Chapitre 1

Algèbre

Exercice 1.1

Pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré au plus k.
Soit un entier $n \geqslant 1$. Soient τ et δ les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \tau(P) = P(X+1) \quad \text{et} \quad \delta(P) = P(X+1) - P.$$

1. Déterminer le degré de $\delta(P)$, lorsque $P = X^k$, avec $k \geqslant 0$. Pour tout polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer le degré et le coefficient de plus haut degré de $\delta(P)$ en fonction de ceux de P.
2. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, montrer que : $\operatorname{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$ et $\operatorname{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ comme combinaison linéaire des $\tau^j(P)$ ($j \in [\![0, k]\!]$).
4. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0$.
5. Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme $\mathbb{R}_n[X] \xrightarrow{u} \mathbb{R}_n[X]$ tel que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.
   (a) Montrer que u et δ^2 commutent.
   (b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u.
   (c) Conclure.

Solution de l'exercice 1.1

1. Si P est constant, alors $\delta(P)=0$. Si $k\geqslant 1$ et $P=X^k$, $P(X+1)-P(X)$ est de degré $k-1$. De manière générale, si $P=\sum_{k=0}^{d} a_kX^k$ avec $d=\deg(P)\geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}P(X+1)-P &= a_d\big((X+1)^d-X^d\big)+a_{d-1}\big((X+1)^{d-1}-X^{d-1}\big)+\sum_{k=0}^{d-2}a_k\big(k(X+1)^k-X^k\big)\\ &= a_d\sum_{k=0}^{d-1}a_d\binom{d}{k}X^k+a_{d-1}\sum_{k=0}^{d-2}a_d\binom{d-1}{k}X^k+\sum_{k=0}^{d-2}a_k\big(k(X+1)^k-X^k\big)\\ &= da_dX^{d-1}+\underbrace{a_d\sum_{k=0}^{d-2}\binom{d}{k}X^k+a_{d-1}\sum_{k=0}^{d-2}\binom{d-1}{k}X^k+\sum_{k=0}^{d-2}a_k\big(k(X+1)^k-X^k\big)}_{\text{de degré inférieur à } d-2 \text{ (nul si } d=1)}.\end{aligned}$$

   Donc $\deg(\delta(P))=\deg(P)-1$ et $\mathrm{cd}(\delta(P))=\deg(P)\times\mathrm{cd}(P)$.

2. Montrons par récurrence sur $j\in[\![1,n]\!]$ la relation : $\mathrm{Ker}(\delta^j)=\mathbb{R}_{j-1}[X]$.
   - C'est vrai pour $j=1$, car d'après la question 1 : $\delta(P)=0\iff P$ constant.
   - Si la relation est vraie pour $j\in[\![1,n-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}P\in\mathrm{Ker}(\delta^{j+1}) &\iff \delta^j(\delta(P))=0\\ &\iff \deg(\delta(P))\leqslant j-1 \qquad \text{car } \mathrm{Ker}(\delta^j)=\mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{(H.R.)}\\ &\iff \deg(P)\leqslant j \qquad \text{car } \deg(\delta(P))=\deg(P)-1\\ &\iff P\in\mathbb{R}_j[X].\end{aligned}$$

     Ainsi $\mathrm{Ker}(\delta^{j+1})=\mathbb{R}_j[X]$.

   Comme $\deg(\delta(P))=\deg(P)-1$, par récurrence évidente, on a $\deg(\delta^j(P))=\deg(P)-j$,
   d'où $\delta^j(P)\in\mathbb{R}_{n-j}[X]$, et donc $\mathrm{Im}(\delta^j)\subset\mathbb{R}_{n-j}[X]$. On conclut à l'égalité des dimensions en utilisant le théorème du rang. Ainsi, $\mathrm{Im}(\delta^j)=\mathbb{R}_{n-j}[X]$.

3. Comme τ et id commutent, la formule du binôme donne : $\delta^k(P)=(\tau-\mathrm{Id}\,)^k(P)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\tau^j(P)$.

4. Si $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]=\mathrm{Ker}(\delta^n)$, alors $\delta^n(P)=0$. Comme $\tau^j(P)=P(X+j)$, en évaluant en 0 l'égalité de la question précédente, on obtient l'égalité voulue.

5. (a) $u\circ\delta^2=u\circ[u^2\circ u^2]=u^5=[u^2\circ u^2]\circ u=\delta^2\circ u$.

   (b) Soit $P\in\mathbb{R}_1[X]=\mathrm{Ker}\,\delta^2$, alors, d'après la question précédente : $\delta^2(u(P))=u(\delta^2(P))=u(0)=0$. Donc $u(P)\in\mathrm{Ker}(\delta^2)=\mathbb{R}_1[X]$.

   (c) Comme $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u et par δ, on a deux endomorphismes induits u' et δ' tels que $v'^2=\delta'$. En prenant les matrices dans la base $(1,X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$, on a : $U^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

   Or il n'existe pas de telle matrice U car elle ne peut être de rang 0 ou 2, (sinon U^2 aussi) et si elle était de rang 1, comme $\mathrm{Im}\,U^2\subset\mathrm{Im}\,U$, on aurait $\mathrm{Im}\,U=\mathrm{vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, ce qui entraînerait $U^2=0$.

   On obtient donc une absurdité.

Exercice 1.2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est 2-*symétrique* si la matrice A^2 est symétrique.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Caractériser à l'aide des coefficients de A le fait que A est 2-symétrique. Donner un exemple de matrice réelle carrée d'ordre 2 qui est 2-symétrique mais qui n'est pas symétrique.
2. Dans cette question, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 2$).
   (a) Vérifier que si A est symétrique, alors elle est 2-symétrique.
   (b) On suppose que A est inversible et 2-symétrique. Montrer que A^{-1} est 2-symétrique.
   (c) On suppose maintenant que A est antisymétrique (c'est-à-dire que $-A$ est la transposée de A). Montrer que A est 2-symétrique.
3. Dans cette question, on considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont 2-symétriques.
   (a) On suppose que A et B commutent. Vérifier que le produit AB est une matrice 2-symétrique. Montrer que ce n'est plus vrai en général si l'on ne suppose plus que A et B commutent.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la somme $A+B$ soit une matrice 2-symétrique.
   (c) Donner un exemple où A et B sont 2-symétriques et commutent, mais telles que $A+B$ ne soit pas 2-symétrique.
4. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note X la matrice colonne associée à x. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique ($\langle x, y\rangle = {}^tXY$). On se donne une matrice 2-symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé et on désigne par $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des ses valeurs propres (réelles).
   (a) Justifier le fait que l'endomorphisme f^2 est symétrique.
   (b) On note $\mathrm{Sp}(f^2)$ sous la forme $\mathrm{Sp}(f^2) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$) avec $m \in \{1, \cdots, n\}$ et on désigne par E_i le sous-espace propre de f^2 associé à la valeur propre λ_i. Justifier le fait que $\mathbb{R}^n$ est la somme directe orthogonale des sous-espaces $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$.
   (c) Soit $i \in \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$. Montrer que le sous-espace E_i est stable par f. Vérifier que la restriction f_i de f à E_i, considérée comme endomorphisme de E_i, admet $X^2 - \lambda_i$ comme polynôme annulateur.
   (d) On suppose maintenant que tous les λ_i sont strictement positifs et on pose $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$. Montrer que E_i est la somme directe vectorielle du noyau de $f - \alpha_i Id$ et du noyau de $f + \alpha_i Id$. En déduire que f est diagonalisable. Est-il forcément symétrique ?
   (e) On fait désormais comme hypothèses que $\mathrm{Sp}(f^2) \subseteq \mathbb{R}_+$ et que $\mathrm{Sp}(f) \cap \mathrm{Sp}(-f) = \emptyset$. Montrer que dans ce cas f est un endomorphisme symétrique.

Solution de l'exercice 1.2

1. Posons
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
La condition $A^2 = {}^t(A^2)$ est réalisée si et seulement si $a = -d$ ou $c = b$. Comme matrice réelle carrée d'ordre 2 qui est 2-symétrique mais qui n'est pas symétrique, on peut prendre par exemple
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Si A est symétrique, on a clairement ${}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = A^2$; la matrice A est donc 2-symétrique.
   (b) Si A est inversible et 2-symétrique, les règles de calcul avec la transposition entraînent que ${}^t(A^{-1})^2 = \left[{}^t(A^2)\right]^{-1} = (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ et par suite que A^{-1} est 2-symétrique.
   (c) Si A est antisymétrique, on a ${}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = (-A)^2 = A^2$; il s'ensuit que A est 2-symétrique.

3. (a) Supposons que A et B commutent et sont 2-symétriques, alors on a ${}^t(AB)^2 = {}^t(ABAB) = {}^t(A^2B^2) = {}^t(B^2){}^t(A^2) = B^2A^2 = (AB)^2$. Par conséquent, AB est 2-symétrique. On peut prendre les deux matrices A et B données en 1. puisque la matrice
$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
n'est pas 2-symétrique d'après les conditions trouvées dans la première question.
   (b) La somme $A+B$ est 2-symétrique si et seulement si $A^2 + B^2 + AB + BA = (A+B)^2 = {}^t(A+B)^2 = {}^tA^2 + {}^tB^2 + {}^t(AB+BA) = A^2 + B^2 + {}^t(AB+BA)$. On voit donc qu'il est nécessaire et suffisant que la matrice $AB + BA$ soit symétrique.
   (c) D'après la question précédente, on voit qu'il suffit de trouver deux matrices A et B qui sont 2-symétriques et commutent, mais telles que le produit AB ne soit pas symétrique. Prenons une matrice A qui est 2-symétrique mais pas symétrique (qui existe d'après 1.) ; alors la matrice $B = A+I$ convient puisque $AB = A^2 + A$ ne peut pas être symétrique.

4. (a) On a $\langle f^2(x), y\rangle = {}^t(A^2X)Y = {}^tX{}^t(A^2)Y = {}^tXA^2Y = \langle x, f^2(y)\rangle$; il s'ensuit que f^2 est symétrique.
   (b) Comme f^2 est symétrique dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, ce dernier est la somme directe orthogonale des sous-espaces $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$.
   (c) Si $x \in E_i$, il vient $f^2(f(x)) = f(f^2(x)) = \lambda_i f(x)$, donc le sous-espace E_i est stable par f. Par construction, il est clair que $X^2 - \lambda_i$ est un polynôme annulateur de f_i.
   (d) Si $x \in E_i$, comme $X^2 - \lambda_i$ est un polynôme annulateur de f_i, une analyse synthèse simple montre que la décomposition $x = 1/(2\alpha_i)\,[(\alpha_i x - f(x)) + (f(x) + \alpha_i x)]$ où $\alpha_i x - f(x)$ (resp. $f(x) + \alpha_i x$) appartient au noyau de $f - \alpha_i Id$ (resp. au noyau de $f + \alpha_i Id$) est unique. Ceci répond à la première partie de la question. On peut donc trouver une base de E_i formée de vecteurs propres de f. Par concaténation, on construit une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f qui est donc diagonalisable. Pour répondre à la dernière question, on voit que le fait que f soit symétrique est équivalent au fait que la décomposition considérée précédemment de E_i en somme directe est forcément orthogonale. Cela paraît faux. Comme contre-exemple on peut prendre
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
qui n'est évidemment pas symétrique mais dont le carré est l'identité.
   (e) On remarque que les hypothèses impliquent que chaque λ_i est strictement positif. L'hypothèse $\mathrm{Sp}(f) \cap \mathrm{Sp}(-f) = \emptyset$ et la question précédente impliquent que chaque E_i est lui-même un sous-espace-propre. En effet, E_i est soit le noyau $f - \alpha_i Id$, soit le noyau de $f + \alpha_i Id$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est alors la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f. L'endomorphisme f est donc nécessairement symétrique.

