TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE

1

ALGÈBRE

Sujet 1.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne respectivement par $\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}$ et $\mathrm{Im}(M) = \{MX \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ le noyau et l'image de M.
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est involutive si $M^2 = I$ où I est la matrice identité d'ordre n.

1. On considère une matrice involutive A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(I - A)$ et $\mathrm{Ker}(I + A)$ sont supplémentaires. En déduire que A est diagonalisable.
   (b) Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \in [\![-n, n]\!]$. Étudier la parité de $\mathrm{Tr}(A)$ en fonction de celle de n.
   (c) Que peut-on dire de plus sur les sous espaces $\mathrm{Ker}(I-A)$ et $\mathrm{Ker}(I+A)$ lorsque A est aussi symétrique ($\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *est muni du produit scalaire canonique).*
2. Dans cette question, on considère deux matrices involutives A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Développer et simplifier les produits $(A + B)(A - B)$ et $(A - B)(A + B)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(AB - BA) \subset \mathrm{Im}(A + B) \cap \mathrm{Im}(A - B)$.
   (c) Prouver que $\mathrm{Im}(AB - BA) = \mathrm{Im}(A + B) \cap \mathrm{Im}(A - B)$.
3. On se place dans le cas où $n = 2$ et on considère les matrices
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = 4\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Existe-t-il $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit solution de l'équation $MZ - ZM = N_1$?
   (b) On cherche maintenant à savoir s'il existe une matrice involutive A qui vérifie $MA - AM = N_2$. Montrer que l'on a nécessairement $\mathrm{Tr}(A) = 0$. En utilisant la question 2.(c) déterminer l'ensemble des possibilités pour une telle matrice involutive A.
   (c) Si A et Z sont deux solutions de l'équation $MU - UM = N_2$ d'inconnue $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que peut on dire de la matrice $Z - A$? En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $MU - UM = N_2$.

Solution du sujet 1.1

1. (a) Avec le cours ou par vérification immédiate, on voit déjà que $\mathrm{Ker}(I-A)\cap\mathrm{Ker}(I+A)=\{0\}$. De plus, si $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on peut écrire $X=\dfrac{1}{2}\left((I+A)X+(I-A)X\right)=\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)$ avec $(I-A)X_1=(I+A)X_2=(I-A^2)X=0$, et par suite $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(I-A)+\mathrm{Ker}(I+A)$. Finalement, on a bien $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(I-A)\oplus\mathrm{Ker}(I+A)$ et le cours nous dit alors que A est diagonalisable.

   (b) Comme $A=R^{-1}DR$ avec R inversible et D diagonale, il vient $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(R^{-1}DR)=\mathrm{Tr}(DRR^{-1})=\mathrm{Tr}(D)=\dim(\mathrm{Ker}(I-A))-\dim(\mathrm{Ker}(I+A))=2\dim(\mathrm{Ker}(I-A))-n$. Si n est pair, on voit que l'ensemble des valeurs possibles pour $\mathrm{Tr}(A)$ est l'ensemble des entiers relatifs pairs de $[\![-n,n]\!]$. Lorsque n est impair, cet ensemble est celui des entiers relatifs impairs de $[\![-n,n]\!]$.

   (c) Dans ce cas les sous espaces $\mathrm{Ker}(I-A)$ et $\mathrm{Ker}(I+A)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

2. (a) Comme $A^2=B^2(=I)$, on trouve $(A+B)(A-B)=BA-AB$ et $(A-B)(A+B)=AB-BA$.

   (b) Si $Y=(AB-BA)X$, on exploite la question précédente on observe que

$$Y=(A-B)(A+B)X=-(A+B)(A-B)X\in\mathrm{Im}(A+B)\cap\mathrm{Im}(A-B),$$

   ce qui implique bien l'inclusion voulue.

   (c) On écrit $Y=(A+B)X_1=(A-B)X_2$, avec 2 (a) il vient $(A-B)Y=(AB-BA)X_1$ et $(A+B)Y=-(AB-BA)X_2$, d'où $2AY=(AB-BA)(X_1-X_2)$.
   Comme $A^2=I$, on obtient

$$2Y=A(AB-BA)(X_1-X_2)=(B-ABA)(X_1-X_2)=(BA-AB)A(X_1-X_2)\in\mathrm{Im}(AB-BA).$$

   L'inclusion réciproque est donc prouvée et par suite $\mathrm{Im}(AB-BA)=\mathrm{Im}(A+B)\cap\mathrm{Im}(A-B)$.

