2

ALGÈBRE

Exercice 2.01.

Soient n, p des entiers naturels non nuls et A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On confond vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^p$ et matrices colonnes canoniquement associées.

On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^p$.

1. Montrer que A est de rang 1 si et seulement s'il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ non nulles telles que $A = U\,{}^tV$.

En déduire que dans ce cas : $\forall\, X \in \mathbb{R}^p, AX = \langle V, X\rangle U$.

2. Si le rang de A vaut 1 et si $n = p$, calculer la trace de A en fonction de U et V puis du calcul de A^2, déduire un polynôme annulateur de A.

3. a) Montrer que A est de rang 2 si et seulement s'il existe $(U_1, U_2) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ et $(V_1, V_2) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^2$ tels que (U_1, U_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et (V_1, V_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ avec :

$$A = U_1\,{}^tV_1 + U_2\,{}^tV_2$$

b) Déterminer alors une base de $\mathrm{Im}\, A$.

c) Déterminer $\mathrm{Ker}\, A$.

4. Généraliser les résultats précédents au cas où le rang de A est égal à $r > 0$.

Solution :

1. Si A est de rang 1, alors toutes les colonnes de A sont du type vU, où v est un réel et $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendre l'image de A. La matrice colonne U est non nulle, sinon A serait nulle et donc de rang 0 ce qui contredit l'hypothèse.
Ainsi pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, la $i^{\text{ème}}$ colonne de A s'écrit v_iU où v_i est un réel. Soit $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est v_i. Cette matrice est non nulle car A est non nulle.

On a en écrivant en colonnes :

$$A = (v_1U|\cdots|v_pU) = U^tV.$$

Réciproquement si $A = U^tV = (v_1U|\cdots|v_pU)$, toutes les colonnes sont colinéaires à U et comme U et V sont non nulles, on en déduit que le rang de A est 1.
Ainsi puisque ${}^tVX$ est un réel, on a

$$\forall X \in \mathbb{R}^p,\ AX = U^tVX = ({}^tVX)U = \langle V, X\rangle U$$

2. On suppose que $n = p$, on a :

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(U^tV) = \mathrm{tr}({}^tVU) = {}^tVU \text{ et } A^2 = U^tVU^tV = ({}^tVU)U^tV = \mathrm{tr}(A)A.$$

Ainsi un polynôme annulateur de A est $X^2 - \mathrm{tr}(A)X$.

3. a) Si le rang de A vaut 2, alors la dimension de $\mathrm{Im}\, A$ est 2.
Soit (U_1, U_2) une base de $\mathrm{Im}\, A$. Ainsi la $i^{\text{ème}}$ colonne de A s'écrit comme combinaison linéaire de U_1 et de U_2 : $v_{1i}U_1 + v_{2i}U_2$. Par conséquent en notant V_1 et V_2 les matrices de coefficients v_{1i} et v_{2i}, on a :

$$A = (v_{11}U_1 + v_{21}U_2|\cdots|v_{1p}U_1 + v_{2p}U_2) = U_1{}^tV_1 + U_2{}^tV_2.$$

La famille (V_1, V_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ car si cette famille est liée, il existe un réel α tel que $V_2 = \alpha V_1$ ou $V_1 = \alpha V_2$. Dans les deux cas, on en déduit que A s'écrit sous la forme U^tV donc la matrice n'est pas de rang 2 ce qui contredit l'hypothèse.

Réciproquement s'il existe $(U_1, U_2) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ et $(V_1, V_2) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^2$ tels que (U_1, U_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et (V_1, V_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ avec

$$A = U_1{}^tV_1 + U_2{}^tV_2,$$

alors on a pour tout X de $\mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} AX = 0 &\Longleftrightarrow \langle X, V_1\rangle U_1 + \langle X, V_2\rangle U_2 = 0 \Longleftrightarrow \langle X, V_1\rangle = 0 \text{ et } \langle X, V_2\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow X \in (\mathrm{Vect}(V_1, V_2))^\perp. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\, A = (\mathrm{Vect}(V_1, V_2))^\perp$. On en déduit que le rang de A est 2.

Ainsi A est de rang 2 si et seulement si il existe un couple $(U_1, U_2) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ et un couple $(V_1, V_2) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^2$ tels que (U_1, U_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et (V_1, V_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ avec

$$A = U_1{}^tV_1 + U_2{}^tV_2.$$

b) Une base de $\mathrm{Im}\, A$ est donc (U_1, U_2).

c) D'après ce qui précède $\mathrm{Ker}\, A = (\mathrm{Vect}(V_1, V_2))^\perp$.

4. On généralise ce résultat : le rang de A est égal à $r > 0$ si et seulement s'il existe $(U_1, \cdots, U_r) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^r$ et $(V_1, \cdots, V_r) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^r$ tels que $(U_1, \cdots, U_r)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et $(V_1, \cdots, V_r)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ avec

$$A = U_1{}^tV_1 + \cdots + U_r{}^tV_r.$$

En effet si le rang de A est r, soit $(U_1, \cdots, U_r)$ une base de $\mathrm{Im}\, A$. Chaque colonne de A est combinaison linéaire de $(U_1, \cdots, U_r)$, on en déduit qu'il existe $(V_1, \cdots, V_r) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^r$ tel que

$$A = U_1 {}^tV_1 + \cdots + U_r {}^tV_r.$$

Alors pour toute colonne X, $AX = 0$ s'écrit ${}^tV_1X = 0, \ldots, {}^tV_rX = 0$ et :

$$\mathrm{Ker}\, A = (\mathrm{Vect}(V_1, \cdots, V_r))^{\perp},$$

or la dimension de $\mathrm{Ker}\, A$ est $p - r$ donc le rang de la famille $(V_1, \cdots, V_r)$ est r ce qui prouve que cette famille est libre.

Réciproquement, s'il existe $(U_1, \cdots, U_r) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^r$ et $(V_1, \cdots, V_r) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^r$ tels que $(U_1, \cdots, U_r)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et $(V_1, \cdots, V_r)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^p$ avec

$$A = U_1 {}^tV_1 + \cdots + U_r {}^tV_r,$$

alors on montre que $\mathrm{Ker}\, A = (\mathrm{Vect}(V_1, \cdots, V_r))^{\perp}$, et comme $(V_1, \cdots, V_r)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^p$, le noyau de A est de dimension $p - r$ donc le rang de A est r.

Exercice 2.02.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f et g deux endomorphismes de E diagonalisables. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que l'ensemble des valeurs propres de f est de cardinal n.

1. Montrer que les sous-espaces propres de f sont des droites stables par g.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f)$ et $M_{\mathcal{B}}(g)$ sont diagonales.

Plus généralement on admet que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent admettent toujours au moins une base commune de vecteurs propres.

Dans toute la suite de l'exercice, A et B désignent deux matrices carrées réelles d'ordre n. On note $\Phi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe la matrice $AM + MB$.

3. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. On suppose dans cette question que A est diagonalisable et que B est la matrice nulle.

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que pour tout entier naturel i compris entre 1 et n, $AX_i = \lambda_i X_i$.

a) Pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n, on note $M_{i,j}$ la matrice dont la i-ème colonne vaut X_j et les autres colonnes sont nulles. Montrer que la famille $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) En déduire que l'application $\Phi_{A,0_n}$ est diagonalisable.

5. On suppose dans cette question que A et B sont diagonalisables. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

Solution :

1 Soit λ une valeur propre de f et $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda id_E)$.
Alors, comme f et g commutent, $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$.

Ainsi, $g(x) \in \operatorname{Ker}(f - \lambda id_E)$ et $\operatorname{Ker}(f - \lambda id_E)$ est stable par g. On peut remarquer que les sous-espaces propres de f sont bien des droites ...

2 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f. Notons, pour tout i, λ_i tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Comme f possède n valeurs propres distinctes, $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_i id_E) = 1$.
Ainsi, comme $g(e_i) \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_i e_i)$, il existe μ_i tel que $g(e_i) = \mu_i e_i$. Finalement, la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.

3. On montre aisément que $\Phi(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi(\lambda M + N) = \lambda \Phi(M) + \Phi(N)$.

4. Comme A est diagonalisable, il existe $(X_1, \ldots, X_n)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $AX_i = \lambda_i X_i$.

a) Soit $(\mu_{i,j})$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_{i,j} M_{i,j} = 0_n$.

Alors, en étudiant chaque colonne de cette matrice : $\forall\, i$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_{i,j} X_j = 0_n$.

Comme (X_j) est une base, les $\mu_{i,j}$ sont tous nuls et $(M_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) D'après les propriétés du produit matriciel, $\Phi_{A,0_n}(M_{i,j}) = \lambda_j M_{i,j}$. Ainsi, $(M_{i,j})$ est une base de vecteurs propres de $\Phi_{A,0_n}$ et $\Phi_{A,0_n}$ est diagonalisable.

5. D'après la définition, $\Phi_{A,B} = \Phi_{A,0} + \Phi_{0,B}$.

$\to$ D'après la question précédente, $\Phi_{A,0}$ est diagonalisable.

$\to$ Comme B est diagonalisable, il en est de même de ${}^tB$ et on peut donc trouver une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour $\Phi_{{}^tB,0}$ et les matrices transposées forment une base de vecteurs propres pour $\Phi_{0,B}$. Donc $\Phi_{0,B}$ est diagonalisable.

$\to$ Enfin $\Phi_{A,0} \circ \Phi_{0,B}(M) = A(MB) = (AM)B = \Phi_{0,B} \circ \Phi_{A,0}(M)$.

Ainsi, d'après la question 2, $\Phi_{A,0}$ et $\Phi_{0,B}$ sont diagonalisables dans une même base. Une telle base est une base de diagonalisation de $\Phi_{A,B}$.

Exercice 2.03.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0, 1]$.

On note M l'ensemble des fonctions de E_2 vérifiant $f(0) = f(1) = 0$, et on considère l'application u de M dans E_0 qui, à toute fonction f de M associe sa dérivée seconde, notée f''.

1. Montrer que u est une application linéaire injective.

2. Soit $g \in E_0$. Pour tout x de $[0, 1]$, on pose $G(x) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 |x - t| g(t)\, dt$.

a) Justifier que G est un élément de E_2 et déterminer G''.

b) Pour tout x de $[0, 1]$, on pose $H(x) = G(x) + ax + b$. Déterminer les réels a et b pour lesquels H appartient à M.

c) Que peut-on en déduire pour u ?

d) Vérifier que pour tout élément x de $[0,1]$:

$$u^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|g(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)\,dt - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)\,g(t)\,dt$$

On note P_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $e_k(x) = x^k$ et on pose également, pour tout x, $e_0(x) = 1$.
On note M_n le sous-espace vectoriel de P_n constitué des fonctions polynomiales P de P_n telles que $P(0) = P(1) = 0$.
Pour tout entier naturel k et tout réel x, on pose $f_k(x) = x^{k+1}(x-1)$.

3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $C = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une base de M_{n+2}.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit v l'application linéaire de M_{n+2} dans P_n qui à P associe P''.

a) Déterminer la matrice A de v relativement aux bases C et $B = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

b) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Solution :

1. L'application u est clairement linéaire de M vers E_0.
Soit $f \in \operatorname{Ker} u$. On a $f'' = 0$ et $f(0) = f(1) = 0$. Donc f est affine et nulle en deux points, donc f est la fonction nulle et u est injective.

2. a) $2G(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)g(t)\,dt + \int_x^1 (t-x)g(t)\,dt$, soit en développant :

$$2G(x) = x\int_0^x g(t)\,dt - x\int_x^1 g(t)\,dt - \int_0^x tg(t)\,dt + \int_x^1 tg(t)\,dt$$

On peut déjà dériver une fois :

$$2G'(x) = \int_0^x g(t)\,dt - \int_x^1 g(t)\,dt + xg(x) - x(-g(x)) - xg(x) + (-xg(x))$$
$$= \int_0^x g(t)\,dt - \int_x^1 g(t)\,dt$$

G' est encore dérivable et : $2G''(x) = g(x) - (-g(x))$, soit :

$$G'' = g \text{ et } G \text{ est bien de classe } \mathcal{C}^2.$$

b) On a encore $H'' = g$ et :

$$H(0) = b + G(0) = b + \frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)\,dt,\ H(1) = a + b + G(1) = a + b + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)g(t)\,dt$$

Donc H appartient à M pour $b = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 tg(t)\,dt$ et $a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (2t-1)g(t)\,dt$.

c) Pour un tel choix de a et b, on a donc $H \in M, u(H) = g$, ce qui prouve que u est bijective ...

d) ... avec $u^{-1}(g) : x \mapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t|g(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)\,dt - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)\,g(t)\,dt$.

