Exercice 2.2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et a et b deux réels distincts. On note id l'application identité de E. Dans tout l'exercice, f désigne un endomorphisme de E vérifiant :

$$f^2 - (a+b)f + ab\,id = 0 \quad (*)$$

1. Quelles sont les homothéties vérifiant la relation $(*)$?

2. a) Déterminer une condition suffisante portant sur les 2 réels a et b pour que f soit bijective. Calculer alors f^{-1}.
b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les 2 réels a et b pour que f soit un projecteur sans être une homothétie.

On suppose désormais que f n'est pas une homothétie.

3. a) Déterminer deux réels λ et μ tels que :

$$f = \lambda(f - a\,id) + \mu(f - b\,id)$$

b) En déduire qu'il existe deux projecteurs p et q tels que : $f = bp + aq$ et $q \circ p = p \circ q = 0$

4. On suppose désormais que a et b sont non nuls.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^n = b^n p + a^n q \quad (*)$$

Pour tout entier $n > 0$, si f est bijective, on définit f^{-n} par $f^{-n} = (f^{-1})^n$.

La relation $(*)$ est-elle vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

Solution de l'exercice 2.2

1. On remplace $f = \lambda id$ dans $(*)$ et on obtient une équation du second degré :
$\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = 0$. On en déduit les solutions $f = a.id$ et $f = b.id$.

2. a) Il suffit que a et b soient tous deux non nuls pour affirmer que 0 n'est pas valeur propre et donc que f est bijective.
La relation $(*)$ entraîne : $f^{-1} = \dfrac{1}{ab}[(a+b)id - f]$.
b) Le spectre de f est inclus dans $\{a, b\}$ car $X^2 - (a+b)X + ab$ est un polynôme annulateur.
Si f est un projecteur sans être une homothétie, ses seules valeurs propres sont 0 et 1 d'où il suffit que : $a = 0$ et $b = 1$ ou bien $a = 1$ et $b = 0$
Réciproquement, en reportant dans $(*)$, on obtient : $f^2 = f$ et f est bien un projecteur.

3. a) Par analyse/synthèse :
Si $f = \lambda(f - a.Id) + \mu(f - b.Id)$, on a : $(\lambda + \mu - 1)f = (\lambda a + \mu b)id$.
Alors, $\lambda + \mu - 1 = 0$ sinon f serait une homothétie ce qui est exclus. On a donc aussi : $\lambda a + \mu b = 0$.
On en déduit : $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 1 \\ a\lambda + b\mu & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{b}{b-a} \\ \mu = \dfrac{a}{a-b} \end{array}\right.$.
La synthèse est maintenant évidente : $\lambda(f - a.Id) + \mu(f - b.Id) = \dfrac{b}{b-a}(f - a.id) - \dfrac{a}{b-a}(f - b.id) = f$.

b) On pose $p = \dfrac{1}{b-a}(f - a.id)$ et $q = \dfrac{1}{a-b}(f - b.id)$
On vérifie :
• $p^2 = \dfrac{1}{(b-a)^2}(f^2 - 2af + a^2.id) = \dfrac{1}{(b-a)^2}((a+b)f - ab.id - 2af + a^2.id) = \dfrac{1}{(b-a)^2}((b-a)f - a(b-a)id) = p$

• De la même façon $q^2 = q$
• Enfin $p \circ q = \dfrac{1}{b-a}(f - a.id) \circ \dfrac{1}{a-b}(f - b.id) = 0$

4. Soit la propriété :$\mathcal{P}_n$: $f^n = b^n p + a^n q$
Pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété se montre aisément par récurrence.

Pour n entier négatif, D'après 2, si a et b sont non nuls alors f est bijectif et :

$$f^{-1} = \frac{1}{ab}[(a+b)id - f] = \frac{1}{ab}[(a+b)id - bp - aq] = b^{-1}p + a^{-1}q$$

On montre enfin le résultat pour $n \leqslant 0$ par une autre récurrence dont l'initialisation $n = 0$.

Si on suppose la propriété vraie au rang n, on a :

$$f^n = b^{-n}p + a^{-n}q \Rightarrow f^{-(n+1)} = (b^{-1}p + a^{-1}q) \circ (b^{(-n)}p + a^{(-n)}q) = b^{-(n+1)}p + a^{-(n+1)}q + 0 + 0$$

On obtient le résultat souhaité.

Exercice 2.3

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et soit f et g deux endomorphismes de E tels que : $f \circ g - g \circ f = af + bg$.

1. a) Montrer que tout endomorphisme non nul u d'un espace vectoriel de dimension finie n admet un polynôme annulateur.

b) En déduire que tout endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie admet au moins une valeur propre.

2. Dans cette question uniquement, on suppose que $a = b = 0$.

a) Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

b) En raisonnant sur un endomorphisme induit, en déduire que f et g ont un vecteur propre commun.

3. Dans cette question uniquement, on suppose que $b = 0$, $a \neq 0$ et $f \neq 0$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est stable par g.

b) Soit φ_g l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui à tout u associe $u \circ g - g \circ u$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\varphi_g(f^n) = anf^n$.

c) En déduire qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $f^n = 0$.

d) En déduire que f et g ont un vecteur propre commun.

4. Dans cette question, on suppose $b \neq 0$.
Montrer que f et g ont un vecteur propre commun. (on pourra s'intéresser à $h = af + bg$)

Solution de l'exercice 2.3

1. a) La famille $(I, u, u^2, \ldots, u^{n^2})$ est de cardinal $n^2 + 1$. Elle est donc liée : il existe $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n^2}$ telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k u^k = 0$.

On pose $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$.
On remarque que P n'est pas le polynôme constant qui n'est pas annulateur. Enfin $P(u) = 0$.

b) On sait que les éventuelles valeurs propres de u sont parmi les racines de tout polynôme annulateur. Par le théorème de d'Alembert Gauss, tout polynôme non constant se factorise sous la forme

$$P(X) = C\prod_{j=1}^{p}(X - z_j)^{m_j}$$

Si z_j n'est pas valeur propre de u, l'endomorphisme $(u - z_jI)$ est inversible, donc $(u - z_jI)^{m_j}$ également. En composant par son inverse et si, pour tout j, z_j n'est pas valeur propre de u, il vient $0 = I$: contradiction.

2. On a $f \circ g = g \circ f$.
a) Si $u \in E_\lambda(f)$, alors $f(u) = \lambda u$, d'où :

$$f(g(u)) = g(f(u)) = g(\lambda u) = \lambda g(u) \text{ soit, } g(u) \in E_\lambda(f).$$

b) L'endomorphisme induit par g sur $E_\lambda(f)$ a une valeur propre d'après le résultat admis à la question 1. Si v est un vecteur propre de cet endomorphisme, c'est aussi un vecteur propre de g et un élément de $E_\lambda(f)$. Donc v est un vecteur propre commun à f et g.

3. On a $f \circ g - g \circ f = af$.
a) Si $u \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(u) = 0$ d'où en évaluant la relation donnée en u, $f(g(u)) - g(0_E) = a0_E$, soit : $f(g(u)) = 0$, soit : $g(u) \in \operatorname{Ker} f$.
b) Montrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ la relation : $f^n \circ g - g \circ f^n = anf^n$.
• Pour $n = 0$, c'est évident.
• Si c'est vrai pour n, alors :

$$\begin{aligned} f^{n+1} \circ g &= f \circ (f^n \circ g) \\ &= f \circ (g \circ f^n + anf^n) \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (f \circ g) \circ f^n + anf^{n+1} \\ &= (g \circ f + af) \circ f^n + anf^{n+1} \quad \text{(d'après l'hypothèse de la question 3)} \\ &= g \circ f^{n+1} + a(n+1)f^{n+1}. \end{aligned}$$

c) Par l'absurde, si l'on avait $f^n \neq 0$ pour tout n, alors f^n serait vecteur propre de φ_g pour la valeur propre na. Ainsi φ_g aurait une infinité de valeurs propres distinctes (car $a \neq 0$), ce qui est impossible car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie, puisque E l'est. d) Comme $f^n = 0$ pour un entier n, l'endomorphisme f ne peut être injectif sinon f^n le serait aussi. Donc, $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 1$. Comme à la question 2. b, l'endomorphisme induit par g sur $\operatorname{Ker} f$ possède une valeur propre, le vecteur propre associé est alors un vecteur propre commun à f et à g.

4. Comme $g = \dfrac{1}{b}(h - af)$, le calcul donne : $f \circ g - g \circ f = \dfrac{1}{b}(f \circ h - h \circ f)$. Ainsi on a l'équivalence : $f \circ g - g \circ f = af + bg \iff f \circ h - h \circ f = bh$.
Si l'on remplace a, b, f, g par $-b, 0, h, f$ respectivement, la question 3 donne alors que f et h ont un vecteur propre en commun. Comme $g = \dfrac{1}{b}(h - af)$, ce vecteur est aussi un vecteur propre de g.

Exercice 2.4

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout entier $n \geqslant 3$, on note $A_n(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent 1 et ceux de la première ligne et de la première colonne qui valent alternativement b puis a. Par exemple, on a :

$$A_5(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & b & a & b & a \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_6(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & b & a & b & a & b \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que la matrice $A_n(a,b)$ est diagonalisable.

2. Écrire en Scilab une fonction `matriceA(n,a,b)` qui renvoie la matrice $A_n(a,b)$ (*on pourra créer une variable* `x` *qui prend alternativement la valeur* `b` *puis la valeur* `a`).

3. Soit λ et μ deux réels tels que $2\mu-(\lambda-2)^2>0$. Résoudre le système d'équations suivant, d'inconnues réelles x et y :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+y & =\lambda \\ (x-1)^2+(y-1)^2 & =\mu. \end{array}\right.$$

On suppose désormais que n est impair ($n=2p+1$).

4. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Déterminer le rang de $A_n(a,b)-I_n$. Que peut-on en déduire sur les éléments propres de $A_n(a,b)$?
b) Calculer la trace de $\big(A_n(a,b)-I_n\big)^2$.
c) En déduire les valeurs propres de $A_n(a,b)$.

5. Dans le cas où a et b sont complexes, la matrice $A_n(a,b)$ est-elle toujours diagonalisable ?

Solution de l'exercice 2.4

1. La matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable (théorème spectral).

2. Une proposition.

```
function A=matriceA(n,a,b)
A=eye(n,n); //matrice identité d'ordre n
x=b; //initialisation de x
for k = 2:n,
  A(1,k)=x;
  A(k,1)=x;
  if x==a then //mise à jour de x
    x=b;
  else
     x=a;
   end
end
endfunction
```

3. On a :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+y & =\lambda \\ (x-1)^2+(y-1)^2 & =\mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x-1+y-1=\lambda-2 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=\mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \alpha+\beta=\lambda-2 \\ 2\alpha\beta=(\lambda-2)^2-\mu \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \alpha,\beta \text{ racines de } X^2-(\lambda-2)X+\frac{(\lambda-2)^2-\mu}{2}=0.$$

Le discriminant vaut : $2\mu-(\lambda-2)^2>0$.
Donc le polynôme a deux racines α et β et en revenant en x,y, il vient :

$$x_1=\frac{\lambda+\sqrt{2\mu-(\lambda-2)^2}}{2},x_2=\frac{\lambda-\sqrt{2\mu-(\lambda-2)^2}}{2}$$

et il y a deux solutions : $(x,y)=(x_1,x_2)$; $(x,y)=(x_2,x_1)$. 4. a) Si $(a,b)=(0,0)$, la matrice $A_n(a,b)-I_n$ est nulle, donc de rang 0 ; les éléments propres sont évidents.
Si $(a,b)\neq(0,0)$, la matrice $A_n(a,b)-I_n$ a ses colonnes 2 à n qui sont colinéaires à l'une d'entre elles qui est non nulle (colonne 2 si $b\neq 0$; colonne 3 si $b=0$ et $a\neq 0$) et elles ne sont pas colinéaires à la colonne 1. Comme le rang est la dimension de l'espace engendré par les colonnes, il vaut 2. Comme $n\geqslant 3$ on en déduit que $A_n(a,b)-I_n$ n'est pas inversible, donc 1 est valeur propre de $A_n(a,b)$; d'après le théorème du rang, le sous-espace propre associé est de dimension $n-2$. Comme la matrice est diagonalisable, il y a deux autres valeurs propres λ_1,λ_2 (éventuellement égales).