3. (a) Supposons qu'il existe $Z\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant cette équation, en appliquant la trace à cette égalité on obtient $0=\mathrm{Tr}(MZ)-\mathrm{Tr}(ZM)=\mathrm{Tr}(N_1)=1$ ce qui est absurde. Il n'y a donc pas de solution.

   (b) D'après la question 1. (b), $\mathrm{Tr}(A)\in\{-2,0,2\}$.
   Supposons que $\mathrm{Tr}(A)=-2$ (resp. $\mathrm{Tr}(A)=2$), comme A est diagonalisable (cf. 1. (a)) et que $Sp(A)\subset\{-1,1\}$, la seule possibilité est $A=-I$ (resp. $A=I$) ce qui est impossible d'après l'équation. On a donc nécessairement $\mathrm{Tr}(A)=0$. Avec la question 2. (c), on voit que l'on doit avoir $\mathrm{Im}(A+M)\cap\mathrm{Im}(A-M)=\mathrm{Im}(MA-AM)=\mathrm{Im}(N_2)=\mathrm{Vect}(1,-1)$, ce qui implique que l'une des deux matrices $A+M$ ou $A-M$ est non inversible et non nulle.
   Par suite, on a nécessairement $\mathrm{Im}(A+M)=\mathrm{Vect}(1,-1)$ ou $\mathrm{Im}(A+M)=\mathrm{Vect}(1,-1)$.
   Si $\mathrm{Im}(A+M)=\mathrm{Vect}(1,-1)$ (resp.$\mathrm{Im}(A-M)=\mathrm{Vect}(1,-1)$), la somme des coefficients de chaque colonne de $A+M$ (resp. $A-M$) est nulle et comme $\mathrm{Tr}(A)=0$ il en résulte que l'on peut écrire A avec un seul paramètre que l'on détermine facilement en calculant par exemple le coefficient $(MA-AM)_{1,1}$.
   La vérification que les deux matrices trouvées sont bien involutives est triviale.
   L'ens. des A involutives vérifiant $MA-AM=N_2$ est donc $\left\{\begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}\right\}$.

   (c) Si A et Z sont deux solutions se l'équation $MU-UM=N_2$, on observe que $M(Z-A)-(Z-A)M=0$ et par suite que $Z-A$ appartient à l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices qui commutent avec M que l'on détermine facilement. En prenant pour A l'une des deux matrices trouvées précédemment, il en résulte que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $MU-UM=N_2$ est donné par $\mathcal{S}=A+\mathcal{C}$.
   Finalement, on trouve

$$\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}2+s&1+t\\-3+t&-2+s\end{pmatrix}\mid(s,t)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Sujet 1.2

1. Soit P un polynôme de degré $k > 0$ et de coefficient dominant 1 tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ xP'(x) = kP(x)$.
   (a) Montrer que 0 est une racine de P.
   (b) En déduire qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $r \leqslant k$ et Q un polynôme ne s'annulant pas en 0 tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^r Q(x)$.
   (c) En conclure que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^k$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice carrée d'ordre n non nulle.

2. (a) On note $\mathcal{Z}(A)$ l'ensemble des polynômes non nuls annulateurs de A. Justifier l'existence de $\min\limits_{P \in \mathcal{Z}(A)} \deg(P)$. On note r ce minimum.
   (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme annulateur de A de degré r et de coefficient dominant 1. **On note Π_A ce polynôme et on l'appelle le polynôme minimal de A.**

3. On suppose dans cette question qu'il existe une matrice carrée B d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $AB - BA = A$.
   (a) Montrer par l'absurde que A n'est pas inversible.
   (b) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $kA^k = A^k B - BA^k$.
   (c) En déduire que $A\Pi_A'(A) = 0$.
   (d) En conclure que $A^r = 0$.

4. On suppose maintenant qu'il existe B et C carrées d'ordre n telles que $AB - BA = A + C$ et $BC = CB$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(A + C)^m = 0$.

