

# ALGÈBRE

## Exercice 2.01.

Soit la suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_n$  est un polynôme de degré  $n$ , de coefficient dominant que l'on explicitera. Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

2. Pour  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , on pose  $I_{p,q} = \int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta$ .

a) Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

b) Calculer  $I_{p,q}$ .

3. Pour tout couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $\mathbb{R}[X]$ , montrer que l'intégrale  $\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$  est convergente. On la note  $\langle P, Q \rangle$ .

Montrer que  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ . On note  $\|\cdot\|$  la norme associée.

4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(T_0, \dots, T_n)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Cette base est-elle orthonormale ?

5. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $\langle X^n, T_n \rangle$ .

6. En déduire, pour tout entier  $n \geq 1$ , la valeur de :

$$d = \inf_{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \left( \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{(t^n - (a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0))^2}{\sqrt{1-t^2}} dt} \right)$$

**Solution :**

1. On montre aisément par récurrence sur  $n \geq 1$  la relation :

«  $\deg(T_n) = n$ , le coefficient dominant de  $T_n$  est  $2^{n-1}$  et  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\cos \theta) = (\cos n\theta)$  ».

La clé du dernier résultat est la formule :  $2 \cos p \cos q = \cos(p+q) + \cos(p-q)$ , qui donne, en supposant la formule vraie jusqu'au rang  $n+1$  :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos \theta) &= 2 \cos \theta T_{n+1}(\cos \theta) - T_n(\cos \theta) = 2 \cos \theta \cos(n+1)\theta - \cos n\theta \\ &= \cos(n+2)\theta. \end{aligned}$$

et la formule est encore vraie au rang  $n+2$ .

2. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((p+q)\theta) + \cos((p-q)\theta)) d\theta \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q = 0 \\ \pi/2 & \text{si } p = q \neq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

3. Il y a des problèmes de convergence de l'intégrale en  $-1$  et  $1$  (la fonction qu'on intègre est continue sur  $] -1, 1[$ ). Mais, au voisinage de  $1$  :

$$\left| \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| \begin{cases} \sim \frac{P(1)Q(1)}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}} & \text{si } P(1)Q(1) \neq 0 \\ = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) & \text{si } P(1)Q(1) = 0 \end{cases}$$

Or l'intégrale  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$  converge, donc par le théorème de comparaison l'intégrale définissant  $\langle P, Q \rangle$  converge absolument en  $1$ . Même raisonnement en  $-1$ .

- L'expression est symétrique et linéaire par rapport à la seconde variable, par linéarité de l'intégration.

- Si  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on a  $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \geq 0$ , par positivité de l'intégration puisqu'on intègre une fonction positive et que les bornes sont dans le sens croissant.

- Si  $\langle P, P \rangle = 0$ , comme la fonction intégrée est positive et continue sur  $] -1, 1[$ , elle est nulle sur  $] -1, 1[$ , donc  $P$  est nul sur  $] -1, 1[$ ; donc  $P = 0$  (polynôme ayant une infinité de racines).

4. La famille  $(T_0, \dots, T_n)$  est échelonnée en degré, donc elle est libre. Elle est composée de  $n+1$  éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$  et cet espace est de dimension  $n+1$ . C'est donc une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Comme la fonction  $\cos$  est de classe  $C^1$  strictement décroissante de  $]0, \pi[$  dans  $] -1, 1[$ , on peut faire le changement de variable  $x = \cos(\theta)$ , qui donne

(puisque  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$  quand  $\theta \in ]0, \pi[$ ) :

$$\langle T_p, T_q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_p(x)T_q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta = I_{p,q} = 0 \text{ si } p \neq q$$

Ainsi la famille  $(T_0, \dots, T_n)$  est orthogonale. Elle n'est pas orthonormale puisque, par exemple  $\|T_0\|^2 = \pi$ , ou parce que  $\forall k \geq 1, \|T_k\|^2 = \frac{\pi}{2} \neq 1$ .

5. Pour  $n \geq 1$ , d'après la question 1, on a :

$$T_n - 2^{n-1}X^n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}(T_0, \dots, T_{n-1}) \subset T_n^\perp$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \langle T_n, X^n \rangle &= \frac{1}{2^{n-1}} \langle T_n, T_n - (T_n - 2^{n-1}X^n) \rangle \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n\|^2 + \frac{1}{2^{n-1}} \langle T_n, T_n - 2^{n-1}X^n \rangle = \frac{\pi}{2^n}. \end{aligned}$$

6.  $d$  est la distance de  $X^n$  à l'espace  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ;  $d$  est donc la distance de  $X^n$  à son projeté orthogonal sur  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Or, comme la famille  $(T_0, \dots, T_n)$  est une base orthogonale, en adaptant (par normalisation des  $T_k$ ) la formule connue pour une base orthonormale, on a :

$$X^n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle T_k, X^n \rangle}{\|T_k\|^2} T_k}_{\in \text{Vect}(T_0, \dots, T_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]} + \underbrace{\frac{\langle T_n, X^n \rangle}{\|T_n\|^2} T_n}_{\in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp}$$

$$\text{Donc : } d = \left\| \frac{\langle T_n, X^n \rangle}{\|T_n\|^2} T_n \right\| = \frac{|\langle T_n, X^n \rangle|}{\|T_n\|} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^n}.$$

### Exercice 2.02.

Soit  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .

On considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et une matrice  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ . Si  $C$  est une matrice carrée à coefficients réels, on rappelle que  $\text{Spec}(C)$  désigne l'ensemble de ses valeurs propres éventuellement complexes.

1. a) Quel est l'ordre de la matrice carrée  $AB$ ? Quel est celui de la matrice  $BA$ ?

b) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Montrer que si  $X$  est un vecteur colonne propre de  $AB$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors  $BX$  est un vecteur colonne propre de la matrice  $BA$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

En déduire que  $\text{Spec}(AB) \setminus \{0\} = \text{Spec}(BA) \setminus \{0\}$ .

c) On pose  $M = I_n - AB$  et  $N = I_p - BA$ . Montrer que la matrice  $M$  est inversible si et seulement si la matrice  $N$  est inversible.

d) On suppose que  $1 \notin \text{Spec}(BA)$ . Montrer que la matrice  $M$  est inversible et que son inverse  $R$  vaut  $R = I_n + AN^{-1}B$ .

(On pourra écrire le produit  $RM$  sous la forme  $I_n + A(I_p - BA)^{-1}CB$  et constater que  $C = 0$ .)

2. On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. On considère deux vecteurs colonnes  $X$  et  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$  et on pose  $A = X$  et  $B = {}^tY$ .

a) Écrire la matrice  $N$  définie dans la question 1. c).

On suppose désormais que le produit scalaire  $\langle X|Y \rangle$  est différent de 1.

b) Montrer que la matrice  $M = I_n - AB$  est inversible et donner une expression de son inverse à l'aide de la question 1.d.

c) En déduire que le polynôme  $P$  défini par  $P(t) = \frac{1}{1 - \langle X|Y \rangle} t^2 + \frac{(\langle X|Y \rangle - 2)}{1 - \langle X|Y \rangle} t + 1$  est un polynôme annulateur de  $M$ .

3. On considère les deux vecteurs colonnes  $X$  et  $Y$  de  $\mathbb{R}^4$  donnés par

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice  $M$ . Est-elle diagonalisable ?

4. On considère les deux vecteurs colonnes  $X$  et  $Y$  de  $\mathbb{R}^4$  donnés par

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice  $M$  et la matrice  $M^{-1}$  après avoir justifié son existence. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

---

### Solution :

1. a) La matrice  $AB$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  tandis que  $BA$  est une matrice carrée d'ordre  $p$ .

b) Soit  $X$  un vecteur colonne propre de  $AB$  associé à la valeur propre  $\lambda \neq 0$ . On a donc  $ABX = \lambda X$ , en multipliant à gauche par  $B$  on obtient  $(BA)BX = \lambda BX$ .

On a  $BX \neq 0$ , sinon  $\lambda X = 0$  et par suite  $X = 0$  puisque  $\lambda \neq 0$ , ce qui est impossible. On a donc  $\lambda \in \text{Spec}(BA)$ .

On vient de montrer que  $\text{Spec}(AB) \setminus \{0\} \subseteq \text{Spec}(BA) \setminus \{0\}$ . Il suffit d'échanger les rôles de  $A$  et  $B$  pour conclure.

c) La matrice  $M$  est inversible si et seulement si  $1 \notin \text{Spec}(AB) \setminus \{0\}$ , ce qui équivaut d'après la question précédente à dire que  $N$  est inversible.

d) Comme  $1 \notin \text{Spec}(BA)$ , les matrices  $M$  et  $N$  sont inversibles d'après la question précédente. En effectuant le produit  $RM$ , on trouve

$$\begin{aligned} RM &= I_n + A(I_p - BA)^{-1}B - AB - A(I_p - BA)^{-1}BAB \\ &= I_n + A(I_p - BA)^{-1}B - A(I_p - BA)^{-1}(I_p - BA)B - A(I_p - BA)^{-1}BAB \\ &= I_n + A(I_p - BA)^{-1}[I_p - (I_p - BA) - BA]B = I_n \end{aligned}$$

2. a) D'après 1) a), on a  $N \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ , par suite  $N$  est le scalaire  $1 - \langle X|Y \rangle$ .

b) Comme  $N = 1 - \langle X|Y \rangle \neq 0$ ,  $M$  est inversible d'après 1) c). Avec 1) d), on obtient :

$$M^{-1} = I_n + (1 - \langle X|Y \rangle)^{-1} X^t Y.$$

c) On remarque que la question précédente nous conduit à

$$I_n = M + \frac{1}{1 - \langle X|Y \rangle} (I_n - M)M = \left( \frac{2 - \langle X|Y \rangle}{1 - \langle X|Y \rangle} \right) M - \frac{1}{1 - \langle X|Y \rangle} M^2.$$

Ce qui donne immédiatement  $P$  comme polynôme annulateur de  $M$ .

3. On trouve : 
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme  $0 = \langle X|Y \rangle \neq 1$ , la question 2. d) nous dit que  $P(t) = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2$  est un polynôme annulateur de  $M$ . Le réel 1 est donc la seule valeur propre possible de  $M$  (c'est effectivement le cas).

Or  $M \neq I$ , elle n'est donc pas diagonalisable.

4. Comme  $10 = \langle X|Y \rangle \neq 1$ , on voit que  $M$  est inversible. On a :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{-4}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{7}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{-4}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{-4}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}.$$

Ici  $P(t) = -\frac{1}{9}t^2 - \frac{8}{9}t + 1$ , ses racines sont 1 et  $-9$ , et ce sont les seules valeurs propres possibles de  $M$ . On voit que l'équation du sous-espace propre associé à 1 est  $x + 2y + 3z + 4t = 0$ , il est donc de dimension 3.

Si  $-9$  n'était pas une valeur propre, la matrice  $M + 9I$  serait inversible et une factorisation de  $P$  conduirait à  $M = I$ , ce qui est absurde (on peut aussi chercher un vecteur propre pour la valeur  $-9$ ).

La somme des dimensions des sous-espaces propres est donc (au moins) 4, donc vaut 4 et par suite la matrice  $M$  est diagonalisable.

### Exercice 2.03.

On considère l'ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  des matrices carrées d'ordre  $n$  ( $n \geq 2$ ) à coefficients réels. Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on rappelle que  $\text{Spec}(A)$  désigne l'ensemble des valeurs propres de  $A$ .

Si  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $\Phi(M) = (m'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  la matrice carrée d'ordre  $n$  dont les coefficients sont donnés par  $m'_{i,j} = m_{n+1-j, n+1-i}$ . La matrice  $\Phi(M)$  est la symétrique de  $M$  par rapport à la « deuxième diagonale ».

1. a) Vérifier que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Déterminer  $\Phi^2$ .

b) Montrer que  $\Phi({}^t M) = {}^t(\Phi(M))$ . On suppose que la matrice  $M$  est symétrique, que peut-on dire de  $\Phi(M)$  ?

c) Soient  $A$  et  $B$  deux matrices réelles carrées d'ordre  $n$ . Prouver que  $\Phi(AB) = \Phi(B)\Phi(A)$ .

d) Montrer que  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est inversible si et seulement si  $\Phi(M)$  est inversible. Vérifier dans ce cas que  $(\Phi(M))^{-1} = \Phi(M^{-1})$ . Prouver que  $\text{Spec}(\Phi(M)) = \text{Spec}(M)$ .

e) Montrer que  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable si et seulement si  $\Phi(M)$  l'est.

2. On dit qu'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est bisymétrique si elle est symétrique par rapport aux

deux diagonales (*i.e.* si  ${}^tM = M$  et  $\Phi(M) = M$ ). Si  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  est une matrice colonne,

on pose  $\tilde{X} = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}$ .

On considère désormais une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui est bisymétrique.

a) Justifier le fait que  $A$  est diagonalisable, avec une matrice de passage diagonalisante orthogonale.

b) Montrer que si la colonne  $X$  appartient au sous-espace  $E_\lambda$  de  $A$  propre associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors  $\tilde{X}$  appartient aussi à  $E_\lambda$ .

c) En déduire que si  $\lambda \in \text{Spec}(A)$ , alors il existe un vecteur colonne propre associé à  $\lambda$  qui vérifie l'une des deux conditions :  $\tilde{X} = X$  ou bien  $\tilde{X} = -X$ .

3. On considère la matrice  $A$  définie par  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Vérifier que  $A$  est bisymétrique et montrer que le rang de  $A$  est supérieur ou égal à 3.

b) Déterminer le noyau de  $A$ .

c) Chercher les vecteurs colonnes propres de  $A$  qui vérifient  $\tilde{X} = X$ .

d) Diagonaliser la matrice  $A$  avec une matrice de passage orthogonale.

---

### Solution :

1. a) La linéarité est évidente. On voit immédiatement que  $\Phi^2 = Id$ .

b) On voit que  $\Phi({}^tM) = (({}^tM)'_{i,j}) = (m_{n+1-i,n+1-j}) = {}^t\Phi(M)$ .