b) et c) Le calcul des coefficients diagonaux de $\big(A_n(a,b) - I_n\big)^2$ donne : $b^2 + a^2 + b^2 + \cdots$ puis b^2, puis a^2, puis b^2, puis a^2, etc. Ainsi : $\operatorname{tr}\big(A_n(a,b) - I_n\big)^2 = 2p(a^2+b^2)$.
Les valeurs propres ont déjà été trouvées lorsque $(a,b) = (0,0)$.
Si $(a,b) \neq (0,0)$, d'après la question précédente $A_n(a,b)$ est semblable à une matrice diagonale $\Delta = \operatorname{diag}(1,\ldots,1,\lambda_1,\lambda_2)$, donc $n = \operatorname{tr}\big(A_n(a,b)\big) = (n-2) + \lambda_1 + \lambda_2$.
Comme $\big(A_n(a,b) - I_n\big)^2$ est semblable à $\big(\Delta - I_n\big)^2$, on a :

$$2p(a^2+b^2) = \operatorname{tr}\big(A_n(a,b) - I_n\big)^2 = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_1 - 1)^2.$$

D'après la question 3 avec $\lambda = 2$ et $\mu = 2p(a^2+b^2)$, comme $\mu - (\lambda-2)^2 = 2p(a^2+b^2) > 0$, on obtient donc :

$$\operatorname{Sp}(A_n(a,b)) = \{1, \lambda_1, \lambda_2\} = \{1, 1+\sqrt{p(a^2+b^2)}, 1-\sqrt{p(a^2+b^2)}\}.$$

5. Pour $n = 2p+1$ impair, la question précédente indique que si $A_n(a,b)$ est diagonalisable, alors 1 est valeur propre avec un sous-espace propre de dimension $n-2$ et il y deux autres valeurs propres λ_1, λ_2 telles que : $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ et $(\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_1 - 1)^2 = 2p(a^2+b^2)$.
Si $a^2 + b^2 = 0$, on en déduit que $0 = \big((\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1)\big)^2 = 2(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)$, donc $\lambda_1 = 1$ ou $\lambda_2 = 1$, ce qui est absurde puisque $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1$. Par exemple, $A_{2p+1}(1,i)$ n'est pas diagonalisable.
N.B : pour $n = 2$ on peut voir que $A_2(a,b)$ est diagonalisable pour tout $a, b \in \mathbb{C}$.

Exercice 2.5

Soit n un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E qui possède n valeurs propres distinctes, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $E_i = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i Id_E)$.

L'objectif de cet exercice est de décrire puis dénombrer les sous-espaces vectoriels de E stables par u.

1. a) On suppose, uniquement dans cette question, que $n = \dim E = 2$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels F, G et H de E tels que $E = G \oplus H$ et $F \neq (F \cap G) \oplus (F \cap H)$.
b) On note $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $n-1$. Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{C}_{n-1}[X] \to \mathbb{C}^n$ définie par :

$$\forall\, P \in \mathbb{C}_{n-1}[X],\ \Phi(P) = (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$$

est bijective.
c) En déduire que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $P_i \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ P_i(\lambda_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Montrer que, si J est une partie non vide de $[\![1,n]\!]$, alors $\displaystyle\bigoplus_{j\in J} E_j$ est un sous-espace stable par u.

Dans toute la suite, on considère un sous-espace vectoriel F de E stable par u.
3. Soit $x \in F$.
a) Montrer qu'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i$. b) Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Exprimer $\big(P(u)\big)(x)$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$.
c) En déduire que $F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^n (F \cap E_i)$.

4.a) On pose : $J = \{i \in [\![1, n]\!] / F \cap E_i \neq \{0\}\}$. Montrer que $F = \bigoplus_{j \in J} E_j$.

b) En déduire le nombre de sous-espaces vectoriels de E stables par u.

Solution de l'exercice 2.5

1. a) On choisit trois droites F, G, H distinctes de $\mathbb{C}^2$. Alors, $G \oplus H = \mathbb{R}^2$ et $F \cap G = F \cap H = \{0\}$.

b) L'application Φ est une application linéaire entre espaces vectoriels de même dimension n. Pour montrer la bijectivité, on montre l'injectivité. Soit $P \in \operatorname{Ker} \Phi$. Alors, $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) = 0$. Le polynôme P est de degré au plus $n-1$ et possède n racines distinctes, donc P est le polynôme nul. Alors, $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$ et Φ est un automorphisme.
c) En notant $e_i = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{C}^n$, le vecteur e_i possède un antécédent par Φ. On le note P_i.

2. Soit $x = \sum_{j \in J} x_j \in \bigoplus_{j \in J} E_j$. Alors, $u(x) = \sum_{j \in J} \lambda_j x_j$ et, pour tout $j \in J$, $\lambda_j x_j \in E_j$. Ainsi, $u(x) \in \bigoplus_{j \in J} E_j$.

3.a) Comme u est diagonalisable, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. On écrit alors x dans cette décomposition.

b) En reprenant les calculs et notations précédents, $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ et, par une récurrence immédiate, pour tout k entier naturel, $u^k(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k x_i$. Ainsi, pour tout polynôme P, on a :

$$P(u)(x) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) x_i$$

c) Soit $x \in F$. En utilisant les questions précédentes, on a :

$$P_i(u)(x) = \sum_{j=1}^{n} P_i(\lambda_j) x_j = x_j$$

Ainsi, comme F est stable par u, $P_i(u)(x) \in F$ et $x_j \in F$. Ainsi, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \in \bigoplus_{i=1}^{n} (F \cap E_i)$.

La réciproque étant triviale, $F = \bigoplus_{i=1}^{n} (F \cap E_i)$.

4.a) Comme $\bigoplus_{j=1}^{n} E_j = E$ et $\dim E = n$, alors E_j est de dimension 1. Ainsi, $F \cap E_i \in \{\emptyset, E_i\}$. On utilise alors la question précédente.

b) Finalement, F est stable par u si et seulement s'il existe $J \subset [\![1, n]\!]$ non vide tel que $F = \bigoplus_{j \in J} E_j$. On rajoute $\{0\}$. Ainsi, il y a 2^n sous-espaces stables par u.

Exercice 2.6

Soit n un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que la trace d'un endomorphisme f de E est indépendante de la matrice qui le représente dans une base choisie. On note ainsi $\operatorname{tr}(f)$ la trace de f.

2. Montrer que, soit $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$, soit $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ (*on pourra discuter en fonction de la dimension de* $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$).

3. Soit e un vecteur non nul de $\operatorname{Im} u$.

a) Montrer qu'il existe des vecteurs $(e_2, \ldots, e_n)$ de E tels que $\mathcal{B} = (e, e_2, \ldots, e_n)$ soit une base E.

b) On suppose que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Quelle est la forme de la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$?
Calculer alors $\operatorname{tr}(u)$.

4. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
i) u est diagonalisable.
ii) $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.
iii) $\operatorname{tr}(u) \neq 0$.

5. Soient A et J deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application ψ_A définie par, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\psi_A(X) = \operatorname{tr}(AX)J$$

On remarquera que ψ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Décrire le noyau de ψ_A. Quelle est l'image de ψ_A ? Quel est le rang de ψ_A ?

b) Exprimer la trace de l'endomorphisme ψ_A en fonction de A et J.

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A et J pour que ψ_A soit diagonalisable.

Solution de l'exercice 2.6

1. On sait que deux matrices semblables ont même trace, puisque $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

2. L'endomorphisme u est de rang 1 donc $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de dimension 0 ou 1.
Si $\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u) = 0$, alors $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.
Si $\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u) = 1$, comme $\operatorname{Im} u \supseteq (\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u)$, alors $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.

3. a) Le vecteur e est non nul, donc (e) est une famille libre de l'espace vectoriel de dimension finie E. D'après le théorème de la base incomplète, (e) peut être complétée en une base de E.

b) Comme $e \in \operatorname{Ker} u$, alors dans une telle base, la première colonne de la matrice de u sera nulle et toutes les autres colonnes seront dans $\operatorname{Im} u$ donc colinéaires à e, d'où une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

La trace de cette matrice est nulle donc, si $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, alors $\operatorname{tr}(u) = 0$.

4. *i)* $\Longleftrightarrow$ *ii)*. L'endomorphisme u est diagonalisable et, comme u est de rang 1, $\dim E_0(u) = n - 1$. Ainsi, il existe une seconde valeur propre a telle que $\dim E_a(u) = 1$. Dans une base adaptée à la somme directe $E = E_a(u) \oplus E_0(u)$ la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
Alors, $\operatorname{Im} u = E_a(u)$ et $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.
ii) $\Rightarrow$ *iii)*. L'image $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1. Soit e un vecteur générateur de $\operatorname{Im} u$. Alors, $u(e) \in \operatorname{Im} u$ donc $u(e)$ est colinéaire à e et il existe un réel a tel que $u(e) = a \cdot e$. De plus, comme $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont en somme directe, $e \notin \operatorname{Ker} u$ et $a \neq 0$. Dans une base adaptée à la somme directe $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$, la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\operatorname{tr} u = a \neq 0$ et u est diagonalisable.

iii) $\Rightarrow$ *ii)*. On suppose que $\mathrm{tr}(u) \neq 0$. D'après la question 2, $\mathrm{Im}\, u \not\subset \mathrm{Ker}\, u$. Alors, d'après la question 3.a), $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u$, qui sont les deux sous-espaces propres de u.

5.a) On a $\psi_A(X) = 0$ si et seulement si $\mathrm{tr}(AX)J = 0$, si et seulement si $\mathrm{tr}(AX) = 0$ (car $J \neq 0$ et $\mathrm{tr}(AX) \in \mathbb{C}$). D'où, $\mathrm{Ker}\, \psi_A = \{X \ / \ \mathrm{tr}(AX) = 0\}$.
Comme $f : X \mapsto \mathrm{tr}(AX)$ est une forme linéaire non nulle (prendre $X = {}^tA$) et $J \neq 0$, alors $\mathrm{Im}\, \psi_A = \mathrm{Vect}\{J\}$. Le rang de ψ_A est ainsi égal à 1.

b) D'après la définition, $\psi_A(J) = \mathrm{tr}(AJ)J$.
- Si $\mathrm{tr}(AJ) = 0$, alors $\psi_A(J) = 0$ et $\mathrm{Im}\, \psi_A \subset \mathrm{Ker}\, \psi_A$. Alors, d'après la question 1, $\mathrm{tr}(\psi_A) = 0 = \mathrm{tr}(AJ)$.
- Si $\mathrm{tr}(AJ) \neq 0$, alors $\psi_A(J) = \mathrm{tr}(AJ)J$. D'après le calcul effectué dans la question 1, $\mathrm{tr}(\psi_A) = \mathrm{tr}(AJ)$.

Finalement, $\mathrm{tr}(\psi_A) = \mathrm{tr}(AJ)$.

c) D'après la question 4, ψ_A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(AJ) \neq 0$.

Exercice 2.7

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 2$) à coefficients réels.
On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique associée au produit scalaire donné par $\langle X|Y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^tXY$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne correspondant au produit scalaire canonique.
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si elle est symétrique et si l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ de ses valeurs propres est contenu dans $]0, +\infty[$.

1. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $T = {}^tAA$ est définie positive (où ${}^tA$ est la transposée de la matrice A).

2. Soit T une matrice définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Si X et Y sont deux vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $(X|Y) = {}^tXTY$. Montrer que l'on définit ainsi un nouveau produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On notera $\|.\|_T$ la norme euclidienne associée.

b) On note $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ pour le nouveau produit scalaire $(.|.)$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}\,\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\} = \mathrm{Vect}\,\{e_1, \cdots, e_k\}$.
Montrer que l'on peut supposer que $(e_k|\varepsilon_k) > 0$ (ce que l'on supposera désormais).

c) On désigne par P la matrice de l'identité de $\mathbb{R}^n$ dans les bases $\mathcal{B}$ (au départ) et $\mathcal{C}$ (à l'arrivée). Montrer que P est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Si $(x_1, \cdots, x_n)$ (resp. $(x'_1, \cdots, x'_n)$) sont les coordonnées du vecteur X dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$), justifier que :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En déduire que $\|X\|_T = \|PX\|$.

d) En utilisant la question précédente, montrer que $T = {}^tPP$.

3. On se place dans le cas où $n = 3$ et T est la matrice définie par :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que T est définie positive (on ne demande pas de calculer explicitement toutes les valeurs propres).

b) Déterminer une matrice A telle que $T = {}^t\!AA$, où A est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Solution de l'exercice 2.7

1. Les propriétés de la transposition d'une matrice impliquent facilement que T est symétrique. Soit λ une valeur propre de T et X un vecteur propre unitaire associé à λ. On voit que $\lambda = {}^tXTX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2 > 0$ puisque A est inversible. La matrice T est donc définie positive.

