CHAPITRE

# 1

# ALGÈBRE

## Sujet n° 2

1. Soit un entier $n \geqslant 2$ et $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n$. Déterminer tous les sous-espaces stables par l'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer tous les sous-espaces stables par l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^2$ de matrice dans la base canonique
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Soit un entier $n \geqslant 2$, un espace vectoriel réel $E$ de dimension $n$ et un endomorphisme $g$ de $E$ tel que $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$.
   (a) Soit $u \in E$ tel que $g^{n-1}(u) \neq 0$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(g^{n-1}(u), g^{n-2}(u), \cdots, g(u), u\big)$ est une base de $E$. Préciser la matrice $N$ de $g$ dans cette base.
   (b) Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, expliciter la matrice $N^k$. On pose : $G_k = \mathrm{Ker}(g^k)$. Préciser $G_k$ et sa dimension.
   (c) Déterminer tous les sous-espaces de $E$ stables par $g$.
4. Soit un entier $n \geqslant 2$, un espace vectoriel réel $E$ de dimension $n$ et un endomorphisme $f$ de $E$. On suppose $f$ diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ et de sous-espaces propres associés $E_1, \cdots, E_p$.
   (a) Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, soit $F_k$ un sous-espace vectoriel de $E_k$. Montrer que le sous-espace vectoriel $F = \sum_{k=1}^{p} F_k$ est stable par $f$.

   *Dans les questions suivantes, on note $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $f$.*

   (b) Justifier que :
$$\forall u \in F\,,\ \exists\,(u_1, \ldots, u_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p\,, \quad u = \sum_{k=1}^{p} u_k\,.$$
   (c) Montrer que $\sum_{k=2}^{p} \big[(\lambda_k - \lambda_1)\, u_k\big] \in F$.
   En déduire que les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ appartiennent à $F$.
   (d) Montrer que :
$$F = \sum_{k=1}^{p} \big[F \cap E_k\big]\,.$$
   (e) Déterminer tous les sous-espaces de $E$ stables par $f$.

## Solution du sujet n° 2

1. Tout sous-espace de $E$ est stable par $\lambda\,\mathrm{Id}$ .
2. Les sous-espaces triviaux $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$ sont stables par $f$. Une droite est stable par $f$ ssi elle est dirigée par un vecteur propre de $f$ ; or, $A\,X = \lambda\,X \implies \lambda^2 = -1 \quad \text{ou} \quad X = 0$, donc $f$ n'a pas de valeur propre (réelle) et donc pas de droite propre.
3. (a) En composant par $g^{n-1}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Big[\alpha_k\, g^k(u)\Big] = 0 \implies \alpha_0 = 0$$

puis par récurrence descendante, tous les $\alpha_k$ nuls ; la famille est libre de cardinal $n$, donc une base de $E$. De plus :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $N^k$ est la matrice avec une « sur-diagonale »de $n-k$ uns ; d'où :

$$G_k = \mathrm{Ker}(g^k) = \mathrm{Vect}\big(g^{n-1}(u), \cdots, g^{n-k}(u)\big) \quad \text{avec} \quad \dim(G_k) = k\,.$$

(c) Soit $F$ un sous-espace de dimension $k \in [\![1, n-1]\!]$ stable par $g$. Alors la restriction $\tilde{g}$ de $g$ à $F$ est encore nilpotente, donc il existe $p$ tel que $\tilde{g}^{p-1} \neq 0$ et $\tilde{g}^p = 0$. Le même raisonnement qu'en (a) montre que $p \leqslant \dim(F) = k$ , d'où :

$$\tilde{g}^p = 0 \implies \tilde{g}^k = 0 \implies F \subset G_k \implies F = G_k$$

par égalité des dimensions et $G_k$ est évidemment stable par $g$.
Les sous espaces vectoriels stables de $g$ sont exactement les $G_k$ , pour $k \in [\![0, n]\!]$ .

4. (a) Pour tout $(u_1, \ldots, u_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ , on a :

$$f\left(\sum_{k=1}^{p} u_k\right) = \sum_{k=1}^{p}\Big[\lambda_k\, u_k\Big] \in F \quad \text{donc} \quad f(F) \subset F$$

(b) Comme $f$ est diagonalisable, $E$ est somme directe des $E_k$ , d'où la décomposition de $u$.

(c) On a :

$$\sum_{k=2}^{p}\big[(\lambda_k - \lambda_1)\, u_k\big] = f(u) - \lambda_1\, u \in F$$

Par récurrence, on obtient :

$$\left[\prod_{k=1}^{p-1}(\lambda_p - \lambda_k)\right] u_p = \left[\prod_{k=1}^{p-1}(f - \lambda_k\,\mathrm{Id}\,)\right](u) \in F$$

et comme le produit est non nul (puisque les valeurs propres sont distinctes), il vient $u_p \in F$ ; puis par récurrence descendante, tous les $u_k$ dans $F$.

(d) D'après ce qui précède, $\forall k \in [\![1, p]\!]$ , $u_k \in F \cap E_k$ , donc, $F \subset \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\big[F \cap E_k\big]$ ; l'inclusion réciproque étant évidente, on a égalité.

(e) Les sous-espaces stables par $f$ sont donc ceux de la forme $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$ , où $\forall k \in [\![1, p]\!]$ , $F_k$ est un sous-espace de $E_k$ .

## Sujet n° 6

Dans cet exercice, $n$ est un entier supérieur ou égal à 2 et $E = \mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^{t}dt$ converge pour tout $P \in E$.

On note alors $T(P) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^{t}dt$ (fonction définie sur $\mathbb{R}$).

Soit alors $T$ l'application définie sur $E$, par $T : P \mapsto T(P)$.

2. Montrer que $T$ est linéaire.
3. Déterminer $\operatorname{Ker} T$.
4. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $e_k = X^k$.
   (a) Calculer $T(e_0)$.
   (b) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $T(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)T(e_k)$.
   (c) En déduire que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $T(e_k) - e_k \in \operatorname{Vect}(e_0, \ldots, e_{k-1})$.
   En déduire que $T$ est un endomorphisme de $E$.
5. Montrer que $(I - T)^{n+1} = 0$, où $I$ désigne l'identité de $E$.
6. Déterminer les valeurs propres de $T$. L'endomorphisme $T$ est-il diagonalisable ?
7. En déduire une expression de $T^{-1}$ (comme polynôme en $T$).

## Solution du sujet n° 6

1. L'intégrale converge car $t^n e^t = o(1/t^2)$ lorsque $t$ est au voisinage de $-\infty$. Ainsi $T$ est bien défini.
2. L'application $T$ est linéaire, par linéarité de l'intégrale convergente.
3. Supposons que $T(P) = 0$. Alors

$$0 = T(P) = e^{-x} \int_{-\infty}^{0} P(t)e^t dt + e^{-x} \int_{0}^{x} P(t)e^t dt$$

Par continuité de $t \mapsto e^t P(t)$ et par le théorème fondamental du calcul intégral et après simplification par $e^{-x}$, il vient, en dérivant :

$$0 = \left( \int_{0}^{x} P(t)e^t dt \right)' \Rightarrow P(x)e^x = 0 \Rightarrow P(x) = 0$$

Donc $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

4. (a) Le calcul donne $T(e_0) = 1$.

   (b) On peut raisonner par récurrence. Plutôt, une intégration par parties, valable ici, car les fonctions en jeu sont de classe $C^1$ et toutes les intégrales convergent, donne pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ $T(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)T(e_k)$.

   (c) En posant $u_k = (-1)^k \dfrac{T(e_k)}{k!}$ et en multipliant l'égalité précédente par $\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$,
   il vient $u_{k+1} = (-1)^{k+1} \dfrac{e_{k+1}}{(k+1)!} + u_k$.
   D'où : $u_k = u_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{e_j}{j!} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{e_j}{j!}$,
   soit finalement $T(e_k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{k!}{j!} e_{k-j}$.
   Ainsi $T$ est un endomorphisme de $E$ qui laisse stable tous les polynômes de $\mathbb{R}_j[X]$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$.
   En particulier c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. Par le résultat précédent, pour tout $P \in E$, $\deg((I - T)(P) \leqslant \deg(P) - 1$.
   On en déduit (récurrence) que $\deg(I - T)^k(P) \leqslant \deg(P) - k$. D'où $(I - T)^{n+1} = 0$.
6. D'après le polynôme annulateur trouvé précédemment, l'endomorphisme $I - T$ a pour seule valeur propre possible 0 ; or $I - T \neq 0$, donc il n'est pas diagonalisable.
   L'endomorphisme $T$ non plus car autrement, comme $I$ est diagonalisable, $I - T$ le serait également.
7. Comme $I$ et $T$ commutent la formule du binôme donne :

$$0 = (I - T)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} T^k \Rightarrow T \circ \left( \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} T^{k-1} \right) = -I$$

d'où $T^{-1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} T^{k-1}$.

## Sujet n° 7

Soit un entier $n \geqslant 1$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n$ à coefficients réels. $\mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Im}(M)$ désignent respectivement le noyau et l'image d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k$ un entier supérieur ou égal à 1. On note $v_k = \dim\big(\mathrm{Ker}(A^k)\big)$ la dimension de $\mathrm{Ker}(A^k)$ et $w_k = \dim\big(\mathrm{Im}(A^k)\big)$ la dimension de $\mathrm{Im}(A^k)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^k) \subset \mathrm{Ker}(A^{k+1})$ pour $k \geqslant 1$. En déduire que $(v_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite croissante.
2. Montrer que la suite $(w_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite décroissante.
3. Supposons qu'il existe un entier $k_0 \geqslant 1$ tel que $v_{k_0} = v_{k_0+1}$. Montrer que $v_{k_0+1} = v_{k_0+2}$. Que peut-on alors dire des suites d'entiers $(v_k)_{k\geqslant k_0}$ et $(w_k)_{k\geqslant k_0}$ ?

   Pour le reste de l'exercice, on définit les notions suivantes.
   Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $M^m = 0$.
   Pour une matrice nilpotente $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit son indice de nilpotence par :

$$p = \min\{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid M^m = 0\}.$$

4. Donner trois exemples de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ : un où $p = 1$, un où $p = 2$ et un où $p = 3$.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer que $p \leqslant n$.
6. On suppose ici que $n \geqslant 2$. Soit $B = (b_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients $b_{i,j}$ sont définis par :

$$b_{i,i+1} = 1 \text{ pour } i \in \{1, \dots, n-1\} \text{ et } b_{i,j} = 0 \text{ pour } j \neq i+1.$$

   Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue $M$ donnée par :

$$M^2 = B.$$

## Solution du sujet n° 7

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(A^k)$. On a donc $A^k\,x = 0$. En composant par $A$, il vient $A^{k+1}\,x = 0$. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(A^{k+1})$ et on conclut que $\mathrm{Ker}(A^k) \subset \mathrm{Ker}(A^{k+1})$. Ainsi, $v_k \leqslant v_{k+1}$ et la suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite croissante.
2. D'après le théorème du rang, $n = v_k + w_k = v_{k+1} + w_{k+1}$. Ainsi, comme $v_k \leqslant v_{k+1}$, on a $n - w_k \leqslant n - w_{k+1}$. Par conséquent, $w_{k+1} \leqslant w_k$ et la suite $(w_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante.
3. Supposons que $v_{k_0} = v_{k_0+1}$. De plus, on a d'après la question 1), $\mathrm{Ker}(A^{k_0}) \subset \mathrm{Ker}(A^{k_0+1})$. Par conséquent, on a $\mathrm{Ker}(A^{k_0}) = \mathrm{Ker}(A^{k_0+1})$. Montrons alors que $\mathrm{Ker}(A^{k_0+1}) = \mathrm{Ker}(A^{k_0+2})$. Nous savons d'après la question 1) que $\mathrm{Ker}(A^{k_0+1}) \subset \mathrm{Ker}(A^{k_0+2})$. Il suffit donc de montrer l'autre inclusion.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(A^{k_0+2})$, on a alors $A^{k_0+2}\,x = A^{k_0+1}Ax = 0$ . Ainsi, on a $A\,x \in \mathrm{Ker}(A^{k_0+1}) = \mathrm{Ker}(A^{k_0})$ et donc $A^{k_0}Ax = 0 = A^{k_0+1}x$ . On conclut que $x \in \mathrm{Ker}(A^{k_0+1})$ et que $\mathrm{Ker}(A^{k_0+2}) \subset \mathrm{Ker}(A^{k_0+1})$. On a alors finalement $\mathrm{Ker}(A^{k_0+1}) = \mathrm{Ker}(A^{k_0+2})$ et $v_{k_0+1} = v_{k_0+2}$. On montrerait alors aisément par récurrence que pour $k \geqslant k_0$, on a $v_k = v_{k_0}$. La suite $(v_k)_{k\geqslant k_0}$ est donc constante et par le théorème du rang, comme $w_k = n - v_k$, la suite $(w_k)_{k\geqslant k_0}$ est également constante.
4. On a $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$ respectivement pour les trois matrices suivantes de $M_3(\mathbb{R})$ :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Il est clair que $A_1 = 0$, $A_2^2 = 0$ (avec $A_2 \neq 0$) et $A_3^3 = 0$ (avec $A_3 \neq 0$ et $A_3^2 \neq 0$), donc leurs indices de nilpotence sont respectivement 1, 2 et 3.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Supposons par l'absurde que $p > n$. On a donc d'une part, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $A^j \neq 0$ et d'autre part, $A^p = 0$ et donc $v_p = n$. Une matrice nilpotente ne peut être inversible (car $A^p = 0$) donc $\mathrm{Ker}(A) \neq 0$ et $v_1 \geqslant 1$. De plus, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $v_j \neq v_{j+1}$ car si $v_j = v_{j+1}$, la suite $(v_k)_{k\geqslant j}$ est constante et donc $v_j = v_p = n$ ; on aurait alors $\mathrm{Ker}(A^j) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A^j = 0$, ce qui est impossible car $j \leqslant n < p$. Comme $(v_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite d'entiers croissante et que pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, $v_j \neq v_{j+1}$ et que $v_1 \geqslant 1$, il s'ensuit que $v_j \geqslant j$ pour $j \in \{1, \ldots, n+1\}$. Ainsi, on a $v_{n+1} > n$, ce qui est absurde car la suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ est bornée par $n$. On conclut donc que $p \leqslant n$.
6. Il est aisé de vérifier que $B^{n-1} \neq 0$ et que $B^n = 0$. Donc $B$ est nilpotente. On a alors si $M^2 = B$ : $M^{2(n-1)} = B^{n-1} \neq 0$ et $M^{2n} = B^n = 0$. Ainsi $M$ est également nilpotente et son indice de nilpotence $p$ vérifie $2(n-1) < p$ (car $M^{2(n-1)} \neq 0$) et $p \leqslant n$ (d'après la question précédente). Ainsi $2(n-1) < n$ et donc $n < 2$ ce qui est impossible car on a supposé que $n \geqslant 2$. L'équation matricielle $M^2 = B$ n'admet donc pas de solution.