Si la matrice  $M$  est symétrique, on en déduit que la matrice  $\Phi(M)$  est aussi symétrique.

c) Soient  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$  deux matrices réelles carrées d'ordre  $n$ . D'après le cours, on a  $C = AB = (c_{i,j})$  avec  $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$ . D'où  $\Phi(C) = (c'_{i,j})$

avec :

$$c'_{i,j} = c_{n+1-j,n+1-i} = \sum_{k=1}^n a_{n+1-j,k}b_{k,n+1-i} = \sum_{h=1}^n a_{n+1-j,n+1-h}b_{n+1-h,n+1-i}$$

$$= \sum_{h=1}^n b'_{i,h} a'_{h,j}.$$

Or cette dernière somme représente  $(\Phi(B)\Phi(A))_{i,j}$ , on a donc bien  $\Phi(AB) = \Phi(B)\Phi(A)$ .

d) Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est inversible, il existe alors  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $MN = NM = I$ . Il vient  $I = \Phi(I) = \Phi(MN) = \Phi(N)\Phi(M)$  et par suite  $\Phi(M)$  est inversible et  $\Phi(M)^{-1} = \Phi(M^{-1})$ .

Or  $\Phi^2 = Id$ , on a donc bien l'équivalence souhaitée.

Comme  $\lambda \in \text{Sp}(M)$  équivaut à  $M - \lambda I$  non inversible, donc à  $\Phi(M - \lambda I) = \Phi(M) - \lambda I$  non inversible, c.a.d. à  $\lambda \in \text{Sp}(\Phi(M))$ .

e) Supposons  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonalisable, alors il existe  $D$  diagonale et  $P$  inversible telles que  $M = PDP^{-1}$ . Avec c) et d), on voit que  $\Phi(P)$  est inversible et que l'on a  $\Phi(M) = \Phi(P)^{-1}\Phi(D)\Phi(P)$ . Il est clair que  $\Phi(D)$  est encore diagonale, la matrice  $\Phi(M)$  est donc diagonalisable.

Là encore, la propriété  $\Phi^2 = Id$  nous donne immédiatement la réciproque.

2. a) Il suffit de dire qu'une matrice bisymétrique est déjà symétrique réelle.

b) Soit  $x \in E_\lambda$ , comme  $A$  est bisymétrique ( $a_{i,j} = a_{j,i} = a_{n+1-i,n+1-j}$ ) il vient :

$$\begin{aligned} (M\tilde{x})_i &= \sum_{k=1}^n a_{i,k}\tilde{x}_k = \sum_{k=1}^n a_{i,k}x_{n+1-k} = \sum_{h=1}^n a_{i,n+1-h}x_h = \sum_{h=1}^n a_{n+1-i,h}x_h \\ &= \lambda x_{n+1-i} = \lambda\tilde{x}_i. \end{aligned}$$

c) Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $x \in E_\lambda$ , alors on a  $M(x + \tilde{x}) = \lambda(x + \tilde{x})$  d'après la question précédente. Posons  $y = x + \tilde{x}$ , si  $y = 0$  alors  $\tilde{x} = -x$  et si  $y \neq 0$  alors  $y \in E_\lambda$  vérifie  $\tilde{y} = y$ .

3. a) Il est clair que  $A$  est bisymétrique. Ses trois premières colonnes sont libres, d'où  $\text{rg}(A) \geq 3$ .

b) La dimension du noyau est 1 ou 0. Si c'est 1, d'après 2) c) on peut chercher un vecteur générateur du noyau sous la forme  $(a, b, b, a)$  ou  $(a, b, -b, -a)$ .

On voit immédiatement que la première possibilité donne le vecteur nul et la deuxième nous conduit à  $\ker(A) = \mathbb{R}(1, 1, -1, -1)$ .

c) On cherche donc les vecteurs propres qui sont de la forme  $(a, b, b, a)$ . Les deux premières équations du système montrent que  $(a, b)$  vérifie les équations  $6a + 4b = \lambda a$  et  $4a = \lambda b$ . on en tire facilement  $\lambda = -2$  ou  $\lambda = 8$ , et que les vecteurs cherchés appartiennent à  $\mathbb{R}(1, -2, -2, 1) \subseteq E_{-2}$  ou à  $\mathbb{R}(2, 1, 1, 2) \subseteq E_8$ .

d) On cherche la dernière valeur propre éventuelle  $\lambda$ .

La matrice  $A$  étant diagonalisable, on doit avoir  $-2 = \text{tr}(A) = 0 - 2 + 8 + \lambda$ , on trouve donc  $\lambda = -8$ , les sous espaces propres sont donc tous de dimension 1. Les vecteurs de  $E_{-8}$  sont nécessairement de la forme  $(a, b, -b, -a)$  et sont orthogonaux aux autres sous espaces propres, d'où  $E_{-8} = \mathbb{R}(1, -1, 1, -1)$ .

La matrice  $A$  se diagonalise donc sous la forme  $A = PD^tP$  avec :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.04.**

Dans cet exercice on confondra vecteur de  $\mathbb{R}^k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) et matrice colonne canoniquement associée. Soit  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .

On considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et une matrice  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ .

0. Montrer que  $\text{rg}(AB) = \text{rg}(A)$ .

1. Dans cette question on choisit pour  $A$  et  $B$  les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les matrices  $AB$  et  $BA$ .

b) Déterminer le rang de  $AB$ .

2. On se place dans le cas général où  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ .

a) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . On considère les applications linéaires :

$\varphi : \text{Ker}(AB - \lambda I_n) \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $\psi : \text{Ker}(BA - \lambda I_p) \rightarrow \mathbb{R}^n$  définies par  $\varphi(x) = Bx$  et  $\psi(y) = Ay$ .

Montrer que  $\text{Im}(\varphi) \subseteq \text{Ker}(BA - \lambda I_p)$  et que  $\text{Im}(\psi) \subseteq \text{Ker}(AB - \lambda I_n)$ .

b) En déduire que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , on a

$$\dim(\text{Ker}(AB - \lambda I_n)) = \dim(\text{Ker}(BA - \lambda I_p))$$

c) Justifier l'égalité  $\text{Spec}_{\mathbb{C}}(AB) \setminus \{0\} = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(BA) \setminus \{0\}$  (on rappelle que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$  désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice  $M$ ).

d) On considère les matrices  $M = I_n + AB$  et  $N = I_p + BA$ . On suppose que  $N$  est inversible, montrer alors que  $M$  est aussi inversible.

Vérifier que si  $x \in \mathbb{R}^n$  est solution de l'équation  $x = M^{-1}y$  où  $y \in \mathbb{R}^n$ , alors on a  $By = NBx$ . En déduire que  $M^{-1} = I_n - AN^{-1}B$ .

3. On revient au cas particulier des matrices  $A$  et  $B$  données dans la question 1.

a) Trouver les valeurs propres de la matrice  $AB$ . Est-elle diagonalisable ?

b) Justifier l'inversibilité de la matrice  $M = I_n + AB$  et déterminer son inverse.

**Solution :**

1. a) On a :  $AB = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  et  $BA = 2I_2$ .



b) On voit immédiatement que  $\text{Im}(AB) \subseteq \text{Im}(A)$ , d'où

$$\text{rg}(AB) = \dim(\text{Im}(AB)) \leq \dim(\text{Im } A) = \text{rg}(A)$$

c) Comme on a trivialement  $\text{rg}(A) = 2$ , il vient  $\text{rg}(AB) \leq 2$  avec a). Les colonnes de  $AB$  ne sont pas proportionnelles, on a donc  $\text{rg}(AB) = 2$ .

2. a) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Si  $z = \varphi(x) = Bx$  avec  $x \in \text{Ker}(AB - \lambda I_n)$ , on a  $ABx - \lambda x = 0$ , d'où  $BAz - \lambda z = BABx - \lambda Bx = B(ABx - \lambda x) = 0$ . On trouve donc bien  $\text{Im}(\varphi) \subseteq \text{Ker}(BA - \lambda I_p)$ .

On prouve de façon analogue que  $\text{Im}(\psi) \subseteq \text{Ker}(AB - \lambda I_n)$ .

b) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , en appliquant le théorème du rang à l'application linéaire  $\varphi$ , on obtient

$$\dim(\text{Ker}(AB - \lambda I_n)) = \dim(\text{Ker } \varphi) + \dim(\text{Im}(\varphi))$$

Examinons  $\text{Ker } \varphi$  : si  $0 = \varphi(x) = Bx$ , alors on a  $0 = \lambda x - ABx = \lambda x$  puisque  $x \in \text{Ker}(AB - \lambda I_n)$ , et par suite  $\varphi$  est injective car  $\lambda \neq 0$ .

D'où  $\dim(\text{Ker}(AB - \lambda I_n)) = \dim(\text{Im}(\varphi)) \leq \dim(\text{Ker}(BA - \lambda I_p))$  d'après a).

Avec la même méthode, en utilisant cette fois l'application linéaire  $\psi$ , on montre que  $\dim(\text{Ker}(BA - \lambda I_p)) \leq \dim(\text{Ker}(AB - \lambda I_n))$ . D'où l'égalité souhaitée.

Si  $\lambda \in \text{Sp}(AB) \setminus \{0\}$ , alors on peut se servir de l'égalité précédente puisque  $\lambda \neq 0$  et par suite  $\lambda \in \text{Sp}(BA) \setminus \{0\}$ .

En échangeant les rôles de  $A$  et  $B$ , on obtient l'inclusion inverse, d'où :

$$\text{Sp}(AB) \setminus \{0\} = \text{Sp}(BA) \setminus \{0\}$$

c) Dire que  $N$  est inversible revient à dire que  $-1 \notin \text{Sp}(BA) \setminus \{0\} = \text{Sp}(AB) \setminus \{0\}$  d'après la question précédente, et par suite  $M = I + AB$  est inversible.

Si  $x = M^{-1}y$ , on a  $ABx + x = y$ , d'où  $Bx = BABx + Bx = NBx$ .

Par conséquent on a  $Bx = N^{-1}By$  et en reportant dans la deuxième équation on obtient  $AN^{-1}By + x = y$ .

On en déduit que  $M^{-1} = I_n - AN^{-1}B$ .

3. a) On a vu au cours de la première question que  $BA = 2I_2$ .

On a donc  $\{2\} = \text{Sp}(BA) \setminus \{0\} = \text{Sp}(AB) \setminus \{0\}$ . De plus, d'après 1) c) on a  $\text{rg}(AB) = 2$ , donc  $0 \in \text{Sp}(AB)$ . On aboutit finalement à  $\text{Sp}(AB) = \{0, 2\}$ .

Avec 2. b), il vient  $\dim(\text{Ker}(AB - 2I_3)) = \dim(\text{Ker}(BA - 2I_2)) = 2$ . La somme des dimensions des sous-espaces propres de  $AB$  est donc 3, par conséquent la matrice  $AB$  est diagonalisable.

b) On voit que  $-1 \notin \text{Sp}(BA) = \{2\}$ , il découle de 2. c) que  $M$  est inversible et que

$$M^{-1} = I_3 - A\left(\frac{1}{3}I_2\right)B = I_3 - \frac{1}{3}AB.$$

$$\text{D'où : } M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

---

### Exercice 2.05.

$GL_n(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Une matrice  $S$  de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est dite positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX S X \geq 0,$$

et définie positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tX S X > 0.$$

On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques réelles positives d'ordre  $n$  et  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives d'ordre  $n$ .

1. Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

2. Soit  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ . On souhaite montrer l'existence de  $R$  orthogonale et  $S$  symétrique définie positive telle que  $M = RS$ .

- Montrer que la matrice  ${}^tMM$  est symétrique définie positive.
- En déduire qu'il existe  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  ${}^tMM = S^2$ .
- Montrer que  $S$  est inversible et que  $MS^{-1}$  est orthogonale.
- Conclure.

*Dans la suite de cet exercice, on admettra l'unicité d'une telle factorisation.*

3. Soit  $\Sigma \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Soit  $P$  une matrice orthogonale telle que  $D = P^{-1}\Sigma P$  soit diagonale. On note  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les coefficients diagonaux de  $D$ .

Soit  $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

- Montrer que  $\text{tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale  $Q_1$  telle que  $\text{tr}(Q\Sigma) = \text{tr}(Q_1D)$  et en déduire :

$$\text{tr}(Q\Sigma) \leq \text{tr}(\Sigma).$$

- Montrer que  $\sup_{Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \{\text{tr}(Q\Sigma)\} = \text{tr}(\Sigma)$ .

---

### Solution :

1. Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . La matrice  $S$  est diagonalisable via une matrice orthogonale  $P$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les coefficients diagonaux d'une telle réduite diagonale. On raisonne ensuite par double implication.

( $\Rightarrow$ ) On suppose que  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $X_i$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . Alors,  ${}^tX_i S X_i = \lambda_i \|X_i\|^2 > 0$ . Ainsi,  $\lambda_i > 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  non nul et  $(X_1, \dots, X_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres. Il existe  $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $X = \sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ . Alors,

$${}^tX SX = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mu_i \mu_j {}^tX_i S X_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mu_i \mu_j \lambda_j {}^tX_i X_j = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \lambda_i \|X_i\|^2 > 0.$$

Ce qui termine la question.

2. a) Soit  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ . D'après les propriétés de la transposition,  ${}^tMM$  est symétrique. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  non nul. Alors,  ${}^tX {}^tMM X = {}^tM X M X = \|M X\|^2$ .

Or, comme  $M$  est inversible et  $X$  est non nul, alors  $M X$  est non nul et  $\|M X\|^2 > 0$ .

Ainsi,  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  entraîne que  ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

b) D'après la question 1, il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des réels strictement positifs et  $P$  une matrice orthogonale telle que, en notant  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  ${}^tMM = P D {}^tP$ .

