrm{tr}(M)A) - 2\,\mathrm{tr}\left(M - 2\,\mathrm{tr}(M)A\right) A \\ &= M + 4(\mathrm{tr}(A) - 1)\,\mathrm{tr}(M)A. \end{aligned}$$

Ainsi, comme $\mathrm{tr}(M)$ n'est pas toujours nul, on a : $f \circ f = id \iff \mathrm{tr}(A) = 1$ ou $A = 0$.
Alors $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f, donc les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1 et les sous-espaces propres alors associés sont :

$$\begin{cases} E_1 = \mathcal{M}_n & \text{si } A = 0 \\ E_1 = H \text{ et } E_{-1} = \mathrm{Vect}(A) & \text{si } \mathrm{tr}(A) = 1 \end{cases}$$

5. a) En remarquant que $\text{tr}(M)A = \frac{1}{2}(M - f(M))$, le calcul de la question 4. donne :

$$f \circ f = id + 4(\text{tr}(A) - 1)\frac{1}{2}(id - f)$$

Ainsi un polynôme annulateur de f est $P = X^2 + 2(\text{tr}(A) - 1)X - 2\,\text{tr}(A) + 1$.

b) Si $A = 0$ alors $f = id$ est diagonalisable.

Si $A \neq 0$ et $\text{tr}(A) = 0$, le polynôme P a une racine double $\lambda = 1$ seule valeur propre possible ; or $\text{Ker}(f - id) = H \neq \mathcal{M}_n$ donc f n'est pas diagonalisable.

Si $\text{tr}(A) \neq 0$ alors les racines du polynôme P sont 1 et $1 - 2\,\text{tr}(A)$ et on a $E_1 = H$ et $E_{1-2\,\text{tr}(A)} = \text{Vect}(A)$; donc la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n^2 et f est diagonalisable.

Exercice 2.08.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit s un endomorphisme de E vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $s \circ s = id_E$.

(ii) $s \neq id_E$.

(iii) $s \neq -id_E$.

On considère l'application φ définie par $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E), f \mapsto \frac{1}{2}\,(s \circ f + f \circ s)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que s est diagonalisable et que son spectre est égal à $\{-1, 1\}$.

On notera dans la suite E_1 (resp. E_{-1}) le sous-espace propre de s associé à la valeur propre 1 (resp. -1).

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$f \in \text{Ker}(\varphi) \iff f(E_1) \subset E_{-1} \text{ et } f(E_{-1}) \subset E_1$$

4. Soit λ une valeur propre de φ. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un vecteur propre associé. Soit $x \in E_1$. Déterminer une relation entre $f(x)$ et $s(f(x))$. Même question pour $x \in E_{-1}$.

5. Montrer que le spectre de φ est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.

6. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de coefficient dominant égal à 1 et de degré 3 tel que $P(\varphi) = 0$.

<u>Solution</u>

1. On a bien $\varphi(f) \in \mathcal{L}(E)$ et on vérifie facilement la linéarité de φ.

2. Comme $s^2 = id_E$, $P(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de s. On en déduit que $\text{spec}(s) \subset \{-1, 1\}$. On note E_1 (resp. E_{-1}) le sous-espace propre de s associé à la valeur propre éventuelle 1 (resp. -1).
Comme $x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + s(x))}_{x_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - s(x))}_{x_2}$, avec :
$s(x_1) = \frac{1}{2}(s(x) + s^2(x)) = x_1$ et $s(x_2) = \frac{1}{2}(s(x) - s^2(x)) = -x_2$
on a $E = \text{Ker}(s - id_E) + \text{Ker}(s + id_E) = E_1 + E_{-1}$. Comme clairement $E_1 \cap E_{-1} = \{0\}$, ceci prouve que $E = E_1 \oplus E_{-1}$ et s est un endomorphisme diagonalisable.

Si on avait $\text{spec}(s) = \{1\}$, comme s est diagonalisable, on aurait $s = id_E$, ce qui contredit l'hypothèse (ii). De même, si $\text{spec}(s) = \{-1\}$, comme s est diagonalisable, on aurait $s = -id_E$, ce qui contredit l'hypothèse (iii).
On peut donc conclure que $\text{spec}(s) = \{-1, 1\}$.

3. • Soit $f \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors, $s \circ f = -f \circ s$. Prenons $x \in E_1$. Alors, $s(x) = x$ et $s(f(x)) = -f(x)$, ce qui prouve que $f(x) \in E_{-1}$. Ceci montre que $f(E_1) \subset E_{-1}$.
Puis, prenons $x \in E_{-1}$. Alors, $s(x) = -x$ et $s(f(x)) = -f(-x) = f(x)$, ce qui prouve que $f(x) \in E_1$. Ceci montre que $f(E_{-1}) \subset E_1$.

• On suppose réciproquement que $f(E_1) \subset E_{-1}$ et $f(E_{-1}) \subset E_1$.
Soit $x \in E$. Comme $E = E_1 \oplus E_{-1}$, x se décompose en $x = y + z$ où $y \in E_1$ et $z \in E_{-1}$. Par hypothèse, $f(y) \in E_{-1}$ et $f(z) \in E_1$, i.e. $s(f(y)) = -f(y)$ et $s(f(z)) = f(z)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} s(f(x)) + f(s(x)) &= s(f(y)) + s(f(z)) + f(s(y)) + f(s(z)) \\ &= -f(y) + f(z) + f(y) - f(z) = 0 \end{aligned}$$

On conclut que $\varphi(f)(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, $\varphi(f) = 0$ et $f \in \text{Ker}(\varphi)$.

4. Par définition de λ et de f, $\varphi(f) = \lambda f$, soit $\frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s) = \lambda f$.

Ainsi $s \circ f(x) + f \circ s(x) = 2\lambda f(x)$.

• Prenons $x \in E_1$.

Dans ce cas, $s(x) = x$, on en déduit que $s(f(x)) = (2\lambda - 1) f(x)$.

• Prenons $x \in E_{-1}$.

Dans ce cas, $s(x) = -x$, on en déduit que $s(f(x)) = (2\lambda + 1) f(x)$.

5. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$.

• Supposons qu'il existe $x \in E_1$ tel que $f(x) \neq 0$. D'après la question précédente, $s(f(x)) = (2\lambda - 1)f(x)$, ce qui implique que $2\lambda - 1$ est une valeur propre de s. Ainsi, $2\lambda - 1 = 1$ ou $2\lambda - 1 = -1$, donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$.

• De même, supposons qu'il existe $x \in E_{-1}$ tel que l'on ait $f(x) \neq 0$. D'après la question précédente, $s(f(x)) = (2\lambda + 1)f(x)$, ce qui implique que $2\lambda + 1$ est une valeur propre de s. Ainsi, $2\lambda + 1 = 1$ ou $2\lambda + 1 = -1$, donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$.

On a fait le tour des possibles, car comme $f \neq 0$ et E_1, E_2 supplémentaires, au moins une des deux restrictions de f à E_1 et E_{-1} est non nulle.
On conclut que $\operatorname{spec}(\varphi) \subset \{-1, 0, 1\}$.

6. L'idée est de choisir comme polynôme annulateur un polynôme de degré 3 dont les racines sont les valeurs propres potentielles de φ, à savoir 0, 1 et -1.
On prend donc $P(X) = X(X-1)(X+1) = X^3 - X$.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et en notant la composition par juxtaposition pour gagner de la place :
$\varphi(f) = \dfrac{1}{2}(sf + fs)$
$\varphi^2(f) = \dfrac{1}{4}(s(sf + fs) + (sf + fs)s) = \dfrac{1}{4}(f + 2sfs + f) = \dfrac{1}{2}(f + sfs)$
$\varphi^3(f) = \dfrac{1}{4}(s(f + sfs) + (f + sfs)s) = \dfrac{1}{4}(sf + fs + fs + sf) = \varphi(f)$.
On a bien $(\varphi^3 - \varphi)(f) = 0$ et $P = X^3 - X$ convient.

Exercice 2.09.

Pour tout entier $p \geqslant 2$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre p.

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que ${}^tA = A^n$.

1. **a)** Montrer que $A^{n^2} = A$.

b) Soit $B = A^{n+1}$. Montrer que $B^n = B$, puis que B est symétrique.

c) En déduire que B est diagonalisable et déterminer les valeurs propres possibles de B.

2. a) Montrer que -1 n'est pas valeur propre de B.

b) Montrer que B est la matrice d'un projecteur orthogonal.

3. Soit a (respectivement b) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à A (resp. B). Montrer que $\operatorname{Ker} b = \operatorname{Ker} a$, et que $\operatorname{Im} b = \operatorname{Im} a$.

4. **a)** Montrer que l'endomorphisme de $\operatorname{Im} a$ induit par a est un endomorphisme orthogonal de $\operatorname{Im} a$.

b) En déduire que A est la matrice nulle ou est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où A_1 est une matrice orthogonale de taille $r \in [\![1, p]\!]$ telle que $A_1^{n+1} = I_r$.