2. a) Il est clair que l'application $(X, Y) \longrightarrow (X|Y)$ est bilinéaire. Elle est symétrique car T est symétrique. Comme T est symétrique, elle peut s'écrire $T = {}^tQDQ$ où D est une matrice diagonale et Q une matrice orthogonale. On a donc ${}^tXTX = {}^t(QX)D(QX)$. Comme les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs, on voit que ${}^tXTX \geqslant 0$ et que cette quantité est égale à 0 si et seulement si $QX = 0$, c'est-à-dire $X = 0$ puisque Q est inversible. On a donc bien défini un nouveau produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) L'existence d'une base orthonormée $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ pour le nouveau produit scalaire $(.|.)$ telle que $\mathrm{Vect}\,\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\} = \mathrm{Vect}\,\{e_1, \cdots, e_k\}$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ provient du procédé d'orthonormalisation de Schmidt. On observe déjà que $(e_k|\varepsilon_k) \neq 0$; c'est évident par construction si $k = 1$ et si ce n'était pas le cas pour un entier $k \in [\![2, n]\!]$, on aurait

$$e_k \in \mathrm{Vect}\,\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{k-1}\} = \mathrm{Vect}\,\{e_1, \cdots, e_{k-1}\}$$

ce qui est absurde. Il suffit alors de remplacer ε_k par $\mathrm{sgn}((e_k|\varepsilon_k))\varepsilon_k$.

c) Comme $e_k \in \mathrm{Vect}\,\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\}$, le vecteur e_k s'écrit sous la forme $e_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i$. Or, ses composantes sur la base $\mathcal{C}$ forment la k-ième colonne de la matrice P ; la matrice P est donc triangulaire supérieure. De plus $a_k = (e_k|\varepsilon_k) > 0$, les coefficients diagonaux de P sont donc strictement positifs. La relation matricielle entre les coordonnées du vecteur X dans $\mathcal{B}$ et celles de X dans $\mathcal{C}$ correspond à la formule de changement de base du cours. Comme $x'_1, \cdots, x'_n$ sont les coordonnées de X dans la base orthonormée $\mathcal{C}$, on a $\|X\|_T^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x'_k)^2$. D'un autre côté, la relation matricielle précédente montre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x'_k)^2 = \|PX\|^2$. On a donc bien l'égalité $\|X\|_T = \|PX\|$.

d) L'égalité précédente implique donc que ${}^tXTX = {}^t(PX)PX = {}^tX({}^tPP)X$ pour tout vecteur colonne X. On en déduit que pour tout couple (X, Y) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$:

$$\begin{aligned} {}^tXTY &= \frac{1}{4}\left({}^t(X+Y)T(X+Y) - {}^t(X-Y)T(X-Y)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left({}^t(X+Y)({}^tPP)(X+Y) - {}^t(X-Y)({}^tPP)(X-Y)\right) = {}^tX({}^tPP)Y \end{aligned}$$

D'où $T = {}^tPP$.

3. a) Il est clair que T est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, et que e_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre 4. On en déduit que les autres vecteurs propres appartiennent à $\mathrm{Vect}\,\{e_1, e_3\}$ et qu'ils sont les vecteurs propres (avec conservation de la valeur propre associée) d'un endomorphisme symétrique de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On voit alors facilement que les deux valeurs propres restantes ont pour somme 6 et pour produit 1, elles sont donc strictement positives. Par suite, la matrice T est définie positive.

b) Les coefficients de la matrice triangulaire supérieure A se calculent facilement en commençant par regarder la première ligne du produit ${}^tAA$ et en tenant compte que les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs. On trouve que l'on a nécessairement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\|.\|$ la norme euclidienne canonique. On désigne par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ et par $Id_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

1. Soit $y \in \operatorname{Ker}(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \cap \operatorname{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^n})$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ y = \frac{1}{k}\,(u^k(x) - x)$$

où $u^k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ \ldots \circ u$ (k fois).

2. En déduire que $\operatorname{Ker}(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \cap \operatorname{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^n}) = \{0\}$.

3. Conclure que $\operatorname{Ker}(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \oplus \operatorname{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{R}^n$.

On dit qu'une suite $(z_N)_N$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ converge vers $z \in \mathbb{R}^n$ (que l'on note $\lim\limits_{N\to+\infty} z_N = z$) si $\lim\limits_{N\to+\infty} \|z_N - z\| = 0$.

4. Soit $y \in \operatorname{Ker}(u - Id_{\mathbb{R}^n})$. Étudier la limite de la suite :

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y)\right)_N$$

5. Soit $y \in \operatorname{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^n})$. Étudier la limite de la suite :

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y)\right)_N$$

6. En déduire que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y) = p(y)$$

où p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ que l'on caractérisera.

Solution de l'exercice 2.8

1. Si $y \in \operatorname{Ker}(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \cap \operatorname{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^n})$ alors $u(y) = y$ et $\exists\, x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = u(x) - x$. Prouvons par récurrence la propriété $y = 1/k\,(u^k(x) - x)$ pour tout entier $k \geqslant 1$ pour ce x fixé. Pour $k = 1$, elle est vérifiée.
Supposons qu'elle soit vraie pour $k \geqslant 1$, c'est-à-dire que $y = \dfrac{1}{k}\,(u^k(x) - x)$. Il vient alors :

$$y = u(y) = \frac{1}{k}\,(u(u^k(x) - x)) = \frac{1}{k}\,(u^{k+1}(x) - u(x)) = \frac{1}{k}\,(u^{k+1}(x) - y - x) \ \text{ car } y + x = u(x).$$

Ainsi, $(k+1)y = u^{k+1}(x) - x$ et il en résulte que :

$$y = \frac{1}{k+1}\,(u^{k+1}(x) - x) \text{ et donc que la propriété est vraie au rang } k+1.$$

2. Si $y \in \mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \cap \mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$, alors d'après la question 1, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = 1/k\,(u^k(x) - x)$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Ainsi, on en déduit que pour tout $k \geqslant 1$:

$$\|y\| = \frac{1}{k}\|u^k(x) - x\| \leqslant \frac{1}{k}(\|u(u^{k-1}(x))\| + \|x\|) \leqslant \frac{1}{k}(\|u^{k-1}(x)\| + \|x\|) \leqslant \frac{1}{k}(\|x\| + \|x\|) = \frac{2\|x\|}{k},$$

(où pour les seconde et troisième inégalités, on a utilisé $\|u(x)\| \leqslant \|x\|,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$). Par conséquent, on a :

$$0 \leqslant \|y\| \leqslant \frac{2\|x\|}{k} \to 0 \text{ quand } k \to +\infty$$

et il s'ensuit que $y = 0$. Or comme $\{0\} \in \mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \cap \mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$, on a $\mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \cap \mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n}) = \{0\}$.

3. D'après la question 2, $\mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$ et $\mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$ sont en somme directe. Soit $\mathcal{V} = \mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \oplus \mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$. On a donc :

$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathrm{Ker}(u - Id_{\mathbb{R}^n})) + \dim(\mathrm{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^n})) = n,$$

où la dernière égalité est une conséquence du thèorème du rang. Ainsi, $\mathcal{V}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension n, ce qui implique que $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ car $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

4. Soit $y \in \mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$; on a donc $u(y) = y$. On a ainsi :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y = y \to y \quad \text{lorsque } N \to +\infty.$$

5. Soit $y \in \mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$; il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = u(x) - x$. On a par conséquent $u^k(y) = u^{k+1}(x) - u^k(x)$ pour $k = 0, \ldots, N-1$ et donc :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(y) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(u^{k+1}(x) - u^k(x)\right) = \frac{u^N(x) - x}{N} \to 0 \quad \text{lorsque } N \to +\infty.$$

La convergence de $(u^N(x) - x)/N$ vers 0 pour $N \to +\infty$ est justifiée par le fait que $0 \leqslant \|(u^N(x) - x)/N\| \leqslant (\|u^N(x)\| + \|x\|)/N| \leqslant 2\|x\|/N \to 0$ lorsque $N \to +\infty$ (on a utilisé dans la dernière inégalité le fait que $\|u(x)\| \leqslant \|x\|,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$).

6. L'application p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (il est linéaire). Comme $\mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n}) \oplus \mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{R}^n$, $p(y) = y$ sur $\mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$ et $p(y) = 0$ sur $\mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$. Ainsi, p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(u - Id_{\mathbb{R}^n})$ (on a utilisé l'inégalité triangulaire pour montrer que la somme de deux suites de matrices convergentes converge elle aussi).

Exercice 2.9

Soit un entier $n \geqslant 2$. Dans tout l'exercice, on note $\mathrm{tr}(M)$ la trace d'une matrice carrée M d'ordre n et on note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que par convention, on a $M^0 = I$.

1. Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que M est définie positive si, pour tout élément X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXMX > 0$.

Montrer que M est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Dans la suite, A désigne une matrice symétrique non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I - A$ soit définie positive et on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, non nécessairement distinctes.

On pose, pour tout entier naturel p non nul, $u_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p-1} \mathrm{tr}(A^k)$.

2. a) Justifier que la matrice $I - A$ est inversible et établir, pour tout entier naturel p non nul, la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{2p-1} A^k = (I - A)^{-1} - A^{2p}(I - A)^{-1}$$

b) En déduire que :

$$u_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{2p}}{1-\lambda_i}$$

c) Montrer que la suite $(u_p)_{p\geq 1}$ est majorée. Est-elle convergente ? 3. On suppose de plus que la matrice A est à coefficients positifs ou nuls.
Montrer que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $|\lambda_i| < 1$.

Solution de l'exercice 2.9

1. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M.
• Supposons que M soit définie positive. Soit λ_i une valeur propre de M et X un vecteur propre associé.
On a donc ${}^tXMX > 0$, ce qui donne $\lambda_i {}^tXX > 0$, c'est-à-dire $\lambda_i \|X\|^2 > 0$.
Comme X est un vecteur propre, il est non nul et donc $\lambda_i > 0$.
• Supposons que les valeurs propres de M soient toutes strictement positives.
Comme M est symétrique réelle, il existe une matrice P orthogonale telle que $M = {}^tPDP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
On a donc ${}^tXMX = {}^tX{}^tPDPX = {}^t(PX)DPX$.
En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a donc ${}^tXMX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. Si X est non nul, alors PX est non nul puisque P est inversible et on a bien ${}^tXMX > 0$.

2. a) Comme $I - A$ est définie positive, d'après la question précédente, ses valeurs propres ne sont pas nulles, donc elle est inversible. De plus ce sont $1 - \lambda_1, \dots, 1 - \lambda_n$.
On a : $\left(\sum_{k=0}^{2p-1} A^k\right)(I - A) = I - A^{2p}$. D'où :

$$\sum_{k=0}^{2p-1} A^k = (I-A)^{-1}(I - A^{2p}) = (I-A)^{-1} - A^{2p}(I-A)^{-1}$$

b) Comme la trace est linéaire, on a : $\sum_{k=0}^{2p-1} \mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}\left((I-A)^{-1}\right) - \mathrm{tr}\left(A^{2p}(I-A)^{-1}\right)$.
La matrice A est diagonalisable et semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
La matrice $I - A$ est semblable à $\mathrm{diag}(1 - \lambda_1, \dots, 1 - \lambda_n)$.
La matrice $(I - A)^{-1}$ est semblable à $\mathrm{diag}(\frac{1}{1-\lambda_1}, \dots, \frac{1}{1-\lambda_n})$ et sa trace est donc $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_i}$.
Et enfin, la matrice A^{2p} est semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1^{2p}, \dots, \lambda_n^{2p})$ et comme les matrices de passage sont les mêmes pour toutes les matrices en jeu, on $\mathrm{tr}\left(A^{2p}(I-A)^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{2p}}{1-\lambda_i}$.
Finalement : $u_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{2p}}{1-\lambda_i}$.
On a $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{2p}}{1-\lambda_i} \geq 0$ (grâce à la puissance paire des λ_i et car $1 - \lambda_i > 0$) et donc : $u_p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_i}$.
La suite (u_p) ne converge pas forcément, par exemple lorsque $A = \mathrm{diag}(-1, 0, \dots, 1)$.

3. Si on suppose que A est à coefficients positifs, on a $\mathrm{tr}(A^k)$ est positif. La suite des sommes partielles de la série de terme général $\mathrm{tr}(A^k)$ est croissante et, d'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=1}^{p} \mathrm{tr}(A^k) \leqslant \sum_{k=1}^{2p-1} \mathrm{tr}(A^k) = u_p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_k}$$

La suite des sommes partielles est croissante et majorée, donc convergente. La série de terme général $\mathrm{tr}(A^k)$ étant convergente, son terme général tend vers 0. Ainsi, comme $0 \leqslant \lambda_j^{2k} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^{2k} \to 0$, ceci prouve que $|\lambda_i| < 1$.