Alors, en posant  $\tilde{D} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$  qui est bien définie d'après la question 1 et  $S = P \tilde{D} {}^tP$ , on obtient bien, toujours d'après la question 1 :

$$S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } {}^tMM = S^2$$

c) Comme les éléments diagonaux de  $\tilde{D}$  sont non nuls, en posant :

$$T = P \text{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_n^{-1/2}) {}^tP,$$

on a  $T S = S T = I_n$  et  $S$  est inversible. Puis,

$${}^t(M S^{-1}) M S^{-1} = ({}^tS)^{-1} {}^tM M S = S^{-1} S^2 S = I_n$$

et  $M S^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

d) Finalement, pour toute matrice  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ , il existe  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telles que  $M = R S$ .

3. a) Comme la trace est invariante par changement de base,  $\text{tr} \Sigma = \text{tr} D = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

b) Comme  $\Sigma$  est symétrique réelle, elle est diagonalisable et il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\Sigma = P D {}^tP$ , avec  $D$  diagonale.

Alors,

$$\text{tr}(Q \Sigma) = \text{tr}(Q P D {}^tP) = \text{tr}({}^tP Q P D) = \text{tr}(Q_1 D)$$

où  $Q_1 = {}^tP Q P$  appartient à  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

Ainsi, notons  $Q_1 = (q_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Alors,

$$\text{tr}(Q \Sigma) = \text{tr}(Q_1 D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i q_{i,i}$$

Or, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i \geq 0$ . De plus, comme  $Q_1$  est orthogonale, on a  $\sum_{k=1}^n q_{i,k}^2 = 1$  et  $|q_{i,i}| \leq 1$ .

Ainsi,  $\text{tr}(Q \Sigma) \leq \text{tr}(\Sigma)$ .

c) D'après la question 3. b), pour toute matrice  $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{tr}(Q \Sigma) \leq \text{tr}(\Sigma)$ , cette inégalité étant une égalité lorsque  $Q = I_n$ . Ainsi :

$$\sup_{Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \text{tr}(Q \Sigma) = \max_{Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \text{tr}(Q \Sigma) = \text{tr}(\Sigma)$$

**Exercice 2.06.**

Soient  $m$ ,  $n$  et  $p$  trois entiers naturels avec  $p$  **impair** et  $m \geq 2$ . Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à coefficients **entiers** telles que  $A$  soit symétrique, et

$$A = I_n + mB \text{ et } A^p = I_n.$$

1. Soit  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers telle que  $(u_k)_k$  converge. Montrer que  $(u_k)_k$  est constante à partir d'un certain rang.
2. Soit  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ . Montrer que  $\omega^p = 1$ , puis en déduire l'ensemble  $\mathcal{R}$  des racines du polynôme  $X^p - 1$ .
3. Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors  $\lambda \in \mathcal{R}$ .
4. a) Montrer que  $B$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes de module strictement inférieur à 1.  
 b) En notant, pour tout entier naturel  $k$ ,  $B^k = (b_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n}$ , montrer que l'on a :  

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{i,j}^{(k)} = 0.$$
  
 c) En déduire que  $A = I_n$ .

**Solution :**

1. Soit  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$ . Il existe un réel  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{3}$ . Soit  $n \geq n_0$ . Alors,  $|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |u_n - \ell| \leq \frac{2}{3} < 1$ . Ainsi, comme  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont entiers, alors  $u_n = u_{n+1}$  et  $(u_n)_n$  est constante à partir du rang  $n_0$ .
2. D'après les propriétés des nombres complexes,  $\omega^p = 1$ . De plus, pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ ,  $\omega^{kp} = 1$ . Ainsi, les nombres complexes  $\{\omega^k, k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket\}$  sont distincts deux à deux et racines du polynôme  $X^p - 1$  de degré  $p$ , donc ce sont ses seules racines.
3. Comme  $A^p = I_n$ , toute valeur propre de  $A$  satisfait  $\lambda^p = 1$ , donc appartient à  $\mathcal{R}$ .
4. Comme  $A$  est symétrique réelle, elle est diagonalisable. De plus, en notant  $A = PDP^{-1}$  alors  $B = P\frac{1}{m}(D - I)P^{-1}$ . Soit  $\mu$  une valeur propre de  $B$ . Il existe  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$  tel que  $\mu = \frac{\omega^k - 1}{m}$ . Ainsi, si  $k = 0$ , alors  $\mu = 0$ . Sinon,  $\omega^k$  et 1 ne sont pas colinéaires ( $p$  impair) et d'après l'inégalité triangulaire,

$$|\mu| = \frac{|\omega^k - 1|}{m} < \frac{2}{m} \leq 1$$

- a) D'après la question précédente,  $B^k = P\left(\frac{D - I}{m}\right)^k P^{-1}$  et  $b_{i,j}^{(k)}$  est une combinaison linéaire des  $(\mu_i^k)$ . Ainsi,  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{i,j}^{(k)} = 0$ .
- b) D'après la question précédente, comme  $B$  est à coefficients entiers, il existe  $k_0$  tel que  $B^{k_0} = 0_n$ . Ainsi,  $B$  est diagonalisable et nilpotente donc c'est la matrice nulle et  $A = I_n$ .

**Exercice 2.07.**

Dans cet exercice,  $A$  désigne une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $n \geq 2$ .

1. a) Montrer que  $A$  admet au moins une valeur propre complexe, c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs propres de  $A$  n'est pas vide et qu'il existe un polynôme annulateur de  $A$  tel que ses racines soient exactement les valeurs propres de  $A$ . Un tel polynôme est noté  $m_A$  et on admet que l'on peut choisir  $m_A$  à coefficients réels.

b) Montrer que si  $m_A$  est de degré impair,  $A$  admet au moins une valeur propre réelle.

*On suppose désormais que  $m_A$  est de degré pair  $2p$  et que les valeurs propres de  $A$  sont toutes complexes non réelles.*

2. Existe-t-il une droite de  $\mathbb{R}^n$  stable par l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  ?

3. Soit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  une valeur propre de  $A$ . Montrer que  $\bar{\lambda}$  (conjugué de  $\lambda$ ) est également valeur propre de  $A$  et que les sous-espaces propres associés à  $\lambda$  et  $\bar{\lambda}$  sont de même dimension.

4. Soit  $X$  un vecteur colonne propre de  $A$  associé à  $\lambda$ . En considérant les vecteurs  $Y$  et  $Z$  réels qui sont respectivement la partie réelle de  $X$  et la partie imaginaire de  $X$ , montrer qu'il existe un plan  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  stable par l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

**Solution :**

On note  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $A$ . Le polynôme  $m_A$  sera aussi noté  $m_f$ .

1. a) L'endomorphisme  $f$  admet un polynôme annulateur réel car la famille

$$(Id, f, f^2, \dots, f^{n^2})$$

est de cardinal  $n^2 + 1$  donc liée. Les valeurs propres de  $f$  sont incluses dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur.

On factorise ce polynôme sur  $\mathbb{C}$  par le théorème de d'Alembert-Gauss, soit :

$$P(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}$$

Supposons que  $\lambda_p$  ne soit pas valeur propre de  $f$ . Alors l'endomorphisme  $f - \lambda_p Id$  est inversible ainsi que  $(f - \lambda_p Id)^{m_p}$ . On peut ainsi composer à droite par l'inverse de  $(f - \lambda_p Id)^{m_p}$  et on obtient encore un polynôme annulateur après avoir supprimé une racine qui n'est pas valeur propre.

En recommençant ce processus, on récupère le polynôme  $m_f$ . En effet on ne peut épuiser ainsi toutes les racines de  $P$  car alors on aurait  $Id = 0$ .

b) Le polynôme  $m_f$  est réel et de degré impair. Il admet au moins une racine réelle (théorème des valeurs intermédiaires), donc il existe une valeur propre réelle et si  $X$  est un vecteur propre associé, la droite vectorielle engendrée par  $X$  est une droite stable.

2. Si  $f$  admet une droite stable, et si  $X$  est une base de cette droite, alors  $f(X) = aX$  et  $a$  est valeur propre réelle de  $f$ . Ainsi  $f$  n'admet pas de droite stable.

3. Soit  $X$  un vecteur colonne propre complexe de  $A$  associé à  $\lambda$ . On a  $AX = \lambda X$ . En passant au conjugué,  $A$  étant réelle, il vient  $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$ . Ainsi  $\bar{\lambda}$  est valeur propre de  $A$  associée au vecteur colonne propre  $\bar{X}$ .

On a également la réciproque (immédiat).

On montre enfin que  $(X_1, \dots, X_q)$  est une base du sous-espace propre  $E_\lambda$ , si et seulement si  $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_q)$  est une base du sous-espace propre  $E_{\bar{\lambda}}$ .

4. On a  $Y = \frac{X + \bar{X}}{2}$  et  $Z = \frac{X - \bar{X}}{2i}$ . Ce sont des vecteurs colonnes réels.

Soient  $a, b$  réels tels que  $aY + bZ = 0$ . Alors  $(a - ib)X + (a + ib)\bar{X} = 0$  ce qui entraîne que  $a = b = 0$ .

Ainsi la famille  $(Y, Z)$  est libre et engendre un plan vectoriel.

Montrons que ce plan est stable par  $A$ .

On pose  $\lambda = a + ib$ , avec  $b \neq 0$ . Il vient

$$\begin{aligned} AY &= \frac{AX + A\bar{X}}{2} = \frac{1}{2} ((a + ib)X + (a - ib)\bar{X}) \\ &= \frac{1}{2} ((a + ib)(Y + iZ) + (a - ib)(Y - iZ)) \\ &= aY - bZ \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} AZ &= \frac{AX - A\bar{X}}{2i} = \frac{1}{2i} ((a + ib)X - (a - ib)\bar{X}) \\ &= \frac{1}{2i} ((a + ib)(Y + iZ) - (a - ib)(Y - iZ)) \\ &= bY + aZ \end{aligned}$$

Le plan  $\text{Vect}(Y, Z)$  est bien stable.

### Exercice 2.08.

Dans cet exercice,  $n$  est un entier tel que  $n \geq 2$  et  $E = \mathbb{R}^n$  est muni de son produit scalaire canonique. On confondra les vecteurs de  $E$  et les matrices colonnes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  ainsi que les endomorphismes de  $E$  avec les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  stable par  $A$ . Montrer que  $F^\perp$  est stable par la transposée  ${}^tA$  de  $A$ .

2. On appelle hyperplan de  $E$  tout sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  de dimension  $n - 1$ .

Montrer que les hyperplans de  $E$  stables par  $A$  sont déterminés par les vecteurs propres de  ${}^tA$ .

3. On suppose la matrice  $A$  diagonalisable. Montrer qu'il existe  $n$  hyperplans  $H_1, \dots, H_n$  stables par  $A$  tels que  $\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$ .

4. Réciproquement, on suppose qu'il existe  $n$  hyperplans  $H_1, \dots, H_n$  stables par  $A$  tels que  $\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?

**Solution :**

1. Soit  $Y \in F^\perp$ . On a  ${}^tXY = 0$ , pour tout  $X \in F$ . Et  ${}^tX{}^tAY = {}^t(AX)Y = 0$  puisque  $AX \in F$ .

2. Soit  $H$  un hyperplan de  $E$  stable par  $A$ . La question précédente montre que  $H^\perp$  est une droite stable par  ${}^tA$ .

Or une droite stable est engendrée par un vecteur propre puisque si  $X$  engendre la droite stable  $D$ , alors  $AX \in D \Rightarrow AX = \lambda X$ . La réciproque de cette proposition est immédiate.

Réciproquement, si  $D$  est une droite stable de  ${}^tA$ , cette droite est engendrée par un vecteur propre  $X$  de  ${}^tA$  et  $D^\perp$  est un hyperplan stable par  ${}^t({}^tA) = A$ .

3. Notons  $(X_1, \dots, X_n)$  une base de vecteurs propres de  $A$ ,  $D_i = \text{Vect}(X_i)$  et  $H_i = D_i^\perp$ . On a ainsi défini  $n$  hyperplans. Chacun est stable par  ${}^tA$ .

Soit  $X \in \bigcap_{i=1}^n H_i$ . Alors  ${}^tAX \in \bigcap_{i=1}^n H_i$ , donc  ${}^tAX \in H_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $AX \in H_i^\perp = D_i$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , ce qui est impossible puisque les  $D_i$  sont supplémentaires. Donc  $X = 0$ .

4. Réciproquement, on suppose qu'il existe  $n$  hyperplans  $H_1, \dots, H_n$  stables par  $A$  tels que  $\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$ . Alors, il existe  $n$  droites  $D_1, \dots, D_n$  stables par  ${}^tA$ , chacune de base  $X_1, \dots, X_n$ .

Chacun de ces vecteurs est un vecteur propre de  ${}^tA$ , et cette famille est libre. En effet, supposons par exemple que  $X_n \in \text{Vect}(X_1, \dots, X_{n-1})$ .

Soit  $Y \in \bigcap_{i=1}^n H_i$ .

Alors  $Y$  est orthogonal à  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$  et  $X_n$  donc à  $\text{Vect}(X_1, \dots, X_{n-1})$  qui est un sous-espace de  $E$  de dimension inférieure ou égale à  $n - 1$ . Il suffit de prendre  $Y \in [\text{Vect}(X_1, \dots, X_{n-1})]^\perp$  pour obtenir une contradiction à  $\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$ .

On a ainsi obtenu que la matrice  ${}^tA$  est diagonalisable et donc que  $A$  est également diagonalisable.

**Exercice 2.09.**

Dans cet exercice,  $E = \mathbb{R}[X]$  est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On définit une application  $T$  sur  $E$ , par :

$$\forall P \in E, T(P)(X) = (3X + 8)P(X) - X(5 - X)P'(X) + X^2(1 - X)P''(X)$$

où  $P'$  et  $P''$  représentent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de  $P$ .

1. a) Montrer que l'application  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

b) Pour quelles valeurs de  $n$ , le sous-espace  $\mathbb{R}_n[X]$  est-il stable par  $T$  ?

c) L'application  $T$  est-elle surjective sur  $E$  ?

2. Soit  $P$  un polynôme propre de  $T$ , c'est-à-dire un polynôme  $P$  non nul tel que la famille  $(P, T(P))$  soit liée.

a) Que peut valoir le degré de  $P$  ?

b) Montrer que les polynômes propres de  $T$  appartiennent à un sous-espace  $F$  de  $E$  de dimension finie et que la restriction de  $T$  à  $F$  induit un endomorphisme de  $F$ , que l'on note encore  $T$ .