Solution du sujet 1.2

1. (a) On évalue la relation donnée en $x = 0$, ce qui donne $0P'(0) = kP(0)$ avec k non nul, d'où $P(0) = 0$.
   (b) Soit r l'ordre de multiplicité de 0 pour le polynôme P. Alors $r \in [\![1, k]\!]$ et il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(x) = x^r Q(x)$, avec $Q(0) \neq 0$.
   (c) On a en dérivant : $xP'(x) = x(rx^{r-1}Q(x) + x^r Q'(x)) = rx^r Q(x) + x^{r+1}Q'(x)$.
   D'où, d'après l'hypothèse, $rx^r Q(x) + x^{r+1}Q'(x) = kx^r Q(x)$.
   On simplifie par x^r. En 0, cela donne $rQ(0) = kQ(0)$, d'où $k = r$ et puisque P est unitaire : $P(x) = x^k$.
2. (a) $\{deg(P), P \in \mathcal{Z}(A)\}$ est non vide et inclus dans $\mathbb{N}^*$, donc cet ensemble admet un minimum.
   (b) Unicité : par l'absurde, si P et Q sont deux polynômes disctints de degré r et unitaires, alors $P - Q$ est non nul de degré inférieur ou égal à $r - 1$ et annulateur de A, ce qui contredit la minimalité de r.
   Existence : si P est un polynôme non nul de degré r annulateur de A et de coefficient dominant α, alors $\frac{1}{\alpha}P$ convient.
3. (a) Si A est inversible, alors $ABA^{-1} - B = I_n$, d'où $tr(ABA^{-1} - B) = n$, c'est à dire $tr(ABA^{-1}) - tr(B) = 0 = n$, ce qui est absurde.
   (b) Par récurrence sur k. Initialisation pour $k = 0$ triviale. Hérédité : on a
   $$\begin{aligned} A^{k+1}B - BA^{k+1} &= A(A^kB - BA^k) + ABA^k - BA^{k+1} = AkA^k + (AB - BA)A^k = kA^{k+1} + A^{k+1} \\ &= (k+1)A^{k+1}. \end{aligned}$$
   (c) Posons $\Pi_A(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} \alpha_k x^k$. Alors $\Pi'_A(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} k\alpha_k x^{k-1}$, d'où $x\Pi'_A(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} k\alpha_k x^k$.
   Ainsi :
   $$\begin{aligned} A\Pi'_A(A) &= \sum_{k=1}^{r} k\alpha_k A^k = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (A^kB - BA^k) = \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k A^k\right)B - B\left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k A^k\right) \\ &= \Pi_A(A)B - B\Pi_A(A) = 0. \end{aligned}$$
   (d) Par unicité de π_A, on a : $\Pi_A(x) = \frac{1}{r}x\Pi'_A(x)$, soit $r\Pi_A(x) = x\Pi'_A(x)$, d'où $\Pi_A(x) = x^r$, en utilisant la question 1.
4. Posons $A' = A + C$, alors $A'B - BA' = (A + C)B - B(A + C) = AB + CB - BA - BC = AB - BA = A'$. D'où si m est le degré du polynôme minimal, alors $A'^m = 0$, c'est à dire $(A + C)^m = 0$.

Sujet 1.3

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux non nuls de E.

1. Montrer que pour tout x de E, on a $||p(x)|| \leqslant ||x||$.
2. En déduire que si λ est une valeur propre de $p \circ q$, on a $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Montrer que pour tout x de E, on a $\langle p(x), x\rangle = ||p(x)||^2$.
   En déduire que si λ est une valeur propre de $p \circ q$, on a $\lambda \geqslant 0$.
4. Le but de cette question est de montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
   (a) Soit $f = p \circ q \circ p$.
   Montrer que l'endomorphisme f de E est symétrique et que $\mathrm{Im}(p)$ est stable par f.
   (b) Montrer qu'il existe une base de $\mathrm{Im}(p)$ formée de vecteurs propres de $p \circ q$.
   (c) Soit G, H deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(G + H)^\perp = G^\perp \cap H^\perp$.
   (d) Soit $F = (\mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Im}(p))^\perp$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(q) + F$. Déterminer $p \circ q(x)$.
   (e) Conclure.