3. f est dans M_{n+2} si et seulement si f est de la forme $x \mapsto x(x-1)Q(x)$, où Q est polynomiale de degré inférieur ou égal à n, donc $(f_0, \ldots, f_n)$ est génératrice de M_{n+2}.

La liberté de la famille est claire par échelonnement.

4. a) $v(f_0)(x) = 2$, $v(f_1)(x) = 6x - 2$ et pour $k \geqslant 2$,
$v(f_k)(x) = (k+2)(k+1)x^k - (k+1)kx^{k-1}$.

Soit en remplissant colonnes après colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & & & & \\ 0 & 6 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & -k(k+1) & & \\ \vdots & \vdots & & (k+2)(k+1) & & \\ & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & -(n+1)n \\ & & & & & (n+2)(n+1) \end{pmatrix}$$

b) $v^{-1}(e_k)$ est de la forme $x \mapsto \dfrac{x^{k+2}}{(k+2)(k+1)} + ax + b$ et les conditions aux bords donnent :

$$\begin{aligned} v^{-1}(e_k)(x) &= \frac{x^{k+2}}{(k+2)(k+1)} - \frac{x}{(k+2)(k+1)} \\ &= \frac{x(x-1)}{(k+2)(k+1)}(1 + x + \cdots + x^k) \end{aligned}$$

soit : $v^{-1}(e_k) = \dfrac{1}{(k+2)(k+1)}(f_0 + f_1 + \cdots + f_k)$, ce qui explicite la $(k+1)^{\text{ème}}$ colonne de A^{-1} : tous les éléments qui sont au-dessus ou sur la diagonale valent $\dfrac{1}{(k+2)(k+1)}$ et les autres sont nuls.

Exercice 2.04.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire étant noté $\langle .,. \rangle$ et la norme associée $\|.\|$.

Conformément à l'usage, on note par la lettre majuscule correspondante la matrice colonne canoniquement associée à un vecteur de $\mathbb{R}^n$ noté par une lettre minuscule.

On considère un endomorphisme symétrique φ de $\mathbb{R}^n$, dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles et $u = (u_1, \ldots, u_n)$ un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$.

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \frac{1}{2}\langle \varphi(x), x \rangle - \langle u, x \rangle$$

On note $A = (a_{i,j})$ la matrice canoniquement associée à φ.

1. Montrer que si toutes les valeurs propres de φ sont strictement positives, on a :

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0 \implies \langle \varphi(h), h \rangle > 0$$

On dit alors que φ est un endomorphisme symétrique défini positif.

2. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et expliciter son gradient et sa matrice hessienne en tout point.

b) Montrer que f admet un unique point critique si et seulement si φ est défini positif.

c) On suppose que φ n'est pas défini positif. A quelle condition sur u et φ la fonction f possède-t-elle des points critiques ?

d) On suppose que f admet au moins un point critique z. Montrer que f admet en z un minimum global valant $-\dfrac{1}{2}\langle u, z\rangle$.

e) La fonction f admet-elle des maximums locaux ?

3. *Exemple.* On suppose ici que $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ et $u = (6, 12, -6)$.

Montrer que φ est défini positif.

Déterminer l'unique point critique de f et le minimum global de f sur $\mathbb{R}^3$.

Solution :

1. Soit A la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme φ. La matrice A est symétrique réelle, donc il existe P orthogonale et D diagonale (dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de φ) telles que $A = PDP^{-1}$.

On a

$\langle \varphi(h), h\rangle = {}^t(AH)H = {}^tHAH = {}^tH{}^tPDPH = {}^t(PH)D(PH) = {}^tYDY = \sum_i \lambda_i y_i^2$

et $h \neq 0$ donne $H \neq 0$ et $Y = PH \neq 0$ donc les λ_i étant strictement positifs il vient bien

$$\langle \varphi(h), h\rangle > 0$$

2. a) Avec $A = (a_{i,j})$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $u = (u_1, \ldots, u_n)$, on a :

$$f(x) = \sum a_{i,j}x_i x_j - \sum u_i x_i$$

Alors :

$\partial_i(f)(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j - u_i$ et $\partial^2_{i,j}(f)(x) = a_{i,j}$, donc :

$$\nabla(f)(x) = AX - U \text{ et } \nabla^2(f)(x) = A$$

b) Il y a un point critique et un seul si et seulement si l'équation $AX - U = 0$ a une solution et une seule, donc si et seulement si A est inversible. Ceci a lieu si et seulement si 0 n'est pas valeur propre donc si et seulement si les valeurs propres sont toutes strictement positives.

c) $AX - U = 0$ a au moins une solution si et seulement si $U \in \mathrm{Im}(A)$, donc si et seulement si u appartient à $\mathrm{Im}\,\varphi$.

d) Par hypothèse $\varphi(z) = u$ et $f(z) = \dfrac{1}{2}\langle u, z\rangle - \langle u, z\rangle = -\dfrac{1}{2}\langle u, z\rangle$.

Alors, pour tout x :

$$f(x)-f(z)=\frac{1}{2}\langle\varphi(x),x\rangle-\langle u,x\rangle+\frac{1}{2}\langle u,z\rangle=\frac{1}{2}\langle\varphi(x),x\rangle-\langle\varphi(z),x\rangle+\frac{1}{2}\langle\varphi(z),z\rangle$$
$$=\frac{1}{2}\langle\varphi(x),x\rangle-\langle u,x\rangle+\frac{1}{2}\langle u,z\rangle$$
$$=\frac{1}{2}\langle\varphi(x),x\rangle-\frac{1}{2}\langle\varphi(z),x\rangle-\frac{1}{2}\langle\varphi(x),z\rangle+\frac{1}{2}\langle\varphi(z),z\rangle$$
$$=\frac{1}{2}\langle\varphi(x-z),x-z\rangle\geqslant 0$$

Il s'agit donc bien d'un minimum global.
(On peut aussi dire que f est une fonction polynomiale du second degré, donc le développement à l'ordre 2 est en fait exact et la hessienne est positive ...)

e) On vient de voir qu'un point critique correspond toujours à un minimum, il n'y a donc pas de maximum local.

3. Les calculs montrent que le spectre de A est $\{6,12\}$.

L'équation $AX=U$ donne $X=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, le minimum (global) valant -14.

Exercice 2.05.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $\langle .,.\rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

On dit que deux familles $(u_1,\dots,u_k)$ et $(v_1,\dots,v_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont biorthogonales si l'on a :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1,k]\!]^2,\langle u_i,v_j\rangle=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. a) Montrer que si les familles $(u_1,\dots,u_k)$ et $(v_1,\dots,v_k)$ de $\mathbb{R}^n$ sont biorthogonales, alors ces deux familles sont libres. Que peut-on en déduire pour k ?

b) Montrer que si $\mathcal{B}'=(u_1,\dots,u_n)$ est une base quelconque de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une unique base $\mathcal{C}=(v_1,\dots,v_n)$ telle que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ soient biorthogonales. La base $\mathcal{C}$ s'appelle la base biorthogonale de la base $\mathcal{B}'$.

Dans la suite de l'exercice, on confond tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice colonne canoniquement associée.

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n pour laquelle il existe un entier naturel r, des familles $(u_1,\dots,u_r)$ et $(v_1,\dots,v_r)$ de $\mathbb{R}^n$ biorthogonales et r réels non nuls $(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ tels que

$$A=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i u_i{}^t v_i$$

a) Montrer que u_i est un vecteur propre de A.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}A=(\operatorname{Vect}(v_1,\dots,v_r))^{\perp}$. En déduire le rang de A.

c) Montrer que A est diagonalisable.

d) Réciproquement, montrer que si A est diagonalisable de rang r, alors il existe $(u_1, \ldots, u_r)$ et $(v_1, \ldots, v_r)$ de $\mathbb{R}^n$ biorthogonales et des réels non nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que :

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i {}^t v_i$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique de rang r. Montrer qu'il existe une famille $(u_1, \ldots, u_r)$ et des réels non nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i {}^t u_i$$

La réciproque est-elle vraie ?

Solution :

1. a) On considère une relation de dépendance des vecteurs $(u_1, \cdots, u_k)$:

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k = 0$$

Pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant k$, on a $\langle \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k, v_j \rangle = \alpha_j$. On en déduit que pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, $\alpha_j = 0$. On procède de même pour la famille $(v_1, \cdots, v_k)$. On en conclut que les deux familles sont libres.
Par conséquent $k \leqslant n$.

b) Soit $\mathcal{B}' = (u_1, \cdots, u_n)$ une base quelconque de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

On suppose qu'il existe une base $\mathcal{C} = (v_1, \cdots, v_n)$ telle que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ soient biorthogonales. On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$.

On note M la matrice de coefficient général $m_{ij} = \langle u_i, v_j \rangle$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$. On vérifie que $A = {}^tPQ$. Puisque $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ sont biorthogonales, on en déduit que A est I_n donc $Q = {}^t(P^{-1})$. Par conséquent s'il existe une base $\mathcal{C} = (v_1, \cdots, v_n)$ telle que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ soient biorthogonales, alors cette base est unique et est déterminée par $Q = {}^t(P^{-1})$.

Soit la base $\mathcal{C}$ telle que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$ est $Q = {}^t(P^{-1})$. Alors on a ${}^tPQ = I_n$, ce qui prouve que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ sont biorthogonales.

Par conséquent il existe une unique base $\mathcal{C} = (v_1, \cdots, v_n)$ telle que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ soient biorthogonales.

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n pour laquelle il existe $(U_1, \cdots, U_r)$ et $(V_1, \cdots, V_r)$ de $\mathbb{R}^n$ biorthogonales et r réels non nuls $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ tels que $A = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i U_i {}^t V_i$.

a) On a pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant r$: $AU_i = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j U_j {}^t V_j U_i = \lambda_i U_i$.

De plus U_i n'est pas nul car $\langle U_i, V_i \rangle = 1$, donc c'est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i.

b) On a $X \in \operatorname{Ker} A \iff \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i U_i {}^t V_i X = 0 \iff \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \langle V_i, X \rangle U_i = 0$.

Comme la famille $(U_1, \cdots, U_r)$ est libre,

$$X \in \operatorname{Ker} A \iff \forall i \in [\![1, r]\!], \langle V_i, X\rangle U_i = 0 \iff X \in (\operatorname{Vect}(V_1, \cdots, V_r))^{\perp}.$$

Par conséquent $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Vect}(V_1, \cdots, V_r))^{\perp}$. On en déduit que le rang de A est r.

c) La matrice A est diagonalisable puisque la «réunion» d'une base de $\operatorname{Ker} A$ avec la famille $(U_1, \cdots, U_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A.

d) Réciproquement soit A une matrice diagonalisable de rang r, alors A possède des valeurs propres non nulles $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ associées aux vecteurs propres $(U_1, \cdots, U_r)$ qui forment une famille libre. On complète cette famille libre pour avoir une base $(U_1, \cdots, U_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on considère la base biorthogonale notée $(V_1, \cdots, V_n)$.

Alors les familles $(U_1, \cdots, U_r)$ et $(V_1, \cdots, V_r)$ sont biorthogonales et vérifient :

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i {}^t V_i.$$

En effet, Soit $X \in \mathbb{R}^n$, on a $X = \sum_{i=1}^{n} x_i U_i$.

Or pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, $\langle X, V_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \langle U_j, V_i\rangle = x_i$. Donc pour tout $X \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i {}^t V_i X = \sum_{i=1}^{r} x_i \lambda_i U_i = AX$$

3. Si A est symétrique de rang r, alors A est diagonalisable et il existe une base orthonormale $(U_1, \cdots, U_n)$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres

$$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

La base biorthogonale de $(U_1, \cdots, U_n)$ est elle-même donc on a :

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i {}^t U_i$$

La réciproque est donc vraie.