3. a) Déterminer tous les couples  $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times E$  tels que  $T(P) = \lambda P$ .

b) L'application  $T$  est-elle injective ?

---

**Solution :**

1. a) L'application  $T$  est linéaire par distributivité du produit sur l'addition et linéarité de la dérivation.

b) Supposons que  $P(X) = a_n X^n + \dots$ , avec  $a_n \neq 0$ . On détermine alors le coefficient dominant de  $T(P)$  :

$$T(P)(X) = X^{n+1}(3a_n + na_n - n(n-1)a_n) + \dots = a_n(-n^2 + 2n + 3)X^{n+1} + \dots$$

Ainsi  $\deg(T(P)) = n+1$  sauf si  $n = 3$  (l'autre racine est négative), donc seul  $\mathbb{R}_3[X]$  est stable par  $T$ .

Si  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ , alors :

$$T(P) = (3X + 8)(aX^3 + bX^2 + cX + d)$$

$$-X(5 - X)(3aX^2 + 2bX + c) + X^2(1 - X)(6aX + 2b)$$

c) L'application  $T$  ne peut être surjective, puisque les degrés 0 et 4 ne sont pas atteints. (Il suffit de construire la liste des degrés obtenus)

2. On vérifie que  $T(1) = 3X + 8$  et  $T(X) = 4X^2 + 3X$ . Les polynômes de degré supérieur ou égal à 2 rentrent dans le cadre précédent. Ainsi un polynôme propre appartient obligatoirement à  $\mathbb{R}_3[X]$  par la question précédente.

Le sous espace vectoriel  $\mathbb{R}_3[X]$  est stable par  $T$  (on l'a vérifié ci dessus).

3. a) On écrit la matrice de l'induit par  $T$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ , soit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice triangulaire inférieure : ses valeurs propres sont les éléments diagonaux, soit  $\{-1, 0, 3, 8\}$ .

La matrice  $A$  est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

- le polynôme  $X^3$  est associé à la valeur propre  $-1$
- le polynôme  $3X^3 + X^2$  est associé à la valeur propre 0 (lien entre les deux dernières colonnes)
- le polynôme  $3X^3 + 4X^2 + 3X$  est associé à la valeur propre 3
- le polynôme  $10 + 6X + 3X^2 + X^3$  est associé à la valeur propre 8

b) L'application  $T$  n'est pas injective car 0 est valeur propre de  $T$ .



**Exercice 2.10.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$  diagonalisable. On note  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  l'ensemble de ses valeurs propres et  $E_1, \dots, E_p$  les sous-espaces propres associés.

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$ , tel que  $F \neq \{0\}$  et  $F \neq E$ . Soit  $x$  un vecteur de  $F$ .

1. Montrer qu'il existe un unique  $p$ -uplet  $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$  tel que  $x = x_1 + \dots + x_p$ .
2. On suppose désormais  $x \neq 0$ . Montrer que, quitte à modifier l'ordre, on peut supposer qu'il existe  $r \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tel que  $x_i = 0$ , pour  $i > r$  et  $x_i \neq 0$ , pour  $i \leq r$ . On a alors  $x = x_1 + \dots + x_r$ . On note  $V_x$  le sous-espace vectoriel engendré par  $(x_1, \dots, x_r)$ .

3. a) Montrer que  $(x_1, \dots, x_r)$  est une base de  $V_x$ .

b) Montrer que pour tout  $j \geq 0$ ,  $f^j(x) \in V_x$ .

c) Déterminer la matrice  $A$  de la famille  $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$  dans la base  $(x_1, \dots, x_r)$  de  $V_x$ .

Notons  $C_1, \dots, C_r$  les colonnes de  $A$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  des réels tels que  $\sum_{j=1}^r \alpha_j C_j = 0$ . Montrer

que le polynôme  $P = \sum_{j=1}^r \alpha_j X^{j-1}$  est le polynôme nul. En déduire que  $A$  est inversible.

d) Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $x_i \in F$ , puis que  $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ .

4. Réciproquement, montrer que  $\bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$  est un sous-espace de  $E$  stable par  $f$ .

5. Soit  $g$  un endomorphisme de  $E$ , diagonalisable et commutant avec  $f$  (*i.e.* tel que  $f \circ g = g \circ f$ ). Montrer qu'il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres communs à  $f$  et  $g$ .

**Solution :**

1. L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable et  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ . Ainsi, pour tout  $x \in F$ , il existe un unique  $p$ -uplet  $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$  tel que  $x = x_1 + \dots + x_p$ .

2. Certains des vecteurs  $x_i$  peuvent être nuls, mais pas tous si  $x \neq 0$ . Quitte à réordonner les sous-espaces propres, on peut supposer que les  $x_i$  non nuls sont les  $r$  premiers.

3. a) La famille  $(x_1, \dots, x_r)$  est génératrice de  $V_x$ , elle est formée de vecteurs propres de  $f$  associés à des valeurs propres distinctes : elle est donc libre.

b) Pour la même raison, pour tout  $j \geq 0$ ,  $f^j(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^j x_i \in V_x$ .

c) La matrice de la famille  $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$  dans la base  $(x_1, \dots, x_r)$  est la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$$

$\sum_{j=1}^r \alpha_j C_j = 0$ , donne en regardant coefficient par coefficient :  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, P(\lambda_i) = 0$ . Ainsi le polynôme  $P$ , qui est de degré inférieur ou égal à  $r - 1$  admet  $r$  racines distinctes, donc est le polynôme nul. Cela prouve que  $A$  est inversible.

Ainsi la matrice  $A$  est la matrice de passage d'une base à une famille libre, donc ici une base.

d) En écrivant chaque vecteur de la base  $(x_1, \dots, x_r)$  dans cette nouvelle base, on obtient que  $x_i \in F$ , comme combinaison linéaire de la famille  $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ .

Donc  $x \in \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$  et  $F \subset \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ . L'inclusion contraire est banale d'où le résultat.

4. La réciproque est évidente car des sous-espaces propres sont toujours stables. On vient ainsi de caractériser la forme des sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $f$ .

5. Comme  $g$  est diagonalisable, on a  $E = \bigoplus_{k=1}^q F_k$ , où  $F_k$  est le sous-espace propre de  $g$  associé à la valeur propre  $\mu_k$ .

Or, comme  $f$  et  $g$  commutent, chaque  $F_k$  est stable par  $f$ . Donc  $F_k = \bigoplus_{i=1}^p (F_k \cap E_i)$ .

Une base de  $F_k \cap E_i$  est formée de vecteurs propres communs à  $f$  et  $g$ . Comme  $E = \bigoplus_{k=1}^q F_k$ , on obtient une base de  $E$  formée de vecteurs propres communs à  $f$  et  $g$ .

### Exercice 2.11.

Soit  $(M_n)$  une suite de matrices de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $M_n = (m_{i,j}(n))_{1 \leq i,j \leq p}$ . On dit que la suite  $(M_n)$  est convergente si pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ , la suite  $(m_{i,j}(n))$  converge vers une limite réelle notée  $m_{i,j}$ .

On pose alors  $M = [m_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq p}$ , on dit que la suite  $(M_n)$  converge vers  $M$  et on écrit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n) = M$ .

On admettra que si la suite  $(M_n)$  converge vers  $M$  et si  $P$  et  $Q$  sont deux matrices de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  dont les coefficients ne dépendent pas de  $n$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} (PM_nQ) = PMQ$ .

1. Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  diagonalisable. On note  $I_p$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ .

b) Montrer que la suite de matrices  $\left( (I_p + \frac{1}{n} A)^n \right)_n$  converge. On note  $E(A)$  sa limite.

c) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $E(xI_p + A) = e^x E(A)$ .

Dans la suite,  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  diagonalisables et qui commutent ( $AB = BA$ ). On note  $u$  et  $v$  les endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associés à  $A$  et  $B$ . On note  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  les valeurs propres de  $u$  et  $(\mu_1, \dots, \mu_q)$  les valeurs propres de  $v$ .

2. On note  $E_\lambda(u)$  le sous-espace propre de  $u$  associé à une valeur propre  $\lambda$ . Montrer que  $E_\lambda(u)$  est stable par  $v$ .

Pour  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on note alors  $v_i$  l'endomorphisme de  $E_{\lambda_i}(u)$  induit par la restriction de  $v$  à  $E_{\lambda_i}(u)$ . L'objet de la question suivante est de montrer que  $v_i$  est diagonalisable.

3. Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $v$ . On suppose que chaque vecteur  $x_j$  est écrit sous la forme

$$x_j = x_{1,j} + x_{2,j} + \dots + x_{r,j}, \text{ avec } x_{k,j} \in E_{\lambda_k}(u) \text{ pour tout } k \text{ de } \llbracket 1, r \rrbracket$$

a) Montrer que les vecteurs non nuls de la famille  $(x_{k,1}, \dots, x_{k,p})$  sont des vecteurs propres de  $v$  et des vecteurs propres de  $u$ .

b) Montrer que cette famille est une famille génératrice de  $E_{\lambda_k}(u)$ .

c) En déduire que  $u$  et  $v$  admettent une base commune de vecteurs propres.

4. Montrer que  $E(A + B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$ .

---

### Solution :

1. a) On montre classiquement que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ .

b) Comme  $A$  est diagonalisable, il existe  $P$  inversible et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ . Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$I + \frac{1}{n}A = P\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)P^{-1} \text{ et } \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = P\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n P^{-1}$$

avec  $\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n = \text{diag}\left(\left(1 + \frac{\lambda_1}{n}\right)^n, \dots, \left(1 + \frac{\lambda_p}{n}\right)^n\right)$ .

Ainsi, en utilisant 1. a) et la propriété donnée dans l'énoncé, la suite  $\left(\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n\right)_n$  converge et sa limite vaut :

$$E(A) = P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}) P^{-1}$$

c) Soit  $x$  un réel. La matrice  $A_x = xI_p + A$  reste diagonalisable et l'on a  $A_x = PD_x P^{-1}$ , où  $D = \text{diag}(x + \lambda_1, \dots, x + \lambda_p)$

Le même raisonnement qu'à la question précédente montre que la suite  $\left(\left(I_p + \frac{1}{n}A_x\right)^n\right)_n$  converge et que sa limite vaut

$$\begin{aligned} E(xI_p + A) &= P \text{diag}(e^{x+\lambda_1}, \dots, e^{x+\lambda_p}) P^{-1} = e^x P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}) P^{-1} \\ &= e^x E(A) \end{aligned}$$

2. Soit  $x \in E_\lambda(u)$ . Alors,  $u(x) = \lambda x$ . Comme  $u$  et  $v$  commutent, on obtient :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$

ce qui montre que  $v(x) \in E_\lambda(u)$ . Ainsi,  $E_\lambda(u)$  est stable par  $v$ .

3. a) Par définition, les  $x_{k,i}$  non nuls sont des vecteurs propres de  $u$ . Soit  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On suppose que  $x_j$  est vecteur propre de  $v$  associé à la valeur propre  $\mu_j$ . Alors,

$$\sum_{i=1}^p \mu_j x_{i,j} = \mu_j x_j = v(x_j) = v(x_{1,j}) + v(x_{2,j}) + \dots + v(x_{p,j}) = \sum_{i=1}^p v(x_{i,j})$$

Or, d'après la question 2, chaque  $v(x_{k,j})$  est dans  $E_{\lambda_k}(u)$ . Par unicité de la décomposition selon la somme directe, on a

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, v(x_{k,j}) = \mu_j x_{k,j},$$

les  $x_{k,i}$  non nuls sont des vecteurs propres de  $v$ .

b) Soit  $z \in E_{\lambda_k}(u)$ . Le vecteur  $z$  se décompose sur la base  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sous la forme  $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ . Donc

$$z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^p x_{i,j} = \sum_{j=1}^p \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{i,j} \right)$$

Mais  $z \in E_{\lambda_k}(u)$ . Donc  $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{i,k}$ .

c) De la famille génératrice de la question précédente, on peut extraire une base de  $E_{\lambda_k}(u)$  par le théorème de la base incomplète. On obtient ainsi pour chaque sous-espace propre de  $u$  une base de vecteurs propres de  $v$ . En mettant ces bases bout à bout, on obtient une base de vecteurs propres commune à  $u$  et  $v$ .

4. Comme  $A$  et  $B$  sont diagonalisables avec la même matrice de passage  $P$  (question précédente), on peut écrire

$$\begin{aligned} E(A+B) &= P \operatorname{diag}(e^{\lambda_1+\mu_1}, \dots, e^{\lambda_p+\mu_p}) P^{-1} \\ &= P \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}) P^{-1} \times P \operatorname{diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_p}) P^{-1} \\ &= E(A)E(B) = E(B)E(A) \end{aligned}$$

### Exercice 2.12.

On note  $\mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et pour tout entier naturel  $n$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On pose  $S_0 = 1$  et pour tout entier  $k$  non nul, on désigne par  $S_k$  le polynôme défini par :

$$S_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$$

1. a) Démontrer que, pour tout entier  $n$ , la famille  $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une famille libre de  $\mathbb{R}[X]$ .

b) Soit  $m$  un entier naturel. Prouver que pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_m[X]$ , il existe un unique  $(m+1)$ -uplet de réels  $(a_k)_{0 \leq k \leq m}$  tel que  $P = \sum_{k=0}^m a_k S_k$ .

2. a) Pour tout entier naturel  $n$  et tout entier naturel  $k$  calculer  $S_k(n)$ .

b) Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}_m[X]$  écrit dans la base  $(S_k)_{0 \leq k \leq m}$  sous la forme :

$$P = \sum_{k=0}^m a_k S_k.$$

i) Démontrer que pour tout entier  $N \geq m$  :

$$\sum_{n=0}^N \frac{P(n)}{n!} = \sum_{k=0}^m a_k \sum_{n=k}^N \frac{1}{(n-k)!}$$

ii) En déduire que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{P(n)}{n!}$  converge et calculer sa somme en fonction des  $a_k$ ,  $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$ .

c) Soit  $p$  un entier naturel non nul.

Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)}{n!}$  et calculer sa somme.

---

**Solution :**

1. a) Les éléments de la famille sont des polynômes de degrés échelonnés, la liberté en découle.

b) On sait que  $\mathbb{R}_m[X]$  est un espace vectoriel de dimension  $m+1$ , contenant les  $m+1$  polynômes  $S_k$ ,  $0 \leq k \leq m$ . Comme ils forment une famille libre de  $\mathbb{R}_m[X]$ , c'est une base de cet espace et  $P$  s'y décompose de façon unique.

2. a)  $\star$  Si  $n \geq k$ , alors  $S_k(n) = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ .

$\star$  Si  $n < k$ , alors  $n$  est une racine de  $S_k$ , donc  $S_k(n) = 0$ .

b) Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}_m[X]$  écrit dans la base  $(S_k)_{0 \leq k \leq m}$  sous la forme :  $P = \sum_{k=0}^m a_k S_k$ .

i) On a :

$$\sum_{n=0}^N \frac{P(n)}{n!} = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^m a_k \frac{S_k(n)}{n!} = \sum_{k=0}^m a_k \sum_{n=0}^N \frac{S_k(n)}{n!} \quad (1)$$

Or  $S_k(n) = 0$  si  $n \leq k-1$ , on en déduit :

$$\sum_{n=0}^N \frac{P(n)}{n!} = \sum_{k=0}^m a_k \sum_{n=k}^N \frac{S_k(n)}{n!} = \sum_{k=0}^m a_k \sum_{n=k}^N \frac{n!}{(n-k)!n!} = \sum_{k=0}^m a_k \sum_{n=k}^N \frac{1}{(n-k)!}$$

ii) On a :  $\sum_{n=k}^N \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{i=0}^{N-k} \frac{1}{i!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e$

On déduit alors ( $m$  est fixé) la convergence de la série proposée, avec :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} = e \sum_{k=0}^m a_k$$

c) On pose  $P(X) = X^2(X-1) \cdots (X-p+1)$ .

On a :  $P(X) = X S_p = (X-p) S_p + p S_p = S_{p+1} + p S_p$ .

Les coordonnées de  $P$  dans la base  $(S_k)_{0 \leq k \leq p+1}$  de  $\mathbb{R}_{p+1}[X]$  sont  $(0, 0, \dots, 0, p, 1)$  donc la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{n!}$  est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{n!} = (p+1)e$$

### Exercice 2.13.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $I_n$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , qui est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels. On identifie  $\mathbb{R}^n$  avec l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  des matrices colonnes d'ordre  $n$ .

L'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^n$  est muni de son produit scalaire canonique :

$$\langle X, Y \rangle = {}^tXY$$

La norme euclidienne associée est notée  $\|\cdot\|$ . On note  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $R(A)$  la partie de  $\mathbb{R}$  définie par :

$$R(A) = \{ {}^tXAX, X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1 \}$$

1. Trouver des éléments de  $R(A)$  en prenant successivement pour  $X$  un vecteur propre normé de  $A$ , puis pour  $1 \leq i \leq n$ , le vecteur  $e_i$ .

2. Soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $R(A)$  tels que :  $a < b$ . On considère  $X_1$  un vecteur normé de  $\mathbb{R}^n$  tel que  ${}^tX_1AX_1 = a$  et  $X_2$  un vecteur normé de  $\mathbb{R}^n$  tel que  ${}^tX_2AX_2 = b$ . Pour  $\alpha \in [0, 1]$ , on pose :  $X_\alpha = \alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2$

a) Montrer que pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $X_\alpha \neq 0$ .

b) Montrer que l'application :

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \frac{{}^tX_\alpha AX_\alpha}{\|X_\alpha\|^2}$$

est continue.

c) En déduire que  $R(A)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

3. Soit  $Q$  une matrice orthogonale réelle, montrer que :  $R(A) = R({}^tQAQ)$ .

4. Dans cette question on prend  $n = 2$ .

a) Soit  $A$  une matrice symétrique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  admettant 2 valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Justifier l'existence d'une matrice diagonale réelle  $D$  et d'une matrice orthogonale  $P$  telles que :  $A = {}^tPDP$ .

Déterminer  $R(A)$  en fonction de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

b) Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  admettant respectivement pour valeurs propres  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  et  $\mu_1 \leq \mu_2$ , montrer que :

$$\text{tr}(AB) \leq \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$$

**Solution :**

1. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $X$  un vecteur colonne propre normé associé :  ${}^tXAX = {}^tX\lambda X = \lambda$ , donc  $\text{Sp}(A) \subset R(A)$ .

On a  ${}^te_iAe_i = a_{i,i}$  donc  $R(A)$  contient tous les éléments de la diagonale principale de  $A$ .

2. Soit  $a < b$ .

a) Par l'absurde : si  $\alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2 = 0$ , alors

- si  $\alpha = 0$  alors  $X_2$  est nul, il n'est donc pas normé.
- sinon  $X_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha}X_2$  et  $\|X_1\| = 1$  entraîne  $\alpha = \frac{1}{2}$

d'où :  $X_2 = -X_1$  et  ${}^tX_2AX_2 = {}^tX_1AX_1$  ce qui entraîne  $a = b$  : absurde.

Donc pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $X_\alpha \neq 0$ .

b) La fonction  $\varphi$  est une fonction rationnelle à dénominateur jamais nul : elle est bien continue sur  $[0, 1]$ .

c) Soient  $a < b$  2 réels de  $R(A)$ , on applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue  $\varphi$  sur  $[a, b] \subset [0, 1]$  : soit  $c \in [a, b]$ , on a :  $\varphi(0) = a$  et  $\varphi(1) = b$  il existe donc  $\alpha_0 \in [0, 1]$  tel que  $\varphi(\alpha_0) = c$ .

Soit le vecteur normé :  $X = \frac{X_{\alpha_0}}{\|X_{\alpha_0}\|}$ , on a :  $\varphi(\alpha_0) = \frac{{}^tX_{\alpha_0}AX_{\alpha_0}}{\|X_{\alpha_0}\|^2} = {}^tXAX = c$ . Donc  $c \in R(A)$  ce qui prouve que  $R(A)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

3. Soit  $a \in R({}^tQAQ)$ . Il existe  $X$  un vecteur normé de  $\mathbb{R}^n$ , tel que :  ${}^tX{}^tQAQX = a$ , soit  ${}^t(QX)A(QX) = a$ . Or :  $\|QX\|^2 = {}^t(QX)(QX) = {}^tX{}^tQQX = {}^tXX = \|X\|^2 = 1$  donc  $a \in R(A)$ .

On prouve l'autre inclusion de la même manière en écrivant  $A$  sous la forme :  ${}^t({}^tQ)({}^tQAQ){}^tQ$ .

Ainsi  $X \in R(A) \implies {}^tX{}^t({}^tQ)({}^tQAQ){}^tQX = {}^t({}^tQX)({}^tQAQ){}^tQX$ , avec

$$\|{}^tQX\|^2 = {}^t({}^tQX){}^tQX = {}^tXQ{}^tQX = {}^tXX = \|X\|^2 = 1$$

4. a) La matrice  $A$  est symétrique réelle donc diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  dans une base orthonormée formée de vecteurs propres (théorème spectral). On suppose  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  : il existe  $P$  orthogonale telle que  $A = {}^tQPQ$  avec  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ .

D'après les questions 1.a et 2 on peut affirmer :  $[\lambda_1, \lambda_2] \subseteq R(A)$ .

Montrons que  $R(A) \subseteq [\lambda_1, \lambda_2]$ .

On a  $R(A) = R(D)$  (question 3).

Soit  $X$  vecteur normé de  $\mathbb{R}^2$  défini par  ${}^tX = (x, y)$  avec  $x^2 + y^2 = 1$ .

Alors  ${}^tXDX = \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 \geq \lambda_1(x^2 + y^2) = \lambda_1$ , et  ${}^tXD \leq \lambda_2(x^2 + y^2) = \lambda_2$  d'où

$$R(D) \subseteq [\lambda_1, \lambda_2] \implies R(A) \subseteq [\lambda_1, \lambda_2].$$

b) Le théorème spectral appliqué à  $B$  donne :  $B = {}^tQ\Delta Q$  avec  $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \mu_2)$  et  $Q$  matrice de passage orthogonale. Ainsi

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(A{}^tQ\Delta Q) = \text{tr}(\Delta Q A {}^tQ)$$

si on note  $QA{}^tQ = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  alors,

$$\text{tr}(AB) = \mu_1\alpha_{11} + \mu_2\alpha_{22} = \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 + \mu_1(\alpha_{11} - \lambda_1) + \mu_2(\alpha_{22} - \lambda_2)$$

$$= \mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + (\alpha_{11} - \lambda_1)(\mu_1 - \mu_2)$$

car  $\alpha_{11} + \alpha_{22} = \text{tr}(QA^tQ) = \text{tr}({}^tQQA) = \text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ .

Or  $\lambda_1 \leq \alpha_{11}$  car  $\alpha_{11} \in R(QA^tQ) = R(A) = Sp(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$ ,

d'où le résultat demandé.

### Exercice 2.14.

On note  $\|\cdot\|$  la norme usuelle de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ .

Soit deux entiers  $r$  et  $n$  tels que  $2 \leq r \leq n$  et  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang  $r$ . On note  $f$  et  $g$  les deux endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associés à  $A$  et  ${}^tAA$ .

1. a) Montrer que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$  et  $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tAA) = r$ .

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale  $P$  et une matrice diagonale réelle  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  telles que :  ${}^tAA = PD^tP$ .

c) Déterminer le signe des réels  $\lambda_i$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

d) Montrer que parmi les nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , il y a  $r$  nombres strictement positifs et  $n - r$  nuls.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que :

- $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \lambda_i > 0$ .
- $\forall i > r, \lambda_i = 0$ .

On pose pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ .

2. a) Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}_1 = (X_i)_{1 \leq i \leq n}$  orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $g$  avec pour tout  $i \in \llbracket r + 1, n \rrbracket, X_i \in \text{Ker}(f)$ .

b) On pose pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket, Y_i = \frac{1}{\sigma_i} AX_i$ , montrer que la famille de vecteurs  $(Y_1, \dots, Y_r)$  est orthonormée. On complète cette famille en une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  notée  $\mathcal{B}_2$ .

c) Déterminer la matrice  $\Delta$  de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  et en déduire l'existence de deux matrices orthogonales  $P_1$  et  $P_2$  telles que :  $A = P_1 \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) P_2$ .

3. Soit la matrice  $A' = {}^tP_2 \text{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0) {}^tP_1$ .

a) Calculer  $AA'$  et montrer que l'endomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $AA'$  est le projecteur orthogonal sur  $\text{Im}(f)$ .

b) Soit  $Y \in \mathbb{R}^n$  fixé. Montrer que la fonction  $X \mapsto \|AX - Y\|$  atteint son minimum sur  $\mathbb{R}^n$  en  $X_0 = A'Y$ .

### Solution :

1. a)  $X \in \text{Ker}(A) \implies AX = 0 \implies {}^tAAX = 0$

$X \in \text{Ker}({}^tAA) \implies {}^tAAX = 0 \implies {}^tX({}^tAAX) = 0 \implies \|AX\|^2 = 0 \implies AX = 0$

Donc  $\text{Ker}(A) = \text{Ker}({}^tAA)$  et par le théorème du rang :  $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tAA)$

b) La matrice  ${}^tAA$  est symétrique réelle. Le théorème spectral assure la diagonalisabilité de  ${}^tAA$  dans une base orthonormale  $\mathcal{B}_d$  de vecteurs propres. Si on note  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs



propres de  ${}^tAA$ , on pose  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  et  $P$  la matrice de passage entre les deux bases orthonormées  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}_d$ ,  $P$  est orthogonale :  $P^{-1} = {}^tP$  et  ${}^tAA = PD{}^tP$

c) Soit  $X_i$  vecteur propre non nul de  ${}^tAA$  ou de  $D$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . On a :

$${}^tAA X_i = \lambda_i X_i \implies \|AX_i\|^2 = \lambda_i \|X_i\|^2$$

avec  $\|X_i\| > 0$  car  $X_i \neq 0$ , d'où  $\lambda_i = \frac{\|AX_i\|^2}{\|X_i\|^2} \geq 0$

d) On sait que  $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(D) = r$  donc  $r$  valeurs propres seulement sont non nulles. Quitte à les renommer, on peut prendre  $\lambda_i > 0$  pour  $1 \leq i \leq r$ .

2. a) On prend pour  $\mathcal{B}_1$  la base orthonormée  $\mathcal{B}_d$  de diagonalisation de  $g$  :

- $g(X_i) = \lambda_i X_i, 1 \leq i \leq n$
- $r + 1 \leq i \leq n, X_i \in \text{Ker}(g) = \text{Ker}(f)$ . (q.1.a)

b) On a pour  $1 \leq i, j \leq r$

$$\begin{aligned} \langle Y_i, Y_j \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sigma_i} AX_i, \frac{1}{\sigma_j} AX_j \right\rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} ({}^tX_i {}^tA AX_j) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} ({}^tX_i \lambda_j X_j) \\ &= \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij} \end{aligned}$$

c) On a  $(1 \leq i \leq r) \implies AX_i = \sigma_i Y_i$ , puis  $(r + 1 \leq i \leq n) \implies AX_i = 0$  car  $\text{rg}(A) = r$ .

D'où  $\Delta = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$ .

Soit  $P_1 = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_2}$  et  $P_2 = P_{\mathcal{B}_\epsilon, \mathcal{B}}$ .

Ces deux matrices de passage sont orthogonales (passage d'une base orthonormée à une base orthonormée) et vérifient :  $A = P_1 \Delta P_2$

3. a) Alors  $AA' = P_1 \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) {}^tP_1$  ( $r$  1 suivis de  $n - r$  0).

D'où :  $AA'AA' = P_1 \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) {}^tP_1 P_1 \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) {}^tP_1$ ,

qui est égal à  $P_1 \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) {}^tP_1 = AA'$ . Donc  $(AA')^2 = AA'$ .