Solution

1. a) On a : $A^{n^2} = (A^n)^n = ({}^tA)^n = {}^t(A^n) = {}^{tt}A = A$.

b) De même $B^n = (A^{n+1})^n = A^{n^2}A^n = AA^n = B$.
Puis :

$${}^tB = {}^t(A^{n+1}) = ({}^tA){}^t(A^n) = {}^tAA$$

ce qui montre que B est une matrice symétrique (et même positive – voir 2. a)).

c) La matrice B est symétrique réelle : ses valeurs propres sont réelles et elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres de b sont deux à deux orthogonaux.

Les valeurs propres possibles de B sont les réels solutions de l'équation $x^n - x = 0$, soit $\{0, 1, -1\}$

2. a) Le réel -1 ne peut être valeur propre de B puisque si X est une colonne telle que $BX = -X$, on a : $-\|X\|^2 = {}^tXBX = {}^tX{}^tAAX = \|AX\|^2$, ce qui impose $X = 0$.

b) Ainsi $\mathrm{Sp}(b) \subseteq \{0, 1\}$ et $E_0(b)$ et $E_1(b)$ sont supplémentaires orthogonaux (l'un des deux peut être réduit au vecteur nul) et b est la projection orthogonale sur $E_1(b)$ parallèlement à $E_0(b)$.

3. $\star$ Comme $B = {}^tAA$, on a $AX = 0 \implies BX = 0$ et $\mathrm{Ker}\, a \subset \mathrm{Ker}\, b$.
Si $BX = 0$, alors $0 = {}^tX{}^tAAX = ||AX||^2$ et $AX = 0$. Ceci prouve l'inclusion contraire et finalement $\mathrm{Ker}\, b = \mathrm{Ker}\, a$.
Comme $B = A^{n+1}$, alors $\mathrm{Im}\, b \subset \mathrm{Im}\, a$. On termine avec le théorème du rang qui donne l'égalité des dimensions de ces deux sous-espaces.

4. a) Le sous-espace $\mathrm{Im}\, a$ est stable par a. La restriction de a à $\mathrm{Im}\, a$ induit un endomorphisme de $\mathrm{Im}\, a$.
De plus si $y \in \mathrm{Im}\, a$, alors $y \in \mathrm{Im}\, b$ et $b(y) = y$, ce qui entraîne que :

$$\|a(y)\|^2 = {}^tY{}^tAAY = {}^tYBY = \langle y, b(y)\rangle = \|y\|^2$$

ce qui montre que cet endomorphisme induit est une isométrie, c'est-à-dire un endomorphisme orthogonal de $\mathrm{Im}\, a$.

b) Si $A \neq 0$, la matrice A est donc orthogonalement semblable à une matrice bloc suivante : $A' = \begin{pmatrix} A_1 & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$, avec $A_1 \in O_r(\mathbb{R})$, $r \in [\![1, p]\!]$.

et comme la matrice de passage diagonalisante est orthogonale : $A^n = {}^tA$ donne $A'^n = {}^tA'$, soit $A_1^n = {}^tA_1 = A_1^{-1}$ et donc $A_1^{n+1} = I_r$.

Exercice 2.10.

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 2$) à coefficients complexes. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme annulateur non nul de A.

a) Vérifier que si λ est une valeur propre de A, alors c'est une racine de P.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme annulateur non nul de degré minimum et de coefficient de plus haut degré égal à 1. On note désormais par m_A ce polynôme.
Vérifier que $m_A = m_{{}^tA}$ (où ${}^tA$ est la matrice transposée de A).

c) Soit λ une racine de m_A.
En raisonnant par l'absurde et en écrivant m_A sous la forme $m_A(z) = (z-\lambda)q(z)$ où $q \in \mathbb{C}[z]$, montrer que λ est nécessairement une valeur propre de A.

d) En déduire que $\sigma(A)$ est exactement l'ensemble des racines du polynôme m_A.

e) On considère la matrice $R \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ donnée par $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer R^2 et en déduire m_R. Déterminer $\sigma(R)$.

2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fixées. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\Phi(M) = AM - MB$. On suppose que l'intersection de $\sigma(A)$ et de $\sigma(B)$ est vide.

a) Soit $M \in \operatorname{Ker}(\Phi)$. Montrer que $P(A)M = MP(B)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

b) Prouver que la matrice $m_B(A)$ est inversible
(on pourra écrire m_B sous la forme $m_B(X) = (X-b_1)^{n_1}\dots(X-b_\ell)^{n_\ell}$)

c) En déduire que le noyau de Φ est réduit à $\{0\}$.

d) Soit $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que l'équation $AM - MB = Y$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

e) On suppose que A est inversible et que B est nilpotente d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire que l'on a $B^m = 0$ et $B^{m-1} \neq 0$). Prouver que l'unique solution de l'équation $AM - MB = Y$ est $M = \sum\limits_{k=0}^{m-1} (A^{-1})^{k+1} Y B^k$.

3. On considère la matrice N de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ donnée par : $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Résoudre dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ l'équation $RM - MN = I_4$ d'inconnue M, où R est la matrice donnée en 1. e).

Solution

1. a) C'est du cours : $AX = \lambda X \implies P(A)X = P(\lambda)X$ et la conclusion car $X \neq 0$.

b) L'ensemble des degrés des polynômes annulateurs non nuls de A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$, il admet donc un plus petit élément m. En multipliant un polynôme annulateur de degré m par l'inverse de son coefficient dominant on obtient un polynôme de la forme souhaitée. Si l'on suppose qu'il existe deux tels polynômes, on voit que leur différence, si elle est non nulle, fournirait un polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à m, ce qui est absurde. D'où l'unicité.

c) Soit λ une racine de m_A : $m_A = (X - \lambda)Q$.
Si λ n'est pas une valeur propre de A, alors $A - \lambda I$ est inversible et on a alors $0 = (A - \lambda I)^{-1} m_A(A) = Q(A)$. Par suite, Q est un polynôme non nul de degré strictement inférieur à celui de m_A qui est annulateur, c'est absurde.

d) Notons $\mathcal{Z}(m_A)$ l'ensemble des racine de m_A.
Avec a) on voit que $\sigma(A) \subseteq \mathcal{Z}(m_A)$ et avec c) que $\mathcal{Z}(m_A) \subseteq \sigma(A)$. On a donc bien $\sigma(A) = \mathcal{Z}(m_A)$.

e) Un calcul simple (par blocs ou directement) donne $R^2 = -I$, Comme R n'est pas un multiple de l'identité, on a nécessairement $m_R = X^2 + 1$. Il résulte alors de d) que $\sigma(R) = \{-i, i\}$.

2) a) Soit $M \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, on a donc $AM = MB$, d'où l'on déduit par une récurrence immédiate que $A^n M = MB^n$ pour tout entier n, et par linéarité que $P(A)M = MP(B)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

b) Comme $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, on sait d'après 1. d) qu'aucun des b_i n'est valeur propre de A, les matrices $A - b_i I$ sont donc inversibles. Or un produit de matrices inversibles est encore une matrice inversible, il en résulte que $m_B(A)$ est inversible.

c) Soit $M \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, avec a) on voit que $m_B(A)M = Mm_B(B) = 0$ et avec b) on obtient $M = m_B(A)^{-1} m_B(A)M = 0$. On a donc bien $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$.

d) On vient de montrer que Φ est injectif. Le théorème du rang nous dit que Φ est surjectif. C'est donc un isomorphisme, d'où la propriété souhaitée.

e) Si $M = \sum_{k=0}^{m-1} (A^{-1})^{k+1} Y B^k$, il vient

$$AM - MB = \sum_{k=0}^{m-1} (A^{-1})^k Y B^k - \sum_{k=0}^{m-1} (A^{-1})^{k+1} Y B^{k+1} = Y - (A^{-1})^m Y B^m = Y$$

C'est donc bien l'unique solution prévue par d).

3) On observe que N est nilpotente d'ordre 3. Or R est inversible et on a même $R^{-1} = -R$ d'après 1. e). D'après 2) e) l'unique solution de l'équation $RM - MN = I_4$ est donc :

$$M = -R - N + RN^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.11.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = id_E$ et $u \neq id_E$. On pose :

$$E_1 = \mathrm{Ker}(u - id_E) \text{ et } E_2 = \mathrm{Ker}(u^2 + u + id_E)$$

1. a) Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

b) Déterminer un polynôme P tel que $(u^2 + u + id_E) - (u - id_E) \circ P(u)$ soit proportionnel à id_E. En déduire que $E = E_1 \oplus E_2$.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$.

a) On suppose que l'on a $\dim E_1 = \dim E_2 = 1$. Soit alors $e_1 \in E_1 \setminus \{0\}$ et $e_2 \in E_2 \setminus \{0\}$.

i) Quelle est la forme de la matrice $A = M_{(e_1,e_2)}(u)$?

ii) Montrer que le terme situé en deuxième ligne et deuxième colonne de $A^2 + A + I_2$ ne peut être nul.

iii) Montrer que l'hypothèse faite est absurde.

b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

__Solution__

1. a) Soit $x \in E_1 \cap E_2$, on a $u(x) = x$ et $u^2(x) + u(x) + x = 0$, soit $3x = 0$ et $x = 0$.

b) On peut chercher P de degré 1 et unitaire pour assurer la disparition des termes en u^2 et le choix de $P = X + 2$ fait disparaître les termes en u :

$$u^2 + u + id - (u - id) \circ (u + 2id) = 3id$$

Soit $x \in E$, on a donc $3x = (u^2 + u + id)(x) - (u - id) \circ (u + 2id)(x)$
$\to$ avec $x_1 = (u^2 + u + id)(x)$, il vient $(u - id)(x_1) = (u^3 - id)(x_1) = 0$.
$\to$ avec $x_2 = (u - id) \circ (u + 2id)(x)$, il vient

$$(u^2 + u + id)(x_2) = (u^3 - id)((u + 2id)(x_2)) = 0$$

Ainsi $x = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2$, avec $\frac{1}{3}x_1 \in E_1$ et $\frac{1}{3}x_2 \in E_2$.
Ce qui prouve que $E = E_1 + E_2$ et finalement $E = E_1 \oplus E_2$.