Exercice 2.10

Soit un entier $p \geqslant 2$. On considère l'espace $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée notés respectivement $\langle\ ,\ \rangle$ et $\|.\|$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de E. La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les valeurs propres de la matrice ${}^tAA$ sont toutes réelles positives.
On note c la plus grande des valeurs propres de ${}^tAA$.

2. a) Montrer que pour tout $X \in E, ||AX||^2 \leqslant c||X||^2$.
b) Établir pour tout couple (X, Y) de vecteurs de E et tout entier naturel k non nul, l'inégalité suivante :

$$|\langle A^k X, Y\rangle| \leq c^{\frac{k}{2}} \|X\| \times \|Y\|$$

On dit qu'une suite de matrices $(U_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une matrice U si chacun des coefficients de U_n converge vers le coefficient de U correspondant.

3. a) Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{\langle A^k e_j, e_i\rangle}{k!}$.
b) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice B_n par :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$$

Montrer que la suite (B_n) converge vers une matrice notée C.
c) Exprimer les valeurs propres de C en fonction des valeurs propres de A.

Solution de l'exercice 2.10

1. La matrice ${}^tAA$ est symétrique, donc ses valeurs propres sont réelles.
De plus, pour tout vecteur propre X, on a ${}^tAAX = \lambda X$. En multipliant par ${}^tX$:

$${}^tX{}^tAAX = \lambda{}^tXX \text{ soit } \|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2$$

Comme X est non nul, on a : $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0$.

2. a) De plus ${}^tAA$ est diagonalisable dans une base orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, où les ε_i sont associés aux valeurs propres λ_i.
Tout vecteur X s'écrit donc $X = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \varepsilon_k$. On a donc ${}^tAAX = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda_k \varepsilon_k$ D'où :

$${}^tX{}^tAAX = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^2 \lambda_k \text{ soit } \|AX\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^2 \lambda_k$$

En notant c la plus grande des valeurs propres, on a bien : $\|AX\|^2 \leq c\|X\|^2$.
b) On a donc, par une simple récurrence : $\|A^k X\|^2 \leq c^k \|X\|^2$.
Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\Big(\langle A^k X, Y\rangle\Big)^2 \leqslant \|A^k X\|^2 \|Y\|^2$$

Ce qui donne bien : $\Big(\langle A^kX, Y\rangle\Big)^2 \leq c^k\|X\|^2\|Y\|^2$.

Et en prenant la racine : $|\langle A^kX, Y\rangle| \leq c^{\frac{k}{2}}\|X\|\|Y\|$.

3. a) En appliquant l'inégalité précédente, on obtient :

$$\left|\frac{\langle A^k e_j, e_i\rangle}{k!}\right| \leqslant c^{\frac{k}{2}}\frac{\|e_j\|\|e_j\|}{k!}$$

Et comme la base canonique est orthonormale pour le produit scalaire canonique, on a :

$$\left|\frac{\langle A^k e_j, e_i\rangle}{k!}\right| \leqslant\ c^{\frac{k}{2}}\frac{1}{k!}$$

Le critère de comparaison des séries à termes positifs permet de conclure à la convergence absolue et donc à la convergence de la série considérée.

b) On constate que le terme général de la matrice $\dfrac{1}{k!}A^k$ n'est autre que $\dfrac{\langle A^k e_j, e_i\rangle}{k!}$. La série de somme partielle B_n est donc convergente.

c) Si $AX = \lambda X$, on a alors :

$$B_nX = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^kX = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\lambda^kX = \Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\Big)X$$

On montre que si la suite de matrices $(B_n)_n$ converge vers une matrice C, alors pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, la suite de vecteurs $(B_nX)_n$ converge vers le vecteur CX.
En passant ainsi à la limite, il vient $CX = e^{\lambda}X$.

Exercice 2.11

Soit x un réel strictement positif et n un entier naturel non nul. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et on note E_n l'ensemble défini par :

$$E_n = \{A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})\ ;\ A^2 + x^2I = 0\,;\ {}^tAA = A{}^tA\}$$

1. a) Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique (e_1, e_2) et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$f(e_1) = -xe_2, \quad f(e_2) = xe_1$$

Calculer $f \circ f$.

b) En déduire que $E_n \neq \emptyset$.

2. Soit S une matrice symétrique réelle. On note $\mathrm{Sp}(S)$ l'ensemble des valeurs propres de S. Établir l'équivalence suivante :

$$\big(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0\big) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$$

Dans la suite, A désigne une matrice de E_n.

3. On pose $S = {}^tAA$. Montrer que $S^2 = x^4I$, puis que $S = x^2I$.

4. a) On pose $B = \dfrac{1}{x}A$. Calculer $({}^tB + B)B$.

b) Montrer que l'ensemble E_n est constitué des matrices de la forme xB où B est à la fois orthogonale et antisymétrique.

Solution de l'exercice 2.11

1. a) Un calcul immédiat donne $f^2 + x^2 Id = 0$.

b) On généralise en dimension $2n$ en considérant l'endomorphisme f par son action sur la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{r}
f(e_1) = -xe_2 \\
f(e_2) = xe_1 \\
\vdots \\
f(e_{2k-1}) = -xe_{2k} \\
f(e_{2k}) = xe_{2k-1} \\
\vdots \\
f(e_{2n-1}) = -xe_{2n} \\
f(e_{2n}) = xe_{2n-1}
\end{array}\right.$$

On constate alors que, pour tout $j \in [\![1, 2n]\!]$, on a $f^2(e_j) = -x^2 e_j$ et donc $f^2 = -x^2 Id$.

Ainsi, la matrice A suivante (matrice de f dans la base canonique) est élément de E_n :

$$A = \begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

2. • Supposons que pour tout X, ${}^tXSX \geq 0$. On applique cette relation à un vecteur propre X (donc non nul) associé à la valeur propre λ. On obtient : $\lambda \|X\|^2 \geqslant 0$. Comme $X \neq 0$, on en déduit bien $\lambda \geq 0$.
• Supposons $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$. La matrice S est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. Il existe donc une matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots, \lambda_n)$ et une matrice P orthogonale telles que :

$${}^tXSX = {}^tX{}^tPDPX = {}^t(PX)DPX$$

En posant : $PX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a donc : ${}^tXSX = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_i y_i^2$.
Comme les λ_i sont positifs, on a bien ${}^tXSX \geq 0$.

3. La matrice S est symétrique et comme ${}^tXSX = {}^tX{}^tAAX = \|AX\|^2$, S est positive. De plus :

$$S^2 = {}^tAA{}^tA{}^tAA = ({}^tA)^2 A^2 = {}^t(A^2)A^2 = (-x^2 I)(-x^2 I) = x^4 I$$

Ainsi S s'écrit $S = PD{}^tP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \geq 0$. On a : $S^2 = P(D^2){}^tP = x^4 I$ d'où $D^2 = x^4 I$.
Les λ_i vérifient donc tous $\lambda_i^2 = x^4$. Comme les λ_i sont des réels positifs, on a $\lambda_i = x^2$ et donc $S = x^2 I$.

4. a) La matrice B est orthogonale puisque ${}^tBB = \dfrac{1}{x^2} S = I$ et elle vérifie $B^2 = \dfrac{1}{x^2} A^2 = -I$. On a donc : $({}^tB + B)B = {}^tBB + B^2 = 0$.

b) Comme B est inversible, les relations précédentes montrent que B est orthogonale et antisymétrique. Réciproquement, soit B une matrice orthogonale et antisymétrique. Posons $A = xB$. On vérifie facilement que ${}^tAA = A{}^tA$ et que $A^2 + x^2 I = 0$.
Conclusion : E_n est constitué des matrices de la forme xB où B est à la fois orthogonale et antisymétrique.

Exercice 2.12

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée.
Soit T l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ T(M) = AM$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que T est bijectif si et seulement si la matrice A est inversible.

3. Dans cette question, on suppose que la matrice A est diagonalisable. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres et $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on pose $M_{i,j} = X_i{}^tX_j$.
Montrer que la famille $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de T.

4. Dans cette question, on suppose que A admet au moins une valeur propre μ et donc un vecteur propre X associé. On suppose que T est diagonalisable. Soit $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de T.
a) Soit Φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \Phi(M) = MX$.
Montrer que Φ est surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
b) En déduire que A est diagonalisable.

Solution de l'exercice 2.12

1. L'application T est manifestement un endomorphisme de E.

2. Si A est inversible, l'équation $AM = N$ admet une unique solution $M = A^{-1}N$ et T est bijective.
Si T est bijective, la matrice identité I de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet un unique antécédent par T : il existe une unique matrice B telle que $AB = I$, ce qui entraîne que A est inversible.

3. Quel que soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, la matrice $M_{i,j}$ est de rang 1 et ce n'est pas la matrice nulle. On a :

$$T(M_{i,j}) = AX_i{}^tX_j = \lambda_i X_i{}^tX_j = \lambda_i M_{i,j}$$

Ainsi, $M_{i,j}$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ_i. Il reste à montrer que la famille $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est libre.
Soit $\displaystyle\sum_{i,j} \alpha_{i,j} X_i{}^tX_j = 0$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Multiplions à gauche par ${}^tX_k$. Il vient :

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j}({}^tX_k X_i){}^tX_j = 0 \Rightarrow \sum_j \Big(\sum_i \alpha_{i,j}({}^tX_k X_i)\Big)\,{}^tX_j = 0$$

Par liberté de la famille (X_j), on a, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_i \alpha_{i,j}{}^tX_k X_i = {}^tX_k \Big(\sum_i \alpha_{i,j} X_i\Big) = 0$$

Donc, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_i \alpha_{i,j} X_i = 0$, donc $\alpha_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

4. a) Soit $X \neq 0$ tel que $AX = \mu X$. Soit $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(M_{i,j}X)$. La famille $(M_{i,j})$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe une matrice M telle que $MX = Y$ puisque $X \neq 0$. Ainsi $\mathcal{F} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
En effet, si $(X, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et si g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M, on pose $g(X) = Y$ et pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $g(e_i) = e_i$ (par exemple).
b) On peut donc extraire de la famille $(M_{i,j}X)$, une base $(M_1X, \ldots, M_nX)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a alors

$$\lambda_i M_i = T(M_i) \Rightarrow \lambda_i M_i X = AM_i X$$

ce qui montre que A est diagonalisable.

Exercice 2.13

Soit un entier $n \geqslant 2$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et de la norme euclidienne $|| \ ||$ associée. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que la matrice $I_n - {}^tAA$ est de rang 1 et que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $||AX|| \leqslant ||X||$.

1. Montrer que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable et que ses valeurs propres appartiennent à l'intervalle $[0,1]$.

2. Montrer que la matrice $I_n - {}^tAA$ est diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

3. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. On pose, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\Phi_Y(X) = ({}^tYX)\ Y$$

a) Montrer que Φ_Y est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de rang 1.
b) Montrer qu'il existe $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(I_n - {}^tAA)X = \Phi_{Y_0}(X)$.
c) Déterminer l'ensemble des vecteurs $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (I_n - {}^tAA)X = \Phi_Z(X).$$

d) Comparer $||Y_0||$ et 1.

e) Montrer que l'égalité $||AX|| = ||X||$ est vérifiée si et seulement si $X \in \big(\mathrm{Vect}(Y_0)\big)^{\perp}$.

4. Soit une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (I_n - {}^tBB)X = \Phi_Y(X).$$

Trouver en fonction de Y un majorant et un minorant de l'ensemble des valeurs absolues des valeurs propres réelles de B. Pour Y donné, existe-t-il une matrice B qui a pour valeurs propres le majorant et le minorant trouvés ?

Solution de l'exercice 2.13

1. La matrice ${}^tAA$ est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Si λ est valeur propre associée au vecteur propre X, alors ${}^tX{}^tAAX = ||AX||^2$ et ${}^tX{}^tAAX = \lambda|XX||^2$, donc $\lambda \geqslant 0$. Comme $||AX|| \leqslant ||X||$, on a de même $\lambda \leqslant 1$.

2. Les vecteurs propres de ${}^tAA$ sont vecteur propres de $I_n - {}^tAA$ et si λ est une valeur propres de ${}^tAA$, alors $1-\lambda$ est valeur propre de $I_n - {}^tAA$. Ainsi d'après la question précédente les valeurs propres de $I_n - {}^tAA$ appartiennent aussi à $[0,1]$.
De plus comme $I_n - {}^tAA$ est de rang 1 il y a une seule valeur propre non nulle (élement de $]0,1]$).