De plus  ${}^t(AA') = {}^tP_1 \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) {}^tP_1 = AA'$ , donc l'endomorphisme  $h$  associé est un projecteur orthogonal de rang  $r$ .

b) On sait que  $\text{rg}(h) = \text{rg}(f)$  et  $Y \in \text{Im}(h) \implies Y = AA'X = A(A'X)$  donc  $\text{Im}(h) \subset \text{Im}(f)$  et donc  $\text{Im}(h) = \text{Im}(f)$ .

Ainsi  $h$  est-il le projecteur orthogonal sur  $\text{Im}(f)$ .

c) La distance de  $Y$  à un élément de  $\text{Im}(f)$  est supérieure à la distance de  $Y$  à son projeté orthogonal sur  $\text{Im}(f)$ .

Or  $AX_0 = AA'Y$  est le projeté orthogonal de  $Y$  sur  $\text{Im}(f)$ .

Donc le vecteur  $X_0 = A'Y$  minimise la fonction  $X \mapsto \|AX - Y\|$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

### Exercice 2.15.

1. Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles telles que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} v_i$ .

a) Déterminer une matrice  $P \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  telle qu'on ait l'égalité matricielle :

$$(u_0 \ \cdots \ u_n) = (v_0 \ \cdots \ v_n) P$$

b) On note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$  et  $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, \dots, X^n)$  sa base canonique.

Montrer que  $\mathcal{B}_1 = (1, 1 + X, (1 + X)^2, \dots, (1 + X)^n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Montrer que  $P$  est inversible et calculer son inverse.

(On pourra montrer que  $P$  est la matrice de passage entre deux bases de  $\mathbb{R}_n[X]$ )

c) En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction des  $u_i, 0 \leq i \leq n$  :

$$v_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} u_i$$

2. On note  $d_n$  le nombre de permutations sans point fixe de  $[[1, n]]$  (i.e. de permutations  $\sigma$  de  $[[1, n]]$  telles que  $\forall i, \sigma(i) \neq i$ ) et on pose :  $d_0 = 1$ .

a) Pour tout entier  $n \geq 0$ , montrer la relation :  $n! = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} d_i$

b) En déduire l'expression de  $d_n$  en fonction de  $n$  pour  $n \geq 0$ .

c) Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $a_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = (n+1)a_n + (-1)^{n+1}$ .

Montrer que les deux suites  $(a_n)$  et  $(d_n)$  sont égales.

3. On note pour tout entier naturel  $n$  :  $J_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ .

a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$ .

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \frac{1}{e} (n! + (-1)^n J_n)$$

c) Montrer que lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  :  $J_n \sim \frac{e}{n}$ .

En déduire la nature de la série de terme général  $\frac{(n-1)!}{e} - \frac{d_n}{n}$ .

**Solution :**

1. a) La matrice  $P$  est 
$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

b) La famille  $\mathcal{B}_1 = (1, 1 + X, (1 + X)^2, \dots, (1 + X)^n)$  est une famille de  $(n + 1)$  polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  échelonnée en degrés. C'est donc une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

La matrice  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}_0$  vers  $\mathcal{B}_1$  car  $(1 + X)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i$ .

Elle est donc inversible et  $P^{-1}$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  vers  $\mathcal{B}_0$ .

Or pour  $0 \leq j \leq n$ ,  $X^j = ((1+X) - 1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (1+X)^i (-1)^{j-i}$  d'où :

$$P^{-1} = \left( \binom{j}{i} (-1)^{j-i} 1_{i \leq j} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$$

c) On a :  $(v_0, \dots, v_n) = (u_0, \dots, u_n)P^{-1}$  d'où :  $v_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} u_i$

2. a) Soit  $0 \leq n$ , et  $0 \leq i \leq n$ . Le nombre de permutations à  $i$  points fixes est  $\binom{n}{i} d_{n-i}$ . En effet :  $\binom{n}{i}$  façons de choisir les  $i$  points fixes et  $d_{n-i}$  façons de permuter sans point fixe les  $n-i$  éléments restant.

On partitionne l'ensemble des  $n!$  permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  selon le nombre de points fixes, et  $n! = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} d_{n-i}$ . En posant  $j = n-i$  :  $n! = \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} d_j \implies n! = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} d_j$

b) On applique la question 1.c :  $d_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} i!$  et en changeant  $i$  en  $n-i$  :

$$d_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)! = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

c) On vérifie l'égalité par récurrence sur  $n$  : on a  $d_0 = a_0 = 1$  et

$$(n+1)d_n + (-1)^{n+1} = (n+1)n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} + (-1)^{n+1} = d_{n+1}$$

3. a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ , et  $n \in \mathbb{N}$ . Il suffit d'appliquer la formule de Taylor-Laplace à l'ordre  $n$  à la fonction  $t \mapsto e^t$  sur l'intervalle d'extrémités  $0$  et  $x$  :

b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , pour  $x = -1$  on obtient :  $e^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + \int_0^{-1} \frac{(-1-u)^n}{n!} e^u du$ .

On pose  $t = 1+u$  dans l'intégrale :  $e^{-1} = \frac{d_n}{n!} + \int_0^1 \frac{1}{n!} (-1)^n t^n e^{t-1} dt = \frac{d_n}{n!} + \frac{(-1)^n J_n}{en!}$ .

Donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \frac{1}{e}(n! - (-1)^n J_n)$

c) Sur  $[0, 1]$ ,  $e^x \leq e \implies \int_0^1 x^n e^x dx \leq \int_0^1 x^n e dx = \frac{e}{n+1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$

Une intégration par parties donne :

$J_{n+1} = e - (n+1)J_n \implies nJ_n = e - J_{n+1} - J_n \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_n = e$ , soit lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $J_n \sim \frac{e}{n}$ .

On a :  $\frac{d_n}{n} = \frac{1}{e}[(n-1)! + \frac{(-1)^n}{n} J_n] \implies \left| \frac{1}{e}(n-1)! - \frac{d_n}{n} \right| = \frac{J_n}{en} \sim \frac{1}{n^2}$  qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(n-1)!}{e} - \frac{d_n}{n}$  converge absolument.

### Exercice 2.16.

1. Soit un entier naturel  $n \geq 2$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des polynômes annulateurs de  $M$ .

- Justifier que  $\mathcal{A}$  n'est pas réduit au polynôme nul.
- Vérifier que  $\mathcal{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}[X]$ .
- Montrer que  $\forall P \in \mathbb{C}[X], \forall Q \in \mathcal{A}, PQ \in \mathcal{A}$ .

d) Montrer qu'il existe un polynôme non nul de  $\mathcal{A}$  de degré minimal. Soit  $K \in \mathcal{A}$  un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient du terme de plus haut degré égal à 1) de degré minimal.

En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que  $K$  divise tout polynôme de  $\mathcal{A}$ . En déduire que

$$\mathcal{A} = \{KQ, Q \in \mathbb{C}[X]\}$$

Un tel polynôme  $K$  s'appelle polynôme minimal de  $M$ .

2. Exemples.

a) Soit  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Déterminer le polynôme minimal de  $\lambda I_n$ , où  $I_n$  est la matrice identité d'ordre  $n$ .

b) Soit  $P$  la matrice d'un projecteur  $p$  distinct de 0 et  $Id$ . Déterminer le polynôme minimal de  $P$ .

3. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de polynôme minimal  $K$ . Montrer que l'ensemble des racines de  $K$  est égal à l'ensemble des valeurs propres de  $M$ .

4. a) Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$ , soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  défini par :

$$f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = e_1, \quad f(e_3) = e_2$$

Soit  $M$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Déterminer le polynôme minimal de  $M$ .

b) Soit  $p \in \mathbb{N}$ , tel que  $1 \leq p \leq n$ . Existe-t-il des matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de polynôme minimal  $X^p$  ?

c) Soit  $p \in \mathbb{N}$ , tel que  $p > n$ . Existe-t-il des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de polynôme minimal  $X^p$  ? (On pourra s'intéresser aux sous-espaces vectoriels  $\text{Ker}(f^k)$ , où  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  a pour matrice  $M$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .)

### Solution :

1. a) La famille  $(M^k)_{0 \leq k \leq n^2}$  est liée puisque  $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = n^2$ .

b) La vérification est immédiate.

c) La démonstration de cette question tient au fait que :

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$$

d) Soit  $P \in \mathcal{A}$  tel que  $P = KQ + R$  et  $\deg(R) < \deg(K)$  (division euclidienne) ; alors  $R = P - KQ \in \mathcal{A}$  ce qui entraîne que  $R = 0$ . La réciproque est claire grâce à la question c.

2. a) Le polynôme  $K(X) = X - \lambda$  est annulateur de degré minimal.

b) On a  $p^2 = p$ , donc  $K(X) = X(X - 1)$  est annulateur, de degré minimal car  $q \neq 0$  et  $q \neq Id$ .

3. On a  $\text{Sp}(M) \subseteq \text{Rac}(K)$  car  $K$  est annulateur (c'est du cours). Mais si  $\lambda$  est une racine de  $(K) \setminus \text{Sp}(M)$ , alors  $K(X) = (X - \lambda)Q(X)$  et  $0 = K(M) = (M - \lambda I_n)Q(M)$  avec  $M - \lambda I_n$  inversible, donc  $Q$  annulateur, en contradiction avec la minimalité de  $\deg(K)$ .

4. a) On a  $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  qui vérifie  $M^3 = 0$  et  $M^2 \neq 0$ . Ainsi  $K(X) = X^3$  est-il

le polynôme minimal de  $M$ .

b) De même avec  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  de matrice  $M$  dans  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ , défini par  $f(e_1) = \dots = f(e_{n-p+1}) = 0$ ,  $f(e_{n-p+2}) = e_{n-p+1}$ ,  $f(e_{n-p+3}) = e_{n-p+2}, \dots$ ,  $f(e_n) = e_{n-1}$

La matrice  $M$  est triangulaire supérieure stricte, donc  $\text{Spec}(M) = \{0\}$  et  $K$  de la forme  $X^k$  ; on a facilement  $f^p = 0$  et  $f^{p-1} \neq 0$  Donc le polynôme minimal de  $M$  est  $K(X) = X^p$ .

c) La suite  $(\text{Ker}(f^k))$  est croissante pour l'inclusion ;

s'il existe  $x \in \text{Ker}(f^{k+1}) \setminus \text{Ker}(f^k)$ , alors  $f^j(x) \in \text{Ker}(f^{k+1-j}) \setminus \text{Ker}(f^{k-j})$  ; donc la suite  $(\text{Ker}(f^k))$  est strictement croissante puis stationnaire puisque l'on travaille en dimension finie.

Si  $K(X) = X^p$  avec  $p > n$ , alors la suite  $(\text{Ker}(f^k)_{1 \leq k \leq p})$  est strictement croissante à plus de  $n$  termes, ce qui est contradictoire avec la notion de dimension finie.

### Exercice 2.17.

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien muni de la norme  $\|\cdot\|$  associée au produit scalaire, et  $u \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$$

1. a) Soit  $x$  un vecteur appartenant à  $\text{Ker}(u - id) \cap \text{Im}(u - id)$ .

Justifier qu'il existe  $y \in E$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, nx = u^n(y) - y$ .

b) En déduire que  $E = \text{Ker}(u - id) \oplus \text{Im}(u - id)$ .

2. On pose :  $\forall p \in \mathbb{N}, v_p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p u^k$ , et on note  $w$  le projecteur sur  $\text{Ker}(u - id)$  parallèlement à  $\text{Im}(u - id)$ .

Montrer que pour tout  $x \in E$ , la suite  $(v_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers  $w(x)$ , c'est-à-dire que

$$\forall x \in E, \lim_{p \rightarrow \infty} \|v_p(x) - w(x)\| = 0$$

3. Soit  $Q$  un projecteur de  $E$ , distinct de l'application nulle.

a) Montrer que si  $\text{Ker}(Q)$  et  $\text{Im}(Q)$  sont orthogonaux, alors

$$\forall x \in E, \|Q(x)\| \leq \|x\|$$

b) Réciproquement, on suppose que :  $\forall x \in E, \|Q(x)\| \leq \|x\|$ .

Soit  $x \in \text{Im}(Q)$  et  $y \in \text{Ker}(Q)$ . En considérant les vecteurs  $z = x + \lambda y$  pour  $\lambda$  quelconque dans  $\mathbb{R}$ , montrer que  $\langle x, y \rangle = 0$ .

c) En déduire qu'un projecteur  $Q$  non nul est orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in E, \|Q(x)\| \leq \|x\|$$

4. En déduire que  $w$  est un projecteur orthogonal.

---

### Solution :

1. a) Il existe  $y$  tel que  $u(x) = x = u(y) - y = u^{k+1}(y) - u^k(y)$ ,  $\forall k$ . Ensuite, par somme télescopique, il vient :  $nx = u^n(y) - y$ .

b) On écrit, pour tout  $n \geq 1$ ,  $n\|x\| \leq \|u^n(y)\| + \|y\| \leq 2\|y\|$ , par hypothèse sur  $u$  et récurrence ; donc en prenant la limite,  $x = 0$ . On conclut par le théorème du rang.

2. Soit  $x = a + b$  une décomposition de  $x$  sur  $E = \text{Ker}(u - I) \oplus \text{Im}(u - I)$ .

Alors  $w(x) = a$ .

D'autre part,  $u(a) = a \Rightarrow \forall k, u^k(a) = a \Rightarrow \forall p, v_p(a) = a$

et  $\forall p, v_p(b) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p [u^{k+1}(b) - u^k(b)] = \frac{u^{p+1}(b) - b}{p+1} \Rightarrow \|v_p(b)\| \leq \frac{2\|b\|}{p+1} \rightarrow 0$  comme ci-dessus.

Alors  $\lim_{p \rightarrow +\infty} v_p(x) = a = w(x)$ .

3. a) Il suffit d'utiliser le théorème de Pythagore.

b) On a

$\forall \lambda, \|x\|^2 = \|Q(x + \lambda y)\|^2 \leq \|x + \lambda y\|^2 \Rightarrow \forall \lambda, 0 \leq 2\langle x, y \rangle \lambda + \|y\|^2 \lambda^2$ , ce qui donne  $\langle x, y \rangle = 0$

c) C'est une conséquence des résultats a) et b).