2. a) i) Comme $u(e_1) = e_1$, la matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$.

ii) Ainsi $A^2 + A + I_2 = \begin{pmatrix} * & * \\ * & \beta^2 + \beta + 1 \end{pmatrix}$ et comme β est réel le dernier coefficient ne peut être nul.

iii) Mais $e_2 \in E_2$, on doit donc avoir $(A^2 + A + I_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la contradiction est claire.

b) On ne peut avoir $\dim E_1 = 2$ (car $u \neq id_E$), on ne peut avoir $\dim E_1 = 1$, donc $\dim E_1 = 0$ et $\dim E_2 = 2$.
Soit e_1 un vecteur non nul de E_2. La seule valeur propre possible de u est 1 (car $u^3 = id_E$) et on vient de l'exclure. Donc $e_2 = f(e_1)$ n'est pas colinéaire à e_1 et (e_1, e_2) est une base de E.
Comme $e_1 \in E_2$, on a $(u^2 + u + id)(e_1) = 0$, soit :

$u(e_2) = u^2(e_1) = -e_1 - u(e_1) = -e_1 - e_2$ et donc :

$$M_{(e_1,e_2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.12.

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$ et E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit f un endomorphisme non nul de E nilpotent, ce qui signifie qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer que $p \leqslant n$.

2. On suppose dans cette question uniquement que $p = n$. Résoudre l'équation $u^2 = f$, d'inconnue u endomorphisme de E.

3. Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Soit g un endomorphisme de E.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q annulateur de g dont les racines sont exclusivement les valeurs propres de g.

b) Montrer que dans l'ensemble des polynômes annulateurs non nuls de g, il existe un polynôme annulateur de degré minimal. Quel lien existe-t-il entre Q et ce polynôme ?

c) On suppose dans cette question que g ne possède que 0 comme valeur propre. Montrer que g est nilpotent.

Solution

1. On sait qu'il existe $x \neq 0$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. La famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est de cardinal p et est libre puique si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k f^k(x) = 0$, en composant par f^{p-1}, cela montre que $a_0 = 0$, puis en composant par f^{p-2}, etc.
Donc $p \leqslant n$.

2. Dans cette question $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Soit u tel que $u^2 = f$. Alors $u^{2n} = 0$ et $u^{2n-2} \neq 0$. Donc u est nilpotent, mais par la question précédente son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n. Donc $2n - 1 \leqslant n \Rightarrow n \leqslant 1$ ce qui n'est pas le cas et l'équation proposée n'a donc pas de solution.

3. Les valeurs propres de f font partie des racines de tout polynôme annulateur, ici X^p. Donc $\mathrm{spec}(f) \subseteq \{0\}$. Mais f est nilpotente donc non inversible et $\mathrm{spec}(f) = \{0\}$.
L'endomorphisme f ne peut être diagonalisable, ne possédant qu'une unique valeur propre, sinon, il serait nul.

4. a) Tout endomorphisme g de E admet un polynôme annulateur, puisque la famille $(Id, g, g^2, \ldots, g^{n^2})$ étant de cardinal $n^2 + 1$ est liée. Notons P un polynôme annulateur.
Le théorème de d'Alembert Gauss permet de décomposer P sous la forme

$$P(X) = C \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

où les (α_i) sont réels ou complexes et les m_i des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. On a ainsi $\displaystyle\prod_{i=1}^{k} (g - \alpha_i Id)^{m_i} = 0$ et les facteurs en jeu commutent eux à deux.
Supposons qu'il existe i_0 tel que α_{i_0} ne soit pas valeur propre de g. L'endomorphisme $g - \alpha_{i_0} Id$ est donc inversible, tout comme $(g - \alpha_{i_0} Id)^{m_{i_0}}$. En ramenant ce facteur en début de factorisation et en multipliant par son inverse, on récupère un autre polynôme annulateur de degré inférieur dans lequel on a enlevé une racine qui n'est pas valeur propre de g. En procédant ainsi pour chacune des racines de P, on récupère un polynôme annulateur

dont les racines sont exactement les valeurs propres de g. Notons le Q et q son degré.

b) Soit $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{R}[X]/P(g) = 0\}$ et $\mathcal{D} = \{\deg(P), P \in \mathcal{A}\}$. L'ensemble $\mathcal{D}$ est un sous ensemble de $\mathbb{N}^*$ minoré par 1 donc admet un élément minimal p_0 et il existe $P \in \mathcal{A}$ de degré p_0.
En utilisant un raisonnement identique au raisonnement précédent, les racines de P sont exactement les valeurs propres de g. Donc P divise Q.

c) Si g est un endomorphisme dont la seule valeur propre est 0, le polynôme Q est de la forme X^m et $g^m = 0$. Donc g est nilpotent. L'indice de nilpotence de g est donné par le degré du polynôme P trouvé dans la question précédente.

Exercice 2.13.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice d'ordre n, à coefficients réels, définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = n + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ soit : } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que u est diagonalisable.

2. Dans cette question, n est pair et on écrit $n = 2p$.

a) Montrer qu'il existe des plans vectoriels $F_1, \dots, F_p$ stables par u tels que l'on ait $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} F_k = \mathbb{R}^n$.

b) En déduire les valeurs propres de u ainsi qu'une base orthonormée de vecteurs propres de u.

3. Dans cette question, n est impair, et on écrit $n = 2p + 1$. Déterminer les éléments propres de u.

4. On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A n'est pas diagonalisable.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. A quelles conditions A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?

Solution

1. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. La matrice A est symétrique réelle : elle est diagonalisable et l'endomorphisme u associé est diagonalisable.

2. a) Les plans demandés sont les plans $F_1, \dots, F_p$, où $F_k = \text{Vect}(e_k, e_{2p-k+1})$, puisque $u(e_k) = e_{2p-k+1}$ et $u(e_{2p-k+1}) = e_k$.

La famille $(e_1, \dots, e_{2p})$ étant une base, ces p plans sont bien en somme directe de somme $\mathbb{R}^{2p}$. De plus cette somme directe est orthogonale.

b) Soit u_k l'endomorphisme induit par la restriction de u à F_k. La matrice associée à u_k est $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il s'agit de la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par $e_k + e_{2p-k+1}$ et une base orthonormée $\mathcal{B}_k$ de F_k formée de vecteurs propres de u_k est formée des vecteurs :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e_k + e_{2p-k+1}) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - e_{2p-k+1})$$

Finalement u admet 1 et -1 pour valeurs propres et $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2p}$formée de vecteurs propres de u.

3. On procède exactement de la même façon, en mettant tout de même à part le vecteur e_{p+1}, qui est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

4. On a $u(e_1) = e_n$ et $u(e_n) = 0$, donc $u^2(e_1) = u^2(e_n) = 0$.

Le rang de A est évidemment $n-1$ (par échelonnement des $n-1$ premières colonnes) tandis que le rang de u^2 est strictement inférieur à $n-1$.

Si A était diagonalisable, on aurait dans une base $\mathcal{B}$ adéquate $M_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(0, *, \dots, *)$, les coefficients $*$ étant non nuls. On aurait alors $M_{\mathcal{B}}(u^2) = \text{diag}(0, *^2, \dots, *^2)$, ce qui donnerait $\text{rg}(u^2) = n-1$. D'où la contradiction.

5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à u.

→ Si tous les coefficients a_i sont non nuls, alors la restriction de u à chacun des deux plans $\text{Vect}(e_1, e_4)$ et $\text{Vect}(e_2, e_3)$ est diagonalisable, car admettant deux valeurs propres opposées et donc A est $\mathbb{C}$-diagonalisable.

→ Si par exemple $a_1 = 0$ et $a_4 \neq 0$, alors $e_4 \notin \operatorname{Ker} u$ tandis que $e_4 \in \operatorname{Ker}(u^2)$ et comme nous avons déjà fait remarquer que u diagonalisable impose $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$, on en conclut que u n'est pas diagonalisable.

→ Si $a_1 = a_4 = 0$, alors l'endomorphisme de $\operatorname{Vect}(e_1, e_4)$ induit par u est l'endomorphisme nul et il n'y a pas de problème dans ce plan.