EXERCICE 1.3

Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 1 muni de son produit scalaire noté $(\cdot,\cdot)$ et de sa norme euclidienne canonique $\|\cdot\|$. On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, par Id l'endomorphisme identité sur E et par $\circ$ l'opération de composition définie dans $\mathcal{L}(E)$. On note $\mathrm{Ker}(w)$, $\mathrm{Im}(w)$ et $\mathrm{Sp}(w)$ respectivement le noyau, l'image et l'ensemble des valeurs propres réelles d'un endomorphisme $w \in \mathcal{L}(E)$.
Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit λ un réel non nul. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$ si et seulement si $\lambda \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.
2. Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$ si et seulement si $0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.
3. Que peut-on conclure sur $\mathrm{Sp}(u \circ v)$ et $\mathrm{Sp}(v \circ u)$?

   Nous supposons désormais pour le reste de l'exercice que u et v sont des endomorphismes symétriques de $\mathcal{L}(E)$ qui **commutent**.

4. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On note $F = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$. Montrer que F et $F^{\perp}$ sont stables par u et v.

5. Montrer que les endomorphismes u et v sont co-diagonalisables dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres commune à u et à v.
   A cette fin, on pourra faire une récurrence sur la dimension de E.

Solution de l'exercice 1.3

1. Par symétrie sur u et v, pour prouver l'équivalence, il suffit de montrer l'assertion : $\lambda \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$ implique $\lambda \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$, il existe alors $x \neq 0$ tel que
$$u(v(x)) = \lambda\, x \qquad (1).$$
Tout d'abord, comme $\lambda \neq 0$, il vient $u(v(x)) \neq 0$ et donc $v(x) \neq 0$. Puis, en composant par v dans (1), on obtient alors : $(v \circ u)(v(x)) = \lambda\, v(x)$. Comme $v(x) \neq 0$, alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.

2. Par symétrie sur u et v, on peut encore se contenter de montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$ implique $0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$. Si $0 \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$, il existe $x \neq 0$ tel que : $u \circ v(x) = 0$. Il vient alors deux cas.
Cas 1 : Soit $y = v(x) \neq 0$. On a alors $u(y) = 0$ et donc $v(u(y)) = 0$ avec $y \neq 0$. Ainsi, on a $0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.
Cas 2 : Soit $v(x) = 0$. Il vient alors deux sous-cas.
Soit $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$ et donc u est surjectif (d'après le théorème du rang). Comme $x \neq 0$, il existe alors $z_1 \in E \setminus \{\,0\}$ tel que $x = u(z_1)$ et donc $v(u(z_1)) = 0$. Il s'ensuit que $0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.
Soit $\mathrm{Ker}\, u \neq \{0\}$ et il existe $z_2 \neq 0$ tel que $u(z_2) = 0$. Il en découle que $v(u(z_2)) = 0$ et on conclut encore que $0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.

3. En vertu des questions 1) et 2), il vient immédiatement que $\mathrm{Sp}(u \circ v) = \mathrm{Sp}(v \circ u)$.

4. Supposons que $x \in F$, on a alors $u(x) = \lambda\, x$ et donc $u(u(x)) = \lambda\, u(x)$, ainsi $u(x) \in F$. De plus, comme u et v commutent, il vient : $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda\, v(x)$. Ainsi, on a également $v(x) \in F$ et F est stable par v. Comme u et v sont des endomorphismes symétriques et que F est stable par u et v, on a également la stabilité de $F^{\perp}$ par u et v.

5. Montrons par récurrence $P(n)$: "Soit E un espace euclidien de dimension n. Si u et v sont des endomorphismes symétriques de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent, alors ils sont co-diagonalisables dans une base orthornormée" est vraie pour $n \geqslant 1$.
Soit E un espace euclidien avec $\dim E = 1$ et u et v des endomorphismes symétriques de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent. Comme $\dim E = 1$, il existe (e_1) avec e_1 de norme 1 tel que $E = \mathrm{vect}(e_1)$. Or $u(e_1)$ et $v(e_1) \in E = \mathrm{vect}(e_1)$, il existe alors $(\lambda_u, \lambda_v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u(e_1) = \lambda_u e_1$ et $v(e_1) = \lambda_v\, e_1$ et $P(1)$ est vraie.
Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $P(m)$ pour tout entier naturel m satisfaisant $1 \leqslant m \leqslant n$ et montrons $P(n+1)$. Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$ et u et v deux endomorphismes symétriques de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent. Comme u est un endomorphisme symétrique, il est diagonalisable et en particulier $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$. Il existe donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On pose alors $F = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$. On a donc $1 \leqslant \dim F \leqslant \dim E = n+1$. Ainsi, soit $1 \leqslant \dim F = m \leqslant n$, soit $\dim F = n+1$.
Cas 1 : $1 \leqslant \dim F = m \leqslant n$.
Comme F et $F^{\perp}$ sont stables par u et v, on définit d'une part u_F et $v_F \in \mathcal{L}(F)$ et d'autre part $u_{F^\perp}$ et $v_{F^\perp} \in \mathcal{L}(F^{\perp})$ de la manière suivante :
$$u_F(x) = u(x),\ v_F(x) = v(x),\ \forall x \in F \ \text{ et } \ u_{F^\perp}(x) = u(x),\ v_{F^\perp}(x) = v(x),\ \forall x \in F^{\perp}.$$
Comme u et v sont symétriques et commutent, u_F et v_F (respectivement $u_{F^\perp}$ et $v_{F^\perp}$) sont des endomorphismes symétriques de $\mathcal{L}(F)$ (respectivement de $\mathcal{L}(F^{\perp})$) qui commutent. F est un espace euclidien pour le produit scalaire de E et $1 \leqslant \dim F = m \leqslant n$. Ainsi par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ de F formée de vecteurs propres communs à u_F et v_F. De même, $F^{\perp}$ est aussi un espace euclidien pour le produit scalaire de E et $1 \leqslant \dim F^{\perp} = n+1-m \leqslant n$. Par hypothèse de récurrence, il existe donc une base orthonormée de vecteurs propres $(e_{m+1}, \ldots, e_{n+1})$ de $F^{\perp}$ communs à $u_{F^\perp}$ et $v_{F^\perp}$. Ainsi, par construction, $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ est une base orthonormée de E de vecteurs propres communs à u et v.
Cas 2 : $\dim F = n+1$.
Soit $\dim(F) = n+1 = \dim E$. Comme $F \subset E$, on a alors $F = E$ et donc $u = \lambda\,\mathrm{Id}$. Or v est symétrique, il existe donc une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ de vecteurs propres de v. Comme $u = \lambda\,\mathrm{Id}$, $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ est une base orthonormée de vecteurs propres de u associée à la valeur propre λ.

EXERCICE 1.4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $(E, \langle\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soit u un endomorphisme symétrique de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice A.
On suppose que $\text{tr}(A) = 0$ et on se propose de montrer qu'il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice associée à u a tous ses termes diagonaux nuls.

1. On suppose dans cette question que $n = 2$.
   (a) On suppose que A n'est pas inversible. Montrer le résultat demandé.
   (b) On suppose que A est inversible.
      i. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et un réel α pour lesquels la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est $A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$.
      ii. On pose $w_1 = v_1 + v_2$ et $w_2 = v_1 - v_2$.
      Calculer $u(w_1)$ et $u(w_2)$ et en déduire le résultat demandé.
2. On revient au cas général où n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.
   (a) i. Montrer qu'il existe deux indices i et j de $[\![1, n]\!]$, $i \neq j$, tels que :

$$\langle e_i, u(e_i)\rangle \times \langle e_j, u(e_j)\rangle \leqslant 0$$

      ii. Soit φ la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) = \langle u(te_i + (1-t)e_j), te_i + (1-t)e_j\rangle,$$

      Montrer, en utilisant cette fonction, qu'il existe un vecteur x non nul tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.
   (b) Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :
   $\left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & \\ \vdots & C \\ * & \end{array}\right)$, où C est une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.
   (c) En déduire, par récurrence, la propriété énoncée au début de l'exercice.

Solution de l'exercice 1.4

1. (a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable. Il existe $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et P telles que $A = PDP^{-1}$. Or, $\text{tr}(A) = \text{tr}(D) \Longrightarrow a + b = 0$. Mais comme A n'est pas inversible, au moins une des valeurs propres est nulle. On a donc en fait $D = 0$ et donc $A = 0$.

   (b) i. La matrice A est diagonalisable dans une base orthonormale (v_1, v_2) et comme $\text{tr}(A) = \text{tr}(D)$, la matrice de u dans une base de vecteurs propres est de la forme $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$.

   ii. On trouve $u(w_1) = \alpha w_2$ et $u(w_2) = \alpha w_1$. On vérifie facilement que w_1 et w_2 sont orthogonaux. Il suffit alors de poser $w_1' = \dfrac{1}{\|w_1\|} w_1$ et$w_2' = \dfrac{1}{\|w_2\|} w_2$ pour obtenir une base orthonormale dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) On a $\text{tr}(u) = 0$ donc la somme des termes diagonaux d'une matrice de u dans une base est nulle.

   i. Comme la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormale, on a : $\forall\, e_i,\ u(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle u(e_i), e_j \rangle e_j$.

   Donc les coeff diagonaux de sa matrice sont : $a_{ii} = \langle u(e_i), e_i \rangle \Rightarrow \text{tr}(u) = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), e_i \rangle = 0$.
   Donc, les termes de la somme ne peuvent pas être tous strictement positifs ou tous strictement négatifs. Il existe donc deux indices i et j distincts tels que : $\langle e_i, u(e_i) \rangle \times \langle e_j, u(e_j) \rangle \leqslant 0$.

   ii. Or, $\varphi(0) = \langle u(e_j), e_j \rangle$ et $\varphi(1) = \langle u(e_i), e_i \rangle$, donc $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ sont de signes contraires.
   La fonction φ est continue (polynôme en t). Donc, Il existe t_0 tel que $\varphi(t_0) = 0$.
   En posant $x = t_0 e_i + (1 - t_0) e_j$, on a un vecteur $x \neq 0$ non nul tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.