4. Par inégalité triangulaire,

$$\forall x, \forall p, \|v_p(x)\| \leq \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \|u^k(x)\| \leq \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \|x\|$$

donc par passage à la limite  $\|w(x)\| \leq \|x\|$ .

---

### Exercice 2.18.

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $\mathbb{C}^2$  qui commutent ( c'est-à-dire tels que  $f \circ g = g \circ f$ ).

On note  $A$  et  $B$  les matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  canoniquement associées à  $f$  et  $g$ . On suppose que les matrices  $A$  et  $B$  ne sont pas des matrices scalaires (c'est-à-dire ne sont pas proportionnelles à la matrice identité).

1. On suppose que  $f$  admet deux valeurs propres  $\lambda, \mu$ , avec  $\lambda \neq \mu$ .
  - a) Montrer que chaque sous-espace propre de  $f$  est stable par  $g$ .
  - b) Montrer que  $f$  et  $g$  sont diagonalisables dans une même base.
  - c) Montrer qu'il existe deux polynômes  $P_1, P_2$  de  $\mathbb{C}_1[X]$  et une matrice  $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  tels que  $A = P_1(K)$  et  $B = P_2(K)$ .
2. On suppose désormais que  $f$  et  $g$  n'admettent chacun qu'une seule valeur propre.
  - a) Montrer que  $f$  et  $g$  admettent un vecteur propre commun noté  $e_1$ .
  - b) Montrer qu'il existe  $\alpha, \beta$  complexes tels que les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables respectivement aux matrices  $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ .
  - c) Montrer qu'il existe deux polynômes  $P_1, P_2$  de  $\mathbb{C}_1[X]$  et une matrice  $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  tels que  $A = P_1(K)$  et  $B = P_2(K)$ .

---

**Solution :**

1. a) Soit  $E_\lambda$  un sous-espace propre de  $f$  qui est de dimension 1. Soit  $x \in E_\lambda$ . Alors

$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ainsi  $g(x) \in E_\lambda$ .

- b) L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable car il possède deux valeurs propres distinctes. Si l'on note  $\tilde{g}$  la restriction de  $g$  à  $E_\lambda(f)$ , cette restriction induit un endomorphisme de  $E_\lambda(f)$  qui est un espace de dimension 1. Si  $x$  en est une base, alors  $(g(x), x)$  étant liés, il existe  $\nu \in \mathbb{C}$  tel que  $g(x) = \nu x$ , ce qui entraîne que  $g$  et  $f$  admettent  $x$  comme vecteur propre commun.

De la même façon,  $f$  et  $g$  admettent un second vecteur propre commun  $y$  vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\mu$ .

On obtient ainsi une base de  $\mathbb{C}^2$  formée de vecteurs propres communs à  $f$  et  $g$ . Ainsi  $g$  est diagonalisable et admet deux valeurs propres différentes (car la matrice  $B$  n'est pas scalaire)

- c) Les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables avec la même matrice de passage  $Q$  aux matrices  $D_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  et  $D_2 = \begin{pmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & \mu' \end{pmatrix}$ .

Il existe un polynôme  $P_1$  tel que  $P_1(1) = \lambda$  et  $P_1(-1) = \mu$  (polynôme interpolateur) et un polynôme  $P_2$  tel que  $P_2(1) = \lambda'$  et  $P_2(-1) = \mu'$ .

En notant  $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , il vient  $D_1 = P_1(K), D_2 = P_2(K)$ . Finalement

$$A = QD_1Q^{-1} = P_1(QKQ^{-1}), \quad B = QD_2Q^{-1} = P_2(QKQ^{-1})$$

2. a) On remarque que les endomorphismes  $f$  et  $g$  ne sont pas diagonalisables, car autrement les matrices  $A$  et  $B$  seraient scalaires.

Sur  $\mathbb{C}$  tout endomorphisme admet au moins une valeur propre. Alors la dimension du sous-espace propre associé est de 1 (car autrement  $A$  serait scalaire). Soit  $e_1$  un vecteur propre associé de  $f$ . Le sous-espace propre  $E_\lambda(f)$  est stable par  $g$  et  $e_1$  est un vecteur propre commun à  $f$  et  $g$ .

b) On complète  $e_1$  en une base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{C}^2$  et on obtient le résultat demandé.

c) Les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables avec la même matrice de passage  $Q$ , respectivement à  $\lambda I_2 + N_1$  et  $\mu I_2 + N_2$ , avec  $N_1 = \alpha N, N_2 = \beta N$  et  $N^2 = N_1^2 = N_2^2 = 0$ .

Il reste à poser  $K = N, P_1(X) = \lambda + \alpha X, P_2(X) = \mu + \beta X$ .

### Exercice 2.19.

On note  $C$  l'espace vectoriel des applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . A tout élément  $f \in C$ , on associe la fonction  $g = D(f)$  définie par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } g(x) = D(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

1. Dans cette question,  $F$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité  $X$ . On note  $g = D(F)$ .

a) Montrer que  $g$  est une densité de probabilité.

b) Déterminer  $g$  quand  $X$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

2. On dit qu'un réel  $\lambda$  est une valeur propre de  $D$  s'il existe une application non nulle  $f$  de  $C$  telle que  $D(f) = \lambda f$ .

Déterminer les valeurs propres de  $D$ .

(On pourra utiliser les fonctions  $h_a : x \mapsto e^{ax}$  et  $k_a : x \mapsto \sin(\pi x)e^{ax}$ ).

3. Dans cette question, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ .

a) Montrer que la restriction de  $D$  à  $E_n$  induit un endomorphisme de  $E_n$ ; on le note  $D_n$ .

b) Cet endomorphisme  $D_n$  est-il diagonalisable?

c) Soit  $(H_n)_{n \geq 0}$  la suite de polynômes définie par  $H_0(X) = 1$  et pour tout  $k \geq 1$ ,  

$$H_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i).$$

Montrer que  $(H_0, \dots, H_n)$  est une base de  $E_n$ . Donner la matrice associée à  $D_n$  dans cette base.

d) On écrit  $X^n = \sum_{k=0}^n b_k H_k$ .

Soit  $Y$  une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Montrer que :

$$E(Y^p) = \sum_{k=0}^n b_k \lambda^k$$

**Solution :**



1. a) La fonction  $F$  est une bijection croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $]0, 1[$ . Cela entraîne que la fonction  $g$  vérifie

- la fonction  $g$  est positive et continue comme différence de fonctions continues.
- pour  $B < A$ , par la relation de Chasles

$$\int_B^A g(t)dt = \int_B^A (F(t+1) - F(t))dt = \int_A^{A+1} F(t)dt - \int_B^{B+1} F(t)dt$$

Or  $\left| \int_A^{A+1} F(t)dt - 1 \right| \leq \int_A^{A+1} |F(t) - 1|dt$  et, pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $X$  tel que pour tout  $t > X$ ,  $|F(t) - 1| < \varepsilon$ . Ainsi, pour  $A > X$

$$\left| \int_A^{A+1} F(t)dt - 1 \right| \leq \varepsilon$$

De même Il existe  $Y$  tel que si  $t < Y$ ,  $|F(t) - 1| < \varepsilon$  et pour  $B + 1 < Y$

$$\left| \int_B^{B+1} F(t)dt \right| \leq \varepsilon$$

Ce qui montre, en prenant les limites lorsque  $A$  tend vers  $+\infty$  et  $B$  vers  $-\infty$ , que  $\int_{\mathbb{R}} g(t)dt = 1$ .

b) Un calcul immédiat donne  $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

2. Il s'agit de résoudre l'équation  $f(x+1) - f(x) = \lambda f(x)$ , pour tout  $x$  réel, soit  $f(x+1) = (\lambda+1)f(x)$ .

- Si  $\lambda = -1$ , il vient  $f(x+1) = 0$  pour tout  $x$ , soit  $f$  identiquement nulle.
- Si  $\lambda \neq -1$ , on pose  $\mu = \lambda + 1$ . On remarque que  $D(h_a) = (e^a - 1)h_a$ . Donc si  $1 + \mu > 0$ ,  $a = \ln(1 + \mu)$  ce qui fournit une fonction propre  $h_a$  pour tout  $\mu > -1$
- De même  $D(k_a) = -(e^a + 1)k_a$ . Donc pour  $1 + \mu < 0$ ,  $a = \ln(-1 - \mu)$  est valeur propre de fonction propre associée  $k_a$ .

Ainsi tout réel différent de  $-1$  est valeur propre de  $D$ .

3. a)  $D$  est linéaire et si  $P$  est un polynôme de degré  $k$ ,  $D(P) = P(X+1) - P(X)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $k-1$ . On définit ainsi un endomorphisme de  $E_n$ .

b) Pour des raisons de degré, la seule valeur propre possible de  $D$  est 0, qui est valeur propre puisque  $D(1) = 0$ .

L'endomorphisme  $D$  n'est pas diagonalisable.

c) La famille  $(H_n)_{n \geq 0}$  est échelonnée en degrés. Elle est libre et  $\deg H_k = k$  pour tout  $k \geq 0$ . C'est donc une base de  $\mathbb{R}[X]$ .

$$D(H_p) = \prod_{k=0}^{p-1} (X - k + 1) - \prod_{k=0}^{p-1} (X - k) = p \prod_{k=0}^{p-2} (X - k) = pH_{p-1}$$

La matrice demandée est donc strictement triangulaire supérieure avec une sur-diagonale  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ .

d) Par le théorème de transfert

$$E(H_k(Y)) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\lambda^n}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} = \lambda^k$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(Y^p) = \sum_{k=0}^n b_k E(H_k(Y)) = \sum_{k=0}^n b_k \lambda^k$$

### Exercice 2.20.

Soient  $\mu$  un réel tel que  $\mu \geq 1$  et  $E$  un espace vectoriel euclidien de produit scalaire et de norme notés respectivement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $\|\cdot\|$ .

Une famille  $(u_1, \dots, u_n)$  de vecteurs de  $E$  est dite  $\mu$ -presque orthogonale si

▷ Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\|u_i\| = 1$ ,

▷ Pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i u_i \right\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

1. Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille  $\mu$ -presque orthogonale de vecteurs de  $E$ .

Montrer que  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre.

2. Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . Montrer que  $(u_1, \dots, u_n)$  est 1-presque orthogonale si et seulement si  $(u_1, \dots, u_n)$  est orthonormale.

(Pour l'une des implications, on pourra considérer la combinaison linéaire  $u_i + u_j$  avec  $i \neq j$ .)

3. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

a) Montrer qu'il existe un réel  $k$  tel que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k \|x\|$$

b) Montrer que si  $f$  est un automorphisme de  $E$ , alors il existe un réel  $\lambda > 0$  tel que

$$\forall x \in E, \frac{1}{\lambda} \|x\| \leq \|f(x)\| \leq \lambda \|x\|$$

4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille libre de vecteurs unitaires de  $E$ .

Montrer l'existence d'un réel  $\mu \geq 1$  tel que  $(u_1, \dots, u_n)$  soit  $\mu$ -presque orthogonale.

### Solution :

1. Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille  $\mu$ -presque orthogonale de vecteurs de  $E$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  dans

$\mathbb{R}^n$  tels que  $\sum_{i=1}^n x_i u_i = 0$ .

On a alors  $0 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i u_i \right\|^2 = 0$ , et donc  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$ , d'où pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_i = 0$ . La famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre.

2. Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

▷ Supposons  $(u_1, \dots, u_n)$  orthonormale.

Alors, pour  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a  $\left\| \sum_{i=1}^n x_i u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ ,

donc  $(u_1, \dots, u_n)$  est 1-presque orthogonale.

▷ Réciproquement, supposons  $(u_1, \dots, u_n)$  est 1-presque orthogonale. Soient  $i$  et  $j$  distincts dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On a  $1^2 + 1^2 = 2 \leq \|u_i + u_j\|^2 \leq 2$ .

Ainsi,  $\|u_i + u_j\|^2 = \|u_i\|^2 + \|u_j\|^2 + 2(u_i | u_j) = 2 + 2(u_i | u_j) = 2$ ,

et donc  $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ . Comme les  $u_k$  sont unitaires, on en déduit que  $(u_1, \dots, u_n)$  est orthonormale.

3. a) Soient  $(e_1, \dots, e_p)$  une base orthonormée de  $E$ ,  $x \in E$  et  $(x_1, \dots, x_p)$  les coordonnées de  $x$  dans cette base. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\|f(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^p x_i f(e_i) \right\|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^p \|x_i f(e_i)\| \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^p |x_i| \|f(e_i)\| \right)^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur  $\mathbb{R}^p$ , on a

$$\left( \sum_{i=1}^p |x_i| \|f(e_i)\| \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^p x_i^2 \right) \times \left( \sum_{i=1}^p \|f(e_i)\|^2 \right) = \|x\|^2 \times \sum_{i=1}^p \|f(e_i)\|^2$$

car  $(e_i)$  orthonormale.

En posant  $k = \sqrt{\sum_{i=1}^p \|f(e_i)\|^2 + 1}$ , on a bien  $k > 0$  et pour tout  $x \in F$ ,  $\|f(x)\| \leq k\|x\|$ .

b) Appliquons la question précédente, à  $f$  et  $f^{-1}$ ; il existe des constante  $k_1 > 0$  et  $k_2 > 0$  telles que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k_1 \|x\| \text{ et } \|f^{-1}(x)\| \leq k_2 \|x\|.$$

En particulier, pour tout  $x \in E$ ,  $\|x\| \leq k_2 \|f(x)\|$  et donc

$$\forall x \in E, \frac{1}{k_2} \|x\| \leq \|f(x)\| \leq k_1 \|x\|$$

En posant  $\lambda = \max(k_1, k_2, 1)$ , on a bien  $\lambda \geq 1$  et

$$\forall x \in F, \frac{1}{\lambda} \|x\| \leq \|f(x)\| \leq \lambda \|x\|$$

c) Soient  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $F$ . Soit  $f : F \rightarrow F$  l'unique application linéaire vérifiant  $f(e_i) = u_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  (définition d'un endomorphisme par l'image d'une base). D'après 3.b., il existe  $\lambda \geq 1$  tel que

$$\forall x \in F, \frac{1}{\lambda} \|x\| \leq \|f(x)\| \leq \lambda \|x\|$$

Soient  $\mu = \lambda^2$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ . On a  $\mu \geq 1$  et

$$\frac{1}{\mu} \|x\|^2 = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i u_i \right\|^2 = \|f(x)\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^n x_i^2 = \mu \|x\|^2$$

car  $(e_1, \dots, e_n)$  est orthonormale.