→ Le raisonnement est le même pour les coefficients a_2 et a_3.

Bref A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ si et seulement si les coefficients anti-diagonaux équidistants des extrêmes sont simultanément nuls ou simultanément non nuls.

Exercice 2.14.

Soit $E = \mathbb{R}^n$, avec $n \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de E. On dit que g est un **pseudo-inverse** de f si g est un endomorphisme de E vérifiant les trois propriétés suivantes :

(1) $f \circ g \circ f = f$.

(2) $g \circ f \circ g = g$.

(3) $f \circ g = g \circ f$.

1\. a) On suppose que f est un automorphisme de E. Montrer que f admet un unique pseudo-inverse.

b) On suppose que f est un projecteur de E. Proposer un pseudo-inverse de f.

2\. Montrer que si u et v sont deux endomorphismes de E, on a :
$\operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \min\{\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v)\}$.

3\. On suppose dans cette question que g est un endomorphisme de E vérifiant la propriété (1).

a) Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des projecteurs.

b) Comparer les rangs de f, $f \circ g$ et $g \circ f$.

c) Montrer que $f \circ g$ est le projecteur sur $\operatorname{Im}(f)$ parallèlement à un sous-espace vectoriel contenant $\operatorname{Ker}(g)$.

4\. On suppose dans cette question que g et h sont deux pseudo-inverses de f.

a) Montrer que $f \circ h = g \circ f$.

b) Montrer que $g = h$.

5\. On suppose dans cette question que f admet comme pseudo-inverse g.

a) Montrer que $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Ker}(f)$.

b) Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E.

Solution

1. a) Si f est un automorphisme de E, f admet un inverse noté f^{-1}.
Si f admet un pseudo-inverse noté g, alors
$f \circ g \circ f = f \implies f^{-1} \circ f \circ g \circ f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f \circ f^{-}1 \implies g = f^{-1}$.
Réciproquement, on constate que f^{-1} vérifie les propriétés (1), (2) et (3).
Ainsi, si f est un automorphisme de E, f admet pour pseudo-inverse son inverse $g = f^{-1}$.

b) Si f est un projecteur de E, f vérifie $f \circ f = f$. On vérifie alors que f vérifie les propriétés (1), (2) et (3). Ainsi, si f est un projecteur de E, f est un pseudo-inverse de f.

2. Soient u et v deux endomorphismes de E.
On a $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u)$, d'où $\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \mathrm{rg}(u)$.
D'autre part, $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)$, d'où $\dim(\mathrm{Ker}(v)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u \circ v))$. Par le théorème du rang, on en déduit que $\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \mathrm{rg}(v)$.
On peut donc conclure que $\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\}$.

3. a) • En composant la propriété (1) à gauche par g, on trouve que
$$(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ f,$$
ce qui prouve que $g \circ f$ est un projecteur.

• En composant la propriété (1) à droite par g, on trouve que $(f \circ g) \circ (f \circ g) = f \circ g$, ce qui prouve que $f \circ g$ est un projecteur.

b) • On déduit d'abord de la question 2 que $\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \mathrm{rg}(f)$. D'autre part, comme $f = f \circ g \circ f$, on a $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}((f \circ g) \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g)$. On conclut que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f \circ g)$.

• Or, on a aussi $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f \circ (g \circ f)) \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)$. Toutes ces inégalités sont donc des égalités. On conclut que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f \circ g)$.

c) Comme $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$ avec égalité des dimensions d'après la question précédente, on a $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$. Comme $f \circ g$ est un projecteur, il suit que :
$$E = \mathrm{Im}(f \circ g) \oplus \mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f) \circ \mathrm{Ker}(f \circ g)$$
Or, $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$. Par les propriétés des projecteurs, on peut conclure que $f \circ g$ est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à un sous-espace vectoriel contenant $\mathrm{Ker}(g)$.

4. a) On a $f \circ g \circ f = f$. En composant à droite par h, on trouve $(f \circ g \circ f) \circ h = f \circ h$, soit $(f \circ g) \circ (f \circ h) = f \circ h$

comme g et h commutent avec f (propriété (3)), on a donc : $(g \circ f) \circ (h \circ f) = f \circ h$

soit $g \circ (f \circ h \circ f) = f \circ h$ et donc $g \circ f = f \circ h$.

b) comme $f \circ h = g \circ f$, on a : $f \circ h \circ g = g \circ f \circ g = g \quad (*)$.

Mais comme $f \circ h = h \circ f$, la relation (*) donne $h \circ f \circ g = g$, soit $h \circ (f \circ g) = g$.

Comme $g \circ f = f \circ h$, on en déduit que $g = h \circ (f \circ g) = h \circ (g \circ f) = h \circ f \circ h = h$.

Ainsi, si f possède un pseudo-inverse, celui-ci est unique.

5. a) • En utilisant les propriétés (2) et (3), on montre que :

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f \circ g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f).$$

Par symétrie des rôles joués par f et g, on montre de manière analogue que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$. Par double inclusion, on conclut que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.

• Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors, $g(x) = (g \circ f \circ)(x) = (g \circ g \circ f)(x) = 0$. Donc, $x \in \mathrm{Ker}(g)$, et $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Par symétrie des rôles joués par f et g, on montre de manière analogue que l'on a $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ (ou bien : l'égalité des images donne l'égalité des dimensions des noyaux). Par double inclusion, on conclut que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

b) • Par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$.

• Il reste à montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$, il existe $y \in E$ tel que $x = g(y)$. D'où, $0 = f(x) = (f \circ g)(y)$.

En appliquant g, on trouve que $0 = (g \circ f \circ g)(y) = g(y) = x$.

On conclut que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2.15.

On note k un entier naturel fixé et E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à k.

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On définit : $t_a : E \to E, P(X) \mapsto P(X+a)$; $d : E \to E, P \mapsto P'$ (où P' désigne le polynôme dérivé du polynôme P).

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^k)$ la base canonique de E.

1. Montrer que t_a et d sont des endomorphismes de E.

2. **a)** Ecrire les matrices, notées respectivement T_a et D, des endomorphismes t_a et d relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de ces endomorphismes.

3. On s'intéresse aux sous-espaces vectoriels de E stables par d, c'est-à-dire à l'ensemble des sous-espaces vectoriels $F \subset E$ tels que $d(F) \subset F$.

a) Montrer que tous les $\mathbb{C}_p[X]$, pour $p \in [\![0, k]\!]$, et $\{0\}$ sont stables par d.

b) Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de E, stable par d. En considérant $P \in F$ de degré maximal noté p, montrer que $F = \mathbb{C}_p[X]$.

4. Soit $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{k} p_i X^i$ un polynôme fixé de degré k (on a donc $p_k \neq 0$).

Montrer que la famille $\left(P, \dfrac{d(P)}{1!}, \dfrac{d^2(P)}{2!}, \ldots, \dfrac{d^k(P)}{k!}\right)$ constitue une base $\mathcal{B}_1$ de E. Donner la matrice de passage R de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_1$.

Solution

1. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in E^2$. On a :

$$\begin{aligned} t_a(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X + a) = \lambda P(X + a) + \mu Q(X + a) \\ &= \lambda t_a(P) + \mu t_a(Q) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} d(\lambda P + \mu Q)(X) &= (\lambda P + \mu Q)'(X) \\ &= \lambda P'(X) + \mu Q'(X) = \lambda d(P)(X) + \mu d(Q)(X) \end{aligned}$$

De plus $t_a(P)$ et $d(P)$ sont bien de degré inférieur ou égal à k. Donc t_a et d sont des endomorphismes de E.

2. On calcule les images des vecteurs de base $1, \ldots, X^k$ par ces applications :

Pour $j \in [\![0, k]\!]$,

$$t_a(X^j) = (X + a)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} a^{j-i} X^i \text{ et } d(X^j) = \begin{cases} 0 & \text{si} j = 0 \\ jX^{j-1} & \text{si } j \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } T_a = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} a & \cdots & \binom{k}{0} a^k \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{k}{1} a^{k-1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{k}{k} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & k \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

3. En lisant les diagonales : $\operatorname{spec}(t_a) = \{1\}$ et $\operatorname{spec} d = \{0\}$.

$\star$ $t_a(P) = P \Longleftrightarrow P(X + a) = P(X) \Longleftrightarrow P$ est un polynôme constant. Cela peut se voir car le rang de $T_a - I_{k+1}$ vaut k, donc le sous-espace propre est de dimension 1 et contient clairement les polynômes constants. On peut aussi dire qu'un polynôme périodique est constant...

$\star$ $d(P) = 0 \Longleftrightarrow P$ est un polynôme constant.

$$E_{(1)}(t_a) = E_{(0)}(d) = \mathbb{C}_0[X]$$

4. a) On peut remarquer que tous les $\mathbb{C}_p[X]$, pour $p \in [\![0,k]\!]$ sont stables par d, puisque la dérivation abaisse le degré. Il est clair également que $\{0\}$ est aussi stable par d.

b) Soit F un sous-espace de E, stable par d. On supposera également que $F \neq \{0\}$.