   (b) On pose $\varepsilon = \dfrac{1}{\|x\|} x$ et on complète : $(\varepsilon, e_2, \ldots e_n)$ pour obtenir une base orthonormale de E.

   La matrice dans cette base est bien : $M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline \vdots & C \end{array}\right)$.

   (c) On procède par récurrence sur n.
   - Pour $n = 1$, on obtient la matrice nulle et donc la propriété est vraie.
   - On suppose la propriété vérifiée au rang $n - 1$ ($n \geqslant 2$) et on considère un espace de dimension n, un endomorphisme symétrique u de E de trace nulle.
     On applique le résultat précédent et il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est la matrice M de la question précédente.On pose $F = \text{Vect}(\varepsilon)$.
     On a alors $F^\perp = \text{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$. Soit p la projection orthogonale sur $F^\perp$ et $v = p \circ u$.La restriction de v à $F^\perp$ est un endomorphisme, puisque p est la projection sur $F^\perp$. On a :
     $v(e_j) = p(u(e_j)) = p\big[\displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_{ij} e_i + a_1 j \varepsilon\big]$. Or, $\varepsilon \in F \Longrightarrow p(\varepsilon) = 0$ et les e_i sont dans $F^\perp$, donc $p(e_i) = e_i$.
     On a donc : $v(e_j) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_{i,j} e_i$. On constate que la matrice de v dans la base $(e_2, \ldots, e_n)$ est C.
     Mais comme $\text{tr}(M) = 0$, on a aussi $\text{tr}(C) = 0$. Il existe donc une base orthonormale $(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de $F^\perp$ telle que la matrice de $p \circ v$ dans cette base est à diagonale nulle. Donc, $\langle \varepsilon_j, v(\varepsilon_j) \rangle = 0$.
     D'autre part, on a $\langle \varepsilon, u(\varepsilon) \rangle = 0$ et comme $\varepsilon_j \in F^\perp$, on a $p(\varepsilon_j) = \varepsilon_j$ et $\langle \varepsilon_j, u(\varepsilon_j) \rangle = \langle p(\varepsilon_j), u(\varepsilon_j) \rangle$.
     Mais p est un projecteur orthogonal, c'est donc un endomorphisme symétrique.
     On a donc : $\langle p(\varepsilon_j), u(\varepsilon_j) \rangle = \langle \varepsilon_j, p \circ u(\varepsilon_j) \rangle$. Finalement : $\langle \varepsilon_j, u(\varepsilon_j) \rangle = \langle \varepsilon_j, v(\varepsilon_j) \rangle = 0$
     Conclusion : la matrice de u dans la base $(\varepsilon, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ est bien à diagonale nulle, ce qui achève la récurrence.

Exercice 1.5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit a et b deux vecteurs de E tels que la famille (a, b) est libre.

1. Que dire de n ?
2. Soit α et β deux applications de E dans $\mathbb{R}$.
   À quelle condition nécessaire et suffisante sur α et β l'application u définie sur E par :
   $$\forall x \in E,\ u(x) = \alpha(x)a + \beta(x)b$$
   est-elle un endomorphisme de E ?

On suppose que les applications α et β sont linéaires, non identiquement nulles et vérifient $\mathrm{Ker}(\alpha) \neq \mathrm{Ker}(\beta)$.

3. Quelles sont les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}(\alpha)$ et de $\mathrm{Ker}(\beta)$?
4. *On rappelle* que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a :
   $$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)\,.$$
   Montrer que le rang de u vaut 2.
5. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) \\ \beta(a) & \beta(b) \end{pmatrix}$ est diagonalisable et n'admet pas 0 comme valeur propre.
6. Soit un entier $p \geqslant 2$ et soit v l'application :
   $$v : P \in \mathbb{R}_p[X] \mapsto XP'(0) + X^p P'(1)$$
   Étudier le caractère diagonalisable et donner les valeurs propres de v.

Solution de l'exercice 1.5

1. La dimension d'un espace vectoriel est toujours supérieur au cardinal de toute famille libre, donc $n \geqslant 2$.
2. L'application u qui est à valeurs dans E est linéaire lorsque pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y) &\iff \alpha(\lambda x + y)a + \beta(\lambda x + y)b = \lambda\big(\alpha(x)a + \beta(x)b\big) + \alpha(y)a + \beta(y)b \\ &\iff \alpha(\lambda x + y)a + \beta(\lambda x + y)b = \big(\lambda\alpha(x) + \alpha(y)\big)a + \big(\lambda\beta(x) + \beta(y)\big)b \\ &\iff \alpha(\lambda x + y) = \lambda\alpha(x) + \alpha(y) \text{ et } \beta(\lambda x + y) = \lambda\beta(x) + \beta(y), \quad \text{car } (a, b) \text{ libre.} \end{aligned}$$

   Ainsi u est linéaire si et seulement si α et β sont linéaires.
3. Comme α et β sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, leurs rangs respectifs sont inférieurs à 1.
   Mais comme ni α, ni β n'est nul, leurs rangs respectifs sont supérieurs à 1.
   Finalement, $\mathrm{rg}(\alpha) = \mathrm{rg}(\beta) = 1$ et par le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(\alpha)) = \dim(\mathrm{Ker}(\beta)) = n - 1$.
4. Comme (a, b) est libre, on a : $x \in \mathrm{Ker}(u) \iff \alpha(x)a + \beta(x)b = 0 \iff \alpha(x) = \beta(x) = 0$.
   Ainsi, $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta)$. Donc, par le théorème du rang puis la formule de Grassmann :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(u) &= \dim E - \dim(\mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta)) \\ &= \dim E - \big(\dim(\mathrm{Ker}(\alpha)) + \dim(\mathrm{Ker}(\beta)) - \dim(\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta))\big) \\ &= 2 - n + \dim(\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta)). \end{aligned}$$

   Or, $\mathrm{Ker}(\alpha) \subset \mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta) \subset E$. Donc, $\dim(\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta)) \in \{n - 1, n\}$.
   Mais on ne peut avoir $\dim(\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta)) = n - 1$ car sinon on aurait $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(\beta)$ et donc $\mathrm{Ker}(\beta) \subset \mathrm{Ker}(\alpha)$ puis égalité à cause des dimensions. Ainsi, $\mathrm{rg}(u) = 2$.
5. Comme $\mathrm{rg}(u) = 2$, l'espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension $n - 2$.
   Ainsi, u est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles de u vaut 2.
   Or, si $\lambda \neq 0$ les vecteurs propres associés appartiennent à l'image $\mathrm{Im}\, u$ car :

$$u(x) = \lambda x \Longrightarrow x = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \mathrm{Im}(u).$$

   De plus, il est clair que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u ; notons $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit.
   Ainsi, u est diagonalisable si et seulement si $\tilde{u}$ est diagonalisable avec des valeurs propres non nulles.
   On termine alors en remarquant que la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (a, b) de $\mathrm{Im}\, u$ vaut $A = \begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) \\ \beta(a) & \beta(b) \end{pmatrix}$
6. On utilise la question précédente avec $E = \mathbb{R}_p[X]$ (donc $n = p + 1$) et $u(P) = XP'(0) + X^n P'(1)$, *i.e.* $a = X$, $b = X^p$ $\alpha(P) = P'(0)$ et $\beta(P) = P'(1)$ — la famille (a, b) est bien libre.
   Dans ce cas, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & p \end{pmatrix}$ est triangulaire avec 1 et p comme valeurs propres. Donc, A est diagonalisable et n'admet pas 0 comme valeur propre.
   Ainsi, u est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 (espace propre associé de dimension $p - 1 > 0$), 1 (espace propre associé de dimension 1) et p (espace propre associé de dimension 1).

Exercice 1.6

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ une permutation de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire que $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sont des entiers tels que $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = [\![1, n]\!]$.

Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $p(M) = M' = (m'_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$m'_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq i_j \\ m_{i,j} & \text{si } i = i_j \end{cases}$$

1. Dans cette question seulement on prend $n = 3$ et $(i_1, i_2, i_3) = (2, 1, 3)$.
   Calculer $p(M)$ pour $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$.
2. On admet que p est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que p est un projecteur et déterminer son noyau et son image.

Pour tout $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\varphi(M)$ le scalaire :

$$\varphi(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{i_k,k}$$

3. Montrer que φ est une application linéaire et déterminer la dimension de son noyau.
4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. On définit l'endomorphisme u_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

   $$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ u_A(M) = \varphi(M)A + \varphi(A)M$$

   Montrer que u_A est diagonalisable si et seulement si $\varphi(A) \neq 0$.
5. L'endomorphisme u_A peut-il être un projecteur ?

Dorénavant, $n = 3$. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Soit $K = p(J)$ — où p a été défini au début de cet exercice. Soit l'endomorphisme v_K de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$v_K(M) = KM$$

6. Étudier en fonction des valeurs de i_1, i_2 et i_3 (on obtiendra 6 matrices K possibles) le caractère diagonalisable de v_K.

Solution de l'exercice 1.6

1. D'après la définition, on obtient $p(M) = \begin{pmatrix} 0 & m_{1,2} & 0 \\ m_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,3} \end{pmatrix}$.

2. Si on note $M' = p(M)$ et $M'' = p(M') = p \circ p(M)$, on a :
   $m''_{i_j,j} = m'_{i_j,j}$, les autres coefficients $m''_{i,j}$ étant nuls pour $i \neq i_j$;
   on a donc $M'' = M' = p(M')$ soit $p(M) = p \circ p(M)$: p est un projecteur.

   Si on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le seul coefficient non nul est le coefficient (i,j), celui-ci valant 1, on obtient immédiatement que le noyau de p a pour base la famille des $E_{i,j}$ pour (i,j) parcourant $[\![1,n]\!] \setminus \{(i_1,1),(i_2,2),\dots,(i_n,n)\}$; en particulier $\dim(\mathrm{Ker}(p)) = n^2 - n$.

   On remarque que $p(E_{i_j,j}) = E_{i_j,j}$ et donc la famille des $E_{i_j,j}$ pour j parcourant $[\![1,n]\!]$ forme une base de $\mathrm{Im}(p)$ (par théorème du rang, on sait que $\mathrm{Im}(p)$ est de dimension n).

3. La linéarité découle de $\varphi = \mathrm{tr} \circ p$. De plus φ n'est pas nulle (par exemple $\varphi(E_{i_1,1}) = 1 \neq 0$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$; donc d'après le théorème du rang, son noyau est de dimension $n^2 - 1$.

4. Si $M \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $u_A(M) = \varphi(A)M$ donc le sous-espace propre associé à la valeur propre $\varphi(A)$ est au moins de dimension $n^2 - 1$.

   Par ailleurs, $u_A(A) = 2\varphi(A)A$, donc $2\varphi(A)$ est valeur propre et le sous-espace propre associé contient $\mathrm{Vect}(A)$.