3. a) Le fait que Φ_Y soit un endomorphisme est évident.
On a $\mathrm{rg}(\Phi_Y) = 1$, puisque pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\Phi_Y(X) \in \mathrm{Vect}(Y)$ et puisque $\Phi_Y(Y) = ||Y||^2 Y \neq 0$.

b) Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée de vecteurs propres de ${}^tAA$ où $e_1, \ldots, e_{n-1}$ sont associé à la valeur propre 1 et e_n à la valeur propre $\lambda \neq 1$. Par analyse/synthèse.
Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!], (I_n - {}^tAA)(e_i) = 0$ entraîne que $e_i \in \mathrm{Vect}(Y)^{\perp}$.
$(I_n - {}^tAA)(e_n) = (1-\lambda)e_n$ entraîne que $(1-\lambda)e_n = \langle Y, e_n\rangle Y$. Si l'on pose $Y = \alpha e_n$, alors $(1-\lambda)e_n = \langle Y, e_n\rangle Y$ entraîne que $\alpha^2 = 1-\lambda$, soit $\alpha = \pm\sqrt{1-\lambda}$.
La synthèse est désormais évidente.

c) La démonstration précédente montre qu'il existe deux vecteurs répondant à la question qui sont $\pm(\sqrt{1-\lambda})e_n$.

d) Comme $\lambda \in [0,1[$, on a $||Y_0|| \leqslant 1$.

e) On a les équivalences suivantes :

$$||AX||^2 = ||X||^2 \Leftrightarrow \langle X, (I_n - {}^tAA)(X)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle X, \Phi_{Y_0}(X)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle X, Y_0\rangle^2 = 0$$

4. Soit B une telle matrice et (μ, X) tels que $BX = \mu X$ et $X \neq 0$. Alors :

$$\langle X, (I_n - {}^tBB)(X)\rangle = \langle X, \Phi_Y(X)\rangle = \langle X, Y\rangle^2$$

Or :

$$\langle X, (I_n - {}^tBB)(X)\rangle = ||X||^2 - ||BX||^2 = ||X||^2(1-\mu^2)$$

Alors, par Cauchy Schwarz, on a :

$$0 \leqslant ||X||^2(1-\mu^2) = \langle X, Y\rangle^2 \leqslant ||X||^2\ ||Y||^2 \Leftrightarrow 1 - ||Y||^2 \leqslant \mu^2 \leqslant 1$$

Ainsi $|\mu| \in [\sqrt{1-||Y||^2}, 1]$.

Pour montrer que ces bornes sont atteintes, on choisit $e_n = \dfrac{Y}{||Y||}$ qu'on complète en une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$.

On définit la matrice qui est la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme qui a pour matrice $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \sqrt{1-||Y||^2})$ dans la base $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$. On a :

$$I_n - {}^tBB = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, ||Y||^2) = M_{\Phi_Y(e_1,\ldots,e_n)}$$

Exercice 2.14

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E. On note $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{rg}(g)$ leurs rangs respectifs.
Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = i + j$.
Soit $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{i,j} = i$.

2. a) Déterminer une relation entre A, B et ${}^tB$.

b) En déduire le rang de A.

c) En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.

d) Justifier que A est diagonalisable et exprimer $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A^2)$ en fonction des valeurs propres de A.

3. a) Exprimer $\mathrm{tr}(A^2)$ en fonction de $\mathrm{tr}(B^2)$ et $\mathrm{tr}({}^tBB)$.

b) En déduire $\mathrm{tr}(A^2)$ en fonction de n.

c) Déterminer toutes les valeurs propres de A.

Solution de l'exercice 2.14

1. On montre facilement que $\mathrm{Im}(f+g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
La formule de Grassmann permet de conclure que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
a) On a :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Un calcul immédiat donne : $B + {}^tB = A$.

b) On remarque que B et ${}^tB$ sont des matrices de rang 1. Par la question 1, et (éventuellement) les endomorphismes canoniquement associés aux matrices, on a : $\mathrm{rg}(A) \leqslant \mathrm{rg}(B) + \mathrm{rg}({}^tB) = 1 + 1 = 2$.

Enfin en remarquant que les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles, on peut écrire : $\mathrm{rg}(A) = 2$.

c) Ainsi 0 est valeur propre de A de sous-espace propre associé $\operatorname{Ker} A$ qui est de dimension $n-2 \geqslant 1$ car $n \geqslant 3$.

d) La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Il manque donc deux valeurs propres λ_1 et λ_2 et $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\mathrm{tr}(A^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

3. a) On utilise les questions précédentes pour écrire :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A^2) &= \mathrm{tr}\left((B + {}^tB)^2\right) = \mathrm{tr}(B^2) + \mathrm{tr}(B\,{}^tB) + \mathrm{tr}({}^tBB) + \mathrm{tr}(({}^tB)^2) \\ &= 2\,\mathrm{tr}(B^2) + 2\,\mathrm{tr}({}^tBB)\end{aligned}$$

Cette dernière propriété est obtenue soit par un calcul direct, soit en utilisant la propriété (hors programme) $\mathrm{tr}(CD) = \mathrm{tr}(DC)$.
b) On calcule :

$$\mathrm{tr}(B^2) = \mathrm{tr}\left(\frac{n(n+1)}{2}B\right) = \frac{n(n+1)}{2}\,\mathrm{tr}(B) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Et $\mathrm{tr}({}^tBB) = \dfrac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$, d'où $\mathrm{tr}(A^2) = \dfrac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$.

c) On peut alors écrire : $S = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$ et $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \dfrac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$.

Donc $P = \lambda_1\lambda_2 = \dfrac{n^2(1-n^2)}{12}$.
Finalement, λ_1 et λ_2 sont solutions de l'équation :

$$X^2 - SX + P = 0 \Longleftrightarrow X^2 - n(n+1)X + \frac{n^2(1-n^2)}{12} = 0.$$

On calcule le discriminant associé à l'équation précédente et on trouve :

$$\lambda_1 = \frac{n(n+1) + \sqrt{2n^2(n+1)(2n+1)/3}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{n(n+1) - \sqrt{2n^2(n+1)(2n+1)/3}}{2}.$$

Exercice 2.15

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On rappelle que la forme quadratique q associée à A est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad q(x) = {}^tXAX$$

où X est la matrice de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dont les composantes sont les coordonnées du vecteur x dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
La forme quadratique q est définie positive si pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0 \Rightarrow q(x) > 0$.

Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on note q_r la forme quadratique associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix}$.

1.a) Montrer que q_r est définie positive si et seulement si $|r| < 1$.

b) Soit Q_1 et Q_2 deux formes quadratiques définies positives sur $\mathbb{R}^2$.
Justifier l'existence d'un réel $c > 0$ qui vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ Q_1(x) \leqslant c \times Q_2(x)$.

2. Soit a un réel tel que $0 < a \leqslant 1$. Soit z_1 et z_2 deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans l'intervalle $[a, +\infty[$.

On suppose que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a : $\begin{cases} z_1'(t) = z_1(t)\big(z_2(t) - 2z_1(t)\big) \\ \\ z_2'(t) = z_2(t)\big(z_1(t) - 2z_2(t)\big) \end{cases}$.

On pose : $\forall t \geqslant 0,\ z(t) = \big(z_1(t), z_2(t)\big)$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que :

$$\forall t \geqslant 0,\ f(t) = q_{\frac{1}{2}}\big(z(t)\big)$$

On admet sans démonstration que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $f'(t) = -z_1(t)\big(2z_1(t) - z_2(t)\big)^2 - z_2(t)\big(2z_2(t) - z_1(t)\big)^2$.

a) Établir l'inégalité : $\forall t \geqslant 0,\ f'(t) \leqslant -5\,a \times q_{\frac{4}{5}}\big(z(t)\big)$.

b) Montrer qu'il existe un réel $\theta > 0$ tel que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $f'(t) \leqslant -\theta\, f(t)$.

c) À l'aide de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{\theta\, t}$, montrer que : $\forall t \geqslant 0,\ f(t) \leqslant f(0)\,\mathrm{e}^{-\theta\, t}$.

d) En déduire la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 2.15

1.a) On note $x = (x_1, x_2)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ q_r(x) = x_1^2 - 2\,r x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 - r x_2)^2 + (1 - r^2)\,x_2^2$,
Donc : $(\forall x \neq 0, q_r(x) > 0) \Longleftrightarrow 1 - r^2 > 0 \Longleftrightarrow |r| < 1$.

b) D'après le cours, on sait qu'il existe deux réels strictement positifs α_1 et β_1 tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \alpha_1(x_1^2 + x_2^2) \leqslant Q_1(x) \leqslant \beta_1(x_1^2 + x_2^2) \qquad (1)\,.$$

De même, il existe deux réels strictement positifs α_2 et β_2 tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \alpha_2(x_1^2 + x_2^2) \leqslant Q_2(x) \leqslant \beta_2(x_1^2 + x_2^2) \qquad (2)\,.$$

Les relations (1) et (2) entraînent que $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ Q_1(x) \leqslant \beta_1(x_1^2 + x_2^2) \leqslant \dfrac{\beta_1}{\alpha_2}\, Q_2(x)$.

On voit qu'en posant $c = \dfrac{\beta_1}{\alpha_2}$, l'inégalité proposée est vérifiée.

2. Pour tout $t \geqslant 0,\ f(t) = q_{\frac{1}{2}}\big(z(t)\big) = q_{\frac{1}{2}}\big(z_1(t), z_2(t)\big) = z_1^2(t) - z_1(t)z_2(t) + z_2^2(t)$. En dérivant par rapport à t, on a : $f'(t) = \big(2z_1(t) - z_2(t)\big)z_1'(t) + \big(2z_2(t) - z_1(t)\big)z_2'(t)$. D'après la définition de $z_1'(t)$ et $z_2'(t)$, on obtient :

$$\forall t \geqslant 0,\ f'(t) = -z_1(t)\big(2z_1(t) - z_2(t)\big)^2 - z_2(t)\big(2z_2(t) - z_1(t)\big)^2$$

a) Pour tout $t \geqslant 0,\ z_1(t) \geqslant a$ et $z_2(t) \geqslant a \Longrightarrow f'(t) \leqslant -a\big(2z_1(t) - z_2(t)\big)^2 - a\big(2z_2(t) - z_1(t)\big)^2$,
soit encore : $\forall t \geqslant 0,\ f'(t) \leqslant -a\big(5z_1^2(t) - 8z_1(t)z_2(t) + 5z_2^2(t)\big) = -5\,a\,q_{\frac{4}{5}}\big(z(t)\big)$

b) Puisque $\left|\dfrac{4}{5}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, les formes quadratiques $q_{\frac{4}{5}}$ et $q_{\frac{1}{2}}$ sont définies positives.

Par suite, il existe un réel $c > 0$ tel que $q_{\frac{4}{5}}\big(z(t)\big) \geqslant c\,q_{\frac{1}{2}}\big(z(t)\big)$, ce qui conduit à : $\forall t \geqslant 0,\ f'(t) \leqslant -5\,acf(t)$, soit en posant $\theta = 5\,ac > 0$, $\forall t \geqslant 0,\ f'(t) \leqslant -\theta f(t)$.

c) L'étude de la fonction φ donne : $\forall t \geqslant 0,\ \varphi'(t) = \mathrm{e}^{\theta\, t}\big(f'(t) + \theta f(t)\big) \leqslant 0$ d'après ce qui précède.
Donc, φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $\forall t \geqslant 0,\ \varphi(t) \leqslant \varphi(0) = f(0)$. En définitive, $\forall t \geqslant 0,\ \varphi(t) \leqslant f(0) \Longleftrightarrow \forall t \geqslant 0,\ f(t)\,\mathrm{e}^{\theta\, t} \leqslant f(0) \Longleftrightarrow \forall t \geqslant 0,\ f(t) \leqslant f(0)\,\mathrm{e}^{-\theta\, t}$.

d) On a $\forall t \geqslant 0,\ f(t) = q_{\frac{1}{2}}\big(z(t)\big) > 0$ puisque $q_{\frac{1}{2}}$ est définie positive.
Ainsi : $0 < f(t) \leqslant f(0)\,\mathrm{e}^{-\theta\, t} \Longrightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ (par encadrement).

Exercice 2.16

Soient deux entiers $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Le rang d'un endomorphisme f de E est noté $\mathrm{rg}(f)$ et id_E désigne l'endomorphisme identité de E.
On note $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E.