Soit $P \in F$, de degré maximal noté p. Ceci signifie que tout élément de F est de degré inférieur ou égal à p, donc $F \subset \mathbb{C}_p[X]$.

Les polynômes P, $d(P)$, $d^2(P)$, $\ldots$, $d^p(P)$ se trouvent dans F, puisque ce dernier est stable par d. La dérivation fait baisser le degré d'une unité donc $d^j(P)$ est de degré $p-j$ pour $j \in [\![0,p]\!]$. La famille $(P, d(P), \ldots, d^p(P))$ est alors libre car formée de polynômes de degrés étagés. Ainsi $\dim F \geqslant p+1$.

Par inclusion et dimension, on a donc $F = \mathbb{C}_p[X]$.

Ainsi, les sous-espaces de E stables par d, sont $\{0\}$, $\mathbb{C}_0[X]$, $\ldots$, $\mathbb{C}_k[X]$.

5. La famille $\big(P, \dfrac{d(P)}{1!}, \ldots, \dfrac{d^k(P)}{k!}\big)$ est libre, puisqu'il s'agit d'une famille, étagée en degré. De plus, elle comporte $k+1$ vecteurs de E, qui est de dimension $k+1$, c'en est donc une base.

Pour trouver la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_1$, il suffit de décomposer les vecteurs de $\mathcal{B}_1$, dans la base canonique.

Or : $\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ d^j(X^i) = \begin{cases} \dfrac{i!}{(i-j)!}X^{i-j} & \text{si } j \leqslant i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$

Par suite :

$$\forall\, j \in [\![0,k]\!], \frac{d^j(P)}{j!} = \frac{1}{j!}\sum_{i=1}^{k} p_i d^j(X^i) = \sum_{i=j}^{k} \frac{i!}{j!(i-j)!} p_i X^{i-j}$$
$$= \sum_{i=0}^{k-j} \frac{(i+j)!}{j!i!} p_{i+j} X^i = \sum_{i=0}^{k-j} \binom{i+j}{j} p_{i+j} X^i.$$

On obtient ainsi la matrice de passage :

$$R = \begin{pmatrix} \binom{0}{0}p_0 & \cdots & \binom{k-1}{k-1}p_{k-1} & \binom{k}{k}p_k \\ \binom{1}{0}p_1 & \cdots & \binom{k}{k-1}p_k & 0 \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ \binom{k}{0}p_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.16.

Soit un entier $n \geqslant 2$.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} = i+j$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A. On note enfin u et v les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de matrices colonnes canoniquement associées :

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer l'image et le rang de f.

3. a) Montrer que $A = V^tU + U^tV$, où ${}^tU$ (resp. ${}^tV$) désigne la transposée de U (resp. de V).

b) En déduire le noyau de f.

4. a) Soit X un vecteur colonne propre de A associé à une valeur propre λ non nulle. Montrer que X s'écrit $X = aU + bV$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

b) Déterminer les valeurs propres de f.

c) Déterminer les sous-espaces propres de f.

5. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $Q(X) = {}^tXAX$. La forme quadratique Q est-elle positive ? Négative ?

Solution

1. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{j,i} = j+i = i+j = a_{i,j}$: la matrice A est donc symétrique réelle. Par suite, A est diagonalisable.

2. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on remarque que la $j^{\text{ème}}$ colonne C_j de A s'écrit $C_j = V + jU$. Donc $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}(V+U, V+2U, \ldots, V+nU) = \operatorname{Vect}(U,V)$. Comme U et V ne sont pas colinéaires, on en déduit que A est de rang 2.

3. a) On a :

$$\begin{aligned} V^tU + U^tV &= \begin{pmatrix} V & V & \ldots & V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 2U & \ldots & nU \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V+U & V+2U & \ldots & ,V+nU \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

b) Comme A est de rang 2, son noyau est de dimension $n-2$. De plus A est symétrique réelle, donc le noyau de A est l'orthogonal de son image :

$$\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Vect}(U,V))^{\perp}$$

On peut aussi rechercher directement les équations de $\operatorname{Ker} A$:

$$(x_1,\ldots,x_n) \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + \cdots + (1+n)x_n = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + \cdots + (2+n)x_n = 0 \\ \qquad \cdots \\ (n+1)x_1 + (n+2)x_2 + \cdots + (n+n)x_n = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \end{cases}$$

On retrouve bien le même résultat.

4. a) Soit X un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ non nulle. Alors, $AX = \lambda X$ et comme $\lambda \neq 0$, $X = A(\frac{1}{\lambda}X) \in \operatorname{Im} A$.
Comme $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}(U, V)$, on en déduit qu'il existe deux réels a et b tels que $X = aU + bV$.

b) Ainsi, on peut écrire :

$$AX = \lambda X \iff (V^tU + U^tV)(aU + bV) = \lambda(aU + bV)$$

ce qui donne, après développement :

$$AX = \lambda X \iff \big(a({}^tVU - \lambda) + b^tVV\big)U + \big(a^tUU + b({}^tUV - \lambda)\big)V = 0$$

Comme (U, V) forme une famille libre, on en déduit le système

$$\begin{cases} a({}^tVU - \lambda) + b^tVV = 0 \\ a^tUU + b({}^tUV - \lambda) = 0 \end{cases}$$

Ce système linéaire de deux équations en a et b admet une solution non triviale si et seulement si
$\big({}^tVU - \lambda\big)^2 - ({}^tUU^tVV) = 0$, soit : $\big(\langle u, v\rangle - \lambda\big)^2 - \|u\|^2\|v\|^2 = 0$
Donc $\lambda = {}^tVU \pm {}^tUU^tVV = \langle u, v\rangle \pm \|u\|\|v\|$.
Or : $\langle u, v\rangle = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\|u\| = \sqrt{n}, \|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

Donc $\lambda = \dfrac{n(n+1)}{2} \pm n\sqrt{\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}}$.
Sans oublier que si $n \geqslant 3$, 0 est aussi valeur propre de A.

c) On connait déjà le sous-espace propre associé à 0 qui est le noyau de A. Reste à trouver les deux autres sous-espaces propres. En reportant l'expression obtenue pour λ dans la première équation du système, on trouve $b\|v\| = \pm a\|u\|$, donc :

• le sous-espace propre associé à $\lambda_1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + n\sqrt{\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}}$ est $E_{\lambda_1} = \operatorname{Vect}(\|v\|U + \|u\|V)$.

• le sous-espace propre associé à $\lambda_2 = \dfrac{n(n+1)}{2} - n\sqrt{\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}}$ est $E_{\lambda_2} = \operatorname{Vect}(\|v\|U - \|u\|V)$.

5. Q est la forme quadratique associée à la matrice A. La matrice A ayant une valeur propre strictement positive (λ_1) et une valeur propre strictement négative (λ_2), on peut conclure que Q n'est ni positive ni négative.

Exercice 2.17.

Soit un entier $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute application $q : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$, on considère les quatre propriétés suivantes :

(i) $\forall A \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{C}, q(\lambda A) = |\lambda|\, q(A)$;

(ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, q(A + B) \leqslant q(A) + q(B)$;

(iii) $\forall A \in \mathcal{E}, q(A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$;

(iv) $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, q(AB) = q(BA)$.

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on désigne par $E_{i,j} \in \mathcal{E}$ la matrice dont le coefficient en ligne i et colonne j vaut 1 et dont tous les autres coefficients valent 0. Enfin, on pose :

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{E} \ / \ q(A) = 0\}$$

1. Montrer que l'application $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(A) = |\operatorname{tr}(A)|$ vérifie les propriétés (i), (ii) et (iv).

2. A l'aide des matrices $E_{i,j}$, montrer qu'il n'existe pas d'application $q : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les quatre propriétés (i) à (iv).

3. *Désormais, q désigne une application qui vérifie les propriétés (i), (ii) et (iv)*

a) Pour tout $(A, B) \in \mathcal{E}^2$, montrer que : $|q(A) - q(B)| \leqslant q(A + B)$.

b) Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}, q(A + B) = q(A)$

L'ensemble $\mathcal{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$?

c) Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{E}$, montrer que : $q(A) = q\big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i}\big)$.

d) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Calculer en extension (*i.e.* en donnant tous leurs coefficients) les matrices XY et YX lorsque X et Y sont les matrices suivantes :

$$X = \sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i} \text{ et } Y = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r E_{r,1}$$

En déduire qu'il existe α tel que $q = \alpha f$.

Solution

1. Comme la trace est linéaire, et d'après l'inégalité triangulaire, on a :

(i) $f(\lambda A) = |\operatorname{tr}(\lambda A)| = |\lambda \operatorname{tr}(A)| = |\lambda| f(A)$;

(ii) $f(A + B) = |\operatorname{tr}(A + B)| = |\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)| \leqslant |\operatorname{tr}(A)| + |\operatorname{tr}(B)|$

$\leqslant f(A) + f(B)$;

(iv) $f(AB) = |\operatorname{tr}(AB)| = |\operatorname{tr}(BA)| = f(BA)$, car on sait que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

2. Par l'absurde si l'application q vérifie (iii), alors en choisissant par exemple $A = E_{1,1}$ et $B = E_{1,2}$, on a $AB = E_{1,2} \neq 0$ tandis que $BA = 0$, donc $q(AB) \neq 0$ et $q(BA) = 0$. D'où la contradiction.