Exercice 2.06.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Soit p un projecteur de E tel que $p \neq 0$ et $p \neq id_E$. Pour tout f appartenant à $\mathcal{L}(E)$, on pose :

$$\varphi(f) = \frac{1}{2}(f \circ p + p \circ f)$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2. Calculer $(\varphi \circ \varphi)(f)$ et $(\varphi \circ \varphi \circ \varphi)(f)$; en déduire les valeurs propres possibles de φ.

3. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$:

$$\mathcal{K}(F) = \{f \in \mathcal{L}(E) \ / \ F \subset \operatorname{Ker} f\} \text{ et } \mathcal{I}(F) = \{f \in \mathcal{L}(E) \ / \ \operatorname{Im} f \subset F\}$$

4. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

a) Calculer $f \circ g$ lorsque $f \in \mathcal{K}(\operatorname{Im} g)$ ou lorsque $g \in \mathcal{I}(\operatorname{Ker} f)$.

b) Calculer $p \circ f$ lorsque $f \in \mathcal{I}(\operatorname{Im} p)$.

c) Montrer que $f \circ p = f$ lorsque $f \in \mathcal{K}(\operatorname{Ker} p)$.

5. a) Pour chacun des sous-espaces vectoriels suivants, montrer que leurs éléments non nuls sont des vecteurs propres de φ et préciser les valeurs propres correspondantes :

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(\operatorname{Im} p) \cap \mathcal{I}(\operatorname{Ker} p),\ \mathcal{B} = \mathcal{K}(\operatorname{Im} p) \cap \mathcal{I}(\operatorname{Im} p) \text{ et } \mathcal{C} = \mathcal{K}(\operatorname{Ker} p) \cap \mathcal{I}(\operatorname{Im} p)$$

b) Montrer que les sous-espaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont en somme directe.

c) Quelles sont les valeurs propres de φ ?

Solution :

Notons que le fait de supposer qu'il existe un projecteur de E différent de 0 et de id_E entraîne que la dimension de E est au moins égale à 2.

1. Résulte clairement des propriétés des opérations.

2. On trouve $(\varphi \circ \varphi)(f) = \frac{1}{2}\varphi(f) + \frac{3}{4} p \circ f \circ p$.

Puis : $(\varphi \circ \varphi \circ \varphi)(f) = \frac{1}{2}(\varphi \circ \varphi)(f) + \frac{1}{2}\varphi(p \circ f \circ p) = \frac{1}{4}\varphi(f) + \frac{1}{2} p \circ f \circ p$.

Donc $\varphi^3(f) - \varphi^2(f) = \frac{1}{2}\varphi^2(f) - \frac{1}{2}\varphi(f)$ et $X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X = X(X-1)(X-\frac{1}{2})$ est un polynôme annulateur de φ. Donc $\operatorname{Sp}(\varphi) \subset \{0, 1, \frac{1}{2}\}$.

3. • $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{K}(F)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $f, g \in \mathcal{K}(F)$ et tout $x \in F$, on a : $x \in F \subset \ker f \Rightarrow f(x) = 0$ et $x \in F \subset \ker g \Rightarrow g(x) = 0$, d'où $(f + \lambda g)(x) = 0$ donc $x \in \ker(f + \lambda g)$ et $f + \lambda g \in \mathcal{K}(F)$.

On a prouvé : $\forall x \in F,\ x \in \ker(f + \lambda g)$, donc $F \subset \ker(f + \lambda g)$, soit $f + \lambda g \in \mathcal{K}(F)$.

• $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{I}(F)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $f, g \in \mathcal{I}(F)$ et tout $x \in E$, on a : $f(x) \subset \operatorname{Im} f \subset F$ et $g(x) \subset \operatorname{Im} f \subset F$, d'où $(f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) \in F$. Ceci prouve donc $\operatorname{Im}(f + \lambda g) \subset F$, *i.e.* $f + \lambda g \in \mathcal{I}(F)$.

4. a) On a : $f \in \mathcal{K}(\operatorname{Im} g) \Leftrightarrow \operatorname{Im} g \subset \ker f \Leftrightarrow g \in \mathcal{I}(\ker f)$. Et alors, on a : $f \circ g = 0$.

b) La relation $f \in \mathcal{I}(\operatorname{Im} p)$ signifie $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p$; alors, comme p est un projecteur, on a :

$$\forall x \in E, (p \circ f)(x) = p(f(x)) = f(x) \text{ car } f(x) \in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p = \ker(p - \mathrm{id}).$$

Donc $p \circ f = f$.

c) Comme $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$, il suffit de prouver que $f(p(x)) = f(x)$ pour tout $x \in \ker p$ et pour tout $x \in \operatorname{Im} p$.

• La relation $f \in \mathcal{K}(\ker p)$ signifie $\ker p \subset \ker f$; donc, pour tout $x \in \ker p$, on a $f(x) = 0$ et $f(p(x)) = f(0) = 0$ donc $f(p(x)) = f(x)$.

• Et pour tout $x \in \operatorname{Im} p$, on a $p(x) = x$, donc $f(p(x)) = f(x)$.

5. a) D'après les questions précédentes :

• si $f \in \mathcal{A}$, alors $f \circ p = 0$ ($f \in \mathcal{K}(\operatorname{Im} p)$) et $p \circ f = 0$ ($f \in \mathcal{I}(\ker p)$) , donc $\varphi(f) = 0$, et si f est non nul, f est un vecteur propre de φ pour la valeur propre $\lambda = 0$.
• si $f \in \mathcal{B}$, $f \circ p = 0$ ($f \in \mathcal{K}(\operatorname{Im} p)$) et $p \circ f = f$ ($f \in \mathcal{I}(\operatorname{Im} p)$), donc $\varphi(f) = \dfrac{1}{2} f$. Donc si f est non nul f est un vecteur propre de φ pour la valeur propre $\lambda = \dfrac{1}{2}$.
• si $f \in \mathcal{C}$, $f \circ p = f$ ($f \in \mathcal{K}(\ker p)$) et $p \circ f = f$ ($f \in \mathcal{I}(\operatorname{Im} p)$), donc $\varphi(f) = f$ et si f est non nul f est un vecteur propre de φ pour la valeur propre $\lambda = 1$.

b) Les sous-espaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont en somme directe car ils sont inclus dans des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes.

c) Les valeurs propres possibles sont $0, 1, \dfrac{1}{2}$; ce sont effectivement des valeurs propres si et seulement s'il existe des vecteurs propres (donc *non nuls*) associés. La question 4.d. donne des idées pour en trouver.

• pour que $f \circ p = 0$ et $p \circ f = 0$, il suffit de prendre $f = \mathrm{id}_E - p \neq 0$ (car $p \neq \mathrm{id}_E$). Donc $0 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$.

• pour que $f \circ p = 0$ et $p \circ f = f$, il faut que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p \subset \ker f$. Comme $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont supplémentaires et tous deux non nuls (sinon on aurait $p = \mathrm{id}_E$ ou $p = 0$), en choisissant $e_1 \in \operatorname{Im} p$ et $e_2 \in \ker p$, on peut compléter en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. L'endomorphisme f défini par $f(e_1) = e_2$ et $f(e_k) = 0$ si $k \geqslant 2$ est non nul et vérifie les conditions voulues. Donc $\dfrac{1}{2} \in \mathrm{Sp}(\varphi)$.

• pour que $f \circ p = f$ et $p \circ f = f$, il suffit de prendre $f = p \neq 0$. Donc $1 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$.
Ainsi $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0, 1, \dfrac{1}{2}\}$.

Exercice 2.07.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = id_E$ et $u \neq id_E$. On pose :

$$E_1 = \mathrm{Ker}(u - id_E) \text{ et } E_2 = \mathrm{Ker}(u^2 + u + id_E)$$

1. a) Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

b) Déterminer un polynôme P tel que $(u^2 + u + id_E) - (u - id_E) \circ P(u)$ soit proportionnel à id_E. En déduire que $E = E_1 \oplus E_2$.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$.

a) On suppose que l'on a $\dim E_1 = \dim E_2 = 1$. Soit alors $e_1 \in E_1 \setminus \{0\}$ et $e_2 \in E_2 \setminus \{0\}$.

i) Quelle est la forme de la matrice $A = M_{(e_1, e_2)}(u)$?

ii) Montrer que le terme situé en deuxième ligne et deuxième colonne de $A^2 + A + I_2$ ne peut être nul.

iii) Montrer que l'hypothèse faite est absurde.

b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution :

1. a) Soit $x \in E_1 \cap E_2$, on a $u(x) = x$ et $u^2(x) + u(x) + x = 0$, soit $3x = 0$ et $x = 0$.

b) On peut chercher P de degré 1 et unitaire pour assurer la disparition des termes en u^2 et le choix de $P = X + 2$ fait disparaître les termes en u :

$$u^2 + u + id - (u - id) \circ (u + 2id) = 3id$$

Soit $x \in E$, on a donc $3x = (u^2 + u + id)(x) - (u - id) \circ (u + 2id)(x)$

$\rightarrow$ avec $x_1 = (u^2 + u + id)(x)$, il vient $(u - id)(x_1) = (u^3 - id)(x_1) = 0$.

$\rightarrow$ avec $x_2 = (u - id) \circ (u + 2id)(x)$, il vient

$$(u^2 + u + id)(x_2) = (u^3 - id)((u + 2id)(x_2)) = 0$$

Ainsi $x = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2$, avec $\frac{1}{3}x_1 \in E_1$ et $\frac{1}{3}x_2 \in E_2$.

Ce qui prouve que $E = E_1 + E_2$ et finalement $E = E_1 \oplus E_2$.

2. a) i) Comme $u(e_1) = e_1$, la matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$.

ii) Ainsi $A^2 + A + I_2 = \begin{pmatrix} * & * \\ * & \beta^2 + \beta + 1 \end{pmatrix}$ et comme β est réel le dernier coefficient ne peut être nul.

iii) Mais $e_2 \in E_2$, on doit donc avoir $(A^2 + A + I_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la contradiction est claire.

b) On ne peut avoir $\dim E_1 = 2$ (car $u \neq id_E$), on ne peut avoir $\dim E_1 = 1$, donc $\dim E_1 = 0$ et $\dim E_2 = 2$.

Soit e_1 un vecteur non nul de E_2. La seule valeur propre possible de u est 1 (car $u^3 = id_E$) et on vient de l'exclure. Donc $e_2 = f(e_1)$ n'est pas colinéaire à e_1 et (e_1, e_2) est une base de E.

Comme $e_1 \in E_2$, on a $(u^2 + u + id)(e_1) = 0$, soit :

$u(e_2) = u^2(e_1) = -e_1 - u(e_1) = -e_1 - e_2$ et donc :

$$M_{(e_1,e_2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.08.

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$ et E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit f un endomorphisme non nul de E nilpotent, ce qui signifie qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer que $p \leqslant n$.

2. On suppose dans cette question uniquement que $p = n$. Résoudre l'équation $u^2 = f$, d'inconnue u endomorphisme de E.

3. Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Soit g un endomorphisme de E.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q annulateur de g dont les racines sont exclusivement les valeurs propres de g.

b) Montrer que dans l'ensemble des polynômes annulateurs non nuls de g, il existe un polynôme annulateur de degré minimal. Quel lien existe-t-il entre Q et ce polynôme ?

c) On suppose dans cette question que g ne possède que 0 comme valeur propre. Montrer que g est nilpotent.

Solution :

1. On sait qu'il existe $x \neq 0$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. La famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est de cardinal p et est libre puique si $\sum_{k=0}^{p} a_k f^k(x) = 0$, en composant par f^{p-1}, cela montre que $a_0 = 0$, puis en composant par f^{p-2}, etc.

Donc $p \leqslant n$.

2. Dans cette question $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Soit u tel que $u^2 = f$. Alors $u^{2n} = 0$ et $u^{2n-2} \neq 0$. Donc u est nilpotent, mais par la question précédente son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n. Donc $2n - 1 \leqslant n \Rightarrow n \leqslant 1$ ce qui n'est pas le cas et l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Les valeurs propres de f font partie des racines de tout polynôme annulateur, ici X^p. Donc $\mathrm{Spec}(f) \subseteq \{0\}$. Mais f est nilpotente donc non inversible et $\mathrm{Spec}(f) = \{0\}$.