1. Soit $F_1, F_2, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E vérifiant $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k$. Pour chaque $i \in [\![1,k]\!]$, on note p_i le projecteur de E sur F_i parallèlement au sous-espace $G_i = \displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k} F_j$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg}(p_i) = n$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{id}_E$.

c) Montrer que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$, on a : $p_j \circ p_i = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. Dans cette question, soit $q_1, q_2, \ldots, q_k$ des endomorphismes de E tous non nuls et tels que :

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_k = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(q_1) + \mathrm{rg}(q_2) + \cdots + \mathrm{rg}(q_k) \leqslant n\,.$$

a) Montrer que $E = \mathrm{Im}(q_1) \oplus \mathrm{Im}(q_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(q_k)$.

b) Montrer que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, l'endomorphisme q_i est un projecteur de E et que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$, on a : $q_i \circ q_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

c) Montrer que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, q_i est le projecteur sur $\mathrm{Im}(q_i)$ parallèlement à $K_i = \displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k} \mathrm{Im}(q_j)$.

Solution de l'exercice 2.16

1.a) Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $\mathrm{Im}(p_i) = F_i$, donc $\mathrm{rg}(p_i) = \dim F_i$. Par suite, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg}(p_i) = \sum_{i=1}^{k} \dim F_i = \dim E$.

b) Soit $x \in E$. Notons $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ l'unique k-uplet appartenant à $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_k$ tel que $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j$.

Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $x = x_i + \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k} x_j$. De plus, $x_i \in F_i$ et $\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k} x_j \in G_i$, donc $x_i = p_i(x)$.

Il s'ensuit que pour tout $x \in E$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i(x) = x$, c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{id}_E$.

c) Soit un couple $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$. Comme $\mathrm{Im}(p_i) = F_i \subset G_j = \mathrm{Ker}(p_j)$, on a $p_j \circ p_i = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2.a) $E = \mathrm{Im}(q_1 + q_2 + \cdots + q_k) \subset \mathrm{Im}(q_1) + \mathrm{Im}(q_2) + \cdots + \mathrm{Im}(q_k) \subset E \Longrightarrow E = \mathrm{Im}(q_1) + \mathrm{Im}(q_2) + \cdots + \mathrm{Im}(q_k)$.
D'autre part, $\dim(\mathrm{Im}\, q_1) + \dim(\mathrm{Im}\, q_2) + \cdots + \dim(\mathrm{Im}\, q_k) \geqslant \dim\big(\mathrm{Im}(q_1) + \mathrm{Im}(q_2) + \cdots + \mathrm{Im}(q_k)\big) = \dim E = n$.
Donc, $\dim(\mathrm{Im}\, q_1) + \dim(\mathrm{Im}\, q_2) + \cdots + \dim(\mathrm{Im}\, q_k) = n$ et la somme $\mathrm{Im}(q_1) + \mathrm{Im}(q_2) + \cdots + \mathrm{Im}(q_k)$ est directe.

b) Soit $j \in [\![1,k]\!]$. Pour tout $x \in E$, on a $q_1 \circ q_j(x) + q_2 \circ q_j(x) + \cdots + q_k \circ q_j(x) = q_j(x)$, relation que l'on peut également écrire : $\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{k} q_i \circ q_j(x) + \big(q_j^2(x) - q_j(x)\big) = 0_E$.

Or, pour tout $i \in [\![1,k]\!] \backslash \{j\}$, $q_i \circ q_j(x) \in \mathrm{Im}\,(q_i)$ et $\left(q_j^2(x) - q_j(x)\right) \in \mathrm{Im}\,(q_j)$. La somme $\mathrm{Im}(q_1) + \mathrm{Im}(q_2) + \cdots + \mathrm{Im}(q_k)$ étant directe, on en déduit d'une part que pour tout $i \in [\![1,k]\!] \backslash \{j\}$ et $\forall\, x \in E$, on a $q_i \circ q_j(x) = 0_E$ et d'autre part que, pour tout $x \in E$, on a $q_j^2(x) - q_j(x) = 0_E$.

c) Soit $i \in [\![1,k]\!]$. Comme q_i est un projecteur, il projette sur $\mathrm{Im}(q_i)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(q_i)$. Il faut donc juste prouver que $\mathrm{Ker}(q_i) = K_i$.

On a, pour tout $j \in [\![1,k]\!] \backslash \{i\}$, $\mathrm{Im}(q_j) \subset \mathrm{Ker}(q_i)$ (car $q_i \circ q_j = 0$). Donc : $K_i \subset \mathrm{Ker}(q_i)$.
Or, d'après la définition de K_i, puis 2. b, puis le théorème du rang, on a :

$$\dim K_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \mathrm{rg}(q_j) = n - \mathrm{rg}(q_i) = \dim(\ker(q_i)).$$

Comme $K_i \subset \mathrm{Ker}(q_i)$ et $\dim K_i = \dim(\ker(q_i))$, on a bien $\mathrm{Ker}(q_i) = K_i$.

Exercice 2.17

Soit E un espace vectoriel de dimension n, où $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

1. Soit u un endomorphisme de E. Le but de cette question est de montrer qu'il existe un endomorphisme w de E tel que $u = u \circ w \circ u$. On note r le rang de u .
a) Traiter les cas $r = 0$ et $r = n$.

b) On suppose maintenant que $r \in [\![1, n-1]\!]$.
i) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ soit libre et telle que, pour tout entier $i \in [\![r+1, n]\!]$, $u(e_i) = 0$.
ii) En déduire l'existence de w.

Pour tout endomorphisme f de E , on note Φ_f l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall g \in \mathcal{L}(E), \Phi_f(g) = f \circ g - g \circ f$$

On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.

2. a) Montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ que pour tout endomorphisme g de E, on a :

$$(\Phi_f)^m(g) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f^{m-k} \circ g \circ f^k$$

b) Montrer que Φ_f est nilpotent.

3. Montrer que $f^{p-1} \in \mathrm{Im}\left((\Phi_f)^{2p-2}\right)$.

4. Préciser l'indice de nilpotence de Φ_f , c'est-à-dire le plus petit entier q tel que $(\Phi_f)^q = 0$.

Solution de l'exercice 2.17

1. a) Si $r = 0$, alors $u = 0$ et donc tout endomorphisme w convient. Si $r = n$, alors u est bijectif et $w = u^{-1}$ convient.

b) On suppose maintenant que $r \in [\![1, n-1]\!]$.
i) Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = n - r > 0$. On considère $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}\, u$. Le théorème de la base incomplète assure qu'il existe r vecteurs $e_1, \ldots, e_r$ tels que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Puisque, pour tout $i \in [\![r+1, n]\!]$, $e_i \in \mathrm{Ker}\, u$, alors $u(e_i) = 0$. Par ailleurs, considérons r réels $a_1, \ldots, a_r$ tels que $a_1 u(e_1) + \ldots + a_r u(e_r) = 0$. Alors $a_1 e_1 + \ldots + a_r e_r \in \mathrm{Ker}\, u$. Or, $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont en somme directe, donc $a_1 e_1 + \ldots + a_r e_r = 0$, d'où $a_1 = \ldots = a_r = 0$: la famille est libre.

ii) On remarque que la restriction de u à $\mathrm{Vect}\,(e_1,\ldots,e_r)$ est un isomorphisme de $\mathrm{Vect}\,(e_1,\ldots,e_r)$ sur $\mathrm{Vect}\,(u\,(e_1)\,,\ldots,u\,(e_r))$ (la surjectivité est évidente et l'égalité des dimensions aussi). Notons u cette restriction et considérons N un supplémentaire de $\mathrm{Vect}\,(u\,(e_1)\,,\ldots,u\,(e_r))$ dans E. On définit alors l'endomorphisme w de E de la façon suivante : w est nul sur N et w coïncide avec $(u)^{-1}$ sur $\mathrm{Vect}\,(u\,(e_1)\,,\ldots,u\,(e_r))$, de sorte que $w\,(u\,(e_i)) = e_i$ si $i \in [\![1,r]\!]$. On a alors : $\forall i \in [\![r+1,n]\!]$, $(u\circ w\circ u)\,(e_i) = 0 = u\,(e_i)$ et : $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $(u\circ w\circ u)\,(e_i) = u\,(e_i)$, donc $u\circ w\circ u = u$.

2. a) L'égalité est vraie pour $m=1$: il s'agit de la définition de Φ_f. Soit m tel que l'égalité soit vraie au rang m. On a alors, pour tout endomorphisme g de E :

$$\begin{aligned}(\Phi_f)^{m+1}(g) &= \Phi_f\left((\Phi_f)^m(g)\right) = f\circ(\Phi_f)^m(g) - (\Phi_f)^m(g)\circ f\\ &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f^{m-k+1}\circ g\circ f^k - \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f^{m-k}\circ g\circ f^{k+1}\\ &= f^{m+1}\circ g + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k\left[\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right]f^{m-k+1}\circ g\circ f^k + g\circ f^{m+1}\\ &= \sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}f^{m+1-k}\circ g\circ f^k\end{aligned}$$

b) Pour tout $g\in\mathcal{L}(E)$, $(\Phi_f)^{2p-1}(g) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p-1}(-1)^k\binom{2p-1}{k}f^{2p-1-k}\circ g\circ f^k$.

Or, $f^{2p-1-k}=0$ si $k\leqslant p-1$ et $f^k=0$ si $k\geqslant p$, donc $(\Phi_f)^{2p-1}(g)=0$. Ceci est vrai pour tout $g\in\mathcal{L}(E)$ donc $(\Phi_f)^{2p-1}=0$. Ainsi, Φ_f est nilpotent.

3. Soit w un endomorphisme tel que $f^{p-1}\circ w\circ f^{p-1}=f^{p-1}$. On a :

$$(\Phi_f)^{2p-2}(w) = \sum_{k=0}^{2p-2}(-1)^k\binom{2p-2}{k}f^{2p-2-k}\circ w\circ f^k$$

Or, $f^{2p-2-k}=0$ si $k\leqslant p-2$ et $f^k=0$ si $k\geqslant p$, donc il ne reste que le terme correspondant à $k=p-1$:

$$(\Phi_f)^{2p-2}(w) = (-1)^{p-1}\binom{2p-2}{p-1}f^{p-1}\circ w\circ f^{p-1} = (-1)^{p-1}\binom{2p-2}{p-1}f^{p-1}$$

On en déduit que :

$$f^{p-1} = (\Phi_f)^{2p-2}\left(\frac{(-1)^{p-1}}{\binom{2p-2}{p-1}}w\right) \Rightarrow f^{p-1}\in\mathrm{Im}\left((\Phi_f)^{2p-2}\right)$$

4. Si l'on prend pour p l'indice de nilpotence de f, on a vu à la question 2.b) que $(\Phi_f)^{2p-1}=0$. Or, $f^{p-1}\neq 0$ donc d'après la question 3, $(\Phi_f)^{2p-2}\neq 0$ et donc l'indice de nilpotence de Φ_f est égal à $2p-1$.

Exercice 2.18

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients réels. On considère l'espace vectoriel $E=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\,,\rangle$ tel que pour tout $(X,Y)\in E^2$, on a $\langle X,Y\rangle = {}^tXY$. Pour toute matrice $A\in\mathcal{S}_n$, on pose :

$$\forall\, X\in E,\ q_A(X) = {}^tXAX$$

L'ensemble $\mathcal{S}_n^+$ désigne l'ensemble des matrices A de $\mathcal{S}_n$ telles que $q_A(X)\geqslant 0$ pour tout X de E. On pose :

$$C(q_A) = \{X\in E,\ \ q_A(X)=0\}.$$

1. Calculer le gradient de q_A, noté $\nabla q_A(X)$, en tout point X de E.

2. Dans cette question, on suppose que $A \in \mathcal{S}_n^+$.

a) Montrer que q_A présente un minimum global sur E en tout $X \in C(q_A)$.

b) En déduire que $C(q_A) = \operatorname{Ker} A$.

3. On suppose qu'il existe $U \in E$ et $V \in E$ tels que $q_A(U) > 0$ et $q_A(V) < 0$.

a) Montrer que (U, V) est une famille libre de E et qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 distincts vérifiant :

$$q_A(U + \lambda_1 V) = q_A(U + \lambda_2 V) = 0$$

b) Dans ce cas, $C(q_A)$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{S}_n$ pour que $C(q_A)$ soit un sous-espace vectoriel de E.

Solution de l'exercice 2.18

Afin de simplifier les notations, on pose : $q_A = q$.