3. a) On remarque, avec (i) en prenant $\lambda = -1$, que : $q(-A) = |-1|q(A) = q(A)$.

D'après la propriété (ii) , on a :

$q(A) = q\big((A+B) - B\big) \leqslant q(A+B) + q(-B) = q(A+B) + q(B)$, donc $q(A) - q(B) \leqslant q(A+B)$.

En échangeant les rôles de A et B, on obtient : $q(B) - q(A) \leqslant q(A+B)$.

La conjonction de ces deux inégalités donne bien : $\big|q(A) - q(B)\big| \leqslant q(A+B)$.

b) Si $q(B) = 0$, d'après la question précédente et (ii), on a :

$$q(A) \leqslant |q(A)| = |q(A) - q(B)| \leqslant q(A+B) \leqslant q(A) + q(B) = q(A)$$

donc $q(A+B) = q(A)$.

L'ensemble $\mathcal{F}$ est bien un sous-espace vectoriel car :

$\rightarrow$ la matrice nulle appartient à $\mathcal{F}$ d'après (i) en prenant $\lambda = 0$;

$\rightarrow$ l'ensemble $\mathcal{F}$ est stable par multiplication par un scalaire d'après (i) ;

$\rightarrow$ l'ensemble $\mathcal{F}$ est stable pour l'addition d'après la propriété que l'on vient de montrer.

c) D'après (iv), si $i \neq j$, alors $q(E_{i,j}) = q(E_{i,i}E_{i,j}) = q(E_{i,j}E_{i,i}) = q(0) = 0$. Si on pose $B = \sum\limits_{i \neq j} -a_{i,j}E_{i,j}$, la question précédente donne $q(B) = 0$, donc :

$$q(A) = q(A+B) = q\big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}E_{i,i}\big)$$

d) Par les règles de multiplication des matrices élémentaires :

$$\begin{aligned}
XY &= \big(\sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i}\big)\big(\sum_{r=1}^{n} \lambda_r E_{r,1}\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \lambda_r E_{1,j}E_{r,1} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{r=1}^{n} \lambda_r E_{i,i}E_{r,1} \\
&= \sum_{r=1}^{n} \lambda_r E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i E_{i,1} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$YX = \Big(\sum_{r=1}^{n} \lambda_r E_{r,1}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i}\Big)$$
$$= \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_r E_{r,1}E_{1,j} + \sum_{r=1}^{n}\sum_{i=2}^{n} \lambda_r E_{r,1}E_{i,i}$$
$$YX = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_r E_{r,j} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \lambda_n & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Or la question précédente montre que deux matrices qui ont les mêmes coefficients diagonaux ont la même image par q. En prenant $\lambda_i = a_{i,i}$, pour tout i, on a donc $q(A) = q(YX)$, ainsi $q(A) = q(XY)$ et par le résultat c) :

$$q(A) = q\big((\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)E_{1,1}\big) = \Big|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big| q(E_{1,1}) = \Big|\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\Big| q(E_{1,1})$$

En posant $\alpha = q(E_{1,1})$, on a bien $q = \alpha f$.

Exercice 2.18.

Dans cet exercice, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \geqslant 2$ à coefficients réels, et $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ désigne la base canonique de E.

On note $\mathrm{tr}(M)$ la trace d'une matrice carrée M.

1. Dans cette question, $n = 2$ et Φ est l'endomorphisme de E défini par :

$$\Phi(M) = \mathrm{tr}(M)I_2 - M$$

où I_2 est la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que Φ vérifie la propriété :

$$\forall\,(A,B) \in E^2, \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}\big(\Phi(A)\Phi(B)\big)$$

b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

c) On suppose que $M \in E$ admet deux valeurs propres λ et μ. Montrer que $\Phi(M)$ a les mêmes valeurs propres.

On revient maintenant au cas général $n \geqslant 2$.

2. **a)** Calculer pour tout $A \in E$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $AE_{i,j}$ puis la trace $\mathrm{tr}(AE_{i,j})$.

b) Soit $A \in E$ telle que pour tout $M \in E$, $\mathrm{tr}(AM) = 0$. Montrer que $A = 0$.

Dans la suite de cet exercice, Φ désigne une application (a priori non linéaire) de E dans lui-même, telle que l'on ait la propriété :

pour tout couple $(A,B) \in E^2$, les matrices AB et $\Phi(A)\Phi(B)$ ont la même trace. (*)

3. Exemple. Soit P une matrice inversible. Montrer que les deux applications définies par :

$$\Phi_1(M) = PMP^{-1} \text{ et } \Phi_2(M) = P\,{}^tMP^{-1}$$

vérifient la propriété $(*)$.

4. **a)** Montrer que $\operatorname{tr}\big(\Phi(A)\Phi(B)\big) = \operatorname{tr}\big(\Phi(B)\Phi(A)\big)$ pour tout couple $(A, B) \in E^2$.

b) Calculer $\operatorname{tr}\big(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,\ell})\big)$ pour tout $(i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!]^4$.

c) En déduire que la famille $\big(\Phi(E_{i,j})\big)_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de E.

Solution

1. a) On a :

$\Phi(A)\Phi(B) = (\operatorname{tr}(A)I_2 - A))(\operatorname{tr}(B)I_2 - B)$
$= \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)I_2 - \operatorname{tr}(A)B - \operatorname{tr}(B)A + AB$, d'où :

$$\operatorname{tr}(\Phi(A)\Phi(B)) = 2\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - 2\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) + \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(AB)$$

b) $\star$ Si $\operatorname{tr}(M) = 0$, alors $\Phi(M) = -M$. Ainsi -1 est valeur propre de Φ et le sous-espace propre associé est un hyperplan (donc de dimension $n^2 - 1 = 3$).

$\star$ $\Phi(I_2) = 2I_2 - I_2 = I_2$, donc 1 est aussi valeur propre et le sous-espace propre associé est, comme toujours, de dimension au moins égale à 1.

Comme $\dim E = 4$, le compte est bon et Φ est diagonalisable. (On aurait aussi pu montrer que $\Phi^2 = id_E$)

c) λ, μ sont les valeurs propres de M. On sait que $\operatorname{tr}(M) = \lambda + \mu$.

Soit X une matrice colonne propre pour M associée, par exemple, à la valeur propre λ. On a $MX = \lambda X$, d'où :

$$\Phi(M)X = (\operatorname{tr}(M)I_2 - M)X = \operatorname{tr}(M)X - \lambda X = (\operatorname{tr}(M) - \lambda)X = \mu X$$

Ainsi μ et λ sont les valeurs propres de $\Phi(M)$ (et les vecteurs colonnes propres sont échangés).

2. a) On écrit $A = \sum\limits_{p,q} a_{p,q}E_{p,q}$ et $AE_{i,j} = \sum\limits_{p,q} a_{p,q}E_{p,q}E_{i,j} = \sum\limits_{p} a_{p,i}E_{p,j}$.

D'où $\operatorname{tr}(AE_{i,j}) = \sum\limits_{p} a_{p,i}\operatorname{tr}(E_{p,j}) = a_{j,i}$.

b) Si, pour toute matrice M, $\operatorname{tr}(AM) = 0$, en particulier $\operatorname{tr}(AE_{i,j}) = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, ce qui entraîne que $a_{j,i} = 0$, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et donc que $A = 0$.

3. On remarque que, pour toutes matrices :

$\Phi_1(A)\Phi_1(B) = PAP^{-1}PBP^{-1} = P(AB)P^{-1}$.

$\Phi_2(A)\Phi_2(B) = P\,{}^tAP^{-1}P\,{}^tBP^{-1} = P\,{}^tA\,{}^tBBP^{-1} = P\,{}^t(BA)P^{-1}$.

Par conséquent :

$$\operatorname{tr}(\Phi_1(A)\Phi_1(B)) = \operatorname{tr}(P(AB)P^{-1}) = \operatorname{tr}(AB)$$
$$\operatorname{tr}(\Phi_2(A)\Phi_2(B)) = \operatorname{tr}(P^t(BA)P^{-1}) = \operatorname{tr}({}^t(BA))\operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB)$$

4. a) La réponse est claire, puisque $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

b) On a $\operatorname{tr}(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,\ell})) = \operatorname{tr}(E_{i,j}E_{k,\ell}) = \delta_{j,k}\operatorname{tr}(E_{i,\ell}) = \delta_{j,k}\delta_{i,\ell}$.

c) La famille $(\Phi(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n})$ est de cardinal n^2. Il suffit de montrer qu'elle est libre.

Considérons donc une famille de scalaires telle que $\sum\limits_{i,j} \alpha_{i,j}\Phi(E_{i,j}) = 0$.