Solution du sujet 1.3

1. Comme il s'agit d'une projection orthogonale, $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux d'où en appliquant le théorème de Pythagore
$$||p(x)||^2 \leqslant ||p(x)||^2 + ||x - p(x)||^2 = ||x||^2.$$
2. Soit λ une valeur propre de $p \circ q$, et x un vecteur propre associé. On a $p(q(x)) = \lambda x$. Donc
$$||p \circ q(x)||^2 = ||p(q(x))||^2 \leqslant ||q(x)||^2 \leqslant ||x||^2.$$
D'où $|\lambda|\ ||x||^2 \leqslant ||x||^2$ et comme x est non nul, $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Pour tout x de E, $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux.
Donc $\langle p(x), x - p(x)\rangle = 0$ soit $\langle p(x), x\rangle = ||p(x)||^2$.
Soit λ une valeur propre de $p \circ q$, et x un vecteur propre associé. On a $\langle p(q(x)), q(x)\rangle = ||p(q(x))||^2$ donc $\lambda\langle x, q(x)\rangle = ||p(q(x))||^2$ donc $\lambda||q(x)||^2 = \lambda^2||x||^2$.
Si $\lambda \neq 0$ alors comme x est non nul, on a $||q(x)||^2 = \lambda||x||^2$ d'où $\lambda > 0$. On en conclut que $\lambda \geqslant 0$.
4. Le but de cette question est de montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
   (a) Soit x et y deux vecteurs, on a puisque p et q sont des endomorphismes symétriques
$$\langle f(x), y\rangle = \langle p \circ q \circ p(x), y\rangle = \langle q \circ p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), q \circ p(y)\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$
   Ainsi f est un endomorphisme symétrique sur E.
   De plus soit x de $\mathrm{Im}(p)$, $f(x) = p(q \circ p(x)) \in \mathrm{Im}(p)$, donc $\mathrm{Im}(p)$ est stable par f.

   (b) On applique le théorème spectral à l'endomorphisme f restreint à $\mathrm{Im}(p)$. Il existe une base de $\mathrm{Im}(p)$ formée de vecteurs propres de f. Par ailleurs tout vecteur propre de f dans $\mathrm{Im}(p)$ est aussi un vecteur propre de $p \circ q$ puisque pour tout vecteur x de $\mathrm{Im}(p)$, $p(x) = x$. Il existe donc une base de $\mathrm{Im}(p)$ formée de vecteurs propres de $p \circ q$.

   (c) Soit G, H deux sous-espaces vectoriels de E. Soit $x \in G^\perp \cap H^\perp$ et soit $y \in G + H$. Ainsi
$$\exists u \in G, \exists v \in H, y = u + v.$$
   Donc $< x, y >=< x, u > + < x, v >= 0$. D'où $x \in (G + H)^\perp$. Ce qui donne une première inclusion. Réciproquement, on a $G \subset G + H$ et $H \subset G + H$ donc $(G + H)^\perp \subset G^\perp$ et $(G + H)^\perp \subset H^\perp$ d'où la deuxième inclusion.

   (d) D'après la question précédente, on a
$$F = (\mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Im}(p))^\perp = \mathrm{Ker}(q)^\perp \cap \mathrm{Im}(p)^\perp = \mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p).$$
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(q) + F$, $x = u + v$ avec $u \in \mathrm{Ker}(q)$ et $v \in F = \mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p)$. On a
$$p \circ q(x) = p(q(u)) + p(q(v)) = 0 + p(q(v)) = p(v) = 0.$$

   (e) On a
$$F \oplus (\mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Im}(p)) = E.$$
   d'où
$$(F + \mathrm{Ker}(q)) + \mathrm{Im}(p) = E.$$
   Ce qui permet de conclure que $p \circ q$ est diagonalisable.

Sujet 1.4

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \geqslant 2$ et on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{L}\big(E, \mathbb{R}\big)$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.
On note également $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel de E des matrices symétriques, respectivement antisymétriques.

1. Montrer que $\dim(E) = \dim(F)$.
2. Soit $\varphi : E \to E$ l'application définie par : $A \mapsto {}^tA$.
   Calculer $\varphi \circ \varphi$ et en déduire les sous-espaces propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
3. On définit $G : E \to F$ comme l'application qui, à toute matrice $M \in E$, associe l'application $G(M)$ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $G(M) : A \mapsto \mathrm{Tr}(MA)$.
   Justifier que G est un isomorphisme de E sur F.

On considère dans la suite un élément non nul u de F, et on note ψ l'application de E dans E définie par : $\psi : A \mapsto u(A)\, I_n$.