L'endomorphisme f ne peut être diagonalisable, ne possédant qu'une unique valeur propre, sinon, il serait nul.

4. a) Tout endomorphisme g de E admet un polynôme annulateur, puisque la famille $(Id, g, g^2, \dots, g^{n^2})$ étant de cardinal $n^2 + 1$ est liée. Notons P un polynôme annulateur.
Le théorème de d'Alembert Gauss permet de décomposer P sous la forme

$$P(X) = C \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

où les (α_i) sont réels ou complexes et les m_i des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. On a ainsi $\prod_{i=1}^{k} (g - \alpha_i Id)^{m_i} = 0$ et les facteurs en jeu commutent eux à deux.

Supposons qu'il existe i_0 tel que α_{i_0} ne soit pas valeur propre de g. L'endomorphisme $g - \alpha_{i_0} Id$ est donc inversible, tout comme $(g - \alpha_{i_0} Id)^{m_{i_0}}$. En ramenant ce facteur en début de factorisation et en multipliant par son inverse, on récupère un autre polynôme annulateur de degré inférieur dans lequel on a enlevé une racine qui n'est pas valeur propre de g. En procédant ainsi pour chacune des racines de P, on récupère un polynôme annulateur dont les racines sont exactement les valeurs propres de g. Notons le Q et q son degré.

b) Soit $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{R}[X]/P(g) = 0\}$ et $\mathcal{D} = \{\deg(P), P \in \mathcal{A}\}$. L'ensemble $\mathcal{D}$ est un sous ensemble de $\mathbb{N}^*$ minoré par 1 donc admet un élément minimal p_0 et il existe $P \in \mathcal{A}$ de degré p_0.

En utilisant un raisonnement identique au raisonnement précédent, les racines de P sont exactement les valeurs propres de g. Donc P divise Q.

c) Si g est un endomorphisme dont la seule valeur propre est 0, le polynôme Q est de la forme X^m et $g^m = 0$. Donc g est nilpotent. L'indice de nilpotence de g est donné par le degré du polynôme P trouvé dans la question précédente.

Exercice 2.09.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice d'ordre n, à coefficients réels, définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j = n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ soit : } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que u est diagonalisable.

2. Dans cette question, n est pair et on écrit $n = 2p$.

a) Montrer qu'il existe des plans vectoriels $F_1, \dots, F_p$ stables par u tels que l'on ait $\bigoplus_{k=1}^{p} F_k = \mathbb{R}^n$.

b) En déduire les valeurs propres de u ainsi qu'une base orthonormée de vecteurs propres de u.

3. Dans cette question, n est impair, et on écrit $n = 2p+1$. Déterminer les éléments propres de u.

4. On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A n'est pas diagonalisable.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. A quelles conditions A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?

Solution :

1. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. La matrice A est symétrique réelle : elle est diagonalisable et l'endomorphisme u associé est diagonalisable.

2. a) Les plans demandés sont les plans $F_1, \dots, F_p$, où $F_k = \text{Vect}(e_k, e_{2p-k+1})$, puisque $u(e_k) = e_{2p-k+1}$ et $u(e_{2p-k+1}) = e_k$.

La famille $(e_1, \dots, e_{2p})$ étant une base, ces p plans sont bien en somme directe de somme $\mathbb{R}^{2p}$. De plus cette somme directe est orthogonale.

b) Soit u_k l'endomorphisme induit par la restriction de u à F_k. La matrice associée à u_k est $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il s'agit de la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par $e_k + e_{2p-k+1}$ et une base orthonormée $\mathcal{B}_k$ de F_k formée de vecteurs propres de u_k est formée des vecteurs :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e_k + e_{2p-k+1}) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - e_{2p-k+1})$$

Finalement u admet 1 et -1 pour valeurs propres et $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2p}$ formée de vecteurs propres de u.

3. On procède exactement de la même façon, en mettant tout de même à part le vecteur e_{p+1}, qui est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

4. On a $u(e_1) = e_n$ et $u(e_n) = 0$, donc $u^2(e_1) = u^2(e_n) = 0$.

Le rang de A est évidemment $n-1$ (par échelonnement des $n-1$ premières colonnes) tandis que le rang de u^2 est strictement inférieur à $n-1$.

Si A était diagonalisable, on aurait dans une base $\mathcal{B}$ adéquate $M_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(0, *, \dots, *)$, les coefficients $*$ étant non nuls. On aurait alors $M_{\mathcal{B}}(u^2) = \text{diag}(0, *^2, \dots, *^2)$, ce qui donnerait $\text{rg}(u^2) = n-1$.

D'où la contradiction.

5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à u.

$\rightarrow$ Si tous les coefficients a_i sont non nuls, alors la restriction de u à chacun des deux plans $\text{Vect}(e_1, e_4)$ et $\text{Vect}(e_2, e_3)$ est diagonalisable, car admettant deux valeurs propres opposées et donc A est $\mathbb{C}$-diagonalisable.

$\rightarrow$ Si par exemple $a_1 = 0$ et $a_4 \neq 0$, alors $e_4 \notin \text{Ker}\, u$ tandis que $e_4 \in \text{Ker}(u^2)$ et comme nous avons déjà fait remarquer que u diagonalisable impose $\text{Ker}\, u^2 = \text{Ker}\, u$, on en conclut que u n'est pas diagonalisable.

$\rightarrow$ Si $a_1 = a_4 = 0$, alors l'endomorphisme de $\mathrm{Vect}(e_1, e_4)$ induit par u est l'endomorphisme nul et il n'y a pas de problème dans ce plan.

$\rightarrow$ Le raisonnement est le même pour les coefficients a_2 et a_3.

Bref A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ si et seulement si les coefficients anti-diagonaux équidistants des extrêmes sont simultanément nuls ou simultanément non nuls.

Exercice 2.10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2n+1$.

On définit l'application f qui à tout $P \in E$ associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f(P)(x) = x^{2n+1} P\big(\frac{1}{x}\big)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. a) Déterminer $f \circ f$.

b) En déduire que f est diagonalisable (on pourra utiliser l'application $p = \frac{1}{2}(f + Id_E)$.)

3. Soit φ l'application définie sur $E \times E$ par :

$$\text{pour } P(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k \text{ et } Q(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k X^k,\ \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k b_k$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

4. a) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de (E, φ).

b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f - Id_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + Id_E)$ sont supplémentaires orthogonaux.

c) Déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de f.

5. Les résultats précédents restent-ils valables si $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f(P)(x) = x^{2n} P\big(\frac{1}{x}\big) \text{ ?}$$

Solution :

1. On pose $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$. Alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f(P)(x) = x^{2n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{a_k}{x^k} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^{2n+1-k} = \sum_{j=0}^{2n+1} a_{2n+1-j} x^j$$

Donc par identification (un polynôme est parfaitement défini par la fonction polynôme associée sur un ensemble infini) :

$$f(P) = \sum_{j=0}^{2n+1} a_{2n+1-j} X^j$$

2. a) On remarque que les coefficients de $f(P)$ sur la base canonique sont ceux de P pris dans l'ordre inverse. La matrice M de f dans cette base est donc antidiagonale de coefficients antidiagonaux valant 1. On a donc $M^2 = I_{2n+2}$ et $f^2 = Id$.

b) On pose $p = \dfrac{1}{2}(f + Id)$. L'endomorphisme f étant une symétrie, p est un projecteur (on le vérifie avec $p^2 = p$).
Tout projecteur est diagonalisable, ses valeurs propres étant 0 (associée à $\operatorname{Ker} p$) et 1 (associée à $\operatorname{Im} p$). Comme $f = 2p - I$, l'endomorphisme f est diagonalisable. Ses valeurs propres sont -1, le sous-espace propre associé étant $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(f + Id)$ et 1, le sous-espace propre associé étant $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(f - Id)$.

3. On vérifie que φ est bien définie et est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

4. a) On a : $\varphi(f(P), Q) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k} b_k = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k b_{2n+1-k} = \varphi(P, f(Q))$.

b) L'endomorphisme f étant symétrique, il est diagonalisable et les sous-espaces propres sont supplémentaires orthogonaux.
Comme $f \circ f = Id_E$, il y a deux sous-espaces propres $\operatorname{Ker}(f - Id_E)$ et $\operatorname{Ker}(f + Id_E)$ comme trouvés dans la question 2. De plus :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(f - Id_E) &= \{P \in E \ / \ f(P) = P\}\\ &= \{(a_0, \dots, a_{2n+1}) \ / \ a_{2n+1-k} = a_k, \forall\, k \in [\![0, 2n+1]\!]\}\end{aligned}$$

Il suffit de faire varier k entre 0 et n et $\operatorname{Ker}(f - Id_E)$ est un sous-espace de dimension $n + 1$.
De même :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(f + Id_E) &= \{P \in E \ / \ f(P) = -P\}\\ &= \{(a_0, \dots, a_{2n+1}) \ / \ a_{2n+1-k} = -a_k, \forall\, k \in [\![0, 2n+1]\!]\}\end{aligned}$$

Pour la même raison c'est un sous-espace de dimension $n + 1$.

5. Dans ce cas, si $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k X^k$, alors $f(P) = \sum\limits_{j=0}^{2n} a_{2n-j} X^j \in E$. L'application f est donc un endomorphisme de E tel que $f \circ f = Id_E$ et est donc diagonalisable.

L'application φ est un produit scalaire sur E et f est toujours symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Seules les dimensions des sous-espaces propres sont différentes.

En effet :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(f - Id_E) &= \{P \in E \ / \ f(P) = P\}\\ &= \{(a_0, \dots, a_{2n}) \ / \ a_{2n-k} = a_k, \forall\, k \in [\![0, 2n]\!]\}.\end{aligned}$$

Comme $\dim E = 2n+1$, l'élément a_n est quelconque et $\dim \operatorname{Ker}(f - Id_E) = n+1$.
De même :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(f + Id_E) &= \{P \in E \ / \ f(P) = -P\}\\ &= \{(a_0, \dots, a_{2n}) \ / \ a_{2n-k} = -a_k, \forall k \in [\![0, 2n]\!]\}\end{aligned}$$

C'est un sous-espace de dimension n, puisque l'on a $a_n = 0$.

Exercice 2.11.

Dans cet exercice, $E = \mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, D représente l'endomorphisme de dérivation $D : P \mapsto P'$.

1. Montrer que $\varphi : P \mapsto P\big(\frac{X}{2}\big)$ est un automorphisme de E. Les endomorphismes φ et D commutent-ils ?

2. Soit Φ l'application définie sur E par :

$$\text{pour tout } P \in E \ , \ \Phi(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}\big(\frac{X}{2}\big)$$

a) Montrer que Φ est bien définie et appartient à $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que $\varphi^{-1} \circ \Phi = (I - D)^{-1}$ et que $\Phi \circ \varphi^{-1} = (I - 2D)^{-1}$, où I représente l'endomorphisme identité de E.

c) En déduire que Φ est un automorphisme de E.

3. a) Déterminer les valeurs propres possibles de Φ.

b) Soit $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times E$ un couple propre de Φ, c'est-à-dire vérifiant $\Phi(P) = \lambda P$, avec $P \neq 0$. Montrer que cette équation est équivalente à l'équation

$$\mu P(X) = P(2X) - 2P'(2X)$$

où μ s'exprime en fonction de λ.

c) Soit P un polynôme propre unitaire (*i.e.* de coefficient dominant égal à 1) de Φ de degré n. Déterminer l'expression de ses coefficients en fonction de n.
Que peut-on en conclure ?

Solution :

1. L'application φ est linéaire et $\varphi^{-1} : P \mapsto P(2X)$.
Les applications φ et D ne commutent pas puisque :

$$\varphi(D(P)) = P'\big(\frac{X}{2}\big) \text{ et } D(\varphi(P)) = \frac{1}{2}P'\big(\frac{X}{2}\big).$$

2. a) Si P est un élément de E, alors si $p = \deg(P)$, il vient $P^{(p+1)}(X) = 0$. La somme proposée est donc finie.