Ainsi, pour tous indices k et ℓ :
$\sum\limits_{i,j} \alpha_{i,j}\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,\ell}) = 0$, puis par linéarité de l'application trace :

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j}\operatorname{tr}(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,\ell})) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}\delta_{j,k}\delta_{i,\ell} = 0$$

Il reste $\alpha_{\ell,k} = 0$, ce qui termine la question.

Exercice 2.19.

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 2$) à coefficients complexes.
Si $A = (a_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la matrice adjointe $B = (b_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de A par :

$$\forall\,(k,\ell) \in [\![1,n]\!], b_{k,\ell} = \overline{a_{\ell,k}}$$

On note alors $B = A^*$.

1. Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 a) Vérifier que $(A^*)^* = A$.
 b) Montrer que $(AB)^* = B^*A^*$.
 c) Montrer que pour tous complexes α et β, $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$.

On dit que A est auto-adjointe si $A = A^*$. On dit que A est normale si $AA^* = A^*A$.

d) Donner un exemple de matrice autoadjointe.

2. a) Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $A = X + iY$, où X et Y sont deux matrices autoadjointes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (on pourra penser à examiner les matrices $A + A^*$ et $A - A^*$). En déduire que A est normale si et seulement si X et Y commutent.

b) La matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est-elle normale ? Que remarquez-vous ?

c) La matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} i & 2-i & 1 \\ 2-i & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle normale ?

3. On considère l'application Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\Phi(M) = \mathrm{tr}(M^*.M)$ pour toute matrice M.

a) Montrer que $\Phi(M) = 0$ si et seulement si $M = 0$.

b) Soit A une matrice normale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, prouver l'égalité :

$$\Phi(AX - XA) = \Phi(A^*X - XA^*).$$

(On pourra utiliser sans la justifier la propriété $\mathrm{tr}(M_1M_2) = \mathrm{tr}(M_2M_1)$ qui est valable pour toutes matrices).

c) En déduire que si une matrice M commute avec une matrice normale A, alors elle commute aussi avec sa matrice adjointe.

Solution

1. a) Par définition, on a $(A^*)^* = \overline{{}^tA^*} = \overline{{}^t\left(\overline{{}^tA}\right)} = {}^t({}^tA) = A$.

b) Les formules relatives aux coefficients du produit de deux matrices donnent immédiatement $\overline{AB} = \overline{A}.\overline{B}$. Par suite, il vient :

$$(AB)^* = \overline{{}^tAB} = {}^t\left(\overline{A}.\overline{B}\right) = \left(\overline{{}^tB}\right)\left(\overline{{}^tA}\right) = B^*A^*.$$

c) On a :
$(\alpha A + \beta B)^* = \overline{{}^t(\alpha A + \beta B)} = {}^t\left(\overline{\alpha}\ \overline{A} + \overline{\beta}\ \overline{B}\right) = \overline{\alpha}\ \overline{{}^tA} + \overline{\beta}\overline{{}^tB} = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$.

d) Toutes les matrices symétriques et à coefficient réels conviennent.

2. a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire sous la forme $A = X + iY$, où X et Y sont deux matrices autoadjointes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a nécessairement d'après 1. c) $A^* = X^* - iY^* = X - iY$, d'où :

$$X = \frac{1}{2}(A + A^*) \text{ et } Y = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Il suffit alors de vérifier que X et Y sont autoadjointes pour répondre à la question.

Comme $A^*A = (X - iY)(X + iY)$ et $AA^* = (X + iY)(X - iY)$, on a $AA^* = A^*A \Longleftrightarrow XY = YX$, ce qui prouve la caractérisation demandée.

b) On décompose A sous la forme $A = X + iY$ avec ici $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(X et Y sont bien autoadjointes) et un calcul simple montre que $XY \neq YX$, on voit donc d'après la question précédente que la matrice A n'est pas normale. On observe qu'une matrice symétrique n'est pas forcément normale si ses coefficients ne sont pas tous réels.

c) Cette fois, on trouve $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$XY = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = YX$$

La matrice M est donc normale (une matrice symétrique à coefficients non tous réels peut donc être normale !).

3. a) Le calcul des coefficients diagonaux de la matrice M^*M conduit immédiatement à l'égalité $\Phi(M) = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|^2$. La propriété demandée en découle trivialement.

b) Soit A une matrice normale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'une part on a

$$\begin{aligned} \Phi(AX - XA) &= \mathrm{tr}((AX - XA)^* (AX - XA)) \\ &= \mathrm{tr}((X^*A^* - A^*X^*) (AX - XA)) \\ &= \mathrm{tr}(X^*A^*AX) - \mathrm{tr}(A^*X^*AX) - \mathrm{tr}(X^*A^*XA) + \mathrm{tr}(A^*X^*XA) \\ &= \mathrm{tr}(X^*A^*AX) - \mathrm{tr}(A^*X^*AX) - \mathrm{tr}(X^*A^*XA) + \mathrm{tr}(X^*XAA^*) \end{aligned}$$

Calculer $\Phi(A^*X - XA^*)$ revient à remplacer A par A^* (et donc A^* par $A^{**} = A$). Ainsi :

$\Phi(A^*X - XA^*) = \mathrm{tr}(X^*AA^*X) - \mathrm{tr}(X^*A^*XA) - \mathrm{tr}(A^*X^*AX) + \mathrm{tr}(X^*XA^*A)$.

Comme A est normale, on a $A^*A = AA^*$ et on voit que les deux quantités précédentes sont égales.

c) Si M commute avec une matrice normale A, avec la question précédente on voit que :

$$0 = \Phi(AM - MA) = \Phi(A^*M - MA^*)$$

et la question 3. a) implique alors que $A^*M = MA^*$.

Exercice 2.20.

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 2$, et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ a tous ses coefficients égaux à 1.
On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On considère l'équation (E) : $M^2 + M = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

b) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

2. Dans cette question, on suppose $n = 2$.

a) Montrer que, si M est solution de (E), alors soit M, soit $M + I_2$ n'est pas inversible.

b) Dans cette question, on suppose M non inversible. Montrer que f et g ont même image et même noyau.
En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda\, A$.

c) Résoudre l'équation (E).

3. Dans le cas $n > 2$, montrer qu'il y a des solutions M de (E) telles que ni f ni $f + id$ n'ait même noyau et même image que g.

Solution

1. $\star$ $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}\big(g - n\, id\big) = \mathrm{Vect}(u)$, où $u = (1, \ldots, 1)$.
$\star$ $\mathrm{Ker}(g) = (\mathrm{Im}\, g)^{\perp}$ a pour équation $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$.
$\star$ g est diagonalisable car $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ou parceque $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Ker}(g - n\, id)$.

2. a) Si M et $M + I_2$ sont inversibles, alors $A = M\,(M + I_2)$ aussi, ce qui contredit $\mathrm{rg}(A) = 1$.

b) $\star$ $g = (f + id) \circ f \implies \{0\} \neq \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ de dim. 1, donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.
$\star$ $g = f \circ (f + id) \implies \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$.
L'égalité des noyaux et une inclusion des images donne l'égalité par le théorème du rang.
$\star$ $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(u)$ qui est stable par f. Donc
$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, f(u) = \alpha\, u = \frac{\alpha}{2}\, g(u)$.
Alors $\lambda = \alpha/2$ convient sur $\mathrm{Im}(g)$, et aussi banalement sur $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f)$ (restrictions nulles), donc $f = \lambda\, g$ sur $\mathbb{R}^2$.

c) $\star$ Si M est non inversible, $M = \lambda\, A$ dans (E) donne, avec $A^2 = 2\, A$,
$\lambda^2\, A^2 + \lambda\, A = A \iff (2\lambda^2 + \lambda - 1)\, A = 0 \iff \lambda \in \big\{-1, 1/2\big\}$.
$\star$ Si $N = M + I_2$ est non inversible, on a $(N - I_2)\, N = A$, et le raisonnement précédent s'applique à N, donc on a $\exists\, \mu \in \mathbb{R}, N = \mu\, A$; alors (E) donne
$\mu^2\, A^2 - \mu\, A = A \iff (2\mu^2 - \mu - 1)\, A = 0 \iff \mu \in \big\{ - 1/2, 1\big\}$.
Après vérification,
$$\mathrm{Sol} \ = \{-A, \frac{1}{2}\, A, A - I_2, -\frac{1}{2}\, A - I_2\}$$

3. On a A semblable à $\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, n)$; via le même changement de base, les matrices suivantes conviennent :

$M = P\,\mathrm{diag}(0,\dots,0,-1,\lambda)P^{-1}$, où $\lambda^2+\lambda-n=0$, soit $\lambda = \dfrac{-1\pm\sqrt{4n+1}}{2}$.

Exercice 2.21.

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. Soit E un espace euclidien de dimension n et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire noté $\langle .,.\rangle$.

Soit u un endomorphisme de E.

On note $S=\{x\in E/\|x\|=1\}$ et $B=\{x\in E/\|x\|\leq 1\}$.

On admet que u est bornée sur S et on note $N(u)=\sup\limits_{\|x\|=1}\|u(x)\|$.