## Sujet n° 11

Dans cet exercice, on désigne par $n$ un entier naturel de $\mathbb{N}^*$.

On se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice $A$ de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$, où $I$ désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on notera $E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \{X \in \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) | AX = \lambda X\}$.

1. Trouver une matrice $A$ de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = -I$.
2. Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice $A$ de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$.
   (a) Vérifier que $\frac{1}{2i}\left((A + iI) - (A - iI)\right) = I$.
   (b) En déduire que : $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker}(A - iI) \oplus \operatorname{Ker}(A + iI)$.
   (c) En déduire que $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et donner ses valeurs propres.
3. (a) Pour toute matrice colonne $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{2n+1} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})$, on note $\bar{X}$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_{2n+1}} \end{pmatrix}$.
   Montrer que $X \in E_i$ si et seulement si $\bar{X} \in E_{-i}$. La réciproque est-elle vraie ?
   (b) En déduire que $\dim E_i = \dim E_{-i}$.
   (c) En déduire qu'il n'existe pas de matrice $A$ de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$
4. Ce résultat est-il encore valable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ ?

## Solution du sujet n° 11

1. La matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(i, \ldots, i)$ vérifie $D^2 = -I$.
2. (a) Par calcul direct.

   (b) Soit $X \in \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})$. La relation précédente donne
$$X = \frac{1}{2i}\left((A - iI)\, X - (A + iI)\right) X$$
   En notant $X_1 = (A - iI)\, X$ et $X_2 = (A + iI)\, X$, la relation $A^2 + I = 0$ donne $X_1 \in \mathrm{Ker}\,(A + iI)$ et $X_2 \in (A - iI)$. Tout vecteur de $\mathbb{C}^{n+1}$ se décompose comme somme d'un vecteur de $E_i$ et d'un vecteur de $E_{-i}$. Donc
$$C^{2n+1} = \mathrm{Ker}\,(A + iI) + \mathrm{Ker}\,(A - iI)$$
   Enfin cette somme est directe car $\mathrm{Ker}\,(A + iI) \cap \mathrm{Ker}\,(A - iI) = \{0\}$.

   (c) La question précédente donne la diagonalisabilité et $\mathrm{Sp}\,(A) \subset \{i, -i\}$. Il y a égalité car si un seul de ces deux sous-espaces propres est réduit à $\{0\}$, par exemple $E_{-i} = \{0\}$, alors $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) = E_i$ d'où $A = iI$, ce qui est absurde car $A$ est une matrice réelle.
3. (a) Soit $X \in E_i$. Alors $AX = iX$. En conjuguant cette relation, il vient $A\bar{X} = -i\bar{X}$ puisque $A$ est une matrice réelle (il suffit de faire le produit matriciel). La réciproque est identique puisque $\bar{\bar{X}} = X$.

   (b) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des complexes tels que $\lambda_1\overline{u_1} + \lambda_2\overline{u_2} + \cdots + \lambda_p\overline{u_p} = 0$
   Alors en conjuguant cette relation il vient : $\overline{\lambda_1}u_1 + \overline{\lambda_2}u_2 + \cdots + \overline{\lambda_p}u_p = 0$.
   Et $(u_1, \ldots, u_p)$ étant une famille libre par hypothèse, on en déduit que $\overline{\lambda_1} = \overline{\lambda_2} = \cdots = \overline{\lambda_p} = 0$.
   Soit encore $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p$. Et donc $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_p})$ est une famille libre de $\mathbf{C}^{2n+1}$.
   De plus, elle est bien formée de vecteurs de $E_{-i}$ par la question précédente.
   Ainsi si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de $E_i$, alors $p = \dim E_i$.
   Et alors $(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_p})$ est une famille libre de $E_{-i}$, de cardinal $p$, de sorte que $p \leqslant \dim E_{-i}$. Et donc $\dim E_i \leqslant \dim E_{-i}$.
   Inversement, on peut prouver que si $(v_1, \ldots, v_q)$ est une base de $E_{-i}$, alors $(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_q})$ est une famille libre de $E_i$, et donc que $\dim E_{-i} \leqslant \dim E_i$.
   On en déduit que $E_i$ et $E_{-i}$ sont de même dimension.

   (c) Si $A$ existait, elle serait diagonalisable, et on doit avoir $2n+1 = \dim \mathbb{C}^{2n+1} = \dim E_i + \dim E_{-i} = 2p$, ce qui est absurde.
4. Ce résultat est faux pour $n$ pair. Par exemple , la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = -I_2$. Dans le cas général, on exhibe une matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ formée de $n$ blocs diagonaux de la matrice $A$ précédente.

## Sujet n° 14

1. Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie $m \in \mathbb{N}^*$. On considère un endomorphisme inversible $f$ de $E$.
   (a) Montrer que si $f$ est diagonalisable, alors $f^2$ l'est également.
   (b) Montrer que si $F$ est un sous-espace propre de $f^2$, alors $F$ est soit un sous-espace propre de $f$, soit la somme directe de deux sous-espaces propres de $f$.
   (c) En déduire que si $f^2$ est diagonalisable, alors $f$ est diagonalisable. Donner un exemple simple montrant que ceci n'est plus vrai en général si on ne suppose pas $f$ inversible.
2. On considère deux endomorphismes inversibles $u$ et $v$ de $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 1$). On munit l'ensemble $E = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ de sa structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel canonique ($(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$) et ($\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$). Pour $(x, y) \in E$, on pose $f(x, y) = (v(y), u(x))$.
   (a) Justifier le fait que $E$ est de dimension finie et donner sa dimension.
   (b) Prouver que $u \circ v$ est diagonalisable si et seulement si $v \circ u$ l'est aussi. Donner un exemple simple, avec $n = 2$, montrant que cette équivalence n'est plus vraie si on abandonne l'hypothèse selon laquelle $u$ et $v$ sont inversibles.
   (c) Vérifier que $f$ est un endomorphisme de $E$.
   (d) Montrer que $f$ est inversible et donner son inverse.
   (e) Déterminer l'endomorphisme $f^2$.
   (f) Prouver que $f$ est diagonalisable si et seulement si $u \circ v$ est diagonalisable.
3. La matrice $M$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie ci-dessous est-elle diagonalisable ?

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Solution du sujet n° 14

1. (a) Si $f$ est diagonalisable et si $A$ est la matrice de $f$ dans une base $\mathcal{B}$ de $E$, il existe une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = P^{-1}DP$. D'où la matrice $A^2 = P^{-1}D^2P$ qui est associée à $f^2$ dans $\mathcal{B}$ est diagonalisable, donc $f^2$ l'est également.

   (b) Soient $F$ un sous-espace propre de $f^2$ associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$ ($f$ est inversible) et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^2 = \lambda$ ($\alpha \neq 0$). Alors pour tout $x \in F$, on a $0 = (f^2 - \lambda Id)x = (f - \alpha Id)(f + \alpha Id)x$. Si $(f - \alpha Id)$ (resp. $(f + \alpha Id)$ ) est inversible, alors $F$ est égal au sous-espace propre $E_\alpha(f)$ (resp. $F = E_{-\alpha}(f)$ ). Sinon, les deux sous-espaces $E_\alpha(f)$ et $E_{-\alpha}(f)$ ne sont pas réduits à $\{0\}$, il sont inclus dans $F$ et en somme directe. De plus, tout $x \in F$ peut s'écrire sous la forme $x = \dfrac{1}{2\alpha}((\alpha Id + f)x + (\alpha Id - f)x)$ avec $(\alpha Id + f)x \in E_\alpha(f)$ et $(\alpha Id - f)x \in E_{-\alpha}(f)$ ; il en résulte que $F = E_\alpha(f) \oplus E_{-\alpha}(f)$.

   (c) Comme $f^2$ est diagonalisable, l'espace $E$ est somme directe des sous-espaces propres de $f^2$. De plus, d'après la question précédente, dans chaque sous-espace propre $F$ de $f^2$, on peut choisir une base de ce sous-espace qui sera formée de vecteurs propres de $f$. Par concaténation, on construira ainsi une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $f$ ; il en résulte que $f$ est diagonalisable. Comme contre-exemple, on peut considérer l'endomorphisme $g$ de $\mathbb{C}^2$ donné par $g(e_1) = 0$ et $g(e_2) = e_1$. L'endomorphisme $g^2$ est diagonalisable puisqu'il est nul, mais $g$ ne l'est pas. En effet dans le cas contraire sa matrice serait semblable à la matrice nulle et donc nulle, ce qui est absurde.

2. (a) Si $e_1, \cdots, e_n$ est une base de $\mathbb{C}^n$, il est clair que $(e_1, 0), \cdots, (e_n, 0), (0, e_1), \cdots, (0, e_n)$ forment une base de $E$ qui est donc de dimension $2n$.

   (b) Supposons que $u \circ v$ est diagonalisable. Alors, $v \circ u = u^{-1} \circ (u \circ v) \circ u$ est semblable à $u \circ v$ et est donc diagonalisable. Les rôles de $u$ et $v$ étant symétriques, on obtient bien l'assertion souhaitée. Comme contre-exemple, on peut prendre les endomorphismes $u$ et $v$ associés respectivement aux matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   puisque $AB = 0$ est évidemment diagonalisable et $BA = A$ ne l'est pas (cf. question 1).

   (c) C'est évident par calculs.

   (d) Comme $u$ et $v$ sont inversibles, il est clair que $f$ est inversible et que $f^{-1}(x, y) = (u^{-1}(y), v^{-1}(x))$.

   (e) On a $f^2(x, y) = (v \circ u(x), u \circ v(y))$.

   (f) Si $h$ est un endomorphisme et $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E_\lambda(h)$ le noyau de $h - \lambda Id$. Si $f$ est diagonalisable, alors $f^2$ l'est. On pose $\mathrm{Sp}\,(f^2) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$. On voit facilement que $E_{\lambda_i}(f^2) = \{(x, 0); x \in E_{\lambda_i}(v \circ u)\} \oplus \{(0, y); y \in E_{\lambda_i}(u \circ v)\}$, d'où $\dim(E_{\lambda_i}(f^2)) = \dim(E_{\lambda_i}(v \circ u)) + \dim(E_{\lambda_i}(u \circ v)) = 2\dim(E_{\lambda_i}(u \circ v))$ ($v \circ u - \lambda_i Id$ et $u \circ v - \lambda_i Id$ sont semblables). Comme $2n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(f^2)) = 2\sum_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u \circ v))$, l'endomorphisme $u \circ v$ est diagonalisable. Supposons que $u \circ v$ est diagonalisable, alors on a vu que $v \circ u$ l'est aussi. Choisissons une base $(x_1, \cdots, x_n)$ (resp. $(y_1, \cdots, y_n)$) de vecteurs propres de $v \circ u$ (resp. $u \circ v$). Alors, la famille $\{(x_1, 0), \cdots, (x_n, 0), (0, y_1), \cdots, (0, y_n)\}$ est une base de vecteurs propres de $f^2$ qui est donc diagonalisable. Alors, d'après 1.($c$), l'endomorphisme $f$ est diagonalisable.

3. Posons
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
et notons $u$ (resp. $v$) l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à $A$ (resp $B$). Alors, l'endomorphisme $f$ de la question 2 admet $M$ comme matrice associée dans la base $(e_1, 0), (e_2, 0), (0, e_1), (0, e_2)$. Comme les matrices $A$ et $B$ sont inversibles et que la matrice $AB$ est diagonalisable (elle admet deux valeurs propres distinctes, ce que l'on voit facilement avec les éléments du cours sur les matrices $2 \times 2$), on déduit de la question précédente que $M$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

## Sujet n° 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus $n$.
Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, sous réserve de convergence de l'intégrale, on note :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

1. Pour tout $(k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2$, montrer la convergence et donner la valeur de l'intégrale $\langle X^k, X^\ell\rangle$.
2. Montrer que l'application suivante est bien définie et que c'est un produit scalaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \langle P, Q\rangle \end{array}$$

Soit l'application $\alpha$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'.$$

3. Vérifier, rapidement, que $\alpha$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Écrire la matrice de $\alpha$ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.
5. Déterminer le spectre de $\alpha$. L'endomorphisme $\alpha$ est-il diagonalisable ?
6. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P_k$ de degré $k$ tel que :

$$\mathrm{Ker}(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \mathrm{Vect}(P_k).$$

7. Montrer que l'endomorphisme $\alpha$ est symétrique.
   Que peut-on en déduire pour la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ ?

## Solution du sujet n° 18

1. On reconnaît que $\langle X^k, X^\ell\rangle = \Gamma(k+\ell+1) = (k+\ell)!$.
2. 
   - L'intégrale qui définit $\langle P, Q\rangle$ s'écrit comme une combinaison linéaire d'intégrales $\langle X^k, X^\ell\rangle$, qui convergent d'après la question précédente, donc $\langle P, Q\rangle$ est une intégrale convergente.
   - Les caractères bilinéaire et symétrique de $\langle\ ,\ \rangle$ sont faciles.
   - Par positivité de l'intégration, comme $P^2(t)e^{-t} \geqslant 0$, on a : $\langle P, P\rangle \geqslant 0$.
   - Si $\langle P, P\rangle = 0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\mathrm{d}t = 0$ où $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.
     Donc on a : $\forall, t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t} = 0$, *i.e.* $P(t) = 0$.
     Ainsi $P$ possède une infinité de racines, donc $P = 0$ (sur $\mathbb{R}$).
3. On vérifie que $\deg(\alpha(P)) \leqslant n$, pour tout $p \in \mathbb{R}_n[X]$. La linéarité provient de la linéarité de la dérivation.
4. On trouve : $\alpha(1) = 0$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha(X^k) = -kX^k + k^2X^{k-1}$, d'où la matrice de $\alpha$ :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -(n-1) & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

5. La matrice est triangulaire supérieure, donc son spectre se lit sur la diagonale :

$$\mathrm{Sp}\,(\alpha) = \mathrm{Sp}\, M = \{-k | k \in [\![0, n]\!]\}.$$

   L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ et $\alpha$ a $n+1$ valeurs propres distinctes, donc $\alpha$ est diagonalisable...
6. ...et les sous-espaces propres $E_{-k}$ sont tous de dimension 1. Ainsi $E_{-k} = \mathrm{Ker}(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}))$ est formé de tous les multiples (avec facteur scalaire ) d'un même polynôme non nul ; parmi ces polynômes il y en a un seul, $P_k$, qui est unitaire.
   Soit $d \in [\![0, n]\!]$ le degré de $P_k$ et $a_d \neq 0$ son coefficient dominant.
   Alors $\deg XP_k'' < d$ et $\deg(1-X)P_k' = d$, donc, par somme, $\deg\alpha(P_k) = d$, et le coefficient de degré $d$ de $\alpha(P_k)$ est celui de $(1-X)P_k'$, soit $(-1)\times(da_d)$. Par ailleurs le coefficients de degré $d$ de $-kP_k$ est $-ka_d$. Pour que $\alpha(P_k) = -kP_k$, il faut donc que $(-1)\times(da_d) = -ka_d$, soit $d = k$ *i.e.* $P_k$ est de degré $k$.
7. Utilisons une intégration par parties, toutes les fonctions en jeu étant de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Soit $A > 0$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^A (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt &= \int_0^A tP''(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt + \int_0^A (1-t)P'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt \\
&= \left[tP'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A - \int_0^A P'(t)Q'(t)t\mathrm{e}^{-t}dt - \int_0^A (1-t)P'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt + \int_0^A (1-t)P'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt \\
&= \left[tP'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A - \int_0^A P'(t)Q'(t)t\mathrm{e}^{-t}dt
\end{aligned}$$

   Or $\lim\limits_{A\to+\infty} AP'A)Q(A)\mathrm{e}^{-A} = 0$ et $[tP'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}]_{t=0} = 0$. Donc

$$\langle\alpha(P), Q\rangle = -\int_0^{+\infty} P'(t)Q'(t)t\mathrm{e}^{-t}dt = \langle P, \alpha(Q)\rangle$$

   au vu des rôles symétriques joués par $P$ et $Q$.
   Ainsi, d'après le théorème spectral, les sous-espaces propres de $\alpha$ sont orthogonaux entre eux, donc la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est orthogonale. Ainsi la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

## Sujet n° 20

Pour $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à $p$ lignes et $q$ colonnes à coefficients réels.

Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on pose $C = A \star B$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ définie par, $\forall i \in [\![1,p]\!], \forall j \in [\![1,q]\!]$,

$$c_{i,j} = a_{i,j}\ b_{i,j}$$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive si :

- $A$ est symétrique ;
- pour tout $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tUAU \geqslant 0$.

On note $S_p^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ symétriques positives.

1. Montrer que si $(M,N) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \geqslant 0$, alors $\lambda M + N \in S_p^+(\mathbb{R})$.
2. Soit $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $A = U\,{}^tU \in S_p^+(\mathbb{R})$
3. Montrer que si $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors $(U\,{}^tU) \star (V\,{}^tV) = (U \star V)\,{}^t(U \star V)$.
4. Soit $A \in S_p^+(\mathbb{R})$. On note $(U_1, \ldots, U_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de $A$ et on note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ les valeurs propres correspondantes.
   (a) Montrer que $\lambda_j \geqslant 0$ pour tout $j \in [\![1,p]\!]$.
   (b) Montrer que $A = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j\,{}^tU_j$.
5. Montrer que si $A$ et $B$ appartiennent à $S_p^+(\mathbb{R})$, alors $A \star B$ appartient à $S_p^+(\mathbb{R})$.

## Solution du sujet n° 20

1. Si $M, N \in S_p(\mathbb{R})$, alors $\lambda M + N$ est encore symétrique. Et si $\lambda \geqslant 0$ , alors
$$U^T(\lambda M)U = \lambda(U^T MU) \geqslant 0$$
2. On a $(UU^T)^T = UU^T$ et $X^T UU^T X = ||U^T X|| \geqslant 0$.
3. Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$. Alors $(U\,{}^tU) = (u_i u_j)$ et $(V\,{}^tV) = (v_i v_j)$.
   Donc $(U\,{}^tU) \star (V\,{}^tV) = (u_i u_j v_i v_j)$. De même $(U \star V) = (u_i v_i)$ et $(U \star V)^t(U \star V) = (u_i v_i u_j v_j)$.
4. (a) Les valeurs propres d'une matrice symétrique positive sont positives. Car si $X$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$ :
$$AX = \lambda X \Rightarrow 0 \leqslant {}^tXAX = \lambda||X||^2 \Rightarrow \lambda \geqslant 0 \ \text{ car } ||X|| > 0$$
   (b) En utilisant le fait que $(U_1, \dots, U_p)$ est orthonormée, le calcul donne :
$$\forall k,\ \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j\,{}^tU_j\right) U_k = \lambda_k U_k.$$
   Par ailleurs on a : $\forall k,\ AU_k = \lambda_k U_k$. Comme les endomorphismes canoniquement associés à $A$ et $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j\,{}^tU_j$ sont égaux, puisqu'ils coïncident sur une base, leurs matrices sont égales.
5. Il reste à appliquer les résultats précédents. On a $A = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j\,{}^tU_j$, $B = \sum_{j=1}^{p} \mu_j V_j\,{}^tV_j$.
   En utilisant la distributivité (évidente) de $\star$ sur la somme, on obtient :
$$A \star B = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \lambda_i\mu_j (U_i\,{}^tU_i) \star (V_j\,{}^tV_j) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \lambda_i\mu_j (U_i\,{}^tV_j)^t(U_i\,{}^tV_j) \geqslant 0$$

## Sujet n° 22

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad u_{p+3} = 4\,u_{p+2} - 5u_{p+1} + 2u_p$$
   (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
   (b) Vérifier que la suite $(p)_{p\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}$.
   (c) Déterminer les suites géométriques appartenant à $\mathcal{E}$.
   (d) En déduire l'expression des suites appartenant à $\mathcal{E}$.
2. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
   (a) Vérifier que 1 et 2 sont valeurs propres de $A$.
   (b) La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
   (c) Justifier que $A$ est semblable à
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   (d) En déduire que le polynôme $P(X) = (X-1)^2(X-2)$ est annulateur de $A$.
3. (a) Justifier que
$$\forall p \in \mathbb{N}\,,\ \exists (a_p, b_p, c_p) \in \mathbb{R}^3, \quad A^p = a_p\,A^2 + b_p\,A + c_p\,I_3$$
   où $A$ a été définie dans la question précédente.
   (b) Montrer que $(a_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$.
   (c) Expliciter $A^p$ en fonction de $A^2, A, I_3$.
   (d) La matrice $A$ est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

## Solution du sujet n° 22

1. (a) $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel (vérification immédiate). On a $\dim(E) = 3$. En effet $\varphi : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $(u_p) \mapsto \big(u_0, u_1, u_2\big)$ est un isomorphime. L'application $\varphi$ est linéaire. On vérifie que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ et que $\varphi$ est surjective par définition de la suite $(u_p)$.
   (b) Vérification : $\forall p\,,\ 4(p+2) - 5(p+1) + 2p = p + 3\,.$
   (c) On a $(r^p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ si et seulement si $0 = r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = (r-1)^2(r-2)$ si et seulement si $r \in \{1, 2\}\,.$
   (d) On vient de trouver 3 suites éléments de $\mathcal{E}$. On vérifie que ces trois suites forment une famille libre (système de trois équations et on prend les trois premiers termes de la suite combinaison linéaire). C'est une base de $\mathcal{E}$. Ainsi
$$\mathcal{E} = \operatorname{Vect}\Big((p)_{p\in\mathbb{N}}\,,\ (1)\,,\ (2^p)_{p\in\mathbb{N}}\Big) = \Big\{\big(ap + b + c2^p\big)_{p\in\mathbb{N}}\,,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\Big\}$$

2. (a) On a $E_1 = \operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Vect}(e_1)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \operatorname{Vect}(e_3)$ avec $e_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$
   (b) Supposons que $A$ soit diagonalisable. Alors
$$A \sim D = \operatorname{diag}\big(\lambda, 1, 2\big) \Rightarrow 4 = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D) = \lambda + 3 \Rightarrow \lambda = 1$$
   En contradiction avec $\dim E_1 = 1\,.$ Donc $A$ n'est pas diagonalisable.
   (c) Il suffit de trouver $e_2$ tel que $\mathcal{B} = \big(e_1, e_2, e_3\big)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et $f(e_2) = e_1 + e_2$ , soit
$$(A - I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 3 & -4\\-6 & -3 & 5\\4 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1\\ z & = & 1\end{array}\right.$$
   On peut prendre $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.
   (d) On montre par calcul que $(T - I_3)^2\,(T - 2I_3) = 0$ , puis que $P$ est annulateur de $A$ par similitude.

3. (a) Par récurrence, $A^3 = 4\,A^2 - 5\,A + 2\,I_3$. On suppose que $A^p = a_p\,A^2 + b_p\,A + c_p\,I_3$ ; alors $A^{p+1} = a_p\,A^3 + b_p\,A^2 + c_p\,A$ puis en remplaçant :
$$\left\{\begin{array}{ll} a_{p+1} & = 4a_p + b_p\\ b_{p+1} & = -5a_p + c_p\\ c_{p+1} & = 2a_p\end{array}\right.$$
   (b) Puis par substitution, $a_{p+1} - 4a_p + 5a_{p-1} - 2a_{p-2} = 0$ soit $(a_p) \in \mathcal{E}\,.$
   (c) D'où l'existence de $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ , $\forall p \in \mathbb{N}$ , $a_p = \alpha\,2^p + \beta\,p + \gamma$ ; puis $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 = 1$ donnent $a_p = 2^p - p - 1$ , puis
$$A^p = \big(2^p - p - 1\big)\,A^2 + \big(-2^{p+1} + 3p + 2\big)\,A + \big(2^p - 2p\big)\,I_3$$
   (d) Comme $0 \notin \operatorname{Sp}(A)$, la matrice $A$ est inversible. Alors
$$P(A) = 0 \Rightarrow A\left[A^2 - 4A + 5I_3\right] = 2I_3 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\left[A^2 - 4A + 5I_3\right]$$

## Sujet n° 27

Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$. On note $I_2$ la matrice identité d'ordre 2. On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui sont inversibles .

Pour tout $A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on note $S(A)$ l'ensemble des matrices semblables à $A$, soit :

$$S(A) = \{PAP^{-1} \mid P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})\}.$$

Dans les quatre premières questions, on a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. Soit $A$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) L'ensemble $S(A)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ?
   (b) On suppose que pour tout $(M, N) \in S(A)^2$, $M + N \in S(A)$. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.
   La réciproque est-elle vraie ?
2. Déterminer $S(A)$ lorsque $A = xI_2$, avec $x$ réel.
3. On suppose dans cette question que $A$ est diagonale.
   L'ensemble $S(A)$ est-il constitué uniquement de matrices diagonales ?
4. On admet que l'application $(M, N) \mapsto \mathrm{tr}(M^tN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où ${}^tM$ désigne la transposée de la matrice $M$. On note $||\cdot||$ la norme euclidienne associée.
   On dit qu'une partie $\mathcal{X}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est bornée lorsqu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que
   $$\forall M \in \mathcal{X},\ ||M|| \leqslant C.$$
   (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $E_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $E_\lambda^{-1}$ et $F_\lambda^{-1}$.
   (b) Montrer que l'ensemble $S(A)$ est borné si et seulement si $A = xI_2$, avec $x$ réel.
5. Dans cette question, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   (a) Justifier que $A$ admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$.
   (b) On suppose que $2A \in S(A)$.
      i. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^n\lambda$ est valeur propre de $A$.
      ii. En déduire que $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$ puis que $A^2 = 0$.
   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $2A \in S(A)$.
   ( *On pourra considérer $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$*)

## Solution du sujet n° 27

1. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$.
   (a) Si $S(A)$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $0_2 \in S(A)$. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $0_2 = P^{-1}AP$ et alors $A = 0_2$. Or on a supposé que $A \neq 0_2$. Ainsi $S(A)$ n'est pas un sous-espace vectoriel.
   (b) Soient $P$ et $Q$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Supposons que $S(A)$ soit stable pour l'addition. Alors $PAP^{-1} + QAQ^{-1} \in S(A)$ et il existe $H \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $PAP^{-1} + QAQ^{-1} = HAH^{-1}$. Donc $\mathrm{tr}(HAH^{-1}) = \mathrm{tr}(PAP^{-1}) + \mathrm{tr}(QAQ^{-1})$ soit $\mathrm{tr}(A) = 2\,\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$.
   Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $P^{-1} = P$ et $PAP^{-1} = -A$. On a alors $A \in S(A)$ et $PAP^{-1} \in S(A)$ mais $A + PAP^{-1} = 0_2 \notin S(A)$ car sinon $A = 0_2$.
   La réciproque est fausse.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors $S(xI_2) = \{xI_2\}$.
3. Bien évidemment non. Toute matrice diagonalisable non diagonale est semblable à une matrice diagonale.
4. (a) Un calcul élémentaire (pivot) ou le cours donne $E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $S(A)$ est bornée.
   Il existe alors une constante $C > 0$ telle que $\forall P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), ||PAP^{-1}||^2 \leqslant C^2$.
   Or, pour $P = E_\lambda$, il vient
   $$B = P_\lambda A P_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} a + \lambda c & -\lambda(a + \lambda c) + b + \lambda d \\ c & -\lambda c + d \end{pmatrix}.$$
   Comme $b_{i_0,j_0}^2 \leqslant \sum_{i,j} b_{i,j}^2 = ||B||^2$ les quatre coefficients ci-dessus sont bornés quand $\lambda$ varie.
   Donc $c = 0$ et $a = d$. On recommence le même travail avec $F_\lambda$ : il vient en plus $b = 0$.
   Donc $A = aI_2$. La réciproque est évidente.
5. (a) Le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A$ si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$.
   Or $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_2)$ est un polynôme de degré deux, qui admet au moins une racine complexe, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.
   (b) i. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$, alors $2\lambda$ est une valeur propre de $2A$ et donc de $A$, puisque $A$ et $2A$ sont semblables. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n\lambda$ est valeur propre de $A$.
   ii. Si $\lambda \neq 0$, alors $A$ admet une infinité de valeurs propres, ce qui est impossible. Donc $\lambda = 0$ et $\mathrm{sp}(A) = \{0\}$ ; par suite, $A$ n'est pas inversible donc $\det(A) = 0$.
   Or si l'on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = \lambda(\lambda - a - d)$, car $ad - bc = \det(A) = 0$. Comme 0 est la seule racine de ce polynôme en $\lambda$ (puisque 0 est la seule valeur propre), on a $a = -d$ et $0 = ad - bc = -a^2 - bc$. Alors le calcul donne :
   $$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = 0.$$
   (c) Réciproquement supposons $A \neq 0_2$ et $A^2 = 0_2$.
   Soit $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$. Comme $A \neq 0_2$, alors $f \neq 0$. Il existe $e_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $f(e_1) \neq 0$. Et $\mathcal{B} = (f(e_1), e_1)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
   Enfin, on a $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $B$ est semblable à $A$ et appartient donc à $S(A)$.
   On pose maintenant : $\mathcal{B}' = (f(e_1), 2e_1)$. La famille $\mathcal{B}'$ reste une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et on a $B' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(2f)$. La matrice $B'$ est encore semblable à $A$ et aussi à $2A$.
   Donc $2A$ est semblable à $A$ et est donc dans $S(A)$. La condition est donc suffisante.

## Sujet n° 28

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$.
On note $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de $E$ et $\mathrm{Id}_E$ l'identité de $E$.