L'application Φ est linéaire et définit un endomorphisme de E.

b) On remarque que, comme $D^{n+1} = 0$, on a $(I-D)(I+D+\cdots+D^n) = I-D^{n+1} = I$, donc $(I-D)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} D^k$.

Ainsi :

$$(\varphi^{-1} \circ \Phi)(P) = \varphi^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}\big(\frac{X}{2}\big)\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(X) = (I-D)^{-1}(P)$$

et

$$(\Phi\circ\varphi^{-1})(P)=\Phi(P(2X))=\sum_{k=0}^{+\infty}2^nP^{(k)}(X)=(I-2D)^{-1}(P)$$

c) On a $\Phi=\varphi\circ(I-D)^{-1}=((I-D)\circ\varphi)$ et $\Phi^{-1}=(I-D)\circ\varphi^{-1}$.

3. a) L'application Φ étant bijective, $\lambda=0$ ne peut être valeur propre. En regardant le coefficient dominant de l'équation $\Phi(P)=\lambda P$, si $\deg(P)=p$, il vient

$$\frac{1}{2^p}X^p=\lambda X^p \text{ et } \lambda=\frac{1}{2^p}$$

Les valeurs propres possibles de Φ sont donc $1, 1/2, 1/4, \ldots, 1/2^n$.

b) On a $(I-D)\circ\varphi^{-1}\circ\Phi=I$. Appliqué au polynôme propre P, il vient

$$\lambda(I-D)P(2X)=P(X) \text{ ce qui équivaut à } \lambda P(2X)-2\lambda P'(2X)=P(X)$$

Ainsi $\mu=\dfrac{1}{\lambda}$.

c) On pose $P(X)=X^n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kX^k$, polynôme propre associé à la valeur propre éventuelle $\dfrac{1}{2^n}$.

L'équation précédente donne :

$$\begin{aligned}2^n(X^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k)&=2^nX^n+\sum_{k=0}^{n-1}2^ka_kX^k-2nX^{n-1}-2\sum_{k=1}^{n-1}2ka_k2^{k-1}X^{k-1}\\&=2^nX^n+2^{n-1}a_{n-1}X^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}2^ka_kX^k-2nX^{n-1}-2\sum_{k=1}^{n-1}ka_k2^kX^{k-1}\\&=2^nX^n+2^{n-1}a_{n-1}X^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}2^ka_kX^k-2nX^{n-1}-\sum_{k=0}^{n-2}2^{k+2}(k+1)a_{k+1}X^k\end{aligned}$$

Ainsi : $\begin{cases}a_{n-1}=-\dfrac{n}{2^{n-2}}\\ a_k=-\dfrac{2^{k+2}(k+1)}{2^n-2^k}a_{k+1}\end{cases}$. Soit $a_k=(-1)^{n-k}\dfrac{2^{n-k}n!}{k!}\times\dfrac{1}{\prod_{j=1}^{n-k}(2^j-1)}$.

Ainsi $1/2^n$ est effectivement valeur propre et on peut remplacer n par n'importe quel indice k, ce qui prouve que Φ est diagonalisable (et on a même une base de vecteurs propres échelonnée en degrés).

Exercice 2.12.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Dans tout cet exercice, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne une matrice carrée d'ordre n. On notera I_n la matrice identité d'ordre n.

1. Montrer que, si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable et $\operatorname{Ker}A=\operatorname{Ker}A^2$.

2. On suppose que A^2 est diagonalisable.

a) Soit λ une valeur propre non nulle de A^2 et α tel que $\alpha^2=\lambda$.

Montrer que $\operatorname{Ker}(A^2-\lambda I_n)=\operatorname{Ker}(A-\alpha I_n)\oplus\operatorname{Ker}(A+\alpha I_n)$.

En déduire qu'il existe une base de $\operatorname{Ker}(A^2-\lambda I_n)$ formée de vecteurs propres de A.

b) Montrer que si $\mathrm{Ker}\, A^2 = \mathrm{Ker}\, A$, alors A est diagonalisable.

Dans toute la suite, on suppose A à coefficients réels et on pose $B = {}^tAA$.

3. Montrer que les valeurs propres de B sont réelles positives.

4. Montrer que $\mathrm{Ker}\, B = \mathrm{Ker}\, A$.

Dans toute la suite, A désigne une matrice antisymétrique réelle d'ordre n.

5. Montrer que les valeurs propres, dans $\mathbb{C}$, de A sont des imaginaires purs.

6. Montrer que A^2 est diagonalisable.

7. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution :

1. Si A est diagonalisable, alors A est de la forme $A = PDP^{-1}$ et $A^2 = PD^2P^{-1}$. De plus, comme D^2 est constituée des carrés des valeurs propres de A, les coefficients diagonaux nuls de D^2 sont les mêmes que ceux de D, donc $E_0(A) = E_0(A^2)$ soit $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^2$.

2. a) Soit $X \in \mathrm{Ker}(A - \alpha I_n)$. Alors, $AX = \alpha X$ et $A^2X = \alpha^2 X = \lambda X$ et $X \in \mathrm{Ker}(A^2 - \lambda I_n)$.
Ainsi, en raisonnant de manière analogue avec $-\alpha$:

$$\mathrm{Ker}(A - \alpha I_n) + \mathrm{Ker}(A + \alpha I_n) \subset \mathrm{Ker}(A^2 - \lambda I_n),$$

la somme étant directe car α et $-\alpha$ sont distincts et un vecteur ne peut être propre pour α et $-\alpha$.
Réciproquement, soit $X \in \mathrm{Ker}(A^2 - \lambda I_n)$, i.e. $A^2X = \lambda X$.
Cherchons $(Y, Z) \in \mathrm{Ker}(A - \alpha I_n) \times \mathrm{Ker}(A + \alpha I_n)$ tel que $X = Y + Z$.
Cela donne nécessairement : $X = Y + Z$, $AX = \alpha Y - \alpha Z$, et $Y = \dfrac{1}{2\alpha}(AX + \alpha X)$, $Z = \dfrac{1}{2\alpha}(-AX + \alpha X)$.
On vérifie par le calcul que ces vecteurs sont bien dans les sous-espaces souhaités et l'égalité demandée est assurée.

Pour conclure cette question, il suffit de procéder par concaténation d'une base de chacun des termes de cette somme directe (et donc ne rien faire si l'un de ces sous-espaces est réduit à $\{0\}$).

b) Comme $A^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toutes les valeurs propres de A^2 non nulles possèdent deux racines carrées. Ainsi, comme A^2 est diagonalisable et en utilisant les mêmes notations que précédemment,

$$E = \mathrm{Ker}(A^2) \oplus \mathrm{Ker}(A^2 - \lambda_1 I_n) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(A^2 - \lambda_p I_n)$$
$$= \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A - \alpha_1 I_n) \oplus \mathrm{Ker}(A + \alpha_1 I_n) \cdots \oplus \mathrm{Ker}(A^2 - \alpha_p I_n) \oplus \mathrm{Ker}(A^2 + \alpha_p I_n).$$

Ainsi, A est bien diagonalisable.

3. Soit λ une valeur propre (complexe) de B. Alors, il existe $X \neq 0$ tel que : $BX = \lambda X$, d'où :

$$\lambda^t\overline{X}X = {}^t\overline{X}{}^tAAX = {}^t(\overline{AX})AX$$

et en revenant aux coefficients, ${}^t\overline{X}X \in \mathbb{R}_+^*$, ${}^t(\overline{AX})AX \in \mathbb{R}_+$, donc λ est réel et même réel positif ou nul.

4. $AX = 0 \implies {}^tAAX = 0$ et

${}^tAAX = 0 \implies {}^tX{}^tAAX = \|AX\|^2 = 0 \implies AX = 0$

D'où la conclusion.

5. Soit λ une valeur propre de A et X un de ses vecteurs propres. Alors,

$\lambda^t\overline{X}X = {}^t\overline{X}AX = -{}^t\overline{X}{}^t\overline{A}X = -{}^t(\overline{AX})X = -\overline{\lambda}{}^t\overline{X}X$ et comme ${}^t\overline{X}X > 0$ il reste $\lambda = -\overline{\lambda}$ et $\lambda \in i\mathbb{R}$.

6. Comme A est antisymétrique réelle, A^2 est symétrique réelle donc diagonalisable.

7. D'après les questions précédentes,

$X \in \mathrm{Ker}(A^2) \iff X \in \mathrm{Ker}(-A^2) \iff X \in \mathrm{Ker}({}^tAA) \iff X \in \mathrm{Ker}\, A$.

On applique alors le résultat de la première question.

Exercice 2.13.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes 2 à 2 distincts. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on définit le polynôme L_i par : $L_i(X) = \prod\limits_{j\neq i, j=0}^{n} \dfrac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

Les polynômes $L_0, \dots, L_n$ sont appelés polynômes de Lagrange associés aux points $a_0, \dots, a_n$.

1. a) Montrer que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

   b) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.

   c) Ecrire la matrice de passage de $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ à $(1, X, \dots, X^n)$.

   d) On pose $P(X) = \prod\limits_{k=0}^{n}(X - a_k)$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Vérifier que $L_k = \dfrac{1}{P'(a_k)} \times \dfrac{P(X)}{X - a_k}$.

(Lorsque Q divise P, l'écriture $\dfrac{P}{Q}$ désigne simplement le polynôme quotient obtenu par division du polynôme P par le polynôme Q.)

On considère un polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ non constant de degré n. On note $z_0, \dots, z_{n-1}$ les racines complexes du polynôme $X^n + 1$.

Pour tout $t \in \mathbb{C}$, on pose $Q_t(X) = \dfrac{P(tX) - P(t)}{X - 1}$

On note $L_0, \dots, L_{n-1}$ les polynômes de Lagrange associés aux points $z_0, \dots, z_{n-1}$.

2. a) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $Q_t(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

   b) Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $Q_t(1) = tP'(t)$.

3. a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L_k(X) = \dfrac{X^n + 1}{nz_k^{n-1}(X - z_k)}$.

b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $tP'(t) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{2z_k P(tz_k)}{(z_k-1)^2} - \dfrac{P(t)}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{2z_k}{(z_k-1)^2}$
.

c) En appliquant ce dernier résultat à un polynôme P de degré n bien choisi, vérifier que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2z_k}{(z_k-1)^2} = -\frac{n^2}{2}$$

Solution :

1. a) Pour $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ et $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ ($\delta_{i,j}$ représente le symbole de Kronecker). Soient $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0$.

Après évaluation en a_j pour $j \in [\![0,n]\!]$, on obtient : $0 = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = \lambda_j$.

La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est donc libre dans $\mathbb{C}_n[X]$. Comme elle comporte $n+1$ vecteurs et $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = n+1$, c'est une base de cet espace.

b) Soient $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ les coordonnées de P dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$. En évaluant en a_j pour $j \in [\![0,n]\!]$, $P = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$, on trouve $P(a_j) = \lambda_j$.

c) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. D'après la question précédente, les coordonnées de X^k dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$ sont $(a_0^k, \ldots, a_n^k)$. La matrice de passage de $(L_0, \ldots, L_n)$ à $(1, X, \ldots, X^n)$ est donc égale à

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a_0^1 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

d) On remarque que $P'(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (X - a_j)$, ainsi, pour $i \in [\![0,n]\!]$, on a $P'(a_i) = \prod\limits_{j\neq i, j=1}^{n} (a_i - a_j)$, d'où $L_j(X) = \dfrac{P(X)}{P'(a_i)(X-a_i)}$

2. a) Le polynôme $R_t(X) = P(tX) - P(t)$ est de degré égal à $\deg(P) = n$ et vérifie $R_t(1) = 0$, ainsi $X-1$ divise $R_t(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $Q_t(X)$ appartient à $\mathbb{C}[X]$, avec $\deg(Q_t) = \deg(R_t) - 1 = n-1$.

b) On a $(X-1)Q_t(X) = P(tX) - P(t)$. En dérivant formellement, on obtient donc :

$$(X-1)Q_t'(X) + Q_t(X) = tP'(tX)$$

et en évaluant cette égalité en 1, on obtient $Q_t(1) = tP'(t)$.