   - Si $\varphi(A) \neq 0$, alors les élements propres obtenus ci-dessus sont distincts ; comme la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut au moins $(n^2-1)+1$, on en déduit que u_A est diagonalisable.
   - Si $\varphi(A) = 0$, alors $u_A(M) = \varphi(M)A$. Donc $u_A(M) = \lambda M$ n'est possible que si $M \in \mathrm{Vect}(A)$ ou $\varphi(M) = 0$. Or $u_A(A) = 0$, donc $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$, donc les seuls vecteurs propres sont les éléments de $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Donc, il ne peut exister de base de vecteurs propres *i.e.* φ n'est pas diagonalisable.

5. Si u_A est un projecteur, il est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\{0,1\}$
   car $\mathrm{Ker}\,u_A$ et $\mathrm{Im}\,u_A = \mathrm{Ker}(u_A - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires — l'un deux deux sous-espaces peut être $\{0\}$.
   D'après la question précédente, il faut donc que $\varphi(A) \neq 0$, et alors $\mathrm{Sp}\,(u_A) = \{\varphi(A), 2\varphi(A)\}$.
   Mais alors on ne peut avoir $\{\varphi(A), 2\varphi(A)\} \subset \{0,1\}$. Donc u_A n'est jamais un projecteur.

6. On remarque que $v_k^p(M) = K^p M$, donc tout polynôme annulateur de K est annulateur de v_k.
   Par ailleurs les 6 matrices K possibles sont :
   I_3, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   - Dans le premier cas, $v_K = \mathrm{Id}$ est évidemment diagonalisable.
   - Dans les trois cas suivants $K^2 = I_3$ donc les valeurs propres possibles de v_k sont 1 et -1. On a toujours v_K diagonalisable (par exemple pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vecteurs propres associés à la valeur propre 1, tandis que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre -1).
   - Par contre, pour les deux dernières matrices, on a $K^3 = I_3$, donc 1 est la seule valeur propre possible de v_k. Donc v_K n'est pas diagonalisable car sinon on aurait $v_k = \mathrm{Id}$, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 1.7

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer le rang de f. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$
   (b) Calculer A^2 et son rang.
   (c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$.
   (d) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id)$.
   (e) En déduire que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Dans cette question, on cherche à déterminer les endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g^2 = f$.
   (a) Montrer que si g est une solution, alors $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ sont stables par g.
   (b) En déduire les solutions de l'équation $g^2 = f$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.7 Notons e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Les colonnes (C_1, C_2) de A sont libres et $C_3 = -C_2$. Ainsi f est de rang 2. Comme $f(e_3) = -f(e_2)$, une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est $\boxed{e_2 + e_3}$ (avec le théorème du rang).

   (b) Par calcul matriciel $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathrm{rg}(f^2) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = 2$.

   (c) Notons (C_1', C_2', C_3') les colonnes de A^2. Comme $C_1' = C_2' = -C_3'$, une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$ est par exemple, $(e_1 - e_2, e_1 + e_3)$.

   (d) On calcule facilement $\mathrm{Ker}(f^2) \cap \mathrm{Ker}(f - 2Id) = \{0\}$.
   On calcule $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, dont le rang vaut 2 (les deux premières colonnes sont liées) et $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2Id) = 1$.
   En utilisant les dimensions des sous-espaces, il vient $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id)$.

   (e) D'après la matrice, une base de $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ est $e_1 + e_2$.
   Dans la base $(-4(e_2 + e_3), e_1 + e_3, e_1 + e_2)$, la matrice de f est la matrice B demandée (remarque : $-4(e_2 + e_3) \in \mathrm{Ker}(f)$ et $e_1 + e_3 \notin \mathrm{Ker}(f)$).

2. (a) Comme $f = g^2$, on a $f \circ g = g^3 = g \circ f$. Ainsi f et g commutent, donc $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ sont stables par g.

   (b) *Analyse :* soit g une solution ; notons M la matrice de g dans la base de la question 1.e.
   Par stabilité (question 2.a) M est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.
   Alors, comme $g^2 = f$, on a $e^2 = 2$ et $BM = MB$, donc M est (après calculs) de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

   Synthèse : après calculs aucune matrice M de ce type ne vérifie $M^2 = B$.
   Par suite, l'équation $g^2 = f$ n'admet pas de solution.

Exercice 1.8

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $2n$.

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, chacun de dimension n tels que $E = E_1 \oplus E_2$. On note p_1 la projection orthogonale de E sur E_1 et p_2 la projection orthogonale de E sur E_2.

On pose enfin $u = p_1 + p_2$.

1. Caractériser u lorsque E_1 et E_2 sont orthogonaux.
2. (a) Soit $(e_1, \ldots, e_{2n})$ une base quelconque de E. Montrer que la matrice $N \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ de terme général $m_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle$ est une matrice symétrique réelle définie positive, c'est-à-dire telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ avec $X \neq 0$, on a ${}^tXNX > 0$.

   (b) On suppose que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E_1 et que $(e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$ est une base orthonormée de E_2. Montrer que la matrice de u dans la base $(e_1, \ldots, e_{2n})$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ {}^tA & I_n \end{pmatrix}$$

   où I_n est la matrice identité d'ordre n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (c) Montrer que M est une matrice symétrique définie positive.
3. On note $\alpha(M) = \displaystyle\prod_{i=1}^{2n} \lambda_i$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ sont les valeurs propres de M.

   (a) Montrer que $\alpha(M) > 0$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{2n} \lambda_i\right)^{1/2n} \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i$.

   (c) En déduire que $\alpha(M) \leqslant 1$.

   (d) Dans quel cas a-t-on $\alpha(M) = 1$?

Solution de l'exercice 1.8

1. Dans le cas où $E = E_1 \oplus^{\perp} E_2$, on a $p_2 = Id - p_1$ et $u = Id$.

2. (a) La matrice M est symétrique réelle par symétrie du produit scalaire. De plus, si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} x_i e_i$ et si X est la matrice colonne canoniquement associée à x, alors :

$$^tXMX = \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n} x_i x_j \langle e_i, e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{2n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{2n} x_i e_i\rangle = ||x||^2$$

ce qui montre le caractère défini positif.

(b) Par définition d'une matrice associée à un endomorphisme dans une base et le fait que chaque morceau de base soit orthonormé :

- si $1 \leqslant i \leqslant n$, $u(e_i) = e_i + \displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n} \langle e_i, e_j\rangle e_j$.
- si $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$, $u(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j\rangle e_j + e_i$.

Ceci donne la matrice $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ {}^tA & I_n \end{pmatrix}$.

(c) La matrice M est symétrique définie positive par la question a).

3. (a) Les valeurs propres d'une matrice symétrique définie positive sont toutes strictement positives.

(b) Il s'agit de l'inégalité arithmético-géométrique qu'on démontre en utilisant la concavité de la fonction logarithme.

(c) On remarque que la trace de M vaut $2n$ et on sait que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i = \mathrm{tr}(M)$. On conclut grâce à la question précédente.

(d) Supposons que $\alpha(M) = 1$. On a donc égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique. Ceci entraîne que tous les λ_i sont égaux et leur somme valant $2n$, ils valent tous 1.
La matrice M, diagonalisable, est semblable à la matrice identité I_{2n} donc égale à I_{2n}. Cela entraîne que $E_1 \perp E_2$.

Exercice 1.9

Soit n un entier fixé supérieur ou égal à 2.
Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelée **centro-symétrique** si, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$$

On note $S = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$s_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n+1-j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Une matrice centro-symétrique est-elle également symétrique ?
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice centro-symétrique. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a : $a_{n+1-i,j} = a_{i,n+1-j}$.
3. (a) Montrer qu'une matrice A est centro-symétrique si et seulement si $AS = SA$.
   (b) En déduire que si A et B sont centro-symétriques, alors AB également et que si A est inversible, alors A^{-1} est centro-symétrique.
4. Soit λ une valeur propre de A centro-symétrique et X un vecteur propre associé.
   Un vecteur $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est appelé **symétrique** si pour tout $i \in [\![1,n]\!], z_i = z_{n+1-i}$.
   Un vecteur $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est appelé **antisymétrique** si pour tout $i \in [\![1,n]\!], z_i = -z_{n+1-i}$.
   (a) Montrer que $Y = X + SX$ appartient au sous-espace propre $E_\lambda(A)$.
   (b) En déduire que le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ admet au moins un vecteur propre symétrique ou un vecteur propre antisymétrique.

Solution de l'exercice 1.9

1. La réponse est négative. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Si $a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$, alors en remplaçant i par $n+1-i$ et en laissant le second indice inchangé, on obtient $a_{n+1-i,j} = a_{i,n+1-j}$. On a bien entendu la réciproque.
3. (a) On effectue le calcul de AS et de SA. La matrice SA donne une permutation circulaire sur les lignes de A : si $A = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$, alors $SA = (L_n, L_{n-1}, \ldots, L_1)$.
   La matrice AS donne une permutation circulaire sur les colonnes de A : si $A = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$, alors $SA = (C_n, C_{n-1}, \ldots, C_1)$. Donc $AS = SA$ si et seulement si $a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$.

   (b) On a $AS = SA$ et $BS = SB$. Donc $A(BS) = A(SB) = (AS)B = SAB$ et $AS = SA \Rightarrow A^{-1}AS = A^{-1}SA \Rightarrow SA^{-1} = A^{-1}S$.
4. (a) On écrit $AY = AX + ASX = \lambda X + S(AX) = \lambda(X + SX) = \lambda Y$.

   (b) On écrit $X = \dfrac{X + SX}{2} + \dfrac{X - SX}{2} = Y + Z$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors $X + SX = \begin{pmatrix} x_1 + x_n \\ \vdots \\ x_n + x_1 \end{pmatrix}$ est symétrique et $X - SX = \begin{pmatrix} x_1 - x_n \\ \vdots \\ x_n - x_1 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

EXERCICE 1.10

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $A = (A_1|A_2|\ldots|A_n)$, où pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A_k représente la k-ième colonne de A.

Soit Φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \Phi(A) = S = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

1. Montrer que Φ est une application linéaire. Déterminer la dimension de $\operatorname{Im}\Phi$ et celle de $\operatorname{Ker}\Phi$.
2. Soit u définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ u(A) = u((A_1|A_2|\ldots|A_n)) = (S - A_1|S - A_2|\ldots|S - A_n)$$

   (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.
   (c) Déterminer un polynôme annulateur de u de degré 2.
   (d) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Soit $J = \big(J_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall\,(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $J_{i,j} = 1$. On pose $U = J - I_n$, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $v : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application définie par :

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ v(A) = AU$$

   (a) Comparer u et v.
   (b) Retrouver les résultats de la question 2.b).

Solution de l'exercice 1.10

1. On vérifie aisément la linéarité de l'application Φ.

   L'application Φ est surjective car si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors (par exemple) un antécédent de X est $\operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)$. Ainsi, $\dim(\operatorname{Im}\Phi) = n$ et $\dim(\operatorname{Ker}\Phi) = n^2 - n$.