On en déduit que  $(u_1, \dots, u_n)$  est  $\mu$ -presque orthogonale.

### Exercice 2.21.

Pour  $n$  entier naturel tel que  $n \geq 2$ , l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  est muni du produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , et  $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  est la norme euclidienne associée.

La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est notée  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ .

Un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  est noté aussi bien  $x = (x_1, \dots, x_n)$  que  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $N(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$ , où  $\text{Sp}(A)$  désigne l'ensemble des valeurs propres dans  $\mathbb{C}$  de  $A$ . Pour tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ , on pose  $q_A(x) = \langle Ax, x \rangle$ .

Enfin, on désigne par  $H_n$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $H_n = (a_{j,k})_{1 \leq j, k \leq n}$ , avec  $a_{j,k} = \frac{1}{j+k-1}$ .

On utilisera sans démonstration la relation :  $\forall t > 0, \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

1. Montrer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , symétrique :

$$N(A) = \sup\{|q_A(x)|, x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$$

2. On note :  $K_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\arctan(x)}{x} dx$  et  $L_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) dx$ .

On pose  $J_n = K_n - L_n$ , et on cherche un équivalent de  $J_n$ .

a) Montrer que pour  $t > 0$ ,  $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$ . En déduire que  $0 < L_n \leq 1$ .

b) Justifier la convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$ .

Montrer que  $K_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{\pi}{4} \ln(n)$ .

c) En déduire que  $J_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{\pi}{4} \ln(n)$ .

3. On note  $a$  l'élément de  $\mathbb{R}^n$  défini par :  $a = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

a) Montrer que  $\|a\|^2 \leq 1 + \ln(n)$ .

b) On note  $q_n = q_{H_n}$  et on admet que  $4J_n \leq q_n(a)$  et que  $N(H_n) \leq \pi$ . Montrer que :

$$\frac{4J_n}{1 + \ln(n)} \leq q_n\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$$

En déduire la limite de  $N(H_n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

**Solution :**

1. La matrice  $A$  est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable en base orthonormée et toutes ses valeurs propres sont réelles. Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres, non nécessairement distinctes, rangées par ordre de valeur absolue décroissante.

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres, avec  $e_i$  vecteur propre associé à  $\lambda_i$ . Ainsi,  $N(A) = |\lambda_1|$ .

D'autre part, pour un vecteur  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  de norme 1, en utilisant l'expression du produit scalaire en base orthonormée, on a  $|q_A(x)| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \right| \leq |\lambda_1| \|x\|^2 = |\lambda_1|$ . Ce maximum est atteint pour  $x = e_1$ , et l'on a bien :

$$N(A) = |\lambda_1| = \sup\{|q_A(x)|, \|x\| = 1\} = \max\{|q_A(x)|, \|x\| = 1\}.$$

2. a) On pose  $f(t) = t - \arctan(t)$ , alors  $f'(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} > 0$ .

La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Elle est nulle en zéro, donc strictement positive pour  $t > 0$ . On a donc  $\forall t \geq 0, \arctan(t) \leq t$ .

On en déduit par croissance de l'intégrale sur  $[1, \sqrt{n}]$ , les bornes étant bien dans le bon ordre,

$$\text{que } L_n \leq \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} dx = \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n}} \leq 1.$$

Par ailleurs,  $L_n$  est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle. C'est donc un réel strictement positif. Ainsi,  $0 < L_n \leq 1$

b) La fonction  $h : x \mapsto \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$  est continue, positive sur  $[1, +\infty[$  et équivaut au voisinage de  $+\infty$  à  $1/x^2$ . Par critère de comparaison des intégrales de fonctions continues positives,  $h$  est ainsi intégrable sur  $[1, +\infty[$ . Avec la formule rappelée en début de partie, on a

$$K_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\pi/2 - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx = \frac{\pi}{4} \ln(n) - \int_1^{\sqrt{n}} h(x) dx$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ , le second terme admet une limite finie et est donc négligeable devant le premier qui tend vers  $+\infty$ . On a donc  $K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4} \ln(n)$ .

c) On a  $J_n = K_n - L_n$  et  $K_n \rightarrow +\infty$  alors que  $(L_n)$  est bornée entre 0 et 1. On a donc aussi  $K_n - 1 \leq J_n = K_n - L_n \leq K_n$ ,  $K_n$  étant strictement positive comme intégrale sur un segment avec bornes bien rangées d'une fonction continue positive non identiquement nulle, on peut diviser par  $K_n$ .

Ainsi :  $1 - \frac{1}{K_n} \leq J_n \leq 1$  et par le théorème d'encadrement :

$$J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4} \ln(n)$$

3. a) On remarque que  $\|a\|^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Comme  $t \mapsto \frac{1}{t}$  décroît sur  $[1, +\infty[$ , on a  $\forall k \geq 2, \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$ .

En sommant ces inégalités de 2 à  $n$  pour  $n \geq 2$ , on a donc

$$\|a\|^2 \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt = 1 + \int_1^n \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n)$$

b) On a admis que  $4J_n \leq q_n(a)$ . Avec la question précédente, on en déduit que

$$0 \leq \frac{4J_n}{1 + \ln(n)} \leq \frac{4J_n}{\|a\|^2} \leq q_n\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = \frac{q_n(a)}{\|a\|^2}$$

c) D'après les questions 1. et 3.b,  $H_n$  étant symétrique réelle,

$$N(H_n) = \sup_{\|x\|=1} |q_n(x)| \geq q_n\left(\frac{a}{\|a\|}\right) \geq \frac{4J_n}{1 + \ln(n)}.$$

On suppose acquis que  $N(H_n) \leq \pi$ . On a ainsi  $\frac{4J_n}{1 + \ln(n)} \leq N(H_n) \leq \pi$

La question 2.c montre que le minorant tend vers  $\pi$ . On a donc, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N(H_n) = \pi$$

### Exercice 2.22.

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs réelles. Soit  $T$  l'application définie sur  $E$ , par :

$$\forall f \in E, T(f)(x) = \frac{1}{2}(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right))$$

1. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ . Est-il injectif ?
2. On note  $T^n$  la composée de  $T$  avec lui même  $n$  fois. Donner une expression de  $T^n(f)$  en fonction de  $f$  et de  $n$ .
3. On appelle valeur propre de  $T$  tout réel  $\lambda$  pour lequel il existe  $f \in E, f \neq 0$ , tel que  $T(f) = \lambda f$ .

On dit alors que  $f$  est une fonction propre pour la valeur propre  $\lambda$ .

- a) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $T$ . Montrer que  $|\lambda| \leq 1$ .
- b) Montrer que 1 est valeur propre de  $T$ . Déterminer les fonctions propres associées.
- c) Montrer que  $-1$  n'est pas valeur propre de  $T$ .

### Solution :

1. L'application  $T$  est linéaire. De plus  $T(f)$  est une fonction définie sur  $[0, 1]$  (car  $x/2$  et  $(x+1)/2$  appartiennent à  $[0, 1]$ ) et continue sur  $[0, 1]$  comme somme de fonctions continues. L'application  $T$  n'est pas injective. Il existe en effet des fonctions  $f$  telles que pour tout  $x \in [0, 1], f(x/2) + f((x+1)/2) = 0$ . Par exemple  $f(x) = \sin(2\pi x)$  vérifie

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sin(\pi x) + \sin(\pi x + \pi) = 0$$

2. On calcule  $T^2(f)$ . Il vient :

$$T^2(f)(x) = \frac{1}{4} \left[ f\left(\frac{x}{4}\right) + f\left(\frac{x+1}{4}\right) + f\left(\frac{x+2}{4}\right) + f\left(\frac{x+3}{4}\right) \right]$$

On montre alors par récurrence sur  $n$  que :

$$T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$$

- vérifié pour  $n = 1, 2$ .
- supposons la relation vérifiée pour  $n$ . Alors

$$\begin{aligned} T^{n+1}(f)(x) &= \frac{1}{2} \left( T^n(f)\left(\frac{x}{2}\right) + T^n(f)\left(\frac{x+1}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x/2+k}{2^n}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{(x+1)/2+k}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+2k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+2k+1}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

3. a) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $T$  de fonction propre associée  $f$ . Par la question précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $\lambda^n f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$ .

Or la fonction  $f$  étant continue sur  $[0, 1]$  elle est majorée en valeur absolue par un nombre  $M$  et

$$|T^n(f)(x)| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| f\left(\frac{x+k}{2^n}\right) \right| \leq M$$

Donc la suite  $(\lambda^n f)$  est bornée, ce qui entraîne que  $|\lambda| \leq 1$ .

b) Pour  $\lambda = 1$ , on cherche  $f$  non nulle telle que  $T(f) = f$  ce qui entraîne que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T^n(f) = f$ , soit

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$$

Cette dernière expression est une somme de Riemann associée à la fonction  $f$ .

À la limite  $f(x) = \int_0^1 f(t) dt$ , ce qui signifie que  $f$  est constante.

La réciproque est aisée à vérifier.

Ainsi 1 est valeur propre de  $T$  et le sous-espace propre associé est  $\mathbb{R}_0[X]$ .

c) Le réel  $-1$  ne peut être valeur propre car, on aurait

$$(-1)^n f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt$$

alors que la partie gauche de l'équation n'a pas de limite.

### Exercice 2.23.

Dans cet exercice,  $E$  désigne un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$ , et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On note  $C(f)$  l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec  $f$  et  $R[f]$  l'ensemble des polynômes en  $f$  :

$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g = g \circ f\}, \text{ et } R[f] = \{P(f) / P \in \mathbb{R}[X]\}$$

1. a) Montrer que  $C(f)$  et  $R[f]$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{L}(E)$ .

b) Montrer que  $R[f] \subset C(f)$ .

On dit qu'un endomorphisme  $f$  de  $E$  est cyclique s'il existe au moins un vecteur  $x_0 \in E$  tel que la famille  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  soit une base de  $E$ .

2. Montrer que  $f$  est cyclique si et seulement si il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et des réels  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  tels que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

On considère dans toute la suite un endomorphisme cyclique de  $E$ .

3. Soit  $P(f) = f^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$ . Montrer que  $P(f) = 0$ .

4. a) Déterminer une base de  $R[f]$

b) En déduire que  $C(f) = R[f]$ .

5. On suppose  $\alpha_0 = 0$ . Montrer que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$  si et seulement si  $\alpha_1 \neq 0$ .

### Solution :

1. a) On vérifie aisément cette question.

b) Question également évidente, par linéarité et puisque  $f$  commute avec toute puissance de  $f$ .

2. Il existe un vecteur  $x_0 \in E$  tel que la famille  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  soit une base de  $E$ . Dans cette base, la matrice associée à  $f$  est de la forme proposée puisqu'on écrit en colonnes les coordonnées des vecteurs  $f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)$ , ce dernier vecteur s'écrivant sous la forme  $f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0)$  par définition d'une base.



Réciproquement supposons qu'il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  dans laquelle la matrice associée à  $f$  est  $M$ .

Alors  $f(e_i) = e_{i+1}, i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

On pose  $x_0 = e_1$  et il vient  $e_2 = f(x_0), e_3 = f^2(x_0), \dots, e_n = f^{n-1}(x_0)$ .

3. On remarque que  $P(f)(x_0) = 0$  et par commutation, pour tout  $k$  :

$$P(f)(f^k(x_0)) = f^k(P(f)(x_0)) = 0$$

Ainsi  $P(f)$  est-il nul sur une base de  $E$  donc identiquement nul.

4. a) On a donc par la question précédente que  $f^n \in \text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$ . Par une récurrence immédiate pour tout  $p \geq 0$ , on a  $f^{n+p} \in \text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$ , ce qui entraîne que la famille  $(Id, f, \dots, f^{n-1})$  engendre  $\mathbb{R}[f]$ .

De plus cette famille est libre car

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = 0 \implies \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0) = 0 \implies a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$$

Ainsi  $\mathbb{R}[f] = \text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$ , qui est de dimension  $n$ .

b) Soit  $h \in C(f)$ . On écrit  $h(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$ .

On pose  $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ . On a alors

- $P(x_0) = h(x_0)$
- par commutation, pour tout  $i$ ,  $P(f^i(x_0)) = h(f^i(x_0))$ .

Donc  $h = P$ .

5. On suppose dans cette question que  $\alpha_0 = 0$ .

On remarque qu'à cause du décalage des 1, les  $(n-1)$  premières colonnes de  $M$  forment une famille libre.

Donc  $\text{rg}(M) \geq n-1$ . Or  $\alpha_0 = 0$  donne une ligne de 0 et  $\text{rg}(M) \leq n-1$ . Ainsi  $\text{rg}(M) = n-1$  et  $\dim \text{Ker } M = 1$ .

Or

$$P(x_0) = 0 \implies f(f^{n-1}(x_0) - \alpha_1 x_0 - \dots - \alpha_{n-1} f^{n-2}(x_0)) = 0$$

Donc  $\text{Ker } M = \text{Vect}(f^{n-1}(x_0) - \alpha_1 x_0 - \dots - \alpha_{n-1} f^{n-2}(x_0))$ .

- si  $\alpha_1 = 0$ , la base de  $\text{Ker } f$  trouvée ci-dessus est également élément de  $\text{Im } f$ .
- si  $\alpha_1 \neq 0$ , alors  $u = -\alpha_1 x_0 - \dots - \alpha_{n-1} f^{n-2}(x_0) + f^{n-1}(x_0) \notin \text{Im } f$ , ce qui montre que  $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$ .