3. a) Par définition des z_k, on a $T(X) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - z_k) = X^n + 1$, et $T'(X) = nX^{n-1}$.

En appliquant la relation trouvée à la question 1. d), on obtient donc, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$L_k(X) = \frac{X^n + 1}{n z_k^{n-1}(X - z_k)}$$

b) Soit $t \in \mathbb{C}$. Comme $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $Q_t(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on déduit de la question 1.*b.* que :

$$Q_t(X) = \sum_{k=0}^{n-1} Q_t(z_k) L_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(tz_k) - P(t)}{z_k - 1} \times \frac{X^n + 1}{n z_k^{n-1}(X - z_k)}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} tP'(t) = Q_t(1) &= \sum_{k=0}^{n-1} 2\frac{P(tz_k) - P(t)}{(z_k - 1) n z_k^{n-1}(1 - z_k)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2z_k P(tz_k)}{(z_k - 1)^2} - \frac{P(t)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2z_k}{(z_k - 1)^2}. \end{aligned}$$

car $z_k^n = -1$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, par définition des z_k.

c) Appliquons l'égalité précédente à $P = X^n$; on obtient :

$$nt^n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2z_k t^n z_k^n}{(z_k - 1)^2} - \frac{t^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2z_k}{(z_k - 1)^2}$$

En simplifiant par $t^n \neq 0$, on obtient en remarquant que $z_k^n = -1$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$n = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2z_k}{(z_k - 1)^2} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2z_k}{(z_k - 1)^2}$$

ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2z_k}{(z_k - 1)^2} = -\frac{n^2}{2}$.

Exercice 2.14.

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 3$.
Soit $E = \mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ayant pour matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $u = \sum_{j=1}^{n} e_j$ et $v = \sum_{j=1}^{n-1} e_j$.

On se propose de déterminer les valeurs propres de f de deux façons différentes.

1. Écrire un programme en *Scilab* affichant la matrice A lorsque l'utilisateur entre une valeur de n.

2. Montrer qu'il existe une matrice $D = \mathrm{diag}(0, 0, \ldots, 0, \alpha, \beta) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale (avec α et β deux réels non nuls), et une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

3. Calculer $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A^2)$. En déduire les valeurs propres de f.

4. a) Montrer que (u, v) est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

b) Soit λ une valeur propre non nulle de f et w un vecteur propre associé. Montrer que $w \in \mathrm{Im}\, f$.

c) Soit g la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f$. Déterminer la matrice de g dans la base (u, v) et les valeurs propres de g.

d) En déduire les valeurs propres de f.

Solution :

1. Une proposition :

```
1. n=input('n=')
2. A=ones(n,n)
3. A(n,n)=0
```

2. La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. Ainsi, il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Comme la matrice A est de rang 2 (les $n-1$ premières colonnes sont égales), alors d'après le théorème du rang, $\dim\ker f = n - 2$.

Ainsi D est de la forme $D = \mathrm{diag}(0, 0, \cdots, 0, \alpha, \beta)$ avec α et β deux réels non nuls.

3. On a $\mathrm{tr}(A) = n - 1$.

Comme $A^2 = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n & n-1 \\ n & n & \cdots & n & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ n & n & \cdots & n & n-1 \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 \end{pmatrix}$, alors :

$$\mathrm{tr}(A^2) = n(n-1) + n - 1 = n^2 - 1$$

Deux matrices semblables ayant même trace, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D)$ et $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(D^2)$. Les valeurs propres de f vérifient donc le système

$$(S)\quad \begin{cases} (n-2)\times 0 + \alpha + \beta = n - 1 \\ (n-2)\times 0^2 + \alpha^2 + \beta^2 = (n-1)n + n - 1 = n^2 - 1 \end{cases}$$

Les valeurs propres de f autres que 0 sont donc

$$\alpha = \frac{n - 1 - \sqrt{(n-1)(n+3)}}{2} \text{ et } \beta = \frac{n - 1 + \sqrt{(n-1)(n+3)}}{2}$$

4. a) La famille (u, v) est génératrice de $\operatorname{Im} f$. Les vecteurs u et v étant non colinéaires, elles est aussi libre, donc c'est une base de ce sous-espace.

b) On a $w \in E_\lambda(f)$ donc $f(w) = \lambda w$; or, $w \neq 0$, donc par linéarité, $w = f\big(\frac{1}{\lambda} w\big)$, ainsi, $w \in \operatorname{Im} f$.

c) Par linéarité, $f(v) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} f(e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} u = (n-1)u$.
Toujours par linéarité, $f(u) = f(v + e_n) = f(v) + f(e_n) = (n-1)u + v$.
La matrice de g dans la base (u, v) est donc $B = \begin{pmatrix} n-1 & n-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi λ est valeur propre de g si et seulement si $B - \lambda I_2$ est non inversible, donc si et seulement si $(n-1-\lambda)(-\lambda) - (n-1) = 0$ ou encore $\lambda^2 - (n-1)\lambda - (n-1) = 0$.

Les valeurs propres de g sont donc

$$\alpha = \frac{n - 1 - \sqrt{(n-1)(n+3)}}{2} \text{ et } \beta = \frac{n - 1 + \sqrt{(n-1)(n+3)}}{2}$$

d) Notons w_1 et w_2 deux vecteurs propres de g associés aux valeurs propres α et β. Ces vecteurs sont non nuls et appartiennent à $\operatorname{Im} f$, ils sont donc aussi vecteurs propres de f associés aux valeurs propres α et β. En outre, d'après le théorème du rang, $\dim \ker f = n - 2$, donc 0 est valeur propre de f et $\dim E_0 = n - 2$.

Les valeurs propres de f sont donc $0, \alpha$ et β.

Exercice 2.15.

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A et ${}^tA$ la matrice transposée de A.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si elle est symétrique et si $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_+^*$ et on note S_n^{++} l'ensemble de ces matrices.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $M(t)$ par : $M(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2 & 1 \\ 1 & 1+t^2 \end{pmatrix}$.

a) Pour quelles valeurs de t a-t-on $M(t) \in S_2^{++}$? On notera O l'ensemble de ces valeurs.

b) Déterminer une matrice orthogonale $P(t)$ et une matrice diagonale $D(t)$ telles que l'on a :

$$M(t) = P(t)D(t){}^tP(t)$$

2. On considère une matrice $A \in S_n^{++}$. On note Φ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\Phi_A(X) = AX + XA$$

a) Justifier que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Ker}(\Phi_A) = \{0\}$ (on pourra montrer que si x est un vecteur colonne propre de A, alors on a nécessairement $Xx = 0$).
En déduire l'existence de l'inverse de Φ_A que l'on notera Ψ_A.

b) On suppose dans un premier temps que $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale appartenant à S_n^{++}. Soit $Y = (y_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer la matrice X unique solution de l'équation $\Phi_D(X) = Y$. En déduire que

$$\Psi_D(Y) = \Big(\frac{y_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j}\Big)_{1 \leq i,j \leq n}$$

c) On suppose maintenant que $A \in S_n^{++}$. Montrer que l'on peut écrire $A = PD\,{}^tP$, avec P orthogonale et D diagonale. Montrer que $\Psi_A(Y) = P\Psi_D({}^tPYP)\,{}^tP$.

3. On revient aux matrices $M(t)$ de la première question.

Pour $t \in O$, résoudre l'équation $M(t)X + XM(t) = I$.

Solution :

1. a) Comme $M(t)$ est symétrique, il suffit de déterminer $\sigma(M(t))$. On peut procéder de façon classique ou bien remarquer que $M(t) = M(0) + t^2 I$. La matrice $M(0)$ est bien connue et ses valeurs propres sont 0 et 2. On en déduit immédiatement que $\sigma(M(t)) = \left\{t^2, 2 + t^2\right\}$. Il en résulte que $M(t) \in S_2^{++}$ si et seulement si $t \in \mathbb{R}^*$.

b) Il est clair que $(1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $2 + t^2$. Un vecteur propre associé à t^2 lui est orthogonal, par suite $(-1, 1)$ convient.
On peut donc prendre :

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D(t) = \begin{pmatrix} 2 + t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

2. a) Les règles de calcul sur les matrices assurent que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit X tel que $\Phi_A(X) = 0$. Supposons que $Ax = \lambda x$, alors il vient

$$0 = AXx + \lambda Xx = (A + \lambda I)x.$$

Comme $A \in S_n^{++}$, on a $\sigma(A) \in \mathbb{R}_+^*$, et par suite $\lambda > 0$ et $A + \lambda I$ est inversible, par conséquent $x = 0$.
L'endomorphisme Φ_A est donc injectif et par suite bijectif puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

b) On peut le faire par calcul matriciel, ou bien écrire :

$$y_{i,j} = \langle [DX + XD]\, e_j, e_i\rangle = \langle Xe_j, De_i\rangle + \lambda_j \langle Xe_j, e_i\rangle = (\lambda_j + \lambda_i)\langle Xe_j, e_i\rangle$$
$$= (\lambda_j + \lambda_i)x_{i,j}.$$

c) En remplaçant la matrice A par PD^tP dans l'équation et en multipliant à gauche par ${}^tP$ et à droite par P on voit que l'équation $AX+XA = Y$ est équivalente à $D\,[{}^tPXP] + [{}^tPXP]\,D = {}^tPYP$.

D'où $\Psi_D({}^tPYP) = {}^tPXP = {}^tP\Psi_A(Y)P$, d'où l'on déduit la formule souhaitée puisque P est une matrice orthogonale.

3. Pour $t \in O$, il résulte des questions précédentes que l'équation a une unique solution qui est :

$$X = P(t)\Psi_{\sqrt{D(t)}}({}^tP(t)(I)P(t))\,{}^tP(t) = P\Psi_{\sqrt{D(t)}}({}^tP(I)P)\,{}^tP = P\Psi_{\sqrt{D(t)}}(I)\,{}^tP.$$

Par suite, on obtient :

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2(2+t^2)}&0\\0&\dfrac{1}{2t^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2t^2(2+t^2)}\begin{pmatrix}1+t^2&-1\\-1&1+t^2\end{pmatrix}$$

Exercice 2.16.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer qu'on définit sur E un produit scalaire en posant :

$$\forall\,(P,Q)\in E^2, \langle P,Q\rangle=\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

On note $\|.\|$ la norme associée.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{Q}=\big(Q_0,Q_1,\dots,Q_n\big)$ orthonormée de E, pour ce produit scalaire, telle que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\deg Q_k=k$.

3. a) Que dire de l'ensemble $F=\big\{P\in E, P(0)=0\big\}$?

b) En déterminer une base à l'aide des éléments de $\mathcal{Q}$.

4. Justifier que : $U=Q_0+\sum\limits_{j=1}^{n}Q_j(0)\,Q_j$ appartient à $F^{\perp}$.

5. Montrer que, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a : $\langle Q_k,Q_k'\rangle=0$.

6. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. En calculant de deux façons

$$I_k=\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}\big[-\big(Q_k(t)\big)^2\,\mathrm{e}^{-t}\big]\,dt$$

déterminer la valeur de $\big[Q_k(0)\big]^2$.

7. Calculer $\delta=\min\big\{\|Q_0-P\|, P\in F^{\perp}\big\}$ et $d=\min\big\{\|Q_0-P\|, P\in F\big\}$.

Solution :

1. Comme pour tous polynômes P et Q, on a $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\times P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}=0$ et comme les fonctions à intégrer sont continues sur $\mathbb{R}_+$, la convergence des intégrales rencontrées résulte de la règle de Riemann. On vérifie alors sans peine que l'on a une forme bilinéaire symétrique définie positive.

2. L'existence de $\mathcal{Q}$ s'obtient en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(1,X,\dots,X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. a) On a $F=\mathrm{Vect}(X,\dots,X^n)$ qui est donc un hyperplan, (on peut aussi dire que $F=\mathrm{Ker}(\varphi)$, où φ est la forme linéaire $P\mapsto P(0)$).

b) La famille $\big(Q_i-Q_i(0)\big)_{1\le i\le n}$ est libre de cardinal n et formée de vecteurs de F, donc c'est une base de F.