Pour tout endomorphisme $f$ de $E$, on définit la suite d'endomorphismes $(f^k)_{k \geqslant 0}$ par récurrence par : $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $k \geqslant 1$ : $f^k = f \circ f^{k-1}$.

1. Montrer que la suite $(\mathrm{Ker}(f^k))_{k \geqslant 0}$ est croissante au sens de l'inclusion.
2. (a) Montrer l'existence d'un entier $q \leqslant n$ tel que $\mathrm{Ker}(f^q) = \mathrm{Ker}(f^{q+1})$.
   On pose alors : $p = \min\{q \in \mathbb{N} / \mathrm{Ker}(f^q) = \mathrm{Ker}(f^{q+1})\}$.
   
   (b) Montrer que la suite finie $(\mathrm{Ker}(f^k))_{0 \leqslant k \leqslant p}$ est strictement croissante au sens de l'inclusion et que la suite $(\mathrm{Ker}(f^k))_{k \geqslant p}$ est constante.

Soit $\alpha$ un réel non nul. On considère la famille de polynômes $P_k = X^k(X-\alpha)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Dans la suite de l'exercice, $f$ désigne un endomorphisme de $E$ tel que :

$$\forall k \in [\![0, n-2]\!], P_k(f) \neq 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } P_{n-1}(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

*Le but de l'exercice est d'établir que $p = n-1$.*

3. Dans cette question, on suppose que $f^{n-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\forall k \in [\![0, n-2]\!], f^k \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et conclure.
4. Dans cette question, on suppose : $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de $f$.
   
   (b) Montrer : $\mathrm{Im}(f^{n-1}) = \mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E)$.
   
   (c) En déduire que $\mathrm{Ker}(f^{n-1})$ et $\mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans $E$.
   
   (d) Conclure par l'absurde en distinguant successivement les deux cas $p = n$ et $p < n-1$.

## Solution du sujet n$^o$ 28

1. Pour tout $k \geqslant 0$, on a : $f^k(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0$ d'où la croissance de la suite des noyaux $(\text{Ker}(f^k))_{k\geqslant 0}$.
2. (a) Pour $k \geqslant 0$, posons $d_k = \dim(\text{Ker}(f^k))$. Cette suite d'entiers naturels est croissante et majorée par $n$. Elle est donc stationnaire à partir d'un certain rang et ce rang est inférieur à $n$. Il existe donc $q$ tel que $\text{Ker}(f^q) = \text{Ker}(f^{q+1})$. Soit $p = \min\{q \in \mathbb{N} / \text{Ker}(f^q) = \text{Ker}(f^{q+1})\}$.

   (b) Par définition de $p$, la suite $(\text{Ker}(f^k))_{0\leqslant k\leqslant p}$ est strictement croissante.

   (c) Montrons par récurrence sur $j \geqslant 1$ que $\text{Ker}(f^{p+j}) = \text{Ker}(f^p)$.
   - Pour $j = 1$, c'est vrai par définition de $p$
   - On a $f^{p+j+1}(x) = 0 \Rightarrow f^{p+j}(f(x)) = 0 \Rightarrow f^p(f(x)) = 0$, puis par hypothèse de récurrence. $\Rightarrow f^p(x) = 0$. Donc $\text{Ker}(f^{p+j}) \subset \text{Ker}(f^p)$. L'inclusion réciproque ayant été établie à la question 1, on a montré que $\text{Ker}(f^{p+j+1}) = \text{Ker}(f^p)$, ce qui achève la récurrence.
3. On a : $0 \neq P_{n-2}(f) = f^{n-1} - \alpha f^{n-2} = -\alpha f^{n-2}$,
   Donc $f^{n-2} \neq 0$, et a fortiori $f^k \neq 0$ si $k \leqslant n-2$. Ainsi, $p = n-1$.
4. Supposons $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ :

   (a) Les valeurs propres de $f$ sont incluses dans les racines de tout polynôme annulateur, donc dans $\{0, \alpha\}$.
   - Si $\alpha$ n'est pas valeur propre, alors $f - \alpha\text{Id}_E$ est bijective et $f^{n-1} = 0$, ce qui est absurde.
   - Si 0 n'est pas valeur propre, alors $f$ bijective entraîne $f - \alpha\text{Id}_E = 0$ ce qui est impossible car, par définition de $f$, le polynôme $P_0 = X - \alpha$ n'est pas annulateur de $f$ (car $n \geqslant 2$).

   (b)
   - On a $x \in \text{Ker}(f - \alpha\text{Id}_E) \Rightarrow f(x) = \alpha x \Rightarrow f^{n-1}(x) = \alpha^{n-1}x \Rightarrow x = f^{n-1}\left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right) \Rightarrow x \in \text{Im}(f^{n-1})$.
   - Réciproquement, $x \in \text{Im}(f^{n-1}) \Rightarrow \exists y \in E, f^{n-1}(y) = x$. Et on a
   $$0 = f^{n-1} \circ [f - \alpha\text{Id}_E](y) = (f - \alpha\text{Id}_E)[f^{n-1}(y)] = (f - \alpha\text{Id}_E)(x) \Rightarrow x \in \text{Ker}(f - \alpha\text{Id}_E)$$

   Donc $\text{Im}(f^{n-1}) = \text{Ker}(f - \alpha\text{Id}_E)$.

   (c) Lorsque $\alpha \neq 0$, on montre que $\text{Ker}(f^{n-1})$ et $\text{Ker}(f - \alpha\text{Id}_E)$ sont en somme directe. En effet :
   $$x \in \text{Ker}(f^{n-1}) \cap \text{Ker}(f - \alpha\text{Id}_E) \Rightarrow f^{n-1}(x) = 0 \text{ et } f^{n-1}(x) = \alpha^{n-1}x$$
   ce qui entraîne $x = 0_E$ car $\alpha \neq 0$.
   Le théorème du rang affirme alors que $\text{Ker}(f^{n-1})$ est supplémentaire de $\text{Im}(f^{n-1}) = \text{Ker}(f - \alpha\text{Id}_E)$.

   (d)
   - si $p = n$, $d_p = d_n = n \Rightarrow \text{Ker}(f^n) = E \Rightarrow f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et dans ce cas : $P_{n-1}(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow f^{n-1}(f - \alpha\text{Id}_E) = 0 \Rightarrow \alpha f^{n-1} = 0$. Absurde.
   - si $p < n-1$, $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{n-1})$ d'où en utilisant (c) : $\text{Ker}(f^p)$ et $\text{Ker}(f - \alpha\text{Id}_E)$ sont donc supplémentaires dans $E$.
     Soit $x \in E$. On a $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Ker}(f^p), x_2 \in \text{Ker}(f - \alpha Id_E)$ et
     $$P_p(f)(x) = P_p(f)(x_1) + P_p(f)(x_2) = (f - \alpha\text{Id}_E) \circ (f^p)(x_1) + f^p \circ (f - \alpha\text{Id}_E)(x_2) = 0$$
     cela contredit l'hypothèse $P_p(f) \neq 0$ (en contradiction avec la définition de $p$).

## Sujet n° 31

Soit $E$ un espace vectoriel complexe de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$.

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $E$. Le noyau et l'image d'un endomorphisme $v$ sont notés $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ respectivement. Dans cet exercice, on considère un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. Soit $v$ un endomorphisme de $E$.

   Prouver l'équivalence suivante :

   $$E = \mathrm{Ker}\,(v) \oplus \mathrm{Im}\,(v) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Ker}(v^2)$$

   où la notation $v^2$ désigne l'endomorphisme $v \circ v$.

2. Prouver qu'on a également l'équivalence :

   $$\mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Ker}(v^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,(v) = \mathrm{Im}(v^2)$$

Soit $u$ un endomorphime de $E$.

3. Prouver que si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_1\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}\,(u - \lambda_2\,\mathrm{Id})$.

4. On note $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme $u$. Soit $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Sp}(u) \setminus \{\lambda_0\} \neq \varnothing$. Montrer alors que :

   $$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{\lambda_0\}} \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id})$$

   On justifiera tout d'abord la raison pour laquelle la somme $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{\lambda_0\}} \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id})$ est bien directe.

5. En déduire que s'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}\,\big((u - \lambda_0\,\mathrm{Id})^2\big)$, alors $u$ n'est pas diagonalisable.

   Indication : on pourra montrer en premier lieu que $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(u)$.

6. Prouver que s'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}\,(u - \lambda_0\,\mathrm{Id}) \neq \mathrm{Im}\,\big((u - \lambda_0\,\mathrm{Id})^2\big)$, alors $u$ n'est pas diagonalisable.

## Solution du sujet n° 31

1. De manière générale, on montre aisément que $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(v^2)$. Supposons maintenant que $E = \mathrm{Ker}\,(v) \oplus \mathrm{Im}\,(v)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(v^2)$, il vient $v(v(x)) = 0$. Donc $v(x) \in \mathrm{Ker}\,(v) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0\}$. Ainsi, $v(x) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(v)$. On conclut que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(v^2)$.
   Supposons réciproquement que $\mathrm{Ker}(v^2) = \mathrm{Ker}(v)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}\,(v)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = v(y)$ avec $v(x) = 0$. Donc $v^2(y) = 0$ et $y \in \mathrm{Ker}(v^2) = \mathrm{Ker}(v)$, il s'ensuit que $v(y) = 0 = x$. Par conséquent, comme $0 \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}\,(v)$, on a $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0\}$.
   Comme $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0\}$, en utilisant le théorème du rang, on obtient :
   $$\dim\left(\mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(v)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}(v)\right) = \dim(E).$$
   Or, $\mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v) \subset E$ et par suite, on conclut que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v)$.

2. De manière générale, on montre aisément que $\mathrm{Im}(v^2) \subset \mathrm{Im}(v)$. De même, on a toujours $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(v^2)$. Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(v^2) \iff \dim(\mathrm{Ker}(v)) = \dim(\mathrm{Ker}(v^2))$, ce qui est encore équivalent à l'aide du théorème du rang à $\dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim(\mathrm{Im}(v^2)) \iff \mathrm{Im}(v^2) = \mathrm{Im}(v)$ (car $\mathrm{Im}(v^2) \subset \mathrm{Im}(v)$).

3. Si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_1 \mathrm{Id})$ alors $u(x) = \lambda_1 x$ et $(u - \lambda_2 \mathrm{Id})x = (\lambda_1 - \lambda_2)x$. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $x = \left(u - \lambda_2 \mathrm{Id}\right)(x/(\lambda_1 - \lambda_2)) \in \mathrm{Im}\,(u - \lambda_2 \mathrm{Id})$. On conclut que $\mathrm{Ker}(u - \lambda_1 \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}\,(u - \lambda_2 \mathrm{Id})$.

4. La somme $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \setminus \{\lambda_0\}} \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$ est bien directe car il s'agit de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes
   Et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \setminus \{\lambda_0\}$, on a $\lambda \neq \lambda_0$, donc d'après la question 3), $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}\,(u - \lambda_0 \mathrm{Id})$.

   Par somme on en déduit que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \setminus \{\lambda_0\}} \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}\,(u - \lambda_0 \mathrm{Id})$.

5. Montrons d'abord que $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(u)$. Comme $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0 \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\left((u - \lambda_0 \mathrm{Id})^2\right)$ (question 1), on a par hypothèse $\mathrm{Ker}\left((u - \lambda_0 \mathrm{Id})^2\right) \neq \{0\}$. Il existe donc $x \neq 0$ tel que $(u - \lambda_0 \mathrm{Id})(u(x) - \lambda_0 x) = 0$. Si $y = u(x) - \lambda_0 x = 0$, on a $x \in \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0 \mathrm{Id}) \setminus \{0\}$. On obtient alors $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(u)$. Si $y \neq 0$, comme on a $y \in \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0 \mathrm{Id})$, il vient encore $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(u)$.
   Raisonnons par l'absurde, supposons que $u$ est diagonalisable. Comme $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(u)$, on a soit $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_0\}$, soit $\mathrm{Sp}(u) \setminus \{\lambda_0\} \neq \varnothing$. Si $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_0\}$, il vient immédiatement $u = \lambda_0 \mathrm{Id}$ et on arrive à la contradiction $E = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0 \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda_0 \mathrm{Id})^2\right)$. Si $\mathrm{Sp}(u) \setminus \{\lambda_0\} \neq \varnothing$, on a $E = \mathrm{Ker}(u - \lambda_0 \mathrm{Id}) \oplus \mathcal{V}$ où $\mathcal{V} = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \setminus \{\lambda_0\}} \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$. On en déduit que $\dim(\mathcal{V}) = n - \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda_0 \mathrm{Id})) = \dim((\mathrm{Im}(u - \lambda_0 \mathrm{Id}))$ (par théorème du rang) et comme $\mathcal{V} \subset \mathrm{Im}(u - \lambda_0 \mathrm{Id})$ d'après la question 4), on obtient $\mathcal{V} = \mathrm{Im}(u - \lambda_0 \mathrm{Id})$. Il s'ensuit que $E = \mathrm{Ker}(u - \lambda_0 \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \lambda_0 \mathrm{Id})$, ce qui est absurde d'après la question 1) car $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0 \mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}\left((u - \lambda_0 \mathrm{Id})^2\right)$.

6. Si $\mathrm{Im}\,(u - \lambda_0 \mathrm{Id}) \neq \mathrm{Im}\left((u - \lambda_0 \mathrm{Id})^2\right)$, on obtient d'après la question 2), $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_0 \mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}\left((u - \lambda_0 \mathrm{Id})^2\right)$. On conclut alors avec la question 5) que $u$ n'est pas diagonalisable.