4. (a) Justifier qu'il existe une unique matrice $M \in E$ telle que $\forall\, A \in E\,,\ \psi(A) = \mathrm{Tr}(MA)\, I_n$.
   (b) Déterminer le rang de ψ.
   (c) Calculer $\psi \circ \psi$ en fonction de M.
   (d) Montrer que $\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\psi) \neq \{0\} \iff \mathrm{Tr}(M) = 0$.
   (e) En déduire que ψ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.
5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice M pour que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.
6. Dans cette question, on suppose que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.
   On rappelle que cela implique $I_n \notin \mathrm{Ker}(\psi)$.
   (a) Que vaut $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{Ker}(\psi)$? En déduire la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$, puis que
   $$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus \big[\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)\big]\,.$$
   (b) Déterminer $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$.
   (c) En déduire que l'endomorphisme $f = \varphi + \psi$ est diagonalisable. On précisera ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

Solution du sujet 1.4

1. Étant donné une base $\mathcal{B}$ de E, l'application $f \mapsto M_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme de F sur $\mathcal{M}_{n^2,1}(\mathbb{R})$. Donc $\dim F = \dim \mathcal{M}_{n^2,1}(\mathbb{R}) = n^2 = \dim E$.
2. On a $\varphi^2 = \mathrm{Id}_E$ donc $\mathrm{Sp}\,(\varphi) \subset \{-1, 1\}$; puis $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_E) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id}_E) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ de somme (directe) E (à justifier), donc φ diagonalisable.
3. L'application G est linéaire ; $\forall i, j$, $[G(M)](E_{i,j}) = m_{j,i}$, donc $G(M) = 0 \implies M = 0$ d'où $\mathrm{Ker}\, G = \{0\}$, et par égalité des dimensions démontrée en question 1, G est un isomorphisme.
4. (a) D'après 2. $M = G^{-1}(u)$.
   (b) $u \neq 0$ entraîne $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(I_n)$ donc $\mathrm{rg}(\psi) = 1$.
   (c) L'application ψ est linéaire et $\psi^2(A) = u(A)\,\psi(I_n) = u(A)\,\mathrm{Tr}(M) I_n$ donc $\psi^2 = (\mathrm{Tr} M)\,\psi$.
   (d) On a $\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\psi) \neq \{0\} \iff I_n \in \mathrm{Ker}(\psi) \iff 0 = \psi(I_n) = \mathrm{Tr}(M)\, I_n \iff \mathrm{Tr} M = 0$.
   (e)
   - Si $\mathrm{Tr} M \neq 0$, alors I_n est vecteur propre de ψ associé à $\mathrm{Tr} M \neq 0$; comme $\mathrm{Ker}(\psi)$ est un sous-espace propre de dimension $n^2 - 1$ d'après 3.b), on a ψ diagonalisable.
   - Si $\mathrm{Tr}(M) = 0$, alors $\psi^2 = 0$, donc 0 est seule valeur propre de $\psi \neq 0$ (car $u \neq 0$), donc ψ non diagonalisable.
5. Par bijectivité de G,

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi \iff \forall\, A\,,\ \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}({}^t AM) = \mathrm{Tr}({}^t MA) = \mathrm{Tr}(A\, {}^t M) \iff M = {}^t M \iff M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

6. (a) Comme $I_n \notin \mathrm{Ker}(\psi)$ est un hyperplan de E, mais $I_n \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{Ker}(\psi) = E$.
   Par la formule de Grassmann, on a alors

$$\dim\big[\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)\big] = \dim\big[\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big] + \dim\big[\mathrm{Ker}(\psi)\big] - \dim(E) = \frac{n\,(n+1)}{2} - 1$$

   Comme $\mathrm{Vect}(I_n)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$ sont d'intersection nulle, leur somme est directe et incluse dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, puis égale par les dimensions.
   (b) On a

$$A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \implies \varphi \circ \psi(A) = \psi \circ \varphi(A) = -\psi(A) \implies \psi(A) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Im}(\psi) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Vect}(I_n) = \{0\}$$

   donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$, soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   (c) Alors

$$E = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus \big[\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\psi)\big] \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

   qui sont des sous-espaces propres de f associés respectivement à $1 + \mathrm{Tr}(M)$, 1 et -1 ; d'où f est diagonalisable.

Sujet 1.5

Dans cet exercice n est un entier supérieur à 2. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire et $||\cdot||$ la norme euclidienne associée.
Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormée de E.
On dit qu'une application $f : E \to E$ vérifie la relation (P) lorsque :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall u, v \in E, \langle f(u), f(v)\rangle = \alpha^2 \langle u, v\rangle \quad (P)$$

Attention : l'application f n'est à priori pas supposée linéaire .