2. (a) On vérifie aisément la linéarité de l'application u. En fait, il y a un lien entre Φ et u, puisque $u(A) = (\Phi(A)|\Phi(A)|\dots|\Phi(A)) - A$. Les valeurs propres de u seront celles de Φ décalées de -1 avec les même vecteurs propres.

   (b) Le réel 0 est valeur propre de Φ de sous-espace propre $\operatorname{Ker}\Phi$. Donc -1 est valeur propre de u de même sous-espace propre de dimension $n^2 - n$ qui est la dimension de $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/S = 0\}$.
   Si $u(A) = \lambda A$, alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!], S = (\lambda + 1)A_k$, avec $S \neq 0$. En sommant ces équations, il vient $nS = (\lambda + 1)S \Rightarrow \lambda = n - 1$. Le sous-espace propre associé est le sous-espace des matrices $(A_1|A_2|\dots A_n)$ telles $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = \dfrac{S}{\lambda + 1}$. Il est de dimension n engendré par les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   (c) Le polynôme candidat ne peut être que $(x + 1)(x - n + 1) = x^2 + (2 - n)x + 1 - n$.
   On vérifie que $u^2 + (2 - n)u - (n - 1)Id = 0$. En effet :
   $$u^2 : (A_1|A_2|\dots|A_n) \to (S-A_1|S-A_2|\dots|S-A_n) \to ((n-2)S+A_1|(n-2)S+A_2|\dots|(n-2)S+A_n)$$
   La vérification est ensuite immédiate.

   (d) L'endomorphisme u est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n^2.

3. (a) La vérification $u = v$ est immédiate.

   (b) On sait que $J^2 = nJ$ et $(J - I_n)^2 = (n - 2)J + I_n$. Ainsi, $J^2 + (2 - n)(J - I_n) + (1 - n)I_n = 0$.
   Les valeurs propres de J sont 0 et n. Les valeurs propres de U sont -1 et $n - 1$.

Exercice 1.11

Soit n un entier naturel non nul et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A la matrice définie par : $A = {}^tMM$.

1. On suppose dans cette question que M est inversible.
   (a) Montrer que A est diagonalisable. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles strictement positives.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et des réels positifs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ tels que
   $$A = P \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \mu_n^2 \end{pmatrix} P^{-1}$$
   puis que $A = S^2$ avec S une matrice symétrique et inversible que l'on précisera.
   (c) Montrer que $T = MS^{-1}$ est une matrice orthogonale.

   On admet que le résultat démontré dans la question 1 reste valable si M n'est pas inversible, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = TS$.

2. (a) Montrer que $\mathrm{tr}(A) \geqslant 0$. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$ si et seulement si M est la matrice nulle.
   (b) En étudiant l'application $h : x \mapsto \mathrm{tr}\left({}^t(M + xI_n)(M + xI_n)\right)$ définie sur $\mathbb{R}$, montrer que :
   $$(\mathrm{tr}(M))^2 \leqslant n\,\mathrm{tr}(A)$$
   (c) Étudier les cas d'égalité dans l'inégalité montrée en 2.b).

Solution de l'exercice 1.11

1. (a) La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.
Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ de A. Alors ${}^tMMX = \lambda X$ donc ${}^tX{}^tMMX = \lambda{}^tXX$.
D'où $\|MX\|^2 = \lambda\|X\|^2$. Donc $\lambda = \dfrac{\|MX\|^2}{\|X\|^2}$ car X est non nul ; donc λ est strictement positif, puisque M est inversible.

(b) Comme A est symétrique réelle, il existe une base orthogonale de vecteurs propres : donc il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
Les coefficients de D sont les valeurs propres de A et sont strictement positifs ; on peut donc les noter $\mu_1^2, \mu_2^2 \ldots, \mu_n^2$, avec les μ_i strictement positifs.

Posons $D' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$ et $S = PD'P^{-1}$.

Alors, S est symétrique car $P^{-1} = {}^tP$ et $A = S^2$.
Comme les termes diagonaux de D' sont strictement positifs, D' est inversible tout comme S (produit de matrices inversibles)

(c) Posons $T = MS^{-1}$ et montrons que T est orthogonale. Puisque $A = S^2$ et S symétrique ainsi que S^{-1}, on a :

$$ {}^tTT = {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = (S^{-1}){}^tMMS^{-1} = S^{-1}AS^{-1} = (S)^{-1}S^2S^{-1} = I_n $$

Donc, T est orthogonale et $M = TS$.

2. (a) On a $A = {}^tMM$, donc $\operatorname{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}^2 \geqslant 0$ et cette trace est nulle si et seulement si $M = 0$.
Par suite, si la trace est nulle, tous les coefficients de M le sont, donc la matrice M est nulle.

(b) Par linéarité de la trace, on obtient pour tout x réel : $h(x) = \operatorname{tr}(A) + x\operatorname{tr}(M) + x\operatorname{tr}({}^tM) + x^2\operatorname{tr}(I_n)$.
Donc, pour tout x réel, $h(x) = nx^2 + 2\operatorname{tr}(M)x + \operatorname{tr}(A)$ car une matrice a la même trace que sa transposée . Comme n est non nul, h est un polynôme du second degré.
Pour les mêmes raisons que dans la question 2.a), pour tout x réel, $A(x) = {}^t(M + xI_n)(M + xI_n)$ est une matrice symétrique réelle avec des valeurs propres positives, donc sa trace est positive.
Le polynôme h ne peut donc pas changer de signe et a un discriminant négatif ou nul d'où l'inégalité.

(c) On aura l'égalité si et seulement si le discriminant précédent est nul, c'est-à-dire si h s'annule une et une seule fois, c'est-à-dire quand il existe un réel x tel que d'après la question 2.a), $\operatorname{tr}\left({}^t(M + xI_n)(M + xI_n)\right) = 0$, ce qui implique que $M + xI_n$ soit nulle.
Ainsi, l'égalité est obtenue lorsque M est une matrice scalaire.

Exercice 1.12

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et B l'application définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad B(P,Q) = \int_0^1 t\, P(t)\, Q'(t) dt$$

   Vérifier que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ?

2. On pose :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi(P,Q) = \frac{1}{2}\Big[B(P,Q) + B(Q,P)\Big]$$

$$\forall P \in E, \quad \psi(P) = \varphi(P,P)$$

   (a) Déterminer un polynôme $P \in E$ non nul tel que $\psi(P) = 0$.

   (b) Expliciter la matrice $S \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de coefficients $s_{i,j} = \varphi\big(X^{i-1}, X^{j-1}\big)$, pour $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$.

   (c) On note q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ associée à la matrice S. Vérifier que l'on a :

$$\forall\, (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad q(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \psi\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k\Big).$$

3. Dans le cas $n = 1$, expliciter S et déterminer ses valeurs propres.
   La forme quadratique q est-elle positive ?

4. (a) Dans le cas $n = 2$, expliciter la matrice S.

   (b) On admet que, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$q(a,b,c) = \psi\big(a + bX + cX^2\big) = \frac{1}{3}\left[b + \frac{3}{4}\, a + \frac{9}{8}\, c\right]^2 - \frac{3}{16}\left[a - \frac{5}{18}\, c\right]^2 - \frac{1}{135}\, c^2$$

   Justifier que les formes linéaires $f_1 : (b,a,c) \mapsto b + \dfrac{3}{4}\, a + \dfrac{9}{8}\, c$, $f_2 : (b,a,c) \mapsto a - \dfrac{5}{18}\, c$ et $f_3 : (b,a,c) \mapsto c$ forment une base de $F = \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Solution de l'exercice 1.12

1. • La forme B est bilinéaire car le produit l'est et la dérivation est linéaire.
   • $B(1,X) = \displaystyle\int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \neq B(X,1) = \int_0^1 0 dt = 0$.
2. (a) On a : $\psi(1) = \displaystyle\int_0^1 0 dt = 0$.
   (b) Pour tous $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$,
$$s_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (j-1)\, t^{i+j-2} dt + \int_0^1 (i-1)\, t^{i+j-2} dt\right) = \frac{i+j-2}{2\,(i+j-1)}$$
   (c) Le calcul est facile car l'application φ est bilinéaire, symétrique de matrice S.
3. En résolvant $S\,X = \lambda\,X$, il vient :
$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Sp}\,(S_2) = \left\{\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{12}\right\}$$
   Ainsi, une valeur propre est strictement négative, donc q n'est pas positive (ni définie-positive).
4. (a)) On a :
$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$
   (b) La matrice des (f_i) dans la base des formes coordonnées b, a, c (dans cet ordre), est :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ \frac{9}{8} & -\frac{5}{18} & 1 \end{pmatrix}$$
   Cette matrice est triangulaire inversible, donc (f_i) est une base de F.

EXERCICE 1.13

Soit un entier $n \geqslant 2$. On dit qu'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $X \geqslant 0$ (resp. $X > 0$) si pour tout $i \in [\![1, n]\!], x_i \geqslant 0$ (resp. $x_i > 0$). Si $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, on dit que $X \geqslant Y$ si $X - Y \geqslant 0$.
Pour tout $X = \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $||X||_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

On dit que $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A \geqslant 0$ (resp. $A > 0$) si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, a_{i,j} \geqslant 0$ (resp. $a_{i,j} > 0$).

Enfin, on confond $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

Dans tout l'exercice, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A > 0$.
On pose : $\Omega = \{\alpha \geqslant 0 \,/\, \exists\, X \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } X \geqslant 0, ||X||_\infty = 1 \text{ et } AX \geqslant \alpha X\}$.

1. Montrer que l'ensemble Ω n'est pas vide et que si $\alpha \in \Omega$, alors $[0, \alpha] \subset \Omega$.
2. Montrer que l'ensemble Ω est borné.

   On note $\mu = \sup\limits_{\alpha \in \Omega}(\alpha)$ et on *admet* que μ appartient à Ω.
3. Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant \mu$.

   (Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on pourra considérer le vecteur noté $|X|$ tel que $|X| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$).
4. On se propose de montrer que μ est une valeur propre de A.
   (a) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes : $X \geqslant 0$, $||X||_\infty = 1$ et $AX \geqslant \mu X$.
   On pose : $Z = AX - \mu X$. Montrer que si $Z \neq 0$, alors $AZ > 0$.
   (b) En déduire que l'inégalité $AZ > 0$ est impossible puis que μ est valeur propre de A.