1. Pour tout H de E, on a :

$$q(X + H) - q(X) = 2\,{}^tXAH + {}^tHAH =< 2AX, H > + q(H)$$

Or, par l'inégalité de Cauchy Schwarz, $|q(H)| \leqslant C||H||^2 = o(||H||)$. On reconnaît le développement limité à l'ordre 1 ; on en déduit par unicité du développement limité d'ordre 1 que

$$\nabla q(X) = 2AX$$

2. a) Si A est une matrice de $\mathcal{S}_n^+$, alors pour tout $X \in C(q)$, $q(X) = 0$ et pour tout $Y \in E$, $q(Y) \geqslant 0 = q(X)$, donc q présente un minimum global sur E en tout $X \in C(q)$.

b) On en déduit que q étant C^1 sur $\mathbb{R}^n$, le gradient de q en X est nul, donc :

$$2AX = 0.$$

Par conséquent, si $X \in C(q)$, alors $X \in \operatorname{Ker} A$. La réciproque est immédiate donc $C(q) = \operatorname{Ker} A$.

3. On suppose qu'il existe U et V de E tels que $q(U) > 0$ et $q(V) < 0$.

a) Si (U, V) est une famille liée, alors les deux vecteurs sont colinéaires et $q(U)$ et $q(V)$ sont de même signe. Par conséquent, (U, V) est une famille libre.
On a pour tout réel λ :

$$q(U + \lambda V) = q(U) + 2\lambda\,{}^tUAV + \lambda^2 q(V).$$

C'est un polynôme de degré 2 ; en notant Δ le discriminant, on a :

$$\Delta = 4({}^tUAV)^2 - 4q(U)q(V).$$

Le produit $q(U)q(V)$ est négatif et donc le discriminant est positif. De plus $q(U)q(V)$ est non nul donc $\Delta > 0$. Par conséquent il existe deux racines distinctes λ_1 et λ_2 telles que $q(U + \lambda_1 V) = q(U + \lambda_2 V) = 0$.

b) Dans ce cas, $C(q)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. En effet

$$(U + \lambda_1 V) - (U + \lambda_2 V) = (\lambda_1 - \lambda_2)V \notin C(q)$$

4. Le cône $C(q)$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si A est une matrice positive ou négative.

Exercice 2.19

On note $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

1. Montrer que pour tout $f \in E$ et tout x réel, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x+t)e^t dt$ existe.

On pose alors : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x+t)e^t dt.$

2. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer g' en fonction de g et f.

Soit Φ l'application définie sur E par : $\forall\, f \in E,\ \Phi(f) = g.$
Soit un entier $n \geqslant 2$ et $F_n = \text{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_n)$, où $\forall k \in [\![0, n]\!], f_k : x \mapsto e^{-kx}$.

3. a) Montrer que la dimension de F_n est égale à $n + 1$.

b) Montrer que la restriction de Φ à F_n induit un endomorphisme de F_n qu'on notera Φ_n.

c) L'endomorphisme Φ_n est-il bijectif ? Est-il diagonalisable ?

4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \hfill 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que $h \in E$.

b) Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire la dimension de chaque sous-espace propre de Φ_n.

Solution de l'exercice 2.19

1. Pour tout x réel, la fonction $t \to f(x+t)e^t$ est continue sur $[0, 1]$. Ainsi, g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Effectuons le changement de variable $u = x + t$. Il vient $g(x) = e^{-x} \displaystyle\int_x^{x+1} f(u)e^u du.$
Par le théorème fondamental du calcul intégral, g est dérivable et pour tout x réel, on a :

$$g'(x) = e^{-x}(f(x+1)e^{x+1} - f(x)e^x) - g(x) = ef(x+1) - f(x) - g(x)$$

3. a) La famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre. Cela se montre par récurrence sur n. De manière informelle, supposons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{-kx} = 0$. Alors en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\alpha_0 = 0$, puis en factorisant par e^{-x}, il vient $\alpha_1 = 0$ etc... Ainsi $\dim(F_n) = n + 1$.

b) On a $\Phi_n(f_0) = (e - 1)f_0$ et $\Phi_n(f_1) = f_1$.
Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Alors :

$$\Phi_n(f_k) = \int_0^1 e^{-k(x+t)}e^t dt = e^{-kx} \int_0^1 e^{(1-k)t} dt = \frac{1 - e^{k-1}}{k - 1} e^{-kx} = \frac{1 - e^{k-1}}{k - 1} f_k$$

Ceci montre la stabilité de F_n par Φ.

c) On vient de trouver les valeurs propres de Φ_n. Ce sont les réels $e - 1, 1, \ldots, \dfrac{1 - e^{k-1}}{k - 1}, \ldots, \dfrac{1 - e^{n-1}}{n - 1}$, les vecteurs propres associés étant les fonctions f_k.
Aucune valeur propre n'est nulle ; l'endomorphisme Φ_n est bijectif. Il est diagonalisable puisqu'on a obtenu une base de vecteurs propres.

4. a) La fonction h est continue en 0 en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de la fonction exponentielle.

b) Une étude rapide des variations de h donne :

$$h'(x) = \frac{xe^{-x} - 1 + e^{-x}}{x^2} = \frac{N(x)}{D(x)},\ \text{avec } N'(x) = -xe^{-x}$$

Ceci montre que N est croissante sur $\mathbb{R}^-$ puis décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $N(0) = 0$, ceci montre que $h'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$, donc que h est décroissante sur $\mathbb{R}$.
La fonction h est donc bijective, ce qui entraîne que les valeurs propres de Φ_n sont deux à deux distinctes car ce sont les images des réels $-1, 0, 1, \ldots, n-1$ par la fonction bijective h.

c) Chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Exercice 2.20

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $s = a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice A dans la base canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et montrer que $\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$.

2. a) Vérifier que $P(X) = X^3 + s\,X$ est un polynôme annulateur de A.

b) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

3. On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $C = A^2 + s\,I_3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
a) Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$.

b) Dans cette question uniquement, on suppose $s = 1$. Quelle est la nature de l'endomorphisme g ?

c) À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $B = A + \lambda\, I_3$ est-elle inversible ?
Dans ce cas, expliciter B^{-1}, matrice inverse de B, comme un polynôme en A.

Solution de l'exercice 2.20

1. Déterminons le noyau de f. Comme $(a, b, c) \neq 0$, on a :

$$A\,Z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} az &= by \\ bx &= cz \\ cy &= ax \end{cases} \Leftrightarrow Z \in D = \mathrm{Vect}(U) \text{ où } U = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

Les cas particuliers où un ou deux des nombres a, b, c sont nuls sont inclus dans le cas général que nous venons de traiter.

Pour l'image de f, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$; les trois colonnes de A vérifient l'équation de plan

$${}^{t}U\,Z = cx + ay + bz = 0$$

donc $\mathrm{Im}(f) = D^{\perp}$.

2. a) On a :

$$C = A^2 + s\,I_3 = \begin{pmatrix} -b^2 - a^2 & ac & bc \\ ac & -c^2 - b^2 & ab \\ bc & ab & -a^2 - c^2 \end{pmatrix} + s\,I_3 = \begin{pmatrix} c^2 & ac & bc \\ ac & a^2 & ab \\ bc & ab & b^2 \end{pmatrix} = U\,{}^{t}U$$

d'où $A^3 + s\,A = A\,U\,{}^{t}U = 0$.

b) On sait que les valeurs propres d'une matrice sont parmi les racines de tout polynôme annulateur, d'où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subseteq \mathrm{Rac}_{\mathbb{R}}(P) = \{0\}$; donc $A \neq 0$ ne peut être diagonalisable su $\mathbb{R}$.

3. a) Commençons par le noyau de g. On a :

$$CZ = 0 \Leftrightarrow U\,{}^t\!U\,Z = 0 \Leftrightarrow Z \in D^{\perp} = \mathrm{Ker}(g)$$

Passons à l'image de g. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}\, g) = 1$; les trois colonnes de $C = U\,{}^t\!U$ sont colinéaires à U, donc $\mathrm{Im}(g) = D$.

b) On a $s = 1 \Rightarrow {}^t\!U\,U = 1 \Rightarrow CU = U$, donc g est la projection orthogonale sur D.

c) La matrice $B = A + \lambda\, I_3$ est inversible si et seulement si $-\lambda \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \Leftrightarrow \lambda \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} 0 = \quad & A\,(A^2 + s\,I_3) = B\,(A^2 + s\,I_3) - \lambda\left[B^2 - 2\,\lambda\,B + (\lambda^2 + s)\,I_3\right] \\ & \Leftrightarrow B\left[A^2 + s\,I_3 - \lambda\,B + 2\lambda^2\,I_3\right] = \lambda\,(\lambda^2 + s)\,I_3 \\ & \Leftrightarrow B^{-1} = \frac{A^2 - \lambda\,A + (\lambda^2 + s)\,I_3}{\lambda\,(\lambda^2 + s)} \end{aligned}$$

Exercice 2.21

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé.

1. a) Déterminer un polynôme annulateur (non nul) d'une matrice scalaire $M = \lambda\, I_n$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale. Déterminer un polynôme annulateur (non nul) de D.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme (non constant) à coefficients complexes. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que P soit un polynôme annulateur de M.

Dans la suite, on considère le polynôme $Q(X) = X^2 + 1$ et on note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}^n$. 3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q(M) = 0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M.

a) Montrer que :

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(f - i\,Id) \oplus \mathrm{Ker}(f + i\,Id)$$

où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Que peut-on en déduire concernant la matrice M ?

c) On note $\overline{z}$ le conjugué d'un nombre complexe z.

Montrer que si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre complexe de M associé à la valeur propre i, alors

$\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre complexe de M associé à la valeur propre $-i$.

d) En déduire que n est nécessairement pair.

4. a) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Q(M) = 0$.

b) En déduire, lorsque n est un entier pair, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q(M) = 0$.

Solution de l'exercice 2.21

1. a) Le polynôme $P(X) = X - \lambda$ répond à la question.

b) Si l'on note $D = \operatorname{diag}\big(\lambda_1, \dots, \lambda_n\big)$, alors le polynôme $P(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ convient.

2. Le polynôme P étant à coefficients complexes, il admet au moins une racine λ et $M = \lambda\, Id$ convient.

3. a) Pour tout $u \in \mathbb{C}^n$, on a $u = \dfrac{1}{2i}\Big[\big(i\,Id + f\big)(u) + \big(i\,Id - f\big)(u)\Big] \in \operatorname{Ker}(f - i\,Id) + \operatorname{Ker}(f + i\,Id)$, et les sous-espaces vectoriels propres sont en somme directe.

$$\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker}(f - i\,Id) \oplus \operatorname{Ker}(f + i\,Id)$$

b) On en déduit que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

c) La matrice M est réelle ; il suffit de conjuguer les éléments de l'équation $MZ = iZ$.

d) La matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Toute base (X_j) de vecteurs propres de $\operatorname{Ker}(f - iId)$ donnera par conjugaison, une base $(\overline{X_j})$ de vecteurs propres de $\operatorname{Ker}(f + iId)$. Ces deux sous-espaces sont de même dimension et supplémentaires. Donc n est pair.

4. a) Effectuons un petit calcul :

$$M^2 + I = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)\,b \\ (a+d)\,c & bc + d^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on peut prendre $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Il reste à construire une matrice d'ordre pair formée de blocs diagonaux de J, soit :

$$M = \begin{pmatrix} J & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J \end{pmatrix}$$

Exercice 2.22

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, où $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E.

1. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que si $u \neq 0$, alors u est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $u = \lambda Id_E$.

On rappelle (ou on admet) que la trace de la matrice d'un endomorphisme u est indépendante de la base dans laquelle l'endomorphisme est écrit. On la note $\operatorname{tr}(u)$.

Dans toute la suite, u désigne un endomorphisme non nul de E, de trace nulle.

2. Montrer qu'il existe un vecteur x_0 tel que $(x_0, u(x_0))$ soit libre, puis un sous-espace F de E, supplémentaire de $\operatorname{Vect}(x_0)$ dans E et contenant $u(x_0)$.

On note p la projection de E sur F parallèlement à $\operatorname{Vect}(x_0)$.

3. a) Montrer que F est stable par $p \circ u$ et que l'endomorphisme induit par $p \circ u$ sur F est de trace nulle.

b) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u a tous ses éléments diagonaux nuls.

c) En déduire que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

Solution de l'exercice 2.22

1. Pour tout $x \in E$ non nul, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. Soit $(x, y) \in E^2$ quelconques non nuls. Suivant la liberté de la famille (x, y) et en utilisant $z = x + y$, on montre que $\lambda_x = \lambda_y$. On termine en utilisant une base de E. On peut également traiter le cas où x et y sont liés.