1. Montrer que si f vérifie (P) alors f est un endomorphisme de E.
   (on pourra s'intéresser d'abord à $||f(u + \lambda v) - f(u) - \lambda f(v)||$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.)
2. Montrer que $f : E \to E$ vérifie (P) si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in E$, on a :
$$||f(u)|| = \alpha||u||.$$
3. Soit f vérifiant (P). En étudiant les valeurs propres de f, montrer que f est bijectif.
4. Soit f vérifiant (P). On note A la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$, montrer : ${}^tAA = \alpha^2 I_n$
5. Montrer $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie la propriété (P) si et seulement si :
$$\forall (u, v) \in E^2, \langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f(u), f(v)\rangle = 0$$
6. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On désigne par p la projection orthogonale sur F.
   Soit $\alpha > 0$ Soit s l'endomorphisme de E défini par : $s = \alpha(2p - \mathrm{id}_E)$
   Montrer que s vérifie (P) et que s est diagonalisable.

Solution du sujet 1.5

1. On a

$$\begin{aligned}
&||f(u+\lambda v)-f(u)-\lambda f(v)||^2\\
&=||f(u+\lambda v)||^2+||f(u)||^2+\lambda^2||f(v)||^2-2\langle f(u+\lambda v,f(u)\rangle-2\langle f(u+\lambda v,\lambda f(v)\rangle+2\lambda\langle f(u),f(v)\rangle\\
&=\alpha^2||u+\lambda v||^2+\alpha^2||u||^2+\lambda^2\alpha^2||v||^2-2\alpha^2\langle u+\lambda v,u\rangle-2\alpha^2\langle u+\lambda v,\lambda v\rangle+2\lambda\alpha^2\langle u,v\rangle\\
&=\alpha^2||u||^2+\lambda^2\alpha^2||v||^2-\alpha^2||u+\lambda v||^2+2\lambda\alpha^2\langle u,v\rangle=0
\end{aligned}$$

   Donc f est un endomorphisme de E.
2. En prenant $v=u$ dans (P), on a : $||f(u)||^2=\alpha^2||u||^2$, soit $||f(u)||=\alpha||u||$.
   Réciproquement, en utilisant une identité de polarisation, et comme f est linéaire, on a : $\forall u,v\in E$,

$$\langle f(u),f(v)\rangle=\frac{1}{2}(||f(u+v)||^2-||f(u)||^2-||f(v)||^2)=\alpha^2\frac{1}{2}(||u+v||^2-||u||^2-||v||^2)=\alpha^2\langle u,v\rangle$$

3. Soit u un vecteur propre associé à la valeur propre λ, $u\neq 0_E$. On a :

$$||f(u)||=\alpha||u||\Rightarrow|\lambda|.||u||=\alpha||u||\Rightarrow|\lambda|=\alpha>0.$$

   Donc 0 n'est pas valeur propre de f donc f est bijectif.
4. La propriété (P) se traduit matriciellement par : ${}^t(AU)(AV)=\alpha^2\ {}^tUV$, soit ${}^tU({}^tAA)V=\alpha^2\ {}^tUV$, (avec U,V matrices des coordonnées de u,v dans la base $\mathcal{B}$).
   Si on note β_{ij} l'élément générique de la matrice ${}^tAA$ et en prenant $U={}^t\ e_i$ et $V={}^t\ e_j$ on obtient

$$\forall i,j\in[\![1,n]\!]\ \beta_{i,j}=\alpha^2.\delta_{i,j}\ \text{soit : }{}^tAA=\alpha^2\mathrm{Id}_n$$

5. Supposons la propriété (P). Soit $(u,v)\in E^2$. On a

$$\langle u,v\rangle=0\Leftrightarrow\alpha^2\langle f(u),f(v)\rangle=0\Leftrightarrow\langle f(u),f(v)\rangle=0,\ \text{car }\alpha\neq 0$$

   Réciproquement supposons que cette équivalence est vraie.
   Alors la famille $\{f(e_1),\cdots,f(e_n)\}$ est orthogonale (car les $e_1,\dots,e_n$ le sont).
   De plus, comme $\langle e_i+e_j,e_j-e_j\rangle=||e_i||^2-||e_j||^2=1-1=0$, on en déduit que $\langle f(e_i+e_j),f(e_i-e_j)\rangle=0$.
   Par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de f, on a donc :

$$||f(e_i)||^2-||f(e_j)||^2=\langle f(e_i)+f(e_j),f(e_i)-f(e_j)\rangle=\langle f(e_i+e_j),f(e_i-e_j)\rangle=0.$$