## Sujet n° 34

Soit $a$ un nombre réel strictement positif. Soient les deux suites réelles strictement positives $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = a,\ b_0 = 1$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{b_k}\right),\ b_{k+1} = \frac{1}{2}\left(b_k + \frac{1}{a_k}\right).$$

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $x + 2 + \dfrac{1}{x} \geqslant 4$.
2. Établir une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ u_k = a_k b_k\,.$$

   En déduire que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
3. Montrer que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont proportionnelles et convergentes.
   Déterminer leurs limites respectives.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique définie positive* lorsque :

$$S \text{ symétrique} \quad \text{et} \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\},\ {}^tXSX > 0.$$

4. L'ensemble des matrices symétriques définies positives est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?
5. Montrer que toute matrice symétrique définie positive est inversible et que son inverse est symétrique définie positive.
6. En déduire que si $A$ est une matrice symétrique définie positive, on peut définir deux suites de matrices symétriques définies positives $(A(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A(0) = A,\ B(0) = I_n$$

$$\text{et } \forall k \in \mathbb{N},\ A(k+1) = \frac{1}{2}\left(A(k) + B(k)^{-1}\right),\ B(k+1) = \frac{1}{2}\left(B(k) + A(k)^{-1}\right).$$

*On dit qu'une suite de matrices $(U(k))_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convergente lorsque, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, la suite $(u_{i,j}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ des coefficients de la $i$-ème ligne et de la $j$-ème colonne converge (quand $k$ tend vers $+\infty$). On appelle alors limite de cette suite la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la $i$-ème ligne et de la $j$-ème colonne vaut $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{i,j}(k)$, pour tout $i$ et tout $j$. On pourra utiliser sans démonstration que le produit de deux suites de matrices convergentes est convergente et que sa limite est le produit (de matrices) des limites.*

7. Montrer que les suites $(A(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

## Solution du sujet n° 34

1. Soit la fonction $f : x \mapsto x + 2 + \dfrac{1}{x}$.
   Comme $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$, $f$ est minimale sur $\mathbb{R}_+^*$ en 1 où elle vaut 4.
2. On a : $u_{k+1} = a_{k+1}b_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_k + \dfrac{1}{b_k}\right)\dfrac{1}{2}\left(b_k + \dfrac{1}{a_k}\right) = \dfrac{1}{4}\left(a_k b_k + 1 + 1 + \dfrac{1}{a_k b_k}\right) = \dfrac{1}{4}\left(u_k + 2 + \dfrac{1}{u_k}\right)$.
   D'après la question précédente, on a donc $u_k \geqslant 1$ pour tout $k \geqslant 1$. Et donc :
   $$u_{k+1} - u_k = \frac{-3u_k^2 + 2u_k + 1}{4u_k} = \frac{(u_k - 1)(-3u_k - 1)}{4u_k} \leqslant 0.$$
   La suite $(u_k)$ est décroissante et minorée, donc elle converge. Sa limite $\ell$ vérifie $f(\ell) = \ell$, soit $\ell - 1 = 0$ ou $-3\ell - 1 = 0$, impossible car $u_k \geqslant 1$. Donc $\ell = 1$.
3. On a : $\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{b_k}\right)}{\frac{1}{2}\left(b_k + \frac{1}{a_k}\right)} = \dfrac{a_k b_k + 1}{b_k}\dfrac{a_k}{a_k b_k + 1} = \dfrac{a_k}{b_k}$. La suite de terme général $\dfrac{a_k}{b_k}$ est constante et vaut $\dfrac{a_0}{b_0} = a$ , soit $a_k = a\, b_k$. D'où :
   $$a_k = \sqrt{a_k^2} = \sqrt{\frac{a_k}{b_k} u_k} = \sqrt{a u_k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a} \quad \text{ et } \quad b_k = \frac{1}{a} a_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$
4. Non, il est stable par somme, mais pas par produit par un scalaire (sauf si le scalaire est strictement positif). De plus il ne contient pas 0.
5. Pour toute matrice $S$ symétrique définie positive, si $(\lambda, X)$ est un couple propre de $S$, alors :
   $$0 < {}^t XSX = {}^t X \lambda X = \lambda \underbrace{\|X\|^2}_{>0 \text{ car } X \neq 0} \qquad \text{d'où } \lambda > 0.$$
   Donc, 0 n'étant pas valeur propre de $S$, la matrice $S$ est inversible.
   En transposant $SS^{-1} = I$, on obtient ${}^t(S^{-1})({}^t S) = I$, donc ${}^t(S^{-1}) = ({}^t S)^{-1} = S^{-1}$ et par suite, la matrice $S^{-1}$ est symétrique. De plus, pour tout $X \neq 0$, on a :
   $${}^t X S^{-1} X = {}^t(S^{-1}X) S (S^{-1}X) > 0 \qquad \text{car } S^{-1}X \neq 0.$$
6. Les stabilités par somme, inverse et produit par un scalaire strictement positif permettent de montrer par récurrence sur $k \geqslant 0$ la relation : « $A(k)$ et $B(k)$ sont bien définies et sont symétriques définies positives ».
7. D'après le théorème spectral, on diagonalise $A(0) = A = PDP^{-1}$ avec $P$ orthogonale et $D$ diagonale à valeurs propres strictement positives. Comme $B(0) = I = PIP^{-1}$, par récurrence, on a $A(k) = PD(k)P^{-1}$ et $B(k) = P\Delta(k)P^{-1}$, avec $D(k) = \operatorname{diag}(a_k^{(1)}, \ldots, a_k^{(n)})$ et $\Delta(k) = \operatorname{diag}(b_k^{(1)}, \ldots, b_k^{(n)})$ diagonales qui vérifient :
   $$D_0 = D,\ \Delta_0 = I_n,\ D_{k+1} = \frac{1}{2}\left(D_k + \Delta_k^{-1}\right), \Delta_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\Delta_k + D_k^{-1}\right).$$
   Alors, d'après la question 3, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :
   $$\lim_{k \to +\infty} a_k^{(i)} = \sqrt{a_0^{(i)}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{k \to +\infty} b_k^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{a_0^{(i)}}}.$$
   Donc, les suites $(D(k))$ et $(\Delta(k))$ convergent et par produit ($A(k) = PD(k)P^{-1}$), la suite $(A(k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge et de même pour $(B(k))_{k \in \mathbb{N}}$.

## Sujet n° 39

On dira qu'une matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ($n \geqslant 2$) est nilpotente s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$M^{p-1} \neq 0 \text{ et } M^p = 0$$

1. Montrer que si une matrice triangulaire supérieure $T$ a ses éléments diagonaux nuls, alors elle est nilpotente.
2. Montrer que l'inversibilité d'une matrice est équivalente à celle de sa transposée.
3. Soit $p$ un entier naturel non nul. On considère des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ deux à deux distincts et non nuls.

   Soit la matrice $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_p & \cdots & \lambda_p^p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$

   (a) Soit $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

   Montrer que, si $NX = 0$, alors pour tout $k$ de $[\![1, p]\!]$, on a l'égalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i \lambda_k^{i-1} = 0$.

   (b) En déduire que $N$ est inversible.
4. Soit une matrice triangulaire supérieure $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], \operatorname{Tr}\left(B^k\right) = 0$.

   Montrer que les éléments diagonaux de $B$ sont nuls (on pourra raisonner par l'absurde en supposant que $B$ possède $p$ éléments diagonaux 2 à 2 distincts et non nuls, certains pouvant être répétés).
   En déduire que $B$ est nilpotente.
5. Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], \operatorname{Tr}\left(M^k\right) = 0$.

   (a) En admettant que toute matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire, montrer que $M$ est nilpotente.

   (b) Le raisonnement précédent est-il encore valable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?
   Plus précisément, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, existe-t-il toujours une matrice triangulaire $T$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PTP^{-1}$ ?

## Solution du sujet n° 39

1. En considérant l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice $T$, et si on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a (avec des notations évidentes) :
$$f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = t_{1,2}e_1 \text{ donc } f^2(e_2) = 0, \quad f(e_3) = t_{1,3}e_1 + t_{2,3}e_2 \text{ donc } f^3(e_3) = 0$$
Une récurrence (ou une simple itération) montre que : $\forall k \in [\![1, n]\!], f^k(e_k) = 0$.
On a, a fortiori : $\forall k \in [\![1, n]\!], f^n(e_k) = 0$. Ainsi, $f^n = 0$, donc $T^n = 0$.
Comme $T^0 = I_n \neq 0$, l'entier $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* | M^k = 0\}$ existe, donc $T$ est nilpotente.
2. $A$ inversible $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AB = I \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), {}^tB{}^tA = I \Leftrightarrow {}^tA$ inversible.
3. (a) Le système $NX = 0$ s'écrit : $\forall k \in [\![1, p]\!], \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i\lambda_k^i = 0$, et en simplifiant par $\lambda_k \neq 0$, on obtient :
$$\forall k \in [\![1, p]\!], \sum_{i=1}^{p} a_i\lambda_k^{i-1} = 0$$
(b) En notant $P$ le polynôme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_iY^{i-1}$ de $\mathbb{R}_n[Y]$, ce qui précède montre que $P$ possède $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ comme racines distinctes. Comme $P$ est de degré inférieur ou égal à $p - 1$, $P$ est le polynôme nul donc ses coefficients (les $a_i$ ) sont nuls, ce qui prouve que $X = 0$ et ainsi $N$ est inversible.
4. Notons $d_1, \ldots, d_n$ les coefficients diagonaux de $B$.
Comme, pour tout $k$ de $[\![1, n]\!]$, on a $\operatorname{Tr}\left(B^k\right) = 0$, on obtient : (1) $\forall k \in [\![1, n]\!], d_1^k + \ldots + d_n^k = 0$.
Si on suppose que parmi les réels $d_1, \ldots, d_n$, il en existe $p$ qui sont 2 à 2 distincts et non nuls, et en les notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (pour coller à ce qui précède), alors, en désignant par $c_i$ le nombre d'occurrences de $\lambda_i$ sur la diagonale de $B$, l'équation (1) devient :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], c_1\lambda_1^k + \ldots + c_p\lambda_p^k = 0$$
En prenant les $p$ premières équations, on obtient le système : $\left\{\begin{array}{l} c_1\lambda_1 + \ldots + c_p\lambda_p = 0 \\ c_1\lambda_1^2 + \ldots + c_p\lambda_p^2 = 0 \\ \vdots \\ c_1\lambda_1^p + \ldots + c_p\lambda_p^p = 0 \end{array}\right.$.
En considérant $c_1, \ldots, c_p$ comme les inconnues, la matrice de ce système est : $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_p^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^p & \cdots & \lambda_p^p \end{pmatrix}$.
On a ${}^tM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_p & \cdots & \lambda_p^p \end{pmatrix}$ et la question 2 nous garantit que ${}^tM$ est inversible donc $M$ aussi.
On conclut que le système écrit plus haut est de Cramer et ainsi $(c_1, \ldots, c_p) = (0, 0, \ldots, 0)$, ce qui prouve, par l'absurde, qu'aucun $\lambda_i$ n'est différent de 0.
Finalement, tous les $\lambda_i$ sont nuls donc, grâce à la première question, $B$ est nilpotente.
5. (a) Soit $B$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle est semblable à une matrice triangulaire $T$, donc il existe une matrice inversible $P$ telle que : $B = PTP^{-1}$. On en déduit : $\forall k \in \mathbb{N}, B^k = PT^kP^{-1}$.
Comme pour tout entier naturel $k$, on a $\operatorname{Tr}\left(B^k\right) = 0$, alors $\operatorname{Tr}\left(T^k\right) = 0$ (car deux matrices semblables ont même trace) et d'après la question 4, $T$ est nilpotente donc $B$ aussi.
(b) Non, par exemple : $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $M$ était semblable à une matrice triangulaire réelle $T$, alors, les éléments diagonaux de $T$ seraient valeurs propres de $M$, ce qui est impossible puisque les valeurs propres de $M$ ne sont pas réelles.

## Sujet n$^{\text{o}}$ 40

Soit un entier $n \geqslant 1$. Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n$ dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ; la norme euclidienne associée est notée $\| \cdot \|$. On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$.

Soit $u$ un endomorphisme **symétrique** de $\mathcal{L}(E)$. Le but de cet exercice est de construire des approximations de valeurs propres et de vecteurs propres de $u$. À cette fin, on suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ et deux réels $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\|u(x) - \lambda\, x\| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \|x\| = 1.$$

1. (a) Justifier qu'il existe $n$ réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ordonnés par ordre croissant et une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \quad \text{et} \quad u(e_k) = \lambda_k\, e_k, \ \ \forall k \in \{1, \ldots, n\}.$$

   (b) Exprimer $\|u(x) - \lambda\, x\|^2$ en fonction de $\lambda$, des $\lambda_k$ et des $x_k$.

   (c) En déduire qu'il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda - \lambda_{i_0}| \leqslant \varepsilon$.

2. Soit $d > \varepsilon$. On définit les ensembles d'indices $I$ et $J$ par :

$$I = \big\{ i \in [\![1, n]\!] \ \mid |\lambda - \lambda_i| \leqslant d \big\} \quad \text{et} \quad J = [\![1, n]\!] \setminus I.$$

   (a) Justifier que $I \neq \varnothing$.

   (b) On définit les vecteurs $x_I$ et $x_J$ par

$$x_I = \sum_{i \in I} x_i\, e_i \quad \text{et} \quad x_J = \sum_{j \in J} x_j\, e_j$$

   avec la convention que $x_J = 0$ si $J = \varnothing$. Montrer que $\|x_J\| < \dfrac{\varepsilon}{d}$.

   (c) Montrer que $1 - \|x_I\| \leqslant \|x_J\|$ et que $0 < \|x_I\| \leqslant 1$.

   (d) Conclure que

$$\Big\| x - \frac{x_I}{\|x_I\|} \Big\| < \frac{2\,\varepsilon}{d}.$$

   (e) Que peut-on en déduire sur $x$ dans le cas où $\{\lambda_i, i \in I\}$ est un singleton ?

## Solution du sujet n° 40

1. (a) L'endomorphisme $u$ est symétrique réel. D'après le cours, son spectre est réel et il est diagonalisable dans une base orthonormée. On peut choisir cette base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres tels que les valeurs propres associées $\lambda_k$ pour $k = 1, \ldots, n$ satisfassent $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Les $x_k$ sont alors les coefficients du vecteur $x$ dans cette base. Avec ce choix, on obtient les relations demandées.

   (b) On a $x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k$ et $u(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k\, e_k$. En utilisant le fait que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale, il vient :

$$\|u(x) - \lambda x\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda) x_k e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda)^2\, x_k^2. \tag{1.1}$$

   (c) En utilisant les hypothèses : $\|u(x) - \lambda\, x\| \leqslant \varepsilon$ et $\|x\| = 1$ et la relation (1.1), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda)^2\, x_k^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1. \tag{1.2}$$

   Il existe alors un indice $i_0$ tel que $|\lambda - \lambda_{i_0}|^2 = \min_{k=1,\ldots,n} |\lambda - \lambda_k|^2$. Il découle alors de (1.2) la minoration :

$$|\lambda - \lambda_{i_0}|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda)^2\, x_k^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

   Il vient $|\lambda - \lambda_{i_0}| \leqslant \varepsilon$. On conclut que $\lambda$ est une approximation de la valeur propre $\lambda_{i_0}$ à $\varepsilon$ près.

2. (a) D'après 1), il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda - \lambda_{i_0}| \leqslant \varepsilon$ et comme $\varepsilon < d$, on a $i_0 \in I$ d'où $I \neq \varnothing$.

   (b) Si $J = \varnothing$, on a $x_J = 0$, donc l'inégalité demandée est vérifiée. Si $J \neq \varnothing$, il découle avec (1.2) que

$$\varepsilon^3 \geqslant \|u(x) - \lambda x\| = \sum_{j \in J} (\lambda_j - \lambda)^2\, x_j^2 + \sum_{j \in I} (\lambda_j - \lambda)^2\, x_j^2 \geqslant \sum_{j \in J} (\lambda_j - \lambda)^2\, x_j^2 > d^2 \sum_{j \in J} x_j^2 = d^2\, \|x_J\|^2\,,$$

   (où l'inégalité stricte utilise que $J \neq \varnothing$ et la définition de $J$) ce qui est équivalent au résultat demandé.