Solution de l'exercice 1.13

1. Comme $0 \in \Omega$, l'ensemble Ω n'est pas vide.
   Soit $\alpha > 0$ appartenant à Ω. Soit $0 \leqslant \beta < \alpha$. Il existe $X \geqslant 0$ de norme 1, tel que $AX \geqslant \alpha X \geqslant \beta X$. Donc $\beta \in \Omega$. Ainsi Ω est-il un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble Ω est borné. En effet. Soit $X \geqslant 0$, $||X||_\infty = x_i = 1$ et $AX \geqslant \alpha X$.
   En utilisant la i-ième équation, il vient :
   $$\alpha = \alpha x_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \text{ (constant)}$$
3. Soit λ une valeur propre de A. Il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. On peut supposer $||X||_\infty = 1$.
   Alors comme $A > 0$, par inégalité triangulaire, on a :
   $$A|X| = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j|\right)_i \geqslant \left(\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right|\right)_i = (|\lambda x_i|)_i = |\lambda|\,|X|.$$
   Ceci montre que $|\lambda| \in \Omega$.
4. (a) Comme $A > 0$, comme $AX \geqslant \mu X$, si $Z \neq 0$, on a $AZ > 0$. Car si $AZ = 0$, comme $A > 0$, il vient $Z = 0$.

   (b) Posons $Y = AX$. Si $AZ > 0$, alors $AY > \mu Y$. En notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $A = (a_{i,j})$, ceci est équivalent à :
   $$\begin{cases} a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,n}y_n > \mu y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}y_1 + \cdots + a_{n,n}y_n > \mu y_n \end{cases}$$
   On a $X \geqslant 0$, $A > 0$. Donc $Y > 0$. Alors, si
   $$\mu' = \inf_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\frac{a_{i,1}y_1 + \cdots + a_{i,n}y_n}{y_i}\right)$$
   alors $\mu' > \mu$ et $AY \geqslant \mu' Y$. Donc $\mu' \in \Omega$ en contradiction avec la définition de μ.
   Ainsi, $Z = 0$ et $AX = \mu X$.

Exercice 1.14

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que A est une matrice orthogonale si et seulement si on a :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

   (b) En posant $a = \cos\theta, b = \sin\theta, c = \cos\varphi, d = \sin\varphi$, montrer que toute matrice orthogonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de la forme :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

   On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On rappelle que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme suivante

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}$$

   où $A_s = \dfrac{A + {}^tA}{2}$ est appelée la partie symétrique de A et $A_a = \dfrac{A - {}^tA}{2}$ la partie antisymétrique de A .

2. (a) Donner les parties symétrique et antisymétrique de R_θ et S_θ.

   (b) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs propres de A_s sont dans l'intervalle $[-1, 1]$.

3. Donner un exemple de matrice symétrique S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont incluses dans $[-1, 1]$ et pour laquelle il n'existe pas de matrice $A \in O_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A_s = S$.

4. Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On suppose que les valeurs propres de S sont incluses dans $[-1, 1]$ et que pour toute valeur propre λ de la matrice S, le sous-espace propre de S associé à λ est de dimension paire.

   Montrer qu'il existe $A \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A_s = S$.

Solution de l'exercice 1.14

1. (a) Par définition, une matrice est orthogonale si ses colonnes forment une base orthonormée. Pour la matrice A donnée, ce sont exactement les conditions proposées.
Autre idée : par le calcul ${}^tAA = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$.

   (b) Comme $a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1$, on peut utiliser l'aide proposée. La troisième équation devient alors :

$$\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = \cos(\varphi-\theta) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \varphi = \theta - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

   Dans le premier cas, on obtient S_θ et dans le second R_θ.

2. (a) On obtient $R_{\theta,s} = \cos\theta I_2$ et $R_{\theta,a} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$. De même, $S_{\theta,s} = S_\theta$ et $S_{\theta,a} = 0$.

   (b) Si A est une matrice orthogonale, alors $A_s = \dfrac{A+A^{-1}}{2}$. Soit λ une valeurs propre de A_s et X un vecteur propre associé. On a alors :

$$AX + A^{-1}X = 2\lambda X \Leftrightarrow (A^2 - 2\lambda A + I)X = 0$$

   Ainsi la matrice $A^2 - 2\lambda A + I$ n'est pas inversible. Or, par l'absurde, si $|\lambda| > 1$, alors $1-\lambda^2 < 0$ et $A^2 - 2\lambda A + I = (A-\alpha I)(A-\beta I)$ avec $\alpha = \lambda + \sqrt{\lambda^2-1}$ et $\beta = \lambda - \sqrt{\lambda^2-1}$. Ainsi α ou β est valeur propre complexe de A.
   Or, par ailleurs, si μ est une valeur propre de A orthogonale, avec μ réel ou complexe, on a :

$$AY = \mu Y \Rightarrow ||Y||^2 = ||AY||^2 = |\mu|^2||Y||^2 \Rightarrow |\mu| = 1$$

   Comme $|\alpha| = |\beta| = \lambda^2 + (\lambda^2-1) > 1$ ceci est absurde.
   Autre idée : par Cauchy-Schwarz on a : $|{}^tXAX| \leqslant ||X||||AX|| = ||X||^2$,
   et comme A^{-1} est orthogonale aussi, on a : $|{}^tXA^{-1}X| \leqslant ||X||^2$.
   Ainsi : $|\lambda| \times ||X||^2 = |{}^tXA_sX| \leqslant \frac{1}{2}(|{}^tXAX| + |{}^tXA^{-1}X|) \leqslant ||X||^2$.

3. On prend une matrice diagonale, par exemple $S = \mathrm{diag}(1/2, 1/3)$. Au vu de la première question, on connaît toutes les matrices orthogonales A de $O_2(\mathbb{R})$ et aucune ne donne $A_s = S$.

4. La matrice S est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. La dimension de chaque sous-espace propre est paire. Ainsi n est pair ($n = 2p$) et la matrice S est semblable à une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1 \ldots, \lambda_p, \lambda_p)$ avec $\lambda_i \in [-1, 1]$. Notons P la matrice de passage associée.
   Pour chaque λ_i, on choisit un angle θ_i tel que $\cos(\theta_i) = \lambda_i$. La matrice orthogonale R_{θ_i} vérifie $R_{\theta_i,s} = \mathrm{diag}(\lambda_i, \lambda_i)$.
   En regroupant ces matrices orthogonales en une seule matrice $R_{\theta_1,\ldots,\theta_p}$ (diagonale par blocs), on a $A = PR_{\theta_1,\ldots,\theta_p}{}^tP$ qui vérifie la relation voulue.

EXERCICE 1.15

Soit un entier $n \geqslant 2$ et une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $L^2 = I_n$, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice L dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient les trois propriétés suivantes :

   i) $\mathbb{R}^n = F \oplus G$;

   ii) pour tout $x \in F$, $f(x) = x$;

   iii) pour tout $x \in G$, $f(x) = -x$.

2. Montrer que $\mathrm{tr}(L) = \dim F - \dim G$, où tr désigne la trace.

   On note S_n l'ensemble des matrices $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $L^2 = I_n$.

3. (a) Soit $L \in S_n$ et soit M une matrice semblable à L. Montrer que $M \in S_n$.

   (b) Montrer que deux matrices L et M appartenant à S_n sont semblables si et seulement si on a : $\mathrm{tr}(L) = \mathrm{tr}(M)$.

4. Pour tout $M \in S_n$, on pose : $[M] = \{L \in S_n \,/\, L \text{ est semblable à } M\}$.

   (a) Déterminer $[I_n]$.

   (b) Montrer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $([M_1], [M_2], \ldots, [M_p])$ est une famille de sous-ensembles de S_n deux à deux disjoints et tels que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} [M_k] = S_n$.

   (c) Donner la valeur de p.

Solution de l'exercice 1.15

1. Soit $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $L^2 = I_n$. Montrons que L est diagonalisable, c'est-à-dire le point i).
   On pose $F = \mathrm{Ker}(L - I_n)$ et $G = \mathrm{Ker}(L + I_n)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On peut écrire
   $$x = \frac{x + L(x)}{2} + \frac{x - L(x)}{2} = y + z$$
   et comme $(L - I_n)(L + I_n) = (L + I_n)(L - I_n) = L^2 - I_n = 0$, on a $y \in F$ et $z \in G$ et ainsi $R^n \subseteq F + G \subseteq R^n$. De plus, si $x \in F \cap G$, alors $L(x) = x = -x$ entraîne que $x = 0$. Donc $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

   Les points ii) et ii) sont évidents au vu de la définition de F et G.
2. La matrice L est diagonalisable et ses valeurs propres sont -1, de sous-espace propre associé G et 1 de sous-espace propre associé F. Deux matrices semblables ont même trace. Ainsi $\mathrm{tr}(L) = \dim F - \dim G$.
3. (a) Si L et M sont semblables, alors elles ont même trace. De plus $M^2 = PL^2P^{-1} = I_n$.

   (b) Réciproquement, si $\mathrm{tr}(L) = \mathrm{tr}(M)$, comme $L^2 = M^2 = I_n$, on a alors :
   $$\begin{cases} \dim F_L - \dim G_L = \dim F_M - \dim G_M \\ \dim F_L + \dim G_L = \dim F_M + \dim G_M = n \end{cases}$$
   Cela entraîne que $\dim F_L = \dim F_M$ et $\dim G_L = \dim G_M$. On peut donc construire un isomorphisme u entre F_L et F_M et un isomorphisme v entre G_L et G_M. Et comme $\mathbb{R}^n = F_L \oplus G_L = F_M \oplus G_M$, ces deux isomorphismes donnent naissance à une matrice P inversible telle que $M = P^{-1}LP$.
4. (a) Au vu de la définition, $[I_n] = \{I_n\}$.

   (b) On vient de voir que $L \sim M$ si et seulement L et M ont même trace et cette trace vaut $\dim F - \dim G$. Les valeurs possibles de $\mathrm{tr}(L)$, quand $L \in [M]$, sont donc $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Toute matrice de S_n est semblable à une seule matrice diagonale formée de k fois le nombre 1 et $n - k$ fois le nombre -1, ceci pour $k \in [\![0, n]\!]$. Donc, $p = n + 1$.

Exercice 1.16

Soit n et p deux entiers de $\mathbb{N}^*$. Soit une matrice **rectangulaire** non nulle $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ à n lignes et p colonnes.

1. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, un entier $r \in [\![1, p]\!]$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > 0$ et ${}^tQ{}^tAAQ = D$,

   où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent $d_{i,i} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i \leqslant r \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

   Pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$, on note X_i la i-ème colonne de Q.

2. (a) Montrer que le rang de ${}^tAA$ est égal à r.

   (b) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, AX_i est un vecteur propre de la matrice $A{}^tA$ associé à la valeur propre λ_i. En déduire que les matrices $A{}^tA$ et ${}^tAA$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

   (c) Soit $(U_1, \dots, U_s)$ une base du sous-espace propre de ${}^tAA$ associé à une valeur propre λ non nulle. Montrer que la famille $(AU_1, \dots, AU_s)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une famille libre.

   (d) En déduire que les sous-espaces propres de $A{}^tA$ et ${}^tAA$ associés à la même valeur propre non nulle sont de même dimension et que le rang de $A{}^tA$ est égal à r.

3. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $Y_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} AX_i$.

   (a) Montrer que la famille $(Y_1, \dots, Y_r)$ est une famille orthonormée de vecteurs propres de $A{}^tA$.