1. Montrer que u est bornée sur B et que $\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|u(x)\| = N(u)$.

2. Montrer que : $\forall\, x\in E, \|u(x)\|\leq N(u)\times\|x\|$.

3. Montrer que : $\sup\limits_{\|x\|=1}|\langle u(x),x\rangle|\leq N(u)$. L'inégalité peut-elle être stricte ?

4 Montrer que : $\sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1}|\langle u(x),y\rangle| = N(u)$.

5. On suppose maintenant que u est symétrique.
   a) Exprimer $\langle u(x),y\rangle$ en fonction de $\langle u(x+y),x+y\rangle$ et de $\langle u(x-y),x-y\rangle$.
   b) En déduire que $\sup\limits_{\|x\|=1}|\langle u(x),x\rangle| = N(u)$.

<u>Solution</u>

1. Soit $x\in B$.
Si $x=0$ alors $u(x)=0$ et $\|u(x)\|=0$.
Si $x\neq 0$ alors $\dfrac{x}{\|x\|}\in S$, donc $\|u(\dfrac{x}{\|x\|})\|\leq N(u)$, soit $\dfrac{1}{\|x\|}\|u(x)\|\leq N(u)$ et

$$\|u(x)\|\leq N(u)\times\|x\|\leq N(u) \text{ et : } \sup_{\|x\|\leq 1}\|u(x)\|\leq N(u).$$

Par ailleurs $S\subset B$ donc $\sup\limits_{x\in S}\|u(x)\|\leq \sup\limits_{x\in B}\|u(x)\|$, donc $N(u)\leq \sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|u(x)\|$.
D'où l'égalité.

2. Ceci a quasiment été vu au cours de la première question :
$\forall\, x\neq 0, \dfrac{x}{\|x\|}\in S$, donc $\|u(\dfrac{x}{\|x\|})\|\leq N(u)$ soit $\|u(x)\|\leq N(u)\times\|x\|$. Vrai encore pour $x=0$.

3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\forall x\in S, |\langle u(x),x\rangle|\leq \|u(x)\|\times\|x\|\leq N(u)\times\|x\|^2 = N(u)$$

Donc $\sup\limits_{\|x\|=1}|\langle u(x),x\rangle|\leq N(u)$.

Oui, l'inégalité peut être stricte (car $n \geqslant 2\,!$). Pour s'en convaincre il suffit de prendre un endomorphisme non nul tel que $u(x)$ soit toujours orthogonal à x : on choisit un endomorphisme non nul dont la matrice canoniquement associée est antisymétrique ...

4. Posons $M = \sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle u(x), y\rangle|$

$\to$ Pour tout x et y de S, $|\langle u(x), y\rangle| \leq \|u(x)\|\times\|y\| \leq N(u)\times\|x\|\times\|y\| = N(u)$. Donc $M \leqslant N(u)$.

$\to$ Réciproquement, soit x dans S tel que $u(x) \neq 0$ (si ce n'est pas possible c'est que $u = 0$ et le résultat demandé est banal) et prenons $y = \dfrac{1}{\|u(x)\|}\,u(x)$. Alors y est aussi dans S et : $\langle u(x), y\rangle = \dfrac{1}{\|u(x)\|}\|u(x)\|^2 = \|u(x)\| \leqslant M$ et en passant à la borne supérieure : $N(u) \leq M$. D'où $N(u) = M$

5. On a :

$\langle u(x+y), x+y\rangle = \langle u(x)+u(y), x+y\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(y), y\rangle + 2\langle u(x), y\rangle$, car u est symétrique

Pour la même raison :

$\langle u(x-y), x-y\rangle = \langle u(x)-u(y), x-y\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(y), y\rangle - 2\langle u(x), y\rangle$

Par conséquent : $\langle u(x), y\rangle = \dfrac{1}{4}(\langle u(x+y), x+y\rangle - \langle u(x-y), x-y\rangle)$

b) $\star$ Evidemment $\sup\limits_{\|z\|=1} |\langle u(z), z\rangle| \leqslant \sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle u(x), y\rangle|$

$\star$ Si $z \neq 0$, $|\langle u(z), z\rangle| = \|z\|^2 \big|\langle u(\frac{z}{\|z\|}), \frac{z}{\|z\|}\rangle| \leqslant \|z\|^2 \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle|$ (résultat qui reste vrai pour $z = 0$)

Alors, pour x et y de norme 1 :

$$\begin{aligned}|\langle u(x), y\rangle| &\leq \frac{1}{4}(|\langle u(x+y), x+y\rangle| + |\langle u(x-y), x-y\rangle|)\\ &\leq \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)\times \sup_{\|z\|=1} |\langle u(z), z\rangle|\\ &\leqslant \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \sup_{\|z\|=1} |\langle u(z), z\rangle| \leqslant \sup_{\|z\|=1} |\langle u(z), z\rangle|\end{aligned}$$

En passant au sup à gauche, on a donc l'inégalité contraire souhaitée, ce qui montre l'égalité.

Exercice 2.22.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$ tels que :

$$\forall\,(f, g) \in H_1 \times H_2, g \circ f = -f \circ g$$

1. a) Montrer qu'il existe un unique couple $(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2$ tel que $p_2 = id_E - p_1$.

b) Montrer que p_1 et p_2 sont des projecteurs de E.

2. Soit $f \in H_2$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(p_1)$ est stable par f.

b) Montrer que la restriction de f à $\mathrm{Im}(p_1)$ est l'application nulle.

c) En déduire que $\dim H_2 \leq (\dim \mathrm{Ker}\, p_1)^2$.

d) Montrer que l'on a également $\dim H_1 \leq (\dim \mathrm{Ker}\, p_2)^2$.

3. a) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n$. Résoudre l'inéquation $n^2 \leq (n-p)^2 + p^2$.

b) En déduire que $H_1 = \{0\}$ et $H_2 = \mathcal{L}(E)$, ou $H_1 = \mathcal{L}(E)$ et $H_2 = \{0\}$.

Solution

1. a) On a $id_E \in \mathcal{L}(E)$, donc comme H_1 et H_2 sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$:

$$\exists\,!(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2, id_E = p_1 + p_2$$

b) Par propriété de H_1 et H_2 : $p_1 \circ p_2 = -p_2 \circ p_1$. C'est-à-dire : $p_1 \circ (id_E - p_1) = -(id - p_1) \circ p_1$, soit : $p_1 - p_1^2 = -p_1 + p_1^2$ ou encore $2p_1^2 = 2p_1$ et $p_1^2 = p_1$.

Ainsi p_1 est un projecteur de E.

On procède de même pour p_2 ou on remarque que p_2 est le projecteur conjugué du projecteur p_1.

2. a) Comme $p_1 \in H_1$ et $f \in H_2$, on a $p_1 \circ f = -f \circ p_1$.
Avec $x \in \mathrm{Ker}(p_1)$, il vient $p_1(f(x)) = -f(p_1(x)) = 0$ et $f(x) \in \mathrm{Ker}\, p_1$.

$$\mathrm{Ker}(p_1) \text{ est stable par } f$$

b) Soit $x \in \mathrm{Im}\, p_1$, on a $p_1(x) = x$ et $f(x) = f(p_1(x)) = -p_1(f(x))$, donc $f(x) = 0$ (sinon -1 serait valeur propre de p_1, ce qui n'est pas raisonnable pour un projecteur) :

$$f_{\mathrm{Im}(p_1)} = 0$$

c) Comme $\mathrm{Im}(p_1)$ et $\mathrm{Ker}(p_1)$ sont supplémentaires, f est parfaitement déterminée par le couple $(f_{\mathrm{Ker}(p_1)}, f_{\mathrm{Im}(p_1)})$, donc par l'endomorphisme de $\mathrm{Ker}(p_1)$ défini par la restriction de f à cet espace (on peut aussi voir cela de façon matricielle) :

$$\dim H_2 \leqslant \dim \mathcal{L}(\mathrm{Ker}\, p_1) = (\dim \mathrm{Ker}\, p_1)^2$$

d) En échangeant les rôles de H_1 et H_2, on a de même $\dim H_1 \leqslant (\dim \mathrm{Ker}\, p_2)^2$.

3. Notons r le rang de p_2.
Le rang de p_1 est alors $n-r$ et $\dim \operatorname{Ker} p_1 = r$, $\dim \operatorname{Ker} p_2 = n-r$
Ainsi : $\dim H_2 \leqslant r^2$, $\dim H_1 \leqslant (n-r)^2$.
Comme H_1 et H_2 sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$, on a donc :

$$n^2 = \dim H_1 + \dim H_2 \leqslant (n-r)^2 + r^2 = n^2 - 2r(n-r)$$

Soit : $r(n-r) \leqslant 0$ et ainsi $r(n-r) = 0$ et $r = 0$ ou $r = n$.

Si $r = 0$, on a donc $\dim H_2 \leqslant 0$, soit $H_2 = \{0\}$ et donc $H_1 = \mathcal{L}(E)$.

Si $r = n$, on a donc $\dim H_1 \leqslant 0$, soit $H_1 = \{0\}$ et $H_2 = \mathcal{L}(E)$.