   Ainsi $||f(e_i)||$ est indépendant de i ; posons $\alpha=||f(e_i)||$.
   Alors la famille $\{\frac{1}{\alpha}f(e_1),\cdots,\frac{1}{\alpha}f(e_n)\}$ est une base orthonormée de E *i.e.* :

$$\forall i,j\in[\![1,n]\!],\langle f(e_i),f(e_j)\rangle=\alpha^2\langle e_i,e_j\rangle.$$

   Cette inégalité s'étend alors par linéarité à tous vecteurs u,v de E *i.e.* f vérifie (P)
6. L'endomorphisme p étant un projecteur orthogonal, il est symétrique, donc s aussi (combinaison linéaire d'endomorphismes symétriques) et donc diagonalisable d'après le théorème spectral.
   Pour montrer que s (linéaire) vérifie (P) on utilise la caractérisation de la question précédente :

$$\langle s(u),s(v)\rangle=0\iff\langle 2p(u)-u,2p(v)-v\rangle=0\iff 4\langle p(u),p(v)\rangle-4\langle p(u),v\rangle+4\langle u,v\rangle=0,$$

   où l'on a utilisé que p est symétrique *i.e.* $\langle p(u),v\rangle=\langle u,p(v)\rangle$.
   Et, comme $p^2=p$, on a : $\langle p(u),p(v)\rangle=\langle p^2(u),v\rangle=\langle p(u),v\rangle$.
   D'où l'équivalence : $\langle s(u),s(v)\rangle=0\iff\langle u,v\rangle=0$.

Sujet 1.6

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace vectoriel de F des fonctions polynomiales et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n le sous-espace vectoriel de E des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

On considère l'endomorphisme $D: f \mapsto D(f)$ de F, où la fonction $D(f)$ est définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad [D(f)](x) = f(x+1) - f(x)\,.$$

1. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est stable par D.
   On note alors Δ_n l'endomorphisme de E_n induit par D.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le noyau et l'image de Δ_n.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Δ_n.
   L'endomorphisme Δ_n est-il diagonalisable ?
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que pour tout $Q \in E_{n-1}$, il existe un unique $P \in E_n$ tel que $\Delta_n(P) = Q$ et $P(0) = 0$.
   (e) Expliciter P lorsque $Q(x) = x^2$.
   Utiliser P pour retrouver la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (a) Soit $\varphi: \,]0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction, et $g \in F$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in F$ telle que $D(f) = g$ et $\forall\, x \in \,]0,1]\,,\ f(x) = \varphi(x)$.
   (b) L'endomorphisme D est-il surjectif ?
   (c) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in F$, différente de la fonction nulle, telle que $D(f) = \lambda\, f$.

Solution du sujet 1.6

1. (a) On a $\forall\, n$, $P \in E_n \implies D(P) = P(x+1) - P(x) \in E_n$.

   (b) L'espace $\mathrm{Im}(\Delta_n)$ est engendré par les polynômes $(\Delta_n(x^j))_{0 \leqslant j \leqslant n}$ qui valent :
   $$\Delta_n(x^0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, j \in [\![1, n]\!]\,, \quad \Delta_n(x^j) = (x+1)^j - x^j = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} x^i \in E_{n-1}$$
   La famille $(\Delta_n(x^j))_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est de degrés croissants, donc libre, donc c'est une base de $\mathrm{Im}(\Delta_n)$ qui est donc de dimension n. Ainsi, par égalité des dimensions, on a $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta_n) = E_{n-1}.}$

   De plus on a clairement $E_0 \subset \mathrm{Ker}(\Delta_n)$. Et par le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(\Delta_n) = 1$.

   D'où, par égalité des dimensions, on a : $\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta_n) = E_0.}$

   Autre idée : utiliser la matrice de Δ_n dans la base $(x^j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$.

   (c) La matrice A de Δ_n dans la base canonique de E_n est triangulaire supérieure stricte non nulle, donc 0 est l'unique valeur propre et E_0 l'espace propre associé ; A est non diagonalisable.