   (b) En déduire qu'il existe des vecteurs $Y_{r+1}, \dots, Y_n$ pour lesquels la famille $(Y_1, \dots, Y_r, Y_{r+1}, \dots, Y_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A{}^tA$.

4. Dans cette question, on suppose que $p = n$. On note $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ème colonne de P est la matrice-colonne Y_i.

   Soit $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonaux valent $\delta_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i} & \text{si } i = j \leqslant p \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

   Montrer que $A = P\Delta{}^tQ$.

Solution de l'exercice 1.16

1. La matrice ${}^tAA$ est carrée d'ordre p et symétrique réelle ; on peut donc appliquer le théorème spectral en ordonnant les valeurs propres dans l'ordre décroissant. De plus, ses valeurs propres sont positives ou nulles, car si ${}^tAAX = \lambda X$ et $X \neq 0$, alors $\lambda \|X\|^2 = {}^tX({}^tAAX) = \|AX\|^2 \geqslant 0$, d'où $\lambda \geqslant 0$. Enfin au moins une de ces valeurs propres est non nulle, car sinon ; on aurait ${}^tAA = 0$, et donc $A =$, ce qui est absurde. En notant r le nombre de valeurs propres non nulles, on obtient le résultat demandé.
2. (a) Comme ${}^tAA$ et D sont semblables, elles ont même rang, à savoir r.

   (b) Comme les colonnes de Q sont des vecteurs propres de ${}^tAA$, on a :
$$(A{}^tA)AX_i = A({}^tAAX_i) = A\lambda_i X_i = \lambda_i AX_i.$$
   De plus, $AX_i \neq 0$ car sinon on aurait $\lambda_i \|X_i\|^2 = \|AX_i\|^2 = 0$ ce qui est absurde car X_i et λ_i ne sont pas nuls.
   Ceci montre que $\mathrm{Sp}\,({}^tAA) \setminus \{0\} \subset \mathrm{Sp}\,(A{}^tA) \setminus \{0\}$; l'inclusion inverse s'obtient en échangeant les rôles de A et ${}^tA$.
   D'où $\mathrm{Sp}\,({}^tAA) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}\,(A{}^tA) \setminus \{0\}$.

   (c) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 AU_1 + \cdots + \alpha_s AU_s = 0$.
   Alors : $\alpha_1{}^tAAU_1 + \cdots + \alpha_s{}^tAAU_s = 0$, soit $\lambda(\alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_s U_s) = 0$,
   soit $\alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_s U_s = 0$ car $\lambda \neq 0$, soit $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$, car $U_1, \ldots, U_s$ libre.

   (d) Les deux questions précédents montrent que $(AU_1, \ldots, AU_s)$ est une famille libre de $E_\lambda(A{}^tA)$ (sous-espace propre de $A{}^tA$ associé à λ), donc :
$$\dim E_\lambda(A{}^tA) \geqslant s = \dim E_\lambda({}^tAA).$$
   L'inégalité inverse s'obtient en échangeant les rôles de A et ${}^tA$, d'où l'égalité.
   Le rang d'une matrice diagonalisable est égal à la somme des dimensions des sous-espaces propres associés à ses valeurs propres non nulles, donc $A{}^tA$ et ${}^tAA$ ont le même rang, égal à r (d'après 2.a).
3. (a) D'après 2.b), $Y_1, \ldots, Y_r$ est une famille de vecteurs propres de $A{}^tA$. En outre :
$$\forall i, j \in [\![1, r]\!],\ {}^tY_iY_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}{}^tX_i{}^tAAX_j = \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}{}^tX_iX_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   car Q étant orthogonale, ses colonnes forment une famille orthonormée.

   (b) Comme $X_1, \ldots, X_r$ sont les r premières colonnes de Q, elles forment une base orthonormée de la somme des sous-espace propres de ${}^tAA$ associés aux valeurs propres non nulles et donc, d'après les questions précédentes, $Y_1, \ldots, Y_r$ est une base de la somme des sous-espace propres de $A{}^tA$ associés aux valeurs propres non nulles. Si $n = r$, alors la famille convient, sinon on la complète par $Y_{r+1}, \ldots, Y_n$ une base orthonormée de l'espace $E_0(A{}^tA)$ qui est orthogonal à la somme des sous-espace propres de $A{}^tA$ associés aux valeurs propres non nulles.
4. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, la définition de Y_i donne $AX_i = \sqrt{\lambda_i}Y_i$.
   Et pour $i \geqslant r + 1$, on a $AY_i = 0$ (car $\|AX_i\|^2 = {}^tX_i({}^tAAX_i) = 0$).
   Ainsi, la matrice de l'application linéaire canoniquement associée à A dans la base $X_1, \ldots, X_p$ au départ et dans la base $Y_1, \ldots, Y_p$ $(p = n)$ à l'arrivée, est Δ. Donc, la formule de changement de base donne $\Delta = P^{-1}AQ$, soit $A = P\Delta Q^{-1} = P\Delta{}^tQ$.

Exercice 1.17

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et u un vecteur unitaire de E. On note $<,>$ son produit scalaire.

On considère la fonction $f_{a,b}$ où a et b sont deux réels avec $a \neq 0$, définie par :

$$\forall x \in E, \quad f_{a,b}(x) = a < x, u > u + b\,x.$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est un endomorphisme symétrique de E.
2. Préciser le spectre de $f_{a,b}$.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de a et de b, l'endomorphisme $f_{a,b}$ est-il un projecteur ?
4. Lorsque $f_{a,b}$ est bijectif, déterminer la réciproque de $f_{a,b}$.
5. On considère l'application F définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{L}(E)$ par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad F((a,b)) = f_{a,b}.$$

   (a) Montrer que F est une application linéaire.

   (b) Déterminer $\operatorname{Ker} F$.

   (c) Quel est le rang de F ?

Solution de l'exercice 1.17 On remarquera que si $a = 0$, alors $f_{0,b} = bId$.

1. $f_{a,b}$ est une application de E dans E, linéaire en utilisant la linéarité du produit scalaire, c'est donc un endomorphisme de E. Soit x et y deux vecteurs de E, on a :

$$< f_{a,b}(x), y >=< a \ < x, u > u + b\,x, y >= a < x, u >< y, u > +b < x, y >,$$

Cette expression étant symétrique par rapport à x et y, on en déduit que $f_{a,b}$ est un endomorphisme symétrique de E.

2. On remarque que $f_{a,b}(u) = (a+b)u$, donc $a+b$ est une valeur propre et le sous-espace propre est $\mathrm{Vect}(u)$. Par ailleurs, pour $x \in \mathrm{Vect}(u)^{\perp}$, $f_{a,b}(x) = bx$, et le sous-espace propre associé contient $\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$. Par conséquent comme $a \neq 0$, alors $f_{a,b}$ a deux valeurs propres b et $a + b$.

3. Comme $f_{a,b}$ est diagonalisable, $f_{a,b}$ est un projecteur si et seulement si son spectre est inclus dans $\{0, 1\}$, soit $(a, b) \in \{(1, 0), (-1, 1), (0, 1), (0, 0)\}$.

4. L'endomorphisme $f_{a,b}$ est bijectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre, soit lorsque $b \neq 0$ et $a + b \neq 0$. Dans ce cas, pour tout vecteur x de E, si on a :

$$y = a \ < x, u > u + b\,x,$$

alors :

$$< y, u >= a \ < x, u > +b \ < x, u >= (a + b) < x, u > .$$

On en déduit donc que :

$$x = \frac{1}{b} y - \frac{a}{b(a+b)} < y, u > u.$$

Ainsi la réciproque de $f_{a,b}$ est $f_{-a/(b(a+b)),1/b}$

5. (a) F est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{L}(E)$. On prouve la linéarité directement.
   (b) Si $(a, b) \in \mathrm{Ker}\, F$, alors $f_{a,b} = 0$, donc les valeurs propres sont nulles, d'où $b = 0$ et $a + b = 0$. Par suite, $a = b = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\, F$ est réduit à 0.
   (c) On applique le théorème du rang, d'où le rang de F est $2 - 0 = 2$.

Exercice 1.18

Soit N un entier tel que $N \geqslant 2$.

1. Soient $a_1, \cdots, a_N \in \mathbb{R}$ tels que $(a_1, \cdots, a_N) \neq (0, \cdots, 0)$. On note $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$ la matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2, \ m_{i,j} = a_i a_j$$

   (a) Déterminer une matrice colonne A telle que $M = A^t A$.

   (b) Exprimer la trace de M en fonction de A et déterminer un polynôme annulateur de M de degré 2.

   (c) Déterminer le spectre de M. Montrer que nécessairement $\mathrm{tr}(M) > 0$.

2. Soit $(E, \langle \ , \ \rangle)$ un espace euclidien de dimension N. Soit un entier $n \in [\![1, N]\!]$ et $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ une famille de n vecteurs non tous nuls de E. On note $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$ et $G = (g_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \ g_{i,j} = \langle u_i, u_j \rangle$$

   (a) Montrer que si $\mathcal{F}$ est une famille liée alors G n'est pas inversible.

   On suppose dans la suite du problème que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

   (b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de F. On note $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la colonne d'indice j est constituée des coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que

$$G = {}^tPP$$

   puis que le rang de G est égal à celui de la famille $\mathcal{F}$.

   (c) Montrer que toute valeur propre λ de G vérifie :

$$0 < \lambda \leqslant \sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2$$

   (d) Soit $x \in E$ et $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Montrer que

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

   où $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont n réels donnés par :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \langle u_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, x \rangle \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 1.18

1. (a) On choisit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$ et $M = A^tA$. La matrice M n'est pas nulle puisque $A \neq 0$ et elle est de rang 1.

   (b) On a $\mathrm{tr}(M) = {}^tAA$ et $M^2 = \mathrm{tr}(M)M$. Ainsi $X(X - \mathrm{tr}(M))$ est un polynôme annulateur de M.

   (c) Le spectre de M est inclus dans $\{0, \mathrm{tr}(M)\}$. La matrice M est symétrique réelle, donc diagonalisable. Le sous-espace propre associé à 0 est de dimension $n-1$ et celui associé à $\mathrm{tr}(M)$ de dimension 1. Donc, son spectre est égal à $\{0, \mathrm{tr}(M)\}$. Enfin, on sait que $\mathrm{tr}(A^tA) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 > 0$ car $A \neq 0$.

2. (a) Supposons $\mathcal{F}$ liée, par exemple que $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i$. Alors $C_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i C_i$ où $C_1, \ldots, C_n$ désignent les colonnes de la matrice G. En effet, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\langle u_n, u_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i, u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \langle u_i, u_j\rangle$$

   (b) La base $\mathcal{B}$ étant orthonormée, on sait que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u_i = \sum_{k=1}^{n} \langle u_i, e_k\rangle e_k$.