4. Puisque la famille $(Q_j)_{1\le j\le n}$ est orthonormée,

$$\langle U, Q_i - Q_i(0)\rangle = \langle Q_0, Q_i - Q_i(0)Q_0\rangle + \sum_{j=1}^{n}\big[Q_j(0)\,\langle Q_j, Q_i - Q_i(0)Q_0\rangle\big]$$
$$= -Q_i(0)\,\langle Q_0, Q_0\rangle + Q_i(0)\langle Q_i, Q_i\rangle = 0$$

Donc $U \in F^{\perp}$.

5. On a : $\forall\, k \in [\![1, n]\!], \deg(Q_k') = k - 1$, donc
$$Q_k' \in \operatorname{Vect}\big(1, X, \dots, X^{k-1}\big) = \operatorname{Vect}\big(Q_0, \dots, Q_{k-1}\big) \text{ orthogonal à } Q_k.$$

6. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, en osant l'abus d'écriture habituel :

$$I_k = \int_0^{+\infty} \big[-\big(Q_k(t)\big)^2 \mathrm{e}^{-t}\big]' dt = \big[-\big(Q_k(t)\big)^2 \mathrm{e}^{-t}\big]_0^{+\infty} = \big[Q_k(0)\big]^2$$

$$I_k = \int_0^{+\infty} \big[-2Q_k(t)\, Q_k'(t)\mathrm{e}^{-t} + \big(Q_k(t)\big)^2 \mathrm{e}^{-t}\big] dt = -2\langle Q_k, Q_k'\rangle + ||Q_k||^2 = 0 + 1$$

d'après la question 3. Donc :

$$\big[Q_k(0)\big]^2 = 1$$

7. Le minimum est obtenu pour le projeté orthogonal P_1 de $Q_0 = 1$ sur $F^{\perp}$.

On a : $||U||^2 = 1 + \sum\limits_{j=1}^{n}\big[Q_j(0)\big]^2 = n + 1$, d'où $P_1 = \dfrac{\langle Q_0, U\rangle}{||U||^2}\, U = \dfrac{1}{n+1}\, U$.

Puis

$$\delta = ||Q_0 - P_1|| = ||Q_0 - \frac{1}{n+1}\, U|| = \frac{1}{n+1}||nQ_0 - \sum_{j=1}^{n} Q_j(0) Q_j||$$
$$= \frac{1}{n+1}\sqrt{n^2 + \sum_{j=1}^{n} 1^2} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Enfin, d'après le théorème de Pythagore : $1 = ||Q_0||^2 = \delta^2 + d^2$ et donc

$$d = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Exercice 2.17.

Soit n un entier naturel avec $n \geqslant 3$. On note $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on assimile à $\mathbb{R}^n$. Soit A, B deux éléments de E non colinéaires. On pose :

$$M = A\,{}^tB + B\,{}^tA$$

1. Déterminer le rang de M ainsi que son noyau.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et $E_1 = \operatorname{Vect}(A, B)$.

2. a) Montrer que la restriction de f à E_1 induit un endomorphisme de E_1 noté φ.
   b) Donner la matrice de φ dans la base (A, B).

3. a) Déterminer les valeurs propres de φ.
   b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

4. a) En déduire les valeurs propres de f.
   b) Montrer que f est diagonalisable.

Solution :

1. Notons $\langle X, Y\rangle$ le réel ${}^tXY$. On a alors, pour $X \in E$

$$MX = A{}^tBX + B{}^tAX = \langle B, X\rangle A + \langle A, X\rangle B \in \text{Vect}(A, B)$$

Ainsi $X \in \operatorname{Ker} M$ si et seulement si $\langle B, X\rangle A + \langle A, X\rangle B = 0$, soit si et seulement si $\langle B, X\rangle = \langle A, X\rangle = 0$, puisque A, B sont non colinéaires. Ceci correspond à un système de deux équations non proportionnelles à n inconnues. Ainsi $\operatorname{Ker} M$ est de dimension $n - 2$ et $\operatorname{Im} M = \text{Vect}(A, B)$ est de rang 2.

2. a) On a $f(A) = \langle A, B\rangle A + ||A||^2 B$ et $f(B) = ||B||^2 A + \langle A, B\rangle B$. Ceci montre que E_1 est stable par f.

b) La matrice demandée est donc

$$M_1 = \begin{pmatrix} \langle A, B\rangle & ||B||^2 \\ ||A||^2 & \langle A, B\rangle \end{pmatrix}$$

3. a) $\det(M_1 - \lambda I_2) = (\langle A, B\rangle - \lambda)^2 - \|A\|^2\|B\|^2$.

Les valeurs propres de la matrice M_1 sont $\langle A, B\rangle \pm ||A||\ ||B||$.

b) La matrice M_1 est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant deux valeurs propres. Elle est donc diagonalisable.

4. a) Les valeurs propres de f sont les deux valeurs trouvées dans la question précédente $\langle A, B\rangle \pm ||A||\ ||B||$, ainsi que 0 de sous-espace propre associé $\operatorname{Ker} f$.

b) L'endomorphisme f est diagonalisable. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est $\operatorname{Ker} f$ qui est de dimension $n - 2$. Il reste deux valeurs propres distinctes (car $A \neq 0, B \neq 0$) ; chaque valeur propre admet un sous-espace propre de dimension 1.

Exercice 2.18.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Soit $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la famille d'éléments de E définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall\, k \in [\![1, n]\!], P_k(X) = \frac{1}{k!}X(X - k)^{k-1}$$

1. Justifier que $\mathcal{F}$ est une base de E.

2. Vérifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P'_k(X + 1) = P_{k-1}(X)$, où P'_k désigne le polyôme dérivé de P_k.

3. Soit f l'application qui à tout élément P de E associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = P(X) - P'(X + 1)$$

a) Prouver que f est un endomorphisme de E, et donner sa matrice A dans la base $\mathcal{F}$. Justifier que f est un automorphisme de E.

b) L'automorphisme f est-il diagonalisable ? Quels sont ses sous-espaces propres ?

c) Déterminer la matrice inverse de A.

4. On pose $f^0 = id_E$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = f \circ f^{m-1}$. Démontrer que pour tout polynôme P de E, et tout $m \in \mathbb{N}$:

$$f^m(P)(X) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i)$$

où $P^{(i)}$ désigne la dérivée $i^{\text{ème}}$ de P.

Solution :

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$. La famille est échelonnée en degrés et est une base de E.

2. Si $k = 1$, $P_1'(X+1) = 1 = P_0(X)$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, le calcul donne :

$$\begin{aligned} P_k'(X+1) &= \frac{1}{k!}(X+1-k)^{k-1} + \frac{k-1}{k!}(X+1)(X+1-k)^{k-2} \\ &= \frac{1}{(k-1)!} X(X+1-k)^{k-2} = P_{k-1}(X) \end{aligned}$$

3. a) La linéarité résulte des propriétés des opérations et la considération des degrés montre que f est un endomorphisme. Par le résultat de la question 2. on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est triangulaire sans zéro sur sa diagonale principale donc A est inversible. Ainsi f est un automorphisme de E.

b) Le réel 1 est la seule valeur propre de A, donc si A était diagonalisable, A serait semblable à la matrice I_n ce qui entraînerait que $A = I_n$, ce qui n'est pas. Ni A ni f ne sont diagonalisables.
Un polynôme propre de f vérifie $f(P) = P$ soit $P(X) - P'(X) = P(X)$ d'où $P'(X) = 0$ et donc le seul sous-espace propre de f est la droite vectorielle des polynômes constants.

c) Pour déterminer la matrice inverse de A, soit on écrit le système $Y = AX$ à inverser, soit on écrit $A = I - N$ où les puissances de N sont évidentes et par l'identité géométrique, on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On pose pour tout entier naturel m,

« $\mathcal{H}(m) : \forall\, P \in E, f^m(P)(X) = \sum\limits_{i=0}^{m}(-1)^i\dbinom{m}{i}P^{(i)}(X+i)$. »

• $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

• Supposons $\mathcal{H}(m)$ vérifiée pour un certain rang m. On a par linéarité de f :

$$\begin{aligned}f^{m+1}(P)(X) = f\circ f^m(P)(X) &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\tbinom{m}{i}f\Big(P^{(i)}(X+i)\Big)\\
&= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\tbinom{m}{i}\Big(P^{(i)}(X+i)-P^{(i+1)}(X+i+1)\Big)\\
&= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\tbinom{m}{i}P^{(i)}(X+i)-\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\tbinom{m}{i}P^{(i+1)}(X+i+1)\\
&= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\tbinom{m}{i}P^{(i)}(X+i)-\sum_{j=1}^{m+1}(-1)^{j-1}\tbinom{m}{j-1}P^{(j)}(X+j)\\
&= (-1)^0\tbinom{m}{0}P^{(0)}(X+0)+\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\Big(\tbinom{m}{i}+\tbinom{m}{i-1}\Big)P^{(i)}(X+i)\\
&\qquad +(-1)^{m+1}\tbinom{m}{m}P^{(m+1)}(X+m+1)\end{aligned}$$

Soit$f^{m+1}(P)(X) = \sum\limits_{i=0}^{m+1}(-1)^i\binom{m+1}{i}P^{(i)}(X+i)$. Ce qui établit $\mathcal{H}(m+1)$.

On conclut par le principe de récurrence

Exercice 2.19.

Soit un entier $n \geqslant 2$. On note S_n^{++} l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n, n'ayant que des valeurs propres strictement positives.

1. Soit A une matrice symétrique réelle.

Montrer que $A \in S_n^{++}$ si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, ${}^tXAX > 0$.

2. Soit $A \in S_n^{++}$. Montrer qu $A^{-1} \in S_n^{++}$ et que A et A^{-1} admettent une base commune de vecteurs propres.

3. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) \geqslant ||X||^4$.

4. On note $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A et on appelle κ_A le réel positif défini par : $\kappa_A^2 = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$.

a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, si $Y = {}^tPX = \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, alors

$$({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) = \kappa_A\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_n}y_i^2\right)\times\kappa_A\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_1}{\lambda_i}y_i^2\right)$$

b) En déduire que $\sqrt{({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X)} \leqslant \dfrac{\kappa_A}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\big(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_n}+\dfrac{\lambda_1}{\lambda_i}\big)y_i^2$.

c) Étudier $f : t \mapsto \dfrac{t}{\lambda_n}+\dfrac{\lambda_1}{t}$ sur l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_n]$.

d) Montrer que $({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) \leqslant \big(\frac{\kappa_A + \kappa_A^{-1}}{2}\big)^2 ||X||^4$.

Solution :

1. Soit A symétrique réelle telle que ${}^tXAX > 0$ pour $X \neq 0$. Soit (λ, X) un couple propre de A. Alors : ${}^tXAX = \lambda ||X||^2 > 0$ entraîne $\lambda > 0$ puisque X est non nul.

Réciproquement si A ne possède que des valeurs propres strictement positives, la matrice A étant diagonalisable dans une base orthonormée, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PD{}^tP$ et en posant $Y = {}^tPX$. Puisque P est inversible, on a $X \neq 0 \implies Y \neq 0$ et :

$${}^tXAX = {}^tXPD{}^tPX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0$$

2. La matrice A est inversible puisque 0 n'est pas valeur propre de A et si $A = PD{}^tP$ alors $A^{-1} = PD^{-1}{}^tP$.

3. En utilisant les deux questions précédentes et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) = ({}^tYDY)({}^tYD^{-1}Y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \times \sum_{i=1}^n \tfrac{1}{\lambda_i} y_i^2$$

Donc :

$$({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) \geqslant \Big(\sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} y_i \times \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} y_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^2 = ||Y||^4 = ||X||^4.$$

Car le fait que P soit orthogonale montre que $\|Y\| = \|X\|$.