   (c) On observe que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = x_I + x_J$ .
   D'après la question 2), on a donc $\|x\| = \|x_I + x_J\| \leqslant \|x_I\| + \|x_J\|$ et donc $\|x\| - \|x_I\| \leqslant \|x_J\|$.
   On obtient alors la première inégalité en utilisant le fait que $\|x\| = 1$. Pour la seconde inégalité, on remarque que $x_I$ et $x_J$ sont orthogonaux (car la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormale).
   On a donc $1 = \|x\|^2 = \|x_I\|^2 + \|x_J\|^2$ et ainsi $\|x_I\| \leqslant 1$.
   Si l'on avait $\|x_I\| = 0$, alors $x_J = x$ et $I = \emptyset$, ce qui contredirait la question 2.a).

   (d) On a

$$\left\|x - \frac{x_I}{\|x_I\|}\right\| = \left\|x - x_I + x_I - \frac{x_I}{\|x_I\|}\right\| \leqslant \|x - x_I\| + \left\|x_I - \frac{x_I}{\|x_I\|}\right\| = \|x_J\| + \left\|x_I - \frac{x_I}{\|x_I\|}\right\|. \tag{1.3}$$

   On a alors en utilisant la question 2)c) :

$$\left\|x_I - \frac{x_I}{\|x_I\|}\right\| = \left\|(\|x_I\| - 1)\, \frac{x_I}{\|x_I\|}\right\| = |\|x_I\| - 1| = (1 - \|x_I\|) \leqslant \|x_J\|.$$

   Il découle alors avec (1.3) que $\left\|x - \frac{x_I}{\|x_I\|}\right\| \leqslant 2\|x_J\|$ et on conclut avec la question 2)b).

3. Si $\{\lambda_i, i \in I\}$ est un singleton, on a nécessairement $\{\lambda_i, i \in I\} = \{\lambda_{i_0}\}$ car d'après 2)a) $i_0 \in I$. Le vecteur $x_I/\|x_I\|$ est donc un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre $\lambda_{i_0}$.
   Le vecteur unitaire $x$ est donc une approximation à $2\varepsilon/d$ près de ce vecteur propre.

## Sujet n° 44

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si pour toute matrice colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX > 0$.
2. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si ${}^tPAP \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Soient $A$ et $B$ deux matrices appartenant à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda$ une valeur propre réelle de $AB$.
   (a) Montrer que pour toute matrice non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : ${}^tX\,{}^tBABX > 0$. Montrer que $\lambda > 0$.
   (b) En déduire que $AB \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $AB = BA$.
4. Soient $A$, $B$ et $C$ trois matrices appartenant à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. **On suppose que $ABC$ est symétrique**.
   (a) Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = Q\,{}^tQ$.
   (b) Montrer que ${}^tQABCQ \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (c) Qu'en déduit-on sur $ABC$ ?

## Solution du sujet n° 44

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. $A$ est donc diagonalisable. Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de $A$ associée aux valeurs propres (pas nécessairement distinctes) $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, alors on a : $A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k \, {}^tX_k$, d'où pour toute $X$ matrice colonne non nulle, ${}^tXAX = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k ({}^tXX_k)^2$. Comme $X$ est non nulle, il existe un $i$ dans $[\![1, n]\!]$ tel que ${}^tXX_i \neq 0$, et comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a donc : ${}^tXAX > 0$.
   Réciproquement, soit $A$ une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable, telle que l'on a pour tout vecteur colonne $X$ non nul : ${}^tXAX > 0$. En particulier pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$ et $X$ vecteur propre associé à $\lambda$ on obtient : $\lambda \, {}^tXX > 0$, d'où $\lambda > 0$ car ${}^tXX > 0$ ($X$ étant un vecteur propre donc non nul).
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors ${}^tPAP$ est symétrique. De plus, soit $X$ un vecteur colonne non nul, alors : ${}^tX{}^tPAPX = {}^t(PX)A(PX)$, avec $PX \neq 0$ car $P$ est inversible.
   D'où ${}^tX{}^tPAPX = {}^t(PX)A(PX) > 0$ car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ainsi ${}^tPAP \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ en utilisant la question 1.
   Réciproquement, si ${}^tPAP \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A = {}^t(P^{-1})({}^tPAP)(P^{-1})$ et on applique ce qu'on vient de montrer à ${}^tPAP$ et $P^{-1}$.
3. (a) $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $B$ est inversible (0 n'est pas valeur propre), alors pour $X \neq 0$ : ${}^tBAB \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après la question 2. Ainsi, ${}^tX{}^tBABX > 0$. Or ${}^tX{}^tBABX = \lambda{}^tXBX$, d'où $\lambda > 0$ car ${}^tXBX > 0$.
   (b) Supposons que $AB = BA$. Comme $A$ et $B$ sont symétriques réelles, ${}^tA = A, {}^tB = B$. Ainsi $AB = BA \Rightarrow AB = {}^t(AB)$ et $AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Ses valeurs propres sont réelles et donc strictement positives par la question précédente.
   Réciproquement, si $AB \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ses valeurs propres sont réelles strictement positives et ${}^t(AB) = AB \Leftrightarrow {}^tB{}^tA = AB \Leftrightarrow AB = BA$.
4. (a) $B$ est diagonalisable dans une base orthonormée, donc $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ : $B = P\Delta \, {}^tP$ où $\Delta$ est diagonale. Les éléments diagonaux de $\Delta$ étant strictement positifs, il existe une matrice $U$ diagonale à coefficients strictement positifs telle que : $U^2 = \Delta$. Ainsi : $B = PUU{}^tP$. Posons $Q = PU$. On a alors : ${}^tU{}^tP = U{}^tP$, d'où $B = Q \, {}^tQ$ et $Q$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
   (b) On a : ${}^tQABCQ = {}^tQAQ{}^tQCQ = A'B'$ où $A' = {}^tQAQ \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B' = {}^tQCQ \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Et $B'A' = {}^tQCQ{}^tQAQ = {}^tQCBAQ = {}^tQABCQ$ par symétrie de $ABC$, donc on a : $B'A' = A'B'$. D'après la question 3b, on a donc $A'B' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, c'est à dire : ${}^tQABCQ \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (c) D'après la question 2, on a donc $ABC \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ avec $P = Q^{-1}$.

## Sujet n° 46

Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ muni du produit scalaire $\langle\ \rangle$ et de la norme $\|\ \|$ associée. On note $\mathrm{Id}_E$ l'endomorphisme identité de $E$

1. Soit $f$ un endomorphisme symétrique de $E$ que l'on suppose **non bijectif** et non nul. Montrer que 0 est valeur propre de $f$ et que $f$ admet au moins une valeur propre non nulle.
2. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

**On suppose désormais et jusqu'à la fin de l'exercice** que $f$ admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_j)_{0 \leqslant j \leqslant k}$ avec $k \geqslant 1$ et

$$\lambda_0 = 0 \text{ et } 0 < |\lambda_1| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_k|.$$

Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, on note $E_{\lambda_j}$ le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_j$. On rappelle que $E = \bigoplus_{j=0}^{k} E_{\lambda_j}$ et que ces sous-espaces sont orthogonaux. On note $p_j$ le projecteur orthogonal sur $E_{\lambda_j}$ (c'est-à-dire le projecteur sur $E_{\lambda_j}$ parallèlement à son orthogonal $E_{\lambda_j}^{\perp}$).

3. Montrer que : $\mathrm{Id}_E = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} p_j$.
4. Démontrer que : $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j$.
5. Soit $p$ le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que l'on a : $p = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} p_j$.

On note alors $g$ l'endomorphisme de $E$ défini par : $g = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j$,

6. Montrer que l'on a : $f \circ g = p$.
7. Soit $y$ un vecteur de $E$. Montrer que l'on a :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \Longleftrightarrow x - g(y) \in \mathrm{Ker}(f)$$

## Solution du sujet n$^{\text{o}}$ 46

1. Comme $f$ est un endomorphisme symétrique réel, il est diagonalisable. Le fait que l'endomorphisme $f$ soit non bijectif est équivalent à 0 valeur propre de $f$ et le fait qu'il ne soit pas l'endomorphisme nul et diagonalisable permet d'affirmer qu'il admet au moins une autre valeur propre non nulle.
2. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$ et $y \in \operatorname{Im} f$. Alors $y = f(z)$ et, par endomorphisme symétrique
$$0 = \langle f(x), z\rangle = \langle x, f(z)\rangle = \langle x, y\rangle.$$
Ainsi $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux. Ils sont supplémentaires par le théorème du rang.
3. L'endomorphisme $f$ est diagonalisable. Ainsi $E = \displaystyle\bigoplus_{j=0}^{k} E_{\lambda_j}$. Donc tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$ avec $x_j \in E_{\lambda_j}$, et alors $p_j(x) = x_j$.
Donc $\operatorname{Id}_E = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} p_j$.
4. De même
$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} f(x_j) = 0 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j(x)$$
5. On sait que $E_0 = \operatorname{Ker} f$, que $\operatorname{Ker} f \oplus^{\perp} \operatorname{Im} f$ et que $\displaystyle\bigoplus_{j=1}^{k} E_{\lambda_j} \subset \operatorname{Im} f$ et qu'ils sont de même dimension, car tous deux supplémentaires orthogonaux de $\operatorname{Ker} f$ (même égaux car il n'existe qu'un seul supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel). Donc $\displaystyle\bigoplus_{j=1}^{k} E_{\lambda_j} = \operatorname{Im} f$ et $p = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} p_j$.
6. On remarque que $p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$. Donc
$$f \circ g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}(p_i \circ p_j) = \sum_{i=1}^{k} p_i = p$$
7. Il s'agit ici du théorème de la projection orthogonale.
Soit $y \in E$, Il existe un couple $(x, f(z)) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} f$ tel que $y = x + f(y)$ et $x$ et $f(y)$ orthogonaux. De plus $\displaystyle\inf_{z \in E} \|f(z) - y\| = d(y, \operatorname{Im} f)$ ; cette distance est atteinte par le projeté orthogonal de $y$ sur $\operatorname{Im} f$ et elle vaut $||x||$. Ainsi
$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \Longleftrightarrow x - g(y) \in \operatorname{Ker}(f)$$

## Sujet n° 49

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n$ dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme euclidienne associée est notée $|| \cdot ||$.
Un endomorphisme $f$ de $E$ est appelé une contraction si pour tout $x$ de $E$, $||f(x)|| \leqslant ||x||$.

1. Soit $p$ un projecteur orthogonal de $E$. Montrer que $p$ est une contraction.
2. Dans cette question, $f$ est un endomorphisme symétrique de $E$,
   c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.
   Montrer que $f$ est une contraction si et seulement si toute valeur propre $\lambda$ de $f$ vérifie $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Soit $f$ un endomorphisme bijectif de $E$. On note $M$ la matrice associée à $f$ dans une base orthonormée de $E$.
   (a) Montrer que la matrice $A = {}^t\!MM$ est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives.
   (b) En déduire qu'il existe une matrice symétrique $S$ dont les valeurs propres sont strictement positives telle que $A = S^2$.
   (c) Montrer qu'il existe une matrice $\Omega$ orthogonale telle que $M = \Omega S$.
   (d) Montrer que $f$ est une contraction si et seulement si toute valeur propre $\lambda$ de $s$ vérifie $|\lambda| \leqslant 1$, où $s$ désigne l'endomorphisme canoniquement associé à $S$.
4. Montrer qu'on a unicité du couple $(\Omega, S)$ dans la décomposition de $M = \Omega S$ avec $\Omega$ orthogonale et $S$ symétrique à valeurs propres strictement positives.

## Solution du sujet n° 49

1. Un projecteur orthogonal est un endomorphisme symétrique. On sait alors que $E = \operatorname{Ker} p \oplus^{\perp} \operatorname{Im} p$. Donc pour tout $x \in E$, $x = y + z$ avec $(y, z) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ et $||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$. Ainsi
$$||p(x)||^2 = ||z||^2 \leqslant ||y||^2 + ||z||^2 \leqslant ||x||^2$$
2. L'endomorphisme $f$ est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres de $f$. Soit $x \in E$. Alors
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \text{ et } ||f(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2$$
   - si $|\lambda_i| \leqslant 1$, alors $||f(x)||^2 \leqslant ||x||^2$.
   - si pour tout $x \in E$, $||f(x)|| \leqslant ||x||$, ceci est encore vrai pour $x = e_i$ et $|\lambda_i| \leqslant 1$, puisque $e_i \neq 0$.
3. (a) La matrice $A$ est clairement symétrique réelle et si $AX = \lambda X$, alors ${}^tX{}^tMMX = \lambda{}^tXX$ ou $||MX||^2 = \lambda||X||^2$. La matrice $M$ étant inversible ($f$ bijectif), il vient $\lambda > 0$.
   (b) Il existe une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i > 0$ telles que $A = {}^tPDP$. On pose $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})$. Il vient $A = {}^tPDP = {}^tP\Delta P P{}^t\Delta P = S^2$, avec $S$ symétrique à valeurs propres strictement positives, car $S$ est orthosemblable à une matrice $\Delta$ diagonale à valeurs propres strictement positives.
   (c) On pose $\Omega = MS^{-1}$. On a alors ${}^t\Omega\Omega = {}^tS^{-1}{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$. La matrice $\Omega$ est orthogonale.
   (d) Soit $\omega$ et $s$ les endomorphismes canoniquement associés à $\Omega$ et $S$. On peut écrire que $f = \omega \circ s$ et $||f(x)|| = ||\omega(s(x))|| = ||s(x)||$. On est ainsi ramené à la question 2.
4. Supposons que $M = \Omega_1 S_1 = \Omega_2 S_2$, sous les conditions demandées. Alors ${}^tMM = S_2^2 = S_1^2$. Soit $(\lambda, X)$ un couple propre de $S_1$, alors $S_2^2 X = S_1^2 X = \lambda^2 X$. Ainsi $\lambda^2$ est une valeur propre de $S_2^2$. La matrice $S_2^2 - \lambda^2 I$ n'est pas inversible, le produit $(S_2 - \lambda I)(S_2 + \lambda I)$ non plus. Mais la matrice $S_2 + \lambda I$ est inversible puisque les valeurs propres de $S_2$ sont toutes strictement positives. Donc $(\lambda, X)$ est un couple propre de $S_2$.

   En inversant les rôles de $S_1$ et $S_2$, on obtient que ces deux matrices ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres. Elles sont diagonalisables dans cette base commune de vecteurs propres et semblables à la même matrice diagonale. Donc $S_1 = S_2$ et $\Omega_1 = \Omega_2$, puisque $S_1$ est inversible.

## Sujet n° 54

On considère un espace euclidien $E$ de dimension supérieure ou égale à 2. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ et pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on désigne par $\mathrm{Ker}(u)$ le noyau de $u$.