   Ainsi, $P = (\langle u_i, e_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Or,

$$\langle u_i, u_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle u_i, e_k\rangle e_k, \sum_{p=1}^{n} \langle u_j, e_p\rangle e_p\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle u_i, e_k\rangle \langle u_j, e_k\rangle$$

   qui est le terme général du produit ${}^tPP$.
   La matrice P est inversible comme toute matrice de passage entre deux bases, donc ${}^tP$ également tout comme G. Ainsi $\mathrm{rg}(G) = n$.

   (c) Matriciellement, $GX = \lambda X$ est équivalent à ${}^tPPX = \lambda X$ ce qui entraîne que ${}^tX{}^tPPX = \lambda{}^tXX$ ou $||PX||^2 = \lambda ||X||^2$. Donc $\lambda > 0$, puisque G est inversible. La matrice G est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et à valeurs propres positives.

   Ainsi, $0 < \lambda \leqslant \mathrm{tr}(G) = \sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2$.

   (d) Dans la base $\mathcal{F}$ de F, on a $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ et par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, p(x)\rangle \\ \vdots \\ \langle u_1, p(x)\rangle \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

   Mais $x - p(x)$ est orthogonal à F. Donc pour tout $i \in [\![1, n]\!], \langle u_i, p(x)\rangle = \langle u_i, x\rangle$. Ainsi, G étant inversible, on a :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \langle u_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, x\rangle \end{pmatrix}$$

Exercice 1.19

Soit un entier $n \geqslant 3$. On considère la matrice à n lignes et n colonnes suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note u l'endomorphisme de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ canoniquement associé à M. On munit l'espace vectoriel E du produit scalaire canonique qui fait de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée. On pose en outre :

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ ; \ v_1 = v_n = \sum_{k=2}^{n-1} v_k = 0 \right\}$$

1. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer la dimension puis une base du noyau de u.
3. Déterminer les valeurs propres de M, ainsi qu'une base de vecteurs propres pour chacun des sous-espaces propres de M autres que celui associé à la valeur propre 0.
4. Déterminer une base de V et une base de $V^{\perp}$.
5. Montrer que V et $V^{\perp}$ sont stables par u.
6. Montrer que pour $n \geqslant 4$, il y a une infinité de droites vectorielles de E stables par u, ainsi qu'une infinité de plans vectoriels de E stables par u.

Solution de l'exercice 1.19

1. Comme M est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
2. Les $n-1$ premières colonnes $C_1, \ldots, C_{n-1}$ de M étant identiques et la dernière C_n formant avec C_1 une famille libre, le rang de M est 2 ; donc par le théorème du rang, la dimension du noyau vaut $n-2$.

   De plus, comme $n \geqslant 3$, les vecteurs $e_2 - e_1, \ldots, e_{n-1} - e_1$ appartiennent au noyau de u, forment un système libre de cardinal $n - 2 = \dim(\mathrm{Ker}(u))$, et donc une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
3. D'après la question précédente, 0 est valeur propre. Pour tout $\lambda \neq 0$, on a :

$$u\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{ccc} w_n & = & \lambda w_1 \\ w_n & = & \lambda w_2 \\ & \vdots & \\ w_n & = & \lambda w_{n-1} \\ w_1 + \ldots + w_n & = & \lambda w_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = \cdots = w_{n-1} = \dfrac{w_n}{\lambda} \\ \dfrac{(n-1)w_n}{\lambda} = (\lambda - 1)w_n. \end{cases}$$

   Il n'y a de solution $(w_1, \ldots, w_n)$ non nulle que si $n - 1 = \lambda(\lambda - 1)$, soit $\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$,
   soit $\lambda_1 = \dfrac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}$ ou $\lambda_2 = \dfrac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}$ (on remarque que $4n - 3 > 0$ car $n \geqslant 3$).
   Et alors, $E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}(u_2)$, avec $u_1 = (1, \ldots, 1, \lambda_1)$ et $u_2 = (1, \ldots, 1, \lambda_2)$.
4. On a :

$$\begin{aligned} v = (v_1, \ldots v_n) \in V &\iff v = \left(0, -\sum_{k=3}^{n-1} v_k, v_3, \ldots, v_{n-1}, 0\right) \\ &\iff v = v_3(e_3 - e_2) + v_4(e_4 - e_2) + \ldots v_{n-1}(e_{n-1} - e_2). \end{aligned}$$

   Donc $(e_3 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_2)$ engendre V et c'est une famille libre car elle est échelonnée.
   Ainsi, V est de dimension $n-3$, donc $V^\perp$ est de dimension 3. Donc $V^\perp$ a pour base $(e_1, e_n, e_1 + \ldots + e_n)$ car ces vecteurs sont clairement orthogonaux à chaque vecteur de la base de V trouvée et c'est une famille libre.
5. On a stabilité de $V^\perp$ par u car :

$$u(e_1) = e_n \in V^\perp,\ u(e_n) = e_1 + \ldots + e_n \in V^\perp,\ u(e_1 + \ldots + e_n) = (n-1)e_n + e_1 + \ldots + e_n \in V^\perp.$$

   On a $V \subset \mathrm{Ker}(u)$ car chacun des vecteurs de la base trouvée appartient à $\mathrm{Ker}(u)$. Donc V est stable par u.
6. Les droites vectorielles stables par u sont toutes celles qui sont engendrées par un vecteur propre. Pour $n \geqslant 4$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \geqslant 2$ donc il y en a une infinité, par exemple celles de la forme $D_\alpha = \mathrm{Vect}(e_2' + \alpha e_3')$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, où e_2' et e_3' forment une famille libre de $\mathrm{Ker}(u)$, qui sont toutes différentes.

   Si f est un vecteur propre de u associé à une valeur propre non nulle (il y en a d'après la question 3) pour chacune des droites stables précédentes D_α, alors $\mathrm{Vect}(f) \oplus D_\alpha$ est un plan stable (différente pour chaque α). Donc, il y a bien une infinité de plans vectoriels de E stables par u.

Exercice 1.20

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P non nul de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

   On note $\mathcal{P}_A$ l'ensemble des polynômes annulateurs de A.
2. (a) On note $\mathcal{D} = \{\deg(P), P \in \mathcal{P}_A, P \neq 0\}$. Montrer que $\mathcal{D}$ admet un plus petit élément.
   (b) En déduire qu'il existe un unique polynôme non nul, unitaire, Π_A de $\mathbb{C}[X]$ tel que
   $$\mathcal{P}_A = \{\Pi_A Q(X), Q \in \mathbb{C}[X]\}$$
   Π_A est appelé polynôme minimal de A.
3. Montrer que deux matrices semblables non nulles ont le même polynôme minimal.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si $\Pi_A(\lambda) = 0$.
5. On suppose dans cette question que A est semblable à $2A$.
   (a) Montrer que A admet au moins une valeur propre complexe λ.
   (b) Montrer que toute valeur propre de A est nulle.
   (c) En déduire que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier q tel que $A^q = 0$.
6. On suppose dans cette question que $n = 2$. On suppose de plus, que A n'est pas la matrice nulle et est nilpotente. On note p son indice de nilpotence, c'est-à-dire l'entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.
   (a) Montrer que $p = 2$.
   (b) Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) En déduire que A et $2A$ sont semblables.

Solution de l'exercice 1.20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A \neq 0$.

1. La famille $(I_n, A, \ldots, A^{n^2})$ est de cardinal n^2+1 et est donc liée : il existe $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n^2} \in \mathbb{C}^{n^2+1}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i A^i = 0$.

   Donc $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i X^i$ est un polynôme non nul annulateur de A.

2. (a) L'ensemble $\mathcal{D}$ est inclus dans $\mathbb{N}$ (même $\mathbb{N}^*$). Il est minoré et admet un minimum $p \geqslant 1$.

   (b) Soit $\Pi \in \mathcal{D}$ de degré p. Quitte à diviser par son coefficient dominant, on peut supposer Π unitaire. et $\pi(A) = 0$.
   Supposons qu'il existe un autre polynôme minimal m annulateur de A. Son degré est forcément égal à p. En faisant la division eucidienne de Π par m, il vient $\Pi(X) = \lambda m(X) + R(X)$ avec $\deg(R) < p$ ou $R = 0$. Donc $R(A) = 0$ en contradiction avec la minimalité de p si $R \neq 0$. Ainsi deux polynômes minimaux sont associés. Il en existe donc un unique unitaire.
   Enfin, si $P \in \mathcal{P}_A$, en effectuant la division euclidienne de Π par P, il vient $P = \Pi \times Q$.

3. Soient A et B deux matrices semblables, $A \neq 0$. Il existe Q inversible telle que $B = Q^{-1}AQ$.
   Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X], a_d \neq 0$ et $P(A) = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k = 0$ si et seulement si $Q^{-1}(\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k)Q = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k Q^{-1} A^k Q = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k B^k = 0$.
   Donc $\mathcal{P}_A = \mathcal{P}_B$ et donc $\Pi_A = \Pi_B$.

4. Soit λ valeur propre de A. Alors $\Pi_A(\lambda) = 0$, car Π_A est annulateur de A.
   Réciproquement, supposons λ racine de Π_A. Alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ non nul tel que $\Pi_A(X) = (X - \lambda)Q(X)$ avec $\deg Q = \deg \Pi_A - 1$. Si λ n'est pas valeur propre de A, la matrice $A - \lambda I$ est inversible. En multipliant l'égalité par $(A - \lambda I)^{-1}$, on obtient $Q(A) = 0$, en contradiction avec la minimalité du degré de Π_A.

5. (a) D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, Π_A admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$, donc A une valeur propre complexe λ.

   (b) Raisonnons par l'absurde : soit $\lambda \in Sp(A)$ t.q. $\lambda \neq 0$. Il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $Ax = \lambda x$. Alors $2Ax = 2\lambda x$.
   Donc 2λ est valeur propre de $2A$. Et comme $2A$ et A sont semblables, elles ont le même polynôme minimal et donc les mêmes valeurs propres, par la question précédente. Donc 2λ est valeur propre de A.
   Par récurrence, on montre que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $2^n\lambda$ est valeur propre de A qui aurait alors une infinité de valeurs propres. En contradiction avec le fait que les valeurs propres de A sont les racines d'un polynôme non nul Π_A. Donc $\lambda = 0$.

   (c) Π_A est donc un polynôme de degré $p \geqslant 1$. Le polynôme Π_A admet p racines dans $\mathbb{C}$ toutes égales à 0 et donc $\Pi_A = X^p$, puisque Π_A est unitaire. Et donc $A^p = 0$.

6. (a) Si $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, il existe $x \neq 0$ tel que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre. Donc ici $p = 2$.

   (b) On a $u \neq 0$ et $u^2 = 0$. Donc il existe $x \in \mathbb{C}^2$ tel que $u(x) \neq 0$.Dans la base $\mathcal{B} = (u(x), x)$: $C = M_{u,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Dans la base $\mathcal{B}' = (u(x), 2x)$: $C' = M_{u,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $C' = 2C$. Donc $2C$ et C sont semblables,et comme A et C sont semblables, alors $2A$ et A sont semblables.