2. Par l'absurde. Si, pour tout x de E, $(x, u(x))$ est liée, alors u est une homothétie. Alors, il existe λ tel que $u = \lambda Id$ et $\mathrm{tr}(u) = n\lambda$. Comme $\mathrm{tr}(u) = 0$ alors $\lambda = 0$ et u est l'endomorphisme nul. Absurde.
La famille $(x_0, u(x_0))$ étant libre, on peut la compléter en une base de E. Donc il existe des vecteurs $x_3, \ldots, x_n$ de E tels que $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), x_3, \ldots, x_n)$ est une base de E. Enfin $F = \mathrm{Vect}(u(x_0), x_3, \ldots, x_n)$ vérifie ce qui est demandé.

3. a) Soit $y \in F$. On a $p \circ u(y) \in \mathrm{Im}(p)$. Or $\mathrm{Im}(p) \subset F$, donc $p \circ u(y) \in F$. Donc F est stable par $p \circ u$.

Soit $M = M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 1 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $N = M_{\mathcal{B}}(p \circ u)$. On a :
$p \circ u(x_0) = u(x_0)$, car $u(x_0) \in F$, $p \circ u(u(x_0)) \in F$. En procédant ainsi, il vient :

$N = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 1 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}_F}(p \circ u) = \begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.
Or $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(N) = 0 \Rightarrow \mathrm{tr}(p \circ u) = 0$.

b) Pour $n = 1$. si u est de trace nulle, u est l'endomorphisme nul, donc sa matrice dans n'importe quelle base est nulle.
Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat établi pour tout espace vectoriel de dimension n. Soit E un espace vectoriel de dimension $n + 1$ et u un endomorphisme de trace nulle. On utilise la question précédente pour déterminer F et une base de F dans laquelle la matrice de $p \circ u$ a des coefficients diagonaux nuls. Notons $\mathcal{B}'$ cette base. La concaténation de x_0 et de $\mathcal{B}'$ est une base notée $\mathcal{B}$ de E qui donne le résultat annoncé.
En effet si $y \in \mathcal{B}'$, alors $u(y) = \lambda_0 x_0 + (p \circ u)(y)$.

c) Soit A une matrice de trace nulle et u l'endomorphisme canoniquement associé. D'après ce qui précède, il existe une base dans laquelle la matrice de u a ses coefficients diagonaux tous nuls, ce qui signifie exactement que A est semblable à une matrice A' à coefficients diagonaux tous nuls.

Exercice 2.23

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal 3.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout élément $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $q(X) = {}^tXAX$.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $q(X) = 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$.

2. a) Établir pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'encadrement : $-2{}^tXX \leqslant q(X) \leqslant 2{}^tXX$. Montrer l'équivalence suivante :

$$|q(X)| = 2{}^tXX \Leftrightarrow X = 0$$

b) Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $-2 < \lambda < 2$.

3. Pour tout $\lambda \in]-2,2[$, on pose $\lambda = 2\cos t$, avec $t \in]0,\pi[$ et on note E_λ l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} = (2\cos t)u_{k+1} - u_k$$

Soit F_λ le sous-espace vectoriel de E_λ constitué des éléments $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E_λ vérifiant $u_0 = u_{n+1} = 0$. Déterminer F_λ.

4. Déterminer les éléments propres de la matrice A.

Solution de l'exercice 2.23

1. On a $AX = \begin{pmatrix} 0 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_n \\ x_{n-1} + 0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$q(X) = x_1x_2 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i(x_{i-1} + x_{i+1}) + x_{n-1}x_n = x_1x_2 + \sum_{i=1}^{n-2} x_ix_{i+1} + \sum_{i=2}^{n-1} x_ix_{i+1} + x_{n-1}x_n = 2\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$$

2. a) Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $-(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant 2x_ix_{i+1} \leqslant x_i^2 + x_{i+1}^2$. (*)

Donc :

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n-1} &(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} 2x_ix_{i+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \\ &\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leqslant q(X) \leq \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \\ &\Leftrightarrow -x_1^2 - x_n^2 - 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 \leqslant q(X) \leqslant x_1^2 + x_n^2 + 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 \ \Leftrightarrow -2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant q(X) \leq 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ &\Leftrightarrow -2\,{}^tXX \leqslant q(X) \leqslant 2\,{}^tXX \end{aligned}$$

Ainsi, $|q(X)| = 2\,{}^tXX$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a l'égalité dans (*), soit $x_i = x_{i+1}$ ou $x_i = -x_{i+1}$ et $x_1 = 0$ et $x_n = 0$, donc si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!], x_i = 0$, c'est-à-dire $X = 0$.

b) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. On a
$q(X) = \lambda\,{}^tXX$. Donc, $-2\,{}^tXX < q(X) < 2\,{}^tXX$ car $X \neq 0$, donc on n'a pas l'égalité. D'où $-2 < \lambda < 2$.

3. En résolvant la relation de récurrence double donnée, on trouve $u_k = \lambda e^{ikt} + \mu e^{-ikt}$. La suite $(u_k)_k$ appartient à F_λ si et seulement si $u_0 = u_{n+1} = 0$, soit :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda e^{i(n+1)t} + \mu e^{-i(n+1)t} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, la suite $(u_k)_k \in F_\lambda$ si et seulement si $\sin((n+1)t) = 0$, soit $t = t_\ell = \dfrac{\ell\pi}{n+1}$, avec $\ell \in [\![1, n]\!]$ (car $t \in]0, \pi[$).

En conclusion :
- si $t \notin \{t_1, \dots, t_n\}$, alors $(u_k) \in F_\lambda \Leftrightarrow (u_k) = 0_{E_\lambda}$;
- si $t \in \{t_1, \dots, t_n\}$, alors $(u_k) \in F_\lambda$ et $(u_k) \neq 0_{E_\lambda}$.

4. On vient de montrer que si $\lambda = 2\cos t$ est valeur propre de A, alors $t = \dfrac{\ell\pi}{n+1}$, avec $\ell \in [\![1, n]\!]$.

Réciproquement, soit $t = \dfrac{\ell\pi}{n+1}, \ell \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda = 2\cos t$. Donc, $F_\lambda \neq \{0_{E_\lambda}\}$. Soit $(u_k)_k \in F_\lambda$, une suite non nulle.
On pose : $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i = u_i$. On a alors $AX = \lambda X$.

On a forcément $x_1 \neq 0$ sinon $(u_k)_k$ serait la suite nulle. Donc $X \neq 0$ et X est un vecteur propre de la matrice A et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. En posant $\theta_\ell = \dfrac{\ell\pi}{n+1}$, le vecteur propre associé à la valeur propre $2\cos\left(\dfrac{\ell\pi}{n+1}\right)$ est $X = \begin{pmatrix} \sin(\theta_\ell) \\ \sin(2\theta_\ell) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_\ell) \end{pmatrix}$.

Ainsi, A possède n valeurs propres distinctes et la dimension de chaque sous-espace propre est 1.

Chapitre 3

Probabilités

Exercice 3.1

Soit μ un réel supérieur ou égal à 1 que l'on cherche à estimer.
Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que les suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ sont mutuellement indépendantes, que chaque X_n suit la loi uniforme sur $[0,\mu]$ et que chaque Y_n suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose : $Z_n = \min(X_n, Y_n)$. On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$.

1. Montrer que Z_1 est une variable aléatoire à densité ; déterminer sa loi et calculer son espérance.

2. Écrire une fonction Scilab d'entête `simulation(n,mu)` qui, pour un entier $n \geqslant 1$ et un réel mu donnés, renvoie une simulation de la variable aléatoire T_n.

3. a) Montrer que la suite de variables aléatoires $(T_n)_n$ converge en probabilité vers un réel que l'on déterminera.

b) Déterminer un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour lequel $\widetilde{T_n} = aT_n + b$ est un estimateur sans biais de $\dfrac{1}{\mu}$.
Est-il convergent ?

4. a) Montrer que $V(Z_1) \leqslant \dfrac{1}{12}$.

b) Soit α un réel de $]0,1[$. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, construire, pour n assez grand, à l'aide de $\widetilde{T_n}$, un intervalle de confiance pour $\dfrac{1}{\mu}$ au niveau de confiance $1-\alpha$ de la forme $[U_n, V_n]$.

c) Construire alors, pour n assez grand, un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance $1-\alpha$ à l'aide de U_n et V_n

---

Solution de l'exercice 3.1

1. Le support de Z_1 vaut $[0,1]$. Donc si $x<0$, $F_{Z_1}(x) = 0$ et si $x > 1$, $F_{Z_1}(x) = 1$. Puis si $x \in [0,1]$, $P(Z_1 > x) = P([X_1 > x] \cap [Y_1 > x])$.
Ces deux événements sont indépendants, $P(Z_1 > x) = (1-x)(1-x/\mu)$. Et $\forall x \in [0,1]$, $F_{Z_1}(x) = 1-(1-x)(1-x/\mu)$.
En résumé

$$F_{Z_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)(1-x/\mu) & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction F_{Z_1} est continue en 0 et en 1, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé de 0 et de 1, la variable est à densité.

$$f_{Z_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}(\mu + 1 - 2x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme Z_1 est bornée, $E(Z_1)$ existe et, après calcul $E(Z_1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6\mu}$.

2. Une proposition :

```
1. function T=simulation(n,mu)
2. T=0
3. for i=[1..n]
4.   y=rand()
5.   z=rand()*mu
6.   T=T+min([y,z])
7. end
8. T=T/n;
9. endfunction
```

3. a) Les variables $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions et de même loi.
D'après la loi des grands nombres, la suite $(T_n)_n$ converge en probabilité vers $E(Z_1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6\mu}$.
b) Comme $E(T_n) = E(Z_1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6\mu}$, $\widetilde{T_n} = 3 - 6T_n$ est un estimateur sans biais de $\dfrac{1}{\mu}$. On a :

$$V(\widetilde{T_n}) = \frac{36\, V(Z_1)}{n} \to 0$$

Aussi, $\widetilde{T_n}$ est convergent.
4. a) On a $E(Z_1^2) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6\mu}$, donc $V(Z_1) = E(Z_1^2) - E^2(Z_1) = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{36\mu^2} \leqslant \dfrac{1}{12}$.
b) Construisons un événement de probabilité $1 - \alpha$ avec Bienaymé-Tchebychev :
$P(|\widetilde{T_n} - 1/\mu| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(\widetilde{T_n})}{\varepsilon^2}$. Or, $V(\widetilde{T_n}) = \dfrac{36}{n} V(Z_1) \leqslant \dfrac{3}{n}$. Donc :

$$P(|\widetilde{T_n} - 1/\mu| > \varepsilon) \leqslant \frac{3}{n\varepsilon^2} \text{ et } P(|\widetilde{T_n} - 1/\mu| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{3}{n\varepsilon^2}$$

Il suffit donc de prendre $\dfrac{3}{n\varepsilon^2} = \alpha$ soit $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{3}{n\alpha}}$.
Pour s'assurer que $0 < \alpha < 1$, il faut choisir $n > \dfrac{3}{\varepsilon^2}$. Ainsi $P(|\widetilde{T_n} - 1/\mu| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \alpha$.

Donc avec une probabilité supérieure à $1 - \alpha$, on a : $\widetilde{T_n} - \sqrt{\dfrac{3}{n\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{\mu} \leqslant \widetilde{T_n} + \sqrt{\dfrac{3}{n\alpha}}$.
Or, $\dfrac{1}{\mu} \in]0,1]$. Ainsi : $U_n = \max(0, \widetilde{T_n} - \sqrt{\dfrac{3}{n\alpha}})$ et $V_n = \min(1, \widetilde{T_n} + \sqrt{\dfrac{3}{n\alpha}})$.
c) On sait déjà que $\mu \geqslant 1$ et $U_n \leqslant \dfrac{1}{\mu} \leqslant V_n$.

- Si $0 < U_n < V_n < 1$, on prend comme intervalle de confiance pour μ : $\left[\dfrac{1}{V_n}, \dfrac{1}{U_n}\right]$.
- Si $U_n = 0$ et $V_n = 1$, on prend comme intervalle de confiance pour μ : $[1, +\infty[$.
- Si $0 = U_n < V_n < 1$, on prend comme intervalle de confiance pour μ $\left[\dfrac{1}{V_n}, +\infty\right[$.
- Si $0 < U_n < 1 = V_n$, on prend comme intervalle de confiance pour μ $\left[1, \dfrac{1}{U_n}\right]$.