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal dont l'image est notée $F$. En utilisant la décomposition orthogonale $E = F \oplus F^{\perp}$, montrer que $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ et que l'on a égalité si et seulement si $x \in F$.
2. On considère un deuxième projecteur orthogonal $q \in \mathcal{L}(E)$ et on note $G$ son image. On introduit l'endomorphisme $u = p \circ q \circ p$.
   (a) Montrer que $u$ est un endomorphisme symétrique de $E$. Qu'en déduire quant à la diagonalisabilité de $u$ ?
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathrm{Sp}\,(u)$ des valeurs propres de $u$ est contenu dans le segment $[0, 1]$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(u - Id_E) = F \cap G$.
   (d) On suppose que $F \cap G = \{0\}$. Soit $x \in E$. Prouver que la suite $(\|u^n(x)\|)$ tend vers 0.
   (e) Lorsque $F \cap G \neq \{0\}$, justifier l'existence d'une base orthonormée $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ de $E$ dans laquelle $u$ se diagonalise et telle que $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ soit une base orthonormée de $F \cap G$ ($n = \dim(E)$ et $p = \dim(F \cap G)$).
   (f) En déduire que dans tous les cas, pour tout $x \in E$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u^n(x) - p_{F\cap G}(x)\| = 0$ où $p_{F\cap G}$ est la projection orthogonale sur $F \cap G$.
3. On se donne $x_0 \in E$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = p_n(x_{n-1})$ où la suite $(p_n)_{n \geqslant 1}$ est définie par

$$p_n = \begin{cases} p & \text{si } n \text{ est impair} \\ q & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

   (a) Exprimer $x_{2k}$ (resp. $x_{2k+1}$) en faisant intervenir $u$ pour $k \geqslant 2$ (resp. $k \geqslant 1$).
   (b) En déduire que $(x_n)$ converge dans $E$ vers $p_{F\cap G}(x_0)$ (c'est à dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - p_{F\cap G}(x_0)\| = 0$).
4. Dans cette question, on se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$ et on note $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$, $G = \mathrm{Vect}\left(\dfrac{e_1 + e_3}{2}, \dfrac{e_2 + e_3}{2}\right)$ et que $x_0 = (1, 2, 1)$.
   Vers quel point de $\mathbb{R}^3$ la suite $(x_n)$ converge-t-elle ?

## Solution du sujet n° 54

1. Soit $x \in E$, écrivons $x = x_1 + x_2$ dans la décomposition orthogonale $E = F \oplus F^{\perp}$ ; alors nous avons $\|p(x)\|^2 = \|x_1\|^2 \leqslant \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2$ d'où l'inégalité souhaitée. Si on est dans le cas d'égalité, d'après ce qui précède on a nécessairement $\|x_2\| = 0$ et par suite $x = x_1 \in F$. La réciproque est évidente.
2. (a) Le cours nous dit qu'un projecteur orthogonal est symétrique, d'où pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x) \mid y\rangle = \langle p(q \circ p(x)) \mid y\rangle = \langle q \circ p(x) \mid p(y)\rangle = \cdots = \langle x \mid u(y)\rangle$ et par conséquent $u$ est symétrique. L'endomorphisme $u$ est donc diagonalisable dans une base orthonormée.
   (b) Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$ et $x$ un vecteur propre unitaire associé à $\lambda$, il vient $\lambda = \langle u(x) \mid x\rangle = \langle q \circ p(x) \mid p(x)\rangle = \|q \circ p(x)\|^2$ ($q$ est un projecteur symétrique). On voit donc que $\lambda \geqslant 0$, et par ailleurs $\lambda \leqslant \|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2 = 1$ avec la question 1.). Il en découle bien que $\mathrm{Sp}\,(u) \subseteq [0, 1]$.
   (c) Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - Id_E)$, on a donc $x = p(q \circ p(x)) \in \mathrm{Im}(p) = F$. Avec 1.), on en déduit d'abord que $\|x\| = \|u(x)\| \leqslant \|q \circ p(x)\| = \|q(x)\| \leqslant \|x\|$ (on sait déjà que $p(x) = x$ puisque $x \in F$), d'où $\|x\| = \|q(x)\|$ et par suite $x \in G$. On a donc bien $x \in F \cap G$. L'inclusion réciproque est évidente.
   (d) Notons $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de $u$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes. Compte tenu de la question 2. b) l'hypothèse $F \cap G = \{0\}$ implique que tous les $\lambda_k$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$. Il s'ensuit que $\|u^n(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{2n} \langle x \mid \varepsilon_k\rangle^2$ décroît vers 0, ce qui termine la question.
   (e) Comme $u$ est symétrique, ses sous-espaces propres fournissent une décomposition orthogonale de $E$. Il suffit donc de choisir une base orthonormée $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ de $Ker(u - Id_E) = F \cap G$, de choisir ensuite une base orthonormée dans chacun des sous-espaces propres restants et de terminer par concaténation.
   (f) La question 2.d) donne la réponse lorsque $F \cap G = \{0\}$. Si $F \cap G \neq \{0\}$, avec les notations déjà introduites et adaptées à la base orthonormée construite dans la question précédente, il vient $u^n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle x \mid \varepsilon_k\rangle \varepsilon_k + \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k^n \langle x \mid \varepsilon_k\rangle \varepsilon_k = p_{F\cap G}(x) + \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k^n \langle x \mid \varepsilon_k\rangle \varepsilon_k$. Ce qui implique $\|u^n(x) - p_{F\cap G}(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k^{2n} \langle x \mid \varepsilon_k\rangle^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\lambda_k \in [0, 1[$ pour $k = p + 1, \cdots, n$.
3. (a) Par récurrence, on montre que $x_{2k} = q \circ u^{k-1}(x_0)$ pour $k \geqslant 2$ et $x_{2k+1} = u^k(x_0)$ pour $k \geqslant 1$.
   (b) Pour $k \geqslant 2$, on en déduit que
   $$\|x_{2k} - p_{F\cap G}(x_0)\| = \|q\left(u^{k-1}(x_0) - p_{F\cap G}(x_0)\right)\| \leqslant \|u^{k-1}(x_0) - p_{F\cap G}(x_0)\|.$$
   En notant $\lfloor y \rfloor$ la partie entière d'un réel $y$, il est alors clair que pour $n \geqslant 4$
   $$\|x_n - p_{F\cap G}(x_0)\| \leqslant \|u^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}(x_0) - p_{F\cap G}(x_0)\| + \|u^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x_0) - p_{F\cap G}(x_0)\|.$$
   Grâce à la question 2. f) on peut alors en conclure que $x_n$ converge dans $E$ vers $p_{F\cap G}(x_0)$.
4. On observe que $F \cap G = \mathrm{Vect}\,(e_1 - e_2)$. On considère le vecteur unitaire $u = \dfrac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}}$. Le cours nous dit alors que $p_{F\cap G}(x_0) = (U\,{}^tU)X_0 = \langle x_0 \mid u\rangle u$. En utilisant maintenant la question 3. b), on en déduit que la suite $(x_n)$ converge vers le point $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

## Sujet n° 55

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'il existe une unique famille de polynôme $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{R}_n[X]$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ L_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

   Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, préciser le degré et le coefficient dominant $\lambda_i$ de $L_i$.

2. Montrer que la famille $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Déterminer les coordonnées de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.
3. Soit l'application $\mathbb{R}_n[X] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(P) = P^{(n)}(0)$.
   Montrer que $\varphi$ est linéaire et calculer la matrice-ligne $U_n = \big(\varphi(L_0), \dots, \varphi(L_n)\big)$.
4. Soit la matrice-ligne $K_n = \big(\varphi(1), \varphi(X) \dots, \varphi(X^n)\big)$. Soit $V_n$ la matrice de passage de la base $\mathcal{L}$ à la base $\mathcal{C} = (1, X, \dots, X^n)$. Montrer que $K_n = U_n V_n$.
5. En déduire que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in [\![0, n-1]\!] \\ n! & \text{si } j = n. \end{cases}$
6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^n$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x_0 + kh).$$

## Solution du sujet n° 55

1. La condition $L_i(j) = 0$ si $j \neq i$ donne $n$ racines de $L_i$, distinctes donc simples puisque $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$, d'où : $L_i = \lambda_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (X - j)$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Alors : $L_i(i) = 1 \iff \lambda_i = \dfrac{1}{\prod_{j\neq i}(i-j)} = \dfrac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}$.
   D'où l'existence et l'unicité de $L_i$ (pour tout $i$), qui est de degré $n$.
2. Comme l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, la famille de $n+1$ vecteurs $L_0, \ldots, L_n$ est une base si et seulement si elle est libre.
   Or, pour tout $\mu_0, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$, si $\mu_0 L_0 + \cdots + \mu_n L_n = 0$, alors en évaluant cette égalité en $j$, on obtient $\mu_j = 0$, car $L_i(j) = 0$ si $i \neq j$ et $L_j(j) = 1$. Donc : $\mu_0 L_0 + \cdots + \mu_n L_n = 0 \Longrightarrow \mu_0 = \cdots = \mu_n = 0$.
   Les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base $L_0, \ldots, L_n$ sont les nombres $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha_0 L_0 + \cdots + \alpha_n L_n = P$. En évaluant cette égalité en $j$, on a alors : $\alpha_j = P(j)$.
3. L'application $\varphi$ est linéaire d'après les linéarités de la dérivation et de $P \mapsto P(0)$.
   Comme $(X^k)^{(n)} = 0$ si $k < n$ et $(X^n)^{(n)} = n!$, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a : $L_i^{(n)}(0) = \lambda_i n! = (-1)^{n-i}\binom{n}{i}$.
   Donc la matrice-ligne recherchée est : $U_n = \begin{pmatrix} (-1)^n\binom{n}{0} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} & \cdots & (-1)^0\binom{n}{n} \end{pmatrix}$.
4. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, en numérotant à partir de 0, le $j$-ème coefficient de la matrice ligne $U_n V_n$ est le produit de $U_n$ avec la $j$-ème colonne de $V_n$, colonne qui est formée des coefficients $v_{i,j}$ tels que $X^j = \sum_{i=0}^{n} v_{i,j} L_i$ ; ce produit vaut donc : $\sum_{i=0}^{n} \varphi(L_i) v_{i,j} = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} v_{i,j} L_i\right) = \varphi(X^j)$,
   qui est le $j$-ème coefficient de la matrice-ligne $K_n$.
5. D'après la question 2, les coordonnées de $P$ dans la base $\mathcal{L}$, sont $(P(0), P(1), \ldots, P(n))$.
   Donc $V_n = (i^j)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$.

   Par produit de matrices, on en déduit que : $K_n = U_n V_n = \begin{pmatrix} c_0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$ avec $c_j = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^j$.

   Par ailleurs, comme $\varphi(X^k) = 0$ si $k < n$ et $\varphi(X^n) = n!$, on a directement $K_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & n! \end{pmatrix}$.

   Ainsi : $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in [\![0, n-1]\!] \\ n! & \text{si } j = n. \end{cases}$

6. D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre $n$ en $x_0$, on a : $f(x_0 + h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) h^j + \mathrm{o}(h^n)$.

   Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, comme $kh$ tend vers 0 quand $h$ tend vers 0, on peut remplacer $h$ par $kh$, d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x_0 + kh) &= \frac{1}{h^n} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) \times (kh)^j + \mathrm{o}(h^n) \right) \\
&= \frac{1}{h^n} \left( \sum_{0 \leqslant j k \leqslant n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) \times (kh)^j \right) + \mathrm{o}(1) \\
&= \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{n} \left( \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x_0) \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^j \right) \right) + \mathrm{o}(1) \\
&= f^{(n)}(x_0) + \mathrm{o}(1) \ \text{ d'après la question précédente}
\end{aligned}$$

   Et $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x_0 + kh) = f^{(n)}(x_0)$.

## Sujet n° 58

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
On suppose que $X$ et $Y$ admettent des moments d'ordre 2 et on suppose que $X$ n'a pas une variance nulle.
Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} E(X^2) & E(X) \\ E(X) & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer l'existence de l'espérance $E((Y - aX - b)^2)$ et trouver une matrice colonne $B$ et un nombre $C \in \mathbb{R}$ (qui ne dépendent ni de $a$ ni de $b$) tels que :

$$E((Y - aX - b)^2) = {}^tUAU - 2\,{}^tBU + C \qquad \text{avec } U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

On souhaite montrer l'existence et trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $E((Y - aX - b)^2)$ soit minimal.
On pose $f(a, b) = E((Y - aX - b)^2)$.

2. Montrer que $f$ admet une borne inférieure sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $A$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont strictement positives.
4. En déduire l'existence d'un minimum pour $f$ sur $\mathbb{R}^2$.
5. Trouver explicitement tous les couples $(a, b)$ pour lesquels ce minimum est atteint.

## Solution du sujet n° 58

1. On a : $(Y-aX-b)^2 = Y^2 + a^2X^2 + b^2 - 2aXY - 2bY + 2abX$.
   Comme $E(X^2)$ et $E(Y^2)$ existent, on en déduit que $E(XY)$ existe (inégalité de Cauchy-Schwarz).
   Comme $E(X^2)$ (resp. $E(Y^2)$) existe, on en déduit que $E(X)$ (resp. $E(Y)$) existe.
   Donc, par linéarité de l'espérance, $E((Y-aX-b)^2)$ existe et :
   $$E((Y-aX-b)^2) = a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - 2aE(XY) - 2bE(Y) + E(Y^2) = {}^tUAU - 2{}^tBU + C,$$
   en posant $B = \begin{pmatrix} E(XY) \\ E(Y) \end{pmatrix}$ et $C = E(Y^2)$.
2. La fonction $f$ est minorée (par 0, d'après la positivité de l'espérance), donc elle admet un borne inférieure.
3. La matrice $A$ est symétrique réelle, donc diagonalisable, d'après le théorème spectral — semblable à $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Ses valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont strictement positives puisque :
   $$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A) = E(X^2) + 1 > 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1\lambda_2 = \det(A) = E(X^2) - E^2(X) = V(X) > 0.$$
   *Autre idée :* ${}^tXAX = E\big((x_1X + x_2)^2\big)$...
4. D'après le théorème spectral encore, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PD{}^tP$. On a alors :
   $$\begin{aligned} f(a,b) &= {}^tUPD{}^tPU - 2{}^tBP{}^tPU + C \\ &= {}^tU'DU' - 2{}^tB'U' + C \text{ avec } U' = {}^tPU = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \text{ et } B' = {}^tPB = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 a'^2 + \lambda_2 b'^2 - 2\mu_1 a' - 2\mu_2 b' + C \\ &= \lambda_1\left(a' - \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(b' - \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right)^2 + C - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} - \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} \end{aligned}$$
   Comme $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, on en déduit que la borne inférieure est $C - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} - \frac{\mu_2^2}{\lambda_2}$ et qu'elle est atteinte en un unique point donné par $a' = \frac{\mu_1}{\lambda_1}$ et $b' = \frac{\mu_2}{\lambda_2}$ — qui détermine un unique couple $(a,b)$.
5. La fonction $f$ est polynomiale. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est ouvert, donc ce minimum est atteint en un point critique. Or :
   $$\partial_1 f(a,b) = 2aE(X^2) + 2bE(X) - 2E(XY) \qquad \text{et} \qquad \partial_2 f(a,b) = 2aE(X) + 2b - 2E(Y).$$
   Donc les points critiques sont les points $(a,b)$ tels que
   $$\begin{cases} aE(X^2) + bE(X) = E(XY), \\ aE(X) + b = E(Y), \end{cases} \iff MU = B \iff U = M^{-1}B.$$
   Soit :
   $$a = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{V(X)} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\operatorname{Cov}(X,XY) - \operatorname{Cov}(X^2,Y)}{V(X)}$$
   qui ne peut être que le point où le minimum est atteint.