4. a) On sait par la question précédente que :

$$({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \times \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} y_i^2 = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_n} y_i^2 \times \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_i} y_i^2$$

Il n'y a plus qu'à placer deux fois κ_A.

b) Si $a, b > 0$, on a : $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$. Ainsi en posant

$$a = \kappa_A \times \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_n} y_i^2 \text{ et } b = \kappa_A \times \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_i} y_i^2$$

il vient

$$\big(({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X)\big)^{1/2} \leqslant \frac{\kappa_A}{2} \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_n} + \frac{\lambda_1}{\lambda_i}\Big) y_i^2$$

c) Une étude rapide la fonction f montre que cette fonction est positive et admet un minimum en $\sqrt{\lambda_1 \lambda_n}$.
De plus $f(\lambda_1) = f(\lambda_n) = 1 + \kappa_{A^{-1}}^2$. Ainsi $f(t) \leqslant 1 + \kappa_{A^{-1}}^2$.

d) Finalement

$$\big(({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X)\big)^{1/2} \leqslant \frac{\kappa_A}{2} \times (1 + \kappa_{A^{-1}}^2) ||Y||^2 = \Big(\frac{\kappa_A + \kappa_A^{-1}}{2}\Big) ||X||^2$$

Exercice 2.20.

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, p un entier naturel non nul, $\big(x_i\big)_{1\leq i\leq p}$ une famille d'éléments de I distincts deux à deux et $\big(a_i\big)_{1\leq i\leq p}$ et $\big(b_i\big)_{1\leq i\leq p}$ deux familles quelconques de réels.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $P(a) = P'(a) = 0$ si et seulement si $(X-a)^2$ divise P.

2. Montrer que l'application Φ de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2p}$ définie par :

$$\Phi(P) = \big(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_p), P'(x_1), P'(x_2), \ldots, P'(x_p)\big)$$

est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2p}$.

3. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P_H \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que, pour tout entier $i \in [\![1,p]\!]$, on a $P_H(x_i) = a_i$ et $P'_H(x_i) = b_i$.

Pour tout entier $i \in [\![1,p]\!]$, on considère le polynôme $Q_i = \displaystyle\prod_{1\leq j\leq p, j\neq i} \Big(\frac{X-x_j}{x_i-x_j}\Big)^2$.

4. a) Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Calculer $Q_i(x_k)$ pour tout entier $k \in [\![1,p]\!]$ et démontrer qu'on a $Q'_i(x_k) = 0$ si $k \neq i$ et $Q'_i(x_i) = \displaystyle\sum_{\substack{1\leq j\leq p\\ j\neq i}} \frac{2}{x_i - x_j}$.

b) Démontrer que le polynôme P défini par la formule :

$$P = \sum_{i=1}^{p} \big[(1 - Q'_i(x_i)(X-x_i))a_i + (X-x_i)b_i\big]Q_i$$

est le polynôme P_H défini à la question 3.

Solution :

1. On suppose $P(a) = P'(a) = 0$. La formule de Taylor pour les polynômes donne (les sommes en jeu étant finies)

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Ainsi $P(X) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = (X-a)^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-2}$ et $(X-a)^2$ divise P.

Réciproquement si $P(X) = (X-a)^2 Q(X)$, on a

$$P'(X) = (X-a)(2Q(X) + (X-a)Q'(X))$$

et $P(a) = P'(a) = 0$.

2. L'application Φ est linéaire par linéarité de la dérivation.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a $P(x_i) = P'(x_i) = 0$.

On a donc $P(X) = (X-x_1)^2 Q(X)$ et $P(x_2) = P'(x_2) = 0$ donne $Q(x_2) = Q'(x_2) = 0$ et Q est de la forme $Q(X) = (X-x_2)^2 R(X)$; on continue ainsi et le produit $\prod_{i=1}^{p}(X-x_i)^2$ divise P, ce diviseur a un degré plus grand que celui de P et $P=0$. Ainsi Φ est injective donc bijective par égalité des dimensions de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ et $\mathbb{R}^{2p}$.

3. Le $2p$-uplet $(a_1,\cdots,a_p,b_1,\cdots,b_p)\in\mathbb{R}^{2p}$ admet un unique antécédent par Φ noté P_H.

4. a) Si $p\neq 1$, les x_k pour $k\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}$ sont des racines de multiplicité 2 de Q_i donc $Q_i(x_k)=Q_i'(x_k)=0$. et $Q_i(x_i)=\prod_{1\le j\le p, j\neq i}\left(\dfrac{x_i-x_j}{x_i-x_j}\right)^2=1$

En utilisant la dérivée de Q_i, on a : $Q_i'=Q_i\sum_{1\le j\le p, j\neq i}\dfrac{2(X-x_j)}{(x_i-x_j)^2}$, et

$$Q_i'(x_i)=\sum_{1\le j\le p, j\neq i}\frac{2}{x_i-x_j}$$

On vérifie que cette formule est valable également pour $p=1$.

b) Pour $i\in[\![1,p]\!]$, on a :

$\deg(Q_i)=2p-2$ (même si $p=1$), et

$\deg\big[\,(1-Q_i'(x_i)(X-x_i))\,a_i+(X-x_i)b_i\big]\leqslant 1.$

Par produit :

$$\begin{aligned}&\deg\Big(\big[\big(1-Q_i'(x_i)(X-x_i)\big)a_i+(X-x_i)b_i\big]Q_i\Big)\\&\qquad=\deg\big[\big(1-Q_i'(x_i)(X-x_i)\big)a_i+(X-x_i)b_i\big]+\deg(Q_i)\leqslant 2p-1\end{aligned}$$

Par somme, $\deg P\leqslant 2p-1$ ainsi $P\in\mathbb{R}_{2p-1}[X]$.

Soit $j\in[\![1,p]\!]$. Il suffit d'établir que $P(x_j)=a_j$ et $P'(x_j)=b_j$. À l'aide de la question précédente :

$$\begin{aligned}P(x_j)&=\sum_{i=1}^{p}\big[\big(1-Q_i'(x_i)(x_j-x_i)\big)a_i+(x_j-x_i)b_i\big]Q_i(x_j)\\&=\big(1-Q_j'(x_j)(x_j-x_j)\big)a_j+(x_j-x_j)b_j=a_i\end{aligned}$$

De plus $P'=\sum_{i=1}^{p}\Big(\big[-Q_i'(x_i)a_i+b_i\big]Q_i+\big[\big(1-Q_i'(x_i)(X-x_i)\big)a_i+(X-x_i)b_i\big]Q_i'\Big)$

donc

$$P'(x_j)=\sum_{i=1}^{p}\Big(\big[-Q_i'(x_i)a_i+b_i\big]Q_i(x_j)+\big[\big(1-Q_i'(x_i)(x_j-x_i)\big)a_i+(x_j-x_i)b_i\big]Q_i'(x_j)\Big)$$

À l'aide de la question précédente :

$$\begin{aligned}P'(x_j)&=\Big(\big[-Q_i'(x_i)a_i+b_i\big]+\big[\big(1-Q_i'(x_i)(x_i-x_i)\big)a_i+(x_i-x_i)b_i\big]Q_i'(x_i)\Big)\\&=-Q_i'(x_i)a_i+b_i+a_iQ_i'(x_i)=b_j\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait.

Exercice 2.21.

Pour $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on pose $\overline{X}=\begin{pmatrix}\overline{x_1}\\ \vdots\\ \overline{x_n}\end{pmatrix}$ et

$$\|X\| = \sqrt{{}^t\overline{X}X} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \overline{x_k}\times x_k}$$

(on rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a : ${}^tXSX \leqslant \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$.

2. a) Déterminer les éléments propres de la matrice $S = (s_{k,\ell})_{1\leq k,\ell\leq n}$ suivante :

$$s_{k,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \neq \ell \\ 0 & \text{si } k = \ell \end{cases}$$

b) En déduire que si $x_1, \ldots, x_n$ sont réels, on a : $\sum\limits_{1\leq k<\ell\leq n} x_k x_\ell \leq \dfrac{n-1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} x_k^2$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda = \alpha + i\beta$, avec α et β réels, une valeur propre complexe de A. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

a) Montrer que ${}^tX(A - {}^tA)\overline{X} = -2i\beta\, {}^t\overline{X}X$.

b) Etablir l'inégalité : $|\beta| \leqslant \dfrac{n-1}{2} \max\limits_{1\leq k<\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}|$.

Solution :

1. La matrice S est symétrique réelle donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et plus précisément :
Il existe une matrice P orthogonale (${}^tP$ étant obtenue en cherchant les vecteurs colonnes propres pour S), une matrice $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale telles que $S = {}^tPDP$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En posant $Y = PX$ il vient :

$$ {}^tXSX = {}^t(PX)D(PX) = {}^tYDY = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \leqslant (\max_{1\leq k\leq n} \lambda_k)||Y||^2$$

La matrice P étant orthogonale, on a : $||Y||^2 = {}^tX{}^tPPX = {}^tXX = ||X||^2$, ce qui termine la question.

2. a) On remarque que $S + I = J$, la matrice J ne comportant que des 1. La matrice J est symétrique réelle, donc diagonalisable. Elle est de rang 1 ; ainsi 0 est valeur propre de sous-espace propre associé $\text{Ker}\, J$ de dimension $(n-1)$.
La valeur propre manquante, λ, est la trace ($\lambda = n$) de sous-espace propre associé $\text{Vect}\, U$, avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $SX = \mu X$ si et seulement si $JX = (S + I)X = (\mu + 1)X$. Les valeurs propres de S sont donc $\lambda = -1$ de sous-espace propre associé $\text{Ker}\, J$ (d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$), et $\lambda = n - 1$ de sous-espace propre associé $\text{Vect}(U)$

b) On utilise la première question :

$$ {}^tXSX \leqslant (n-1)||X||^2, \text{ donc } \sum_{1\leq k<\ell\leq n} x_k x_\ell \leqslant \frac{n-1}{2} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 $$

puisqu'on ne somme que sur la moitié haute de la matrice S.

3. a) Utilisons la matrice $M = A - {}^tA$ qui est antisymétrique, donc à diagonale nulle et dont les éléments sont de la forme $a_{k,\ell} - a_{\ell,k}$.

On a alors, puisque $AX = \lambda X$ entraîne $A\overline{X} = \overline{AX} = \overline{\lambda X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$:

$$ \begin{aligned} {}^tX(A - {}^tA)\overline{X} &= {}^tXA\overline{X} - {}^t(AX)\overline{X} = \overline{\lambda}{}^tX\overline{X} - \lambda{}^tX\overline{X} = -2i\,\mathrm{Im}(\lambda){}^tX\overline{X} \\ &= -2i\beta \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \end{aligned} $$

Pour conclure il n'y a plus qu'à remarquer que ${}^t\overline{X}X = {}^tX\overline{X}(= \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)$

b) Mais on a également :

$$ {}^tX(A - {}^tA)\overline{X} = \sum_{1\leq k,\ell\leq n} x_k(a_{k,\ell} - a_{\ell,k})\overline{x_\ell} $$

et donc :

$$ |{}^tX(A - {}^tA)\overline{X}| \leqslant \max_{1\leq k,\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| \sum_{1\leq k,\ell\leq n} |x_k\overline{x_\ell}| $$

Si $k = \ell$, $|a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| = 0$ et on peut permuter les rôles de k et ℓ, donc :

$$ \begin{aligned} |{}^tX(A - {}^tA)\overline{X}| &\leqslant \max_{1\leq k<\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| \sum_{1\leq k,\ell\leq n} |x_k||\overline{x_\ell}| \\ &\leqslant \max_{1\leq k<\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| \sum_{1\leq k,\ell\leq n, k\neq\ell} |x_k||x_\ell| \end{aligned} $$

Soit :

$$ |{}^tX(A - {}^tA)\overline{X}| \leqslant 2 \max_{1\leq k<\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| \sum_{1\leq k<\ell\leq n} |x_k||x_\ell| $$

Et par le résultat de la question 2. b) :

$$ |{}^tX(A - {}^tA)\overline{X}| \leq 2 \max_{1\leq k<\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| \times \frac{n-1}{2} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 $$

Ainsi : $| - 2i\beta \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2| \leqslant \max_{1\leq k<\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| \times (n-1) \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$

Comme X est une colonne propre, il ne s'agit pas de la colonne nulle et en simplifiant par le nombre réel strictement positif $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$:

$$ |\beta| \leqslant \frac{n-1}{2} \max_{1\leq k<\ell\leq n} |a_{k,\ell} - a_{\ell,k}| $$