## Sujet n° 63

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$. Soient $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $E$, chacun de dimension $n$, de bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
On note $\mathcal{B}$ la base de $E$ obtenue en concaténant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ — c'est à dire que si $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$, alors $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$.

Soit $u$ un endomorphisme de $E_1$ diagonalisable. Soit $f$ l'application linéaire de $E_1$ sur $E_2$ dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est $I_n$ (matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Pour tout vecteur $x = x_1 + x_2$ de $E$, avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on pose :

$$F(x) = u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2)$$

1. (a) Montrer que $F$ est linéaire. Calculer $\operatorname{Ker} F$.
   (b) Montrer que $F$ est un automorphisme de $E$.
2. Soit $\mu$ une valeur propre de $F$ et $x = x_1 + x_2$ un vecteur propre associé, avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
   (a) Montrer que $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$.
   (b) Montrer que $x_1$ est un vecteur propre de $u$. Déterminer sa valeur propre associée en fonction de $\mu$.
3. Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$ et $x_1$ un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que l'équation d'inconnue $\mu \in \mathbb{R}^*$ suivante :
   $$\mu - \frac{1}{\mu} = \lambda$$
   admet deux solutions réelles distinctes $\mu_1, \mu_2$.
   (b) Montrer que $\mu_1$ et $\mu_2$ sont des valeurs propres de $F$ et donner, en fonction de $x_1$, un vecteur propre associé à chacune de ces valeurs propres.
4. Montrer que $F$ est diagonalisable.

## SOLUTION DU SUJET N° 63

1. (a) La linéarité de $F$ est donnée la linéarité des applications $u$, $f$ et $f^{-1}$, ainsi que celle des projections sur $E_1$ et $E_2$. En outre,

$$F(x)=0 \iff u(x_1)+f(x_1)+f^{-1}(x_2)=0 \iff \begin{cases} u(x_1)+f^{-1}(x_2) & =0 \\ f(x_1) & =0 \end{cases}$$

Or, $f$ est bijective, donc $x_1=0$ et, en reportant : $f^{-1}(x_2)=0$, d'où $x_2=0$ (par bijectivité de $f^{-1}$), ainsi, $x=0$. Donc $\operatorname{Ker} F=\{0\}$.

(b) Ainsi, $F$ est injective, donc bijective car $E$ est de dimension finie.

2. (a) Puisque $F(x)=\mu x$, alors $u(x_1)+f(x_1)+f^{-1}(x_2)=\mu x_1+\mu x_2$ donc, en identifiant, on a : $u(x_1)+f^{-1}(x_2)=\mu x_1$et $f(x_1)=\mu x_2$.
Si $x_1=0$, alors $\mu x_2=0$ et donc $x_2=0$ ($\mu\neq 0$ car $F$ est bijective). Par suite, $x=0$ : absurde.
Si $x_2=0$, alors $f(x_1)=0$, donc $x_1=0$ (car $f$ est bijective). Par suite, $x=0$ : absurde.

(b) D'une part, $x_1\neq 0$. D'autre part, en reprenant la deuxième égalité de la question précédente, comme $\mu\neq 0$ puisque $f$ bijective, on déduit que $x_2=\frac{1}{\mu}f(x_1)$ puis, en reportant dans la première égalité : $u(x_1)+\frac{1}{\mu}x_1=\mu x_1$ d'où $u(x_1)=\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)x_1$.

3. (a) L'équation équivaut à la suivante : $\mu^2-\lambda\mu-1=0$ (avec $\mu\neq 0$).
Le discriminant de cette équation vaut $\lambda^2+4$. Il est strictement positif, d'où la réponse.

(b) Étudions le cas de $\mu_1$ et posons $x=x_1+\frac{1}{\mu_1}f(x_1)$. Comme $x_1\neq 0$ et $\frac{1}{\mu_1}f(x_1)\in E_2$, alors $x\neq 0$. En outre,

$$F(x)=u(x_1)+f(x_1)+f^{-1}\left(\frac{1}{\mu_1}f(x_1)\right)=\lambda x_1+f(x_1)+\frac{1}{\mu_1}x_1=\mu_1 x_1+f(x_1)=\mu_1 x$$

On en déduit que $\mu_1$ est une valeur propre de $F$ et $x_1+\frac{1}{\mu_1}f(x_1)$ est un vecteur propre associé.
De même, $\mu_2$ est une valeur propre de $F$ et $x_1+\frac{1}{\mu_2}f(x_1)$ est un vecteur propre associé.

4. On note $(e_1,\dots,e_n)$ une base de vecteurs propres de $u$. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note $\lambda_i$ la valeur propre de $u$ associée à $e_i$, et on note $\mu_1^{(i)}$ et $\mu_2^{(i)}$ les solutions de l'équation $\mu-\frac{1}{\mu}=\lambda_i$. On note encore $y_i=e_i+\frac{1}{\mu_1^{(i)}}f(e_i)$ et $z_i=e_i+\frac{1}{\mu_2^{(i)}}f(e_i)$ et on considère la famille $\mathcal{C}=(y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_n)$.
D'après la question précédente, $\mathcal{C}$ est formée de vecteurs propres de $F$. Montrons que c'est une base. D'après la dimension, il suffit de montrer qu'elle est libre ; pour cela considérons $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^n a_i y_i+\sum_{i=1}^n b_i z_i=0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{i=1}^n a_i\left(e_i+\frac{1}{\mu_1^{(i)}}f(e_i)\right)+\sum_{i=1}^n b_i\left(e_i+\frac{1}{\mu_2^{(i)}}f(e_i)\right)=0$$

$$\textit{i.e.} : \underbrace{\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)e_i}_{\in E_1}+\underbrace{\sum_{i=1}^n\left(\frac{a_i}{\mu_1^{(i)}}+\frac{b_i}{\mu_2^{(i)}}\right)f(e_i)}_{\in E_2}=0 \quad \text{d'où :} \quad \sum_{i=1}^n (a_i+b_i)e_i=\sum_{i=1}^n\left(\frac{a_i}{\mu_1^{(i)}}+\frac{b_i}{\mu_2^{(i)}}\right)f(e_i)=0$$

Or, la famille $(e_1,...,e_n)$ est libre et la famille $(f(e_1),...,f(e_n))$ aussi car $f$ est bijective, donc :

$$\forall i\in[\![1,n]\!], a_i+b_i=0 \text{ et } \frac{a_i}{\mu_1^{(i)}}+\frac{b_i}{\mu_2^{(i)}}=0.$$

Comme $\mu_1^{(i)}\neq\mu_2^{(i)}$, on en déduit que : $\forall i\in[\![1,n]\!], a_i=b_i=0$.
La famille $(e_1,\dots,e_n,f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base de vecteurs propres de $F$ ; ainsi, $F$ est diagonalisable.

## Sujet n° 65

On note $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et on pose $A = C\,{}^t\!C$. Par ailleurs, on note $0_3$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Donner les valeurs de $1 + j + j^2$ et $j^3$ puis expliciter les matrices $A$ et $A^2$.
2. (a) Déterminer le rang de $A$ et en déduire son spectre.

   (b) La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

   On note $\varphi$ l'application qui à toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ associe $\varphi(M) = AMA$.
3. (a) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

   (b) Donner l'image de la matrice $A$ par $\varphi$. Qu'en déduire concernant l'endomorphisme $\varphi$ ?

   (c) Montrer que $\varphi$ n'a pas de valeur propre non nulle.

   (d) L'endomorphisme $\varphi$ est-il diagonalisable ?
4. Pour tout couple $(k, \ell)$ de $[\![1, 3]\!]^2$, on note $E_{k,\ell}$ la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la $k^{\mathrm{e}}$ ligne et de la $\ell^{\mathrm{e}}$ colonne, et on rappelle que la famille des 9 matrices $(E_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant 3}$ est une base du $\mathbb{C}$ - espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

   Pour tout $k$ de $[\![1, 3]\!]$, on note $e_k$ l'élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ dont tous les éléments sont nuls, sauf celui situé à la $k^{\mathrm{e}}$ ligne qui vaut 1. En vérifiant que, pour tout couple $(k, \ell)$ de $[\![1, 3]\!]^2$, on a $E_{k,\ell} = e_k\,{}^t e_\ell$, montrer que :

   $$\forall (k, \ell) \in [\![1, 3]\!]^2, \varphi\left(E_{k,\ell}\right) = j^{k+\ell-2} A$$
5. (a) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

   (b) Déduire des calculs faits à la question 4 une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

## Solution du sujet n° 65

1. On trouve ou on sait que $1+j+j^2=0$ et $j^3=1$ (racines cubiques de l'unité).
   Comme $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$, alors $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et après calculs, on obtient : $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.
   Grâce aux relations $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$, on trouve : $A^2 = 0_3$.
2. (a) En notant $C_1, C_2, C_3$ les colonnes de $A$, on voit, toujours grâce à la relation $j^3=1$, que $C_2 = jC_1$, $C_3 = j^2 C_1$ et comme $C_1$ n'est pas la colonne nulle, on peut conclure : $\operatorname{rg}(A) = 1$.
   Ceci prouve que $A$ n'est pas inversible, donc 0 est valeur propre de $A$. De plus, le polynôme $X^2$ est annulateur de $A$ et sa seule racine est 0 donc la seule valeur propre possible de $A$ est 0 . On peut donc conclure que $\operatorname{sp}(A) = \{0\}$.
   (b) Pour que $A$ soit diagonalisable, il faut que son seul sous-espace propre soit de dimension 3, or il n'est que de dimension 2 (étant donné que $\operatorname{rg}(A) = 1$ ) ; donc $A$ n'est pas diagonalisable.
3. (a)
   - Par stabilité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ pour le produit matriciel, $\varphi(M)$ appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   - Si l'on prend deux matrices $M$ et $N$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et un complexe $\lambda$, on a $\varphi(M+\lambda N) = A(M+\lambda N)A$, et par propriété du produit matriciel, on obtient :
     $\varphi(M+\lambda N) = AMA + \lambda ANA = \varphi(M) + \lambda\varphi(N)$
   - Ainsi, $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

   (b) On a $\varphi(A) = A^3 = A^2 A$ et comme $A^2 = 0_3$, on peut conclure : $\varphi(A) = 0_3$. La matrice $A$ n'est pas nulle et appartient au noyau de $\varphi$, donc $\varphi$ n'est pas injectif.
   (c) On a :
   $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), \varphi^2(M) = A(AMA)A = A^2 M A^2 = 0_3$, car $A^2 = 0_3$. Ceci prouve que $\varphi^2 = 0$ et ainsi le polynôme $X^2$ est annulateur de $\varphi$. Sa seule racine étant 0, on en conclut que 0 est la seule valeur propre possible de $\varphi$, et comme $\varphi$ n'est pas injectif, ceci veut dire que $\varphi$ admet 0 comme seule valeur propre donc que $\varphi$ n'a pas de valeur propre non nulle.
   (d) Si $\varphi$ était diagonalisable, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait la matrice diagonale nulle, donc $\varphi$ serait l'endomorphisme nul, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, $\varphi$ n'est pas diagonalisable
4. Comme ${}^tCe_k = j^{k-1}$ pour tout $k$, on a :

$$\varphi\left(E_{k,\ell}\right) = AE_{k,\ell}A = C{}^tCe_k{}^te_\ell C{}^tC = C\left({}^tCe_k\right)\left({}^te_\ell C\right){}^tC = j^{k-1}j^{\ell-1}C{}^tC = j^{k+\ell-2}A.$$

5. (a) On sait que $\operatorname{Im}(\varphi)$ est engendré par la famille des images par $\varphi$ des vecteurs de la base $\left(E_{k,\ell}\right)_{1\leqslant k,\ell\leqslant 3}$ et on constate, grâce à la question 4, que $\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}(A)$.
   Comme $A$ n'est pas nulle, on en déduit que $\operatorname{rg}(\varphi) = 1$ et comme $\dim\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{C})\right) = 9$, le théorème du rang permet de conclure : $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = 8$.
   (b) On va utiliser le calcul fait à la question 4) pour trouver une famille de 8 matrices de Ker $(\varphi)$. Comme $\varphi\left(E_{1,1}\right) = A$, on en déduit, par linéarité de $\varphi$ :
   $\varphi\left(E_{1,2} - jE_{1,1}\right) = \varphi\left(E_{2,1} - jE_{1,1}\right) = 0_3$ car $\varphi\left(E_{1,2}\right) = \varphi\left(E_{2,1}\right) = jA$.
   $\varphi\left(E_{1,3} - j^2E_{1,1}\right) = \varphi\left(E_{3,1} - j^2E_{1,1}\right) = 0_3$ car $\varphi\left(E_{1,3}\right) = \varphi\left(E_{3,1}\right) = j^2A$.
   $\varphi\left(E_{2,3} - E_{1,1}\right) = \varphi\left(E_{3,2} - E_{1,1}\right) = 0_3$ car $\varphi\left(E_{2,3}\right) = \varphi\left(E_{3,2}\right) = A$.
   $\varphi\left(E_{2,2} - j^2E_{1,1}\right) = \varphi\left(E_{3,3} - jE_{1,1}\right) = 0_3$ car $\varphi\left(E_{2,2}\right) = j^2A$ et $\varphi\left(E_{3,3}\right) = jA$
   Les matrices $B_1 = E_{1,2} - jE_{1,1}, B_2 = E_{2,1} - jE_{1,1}, B_3 = E_{1,3} - j^2E_{1,1}, B_4 = E_{3,1} - j^2E_{1,1}$,
   $B_5 = E_{2,3} - E_{1,1}$, $B_6 = E_{3,2} - E_{1,1}, B_7 = E_{2,2} - j^2E_{1,1}, B_8 = E_{3,3} - jE_{1,1}$ forment une famille libre (conséquence de la liberté de la famille $\left(E_{k,\ell}\right)_{1\leqslant k,\ell\leqslant 3}$), et ainsi, la famille $(B_1, \ldots, B_8)$ est une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$.