   (d) On a $Q \in E_{n-1} = \mathrm{Im}(\Delta_n) \implies \exists P \in E_n\,,\ \Delta_n(P) = Q$; alors $P_1(x) = P(x) - P(0)$ convient, puisque Δ_n est nul sur E_0.

   Si P_2 est une (autre) solution, alors $P_2 - P_1 \in \mathrm{Ker}(\Delta_n) = E_0$, donc P_1 et P_2 diffèrent d'une constante, qui est nulle puisqu'ils ont même valeur en 0.

   (e) Le polynôme cherché $A(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x$ vérifie
   $$\left\{\begin{array}{rcl} 3a & = & 1 \\ 3a + 2b & = & 0 \\ a + b + c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1/3 \\ b & = & -1/2 \\ c & = & 1/6 \end{array}\right.$$
   d'où
   $$A(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{x(x-1)\,(2x-1)}{6}$$
   puis
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Big[A(k+1) - A(k)\Big] = A(n+1) - A(1) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

2. (a) Si f est solution, on a par récurrence
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall\, x \in\,]n, n+1]\ , \quad f(x) = \varphi(x-n) + \sum_{k=1}^{n} g(x-k)$$
   d'où au plus une solution, et on vérifie qu'elle convient.

   (b) D'après a), D est surjective.

   (c) En prenant $\varphi = 1$, on a par récurrence comme ci-dessus,
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall\, x \in\,]n, n+1]\ , \quad f(x) = (\lambda+1)^n$$
   qui vérifie bien
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*\,, \quad f(x+1) = (\lambda+1)\,f(x) \quad \text{d'où} \quad [D(f)](x) = f(x+1) - f(x) = \lambda\,f(x)\,.$$

Sujet 1.7

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la transposée de la matrice A.
On admet que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\perp = (\mathrm{Vect}(M))^\perp$, que l'on appelle l'orthogonal de M.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\Phi_A : M \to {}^tAMA$.

1. Montrer que $M^\perp$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
2. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\Phi_A \circ \Phi_B = \Phi_{BA}$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer que Φ_A est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que la restriction de Φ_A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ induit un isomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
5. Soit A une matrice orthogonale d'ordre n. Montrer que $P \in M^\perp$ si et seulement si $\Phi_A(P) \in (\Phi_A(M))^\perp$.
6. On suppose dans cette question que A est diagonalisable. Montrer que Φ_A est diagonalisable.
7. Réciproquement, on suppose que Φ_A est diagonalisable et que A admet une valeur propre non nulle. Montrer que A est diagonalisable.

Solution du sujet 1.7

1. Question de cours et $M^\perp$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On vérifie la linéarité de Φ_A.
3. Pour toute matrice M, $(\Phi_A \circ \Phi_B)(M) = {}^tA({}^tBMB)A = {}^t(BA)MBA = \Phi_{BA}(M)$.
4. Par la question précédente, comme $\Phi_{I_n} = I_{\mathcal{M}n(\mathbb{R})}$, on a Φ_A bijective (et $(\Phi_A)^{-1} = \Phi_{A^{-1}}$).
Autre idée : utiliser le noyau et la dimension finie.
Si $M = {}^tM$, alors ${}^t(\Phi_A(M)) = {}^tA^tMA = \Phi_A(M)$. Cela signifie que $\Phi_A : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Comme Φ_A est injective, sa restriction à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$aussi, donc elle est bijective (la dimension est finie).
5. La relation $\Phi_A(P) \in (\Phi_A(M))^\perp$ est équivalente à
$$0 = \mathrm{Tr}({}^tA^tPA^tAMA) = \mathrm{Tr}({}^tA^tPMA) = \mathrm{Tr}({}^tPMA^tA) = \mathrm{Tr}({}^tPM)$$
6. Soit $(X_1, \dots X_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de ${}^tA$ associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1,]\!]$, on pose $M_{i,j} = X_i{}^tX_j$.
   - La matrice $M_{i,j}$ est de rang 1 (donc non nulle) puisqu'aucun des vecteurs propres de A n'est nul.
   - Comme $AX_i = \lambda_i X_i$, on a $\Phi_A(M_{i,j}) = {}^tAX_i{}^tX_jA = \lambda_i\lambda_j X_i{}^tX_j$. Ainsi les matrices $(M_{i,j})$ sont des vecteurs propres de Φ_A.
   - Il reste à montrer que la famille $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est libre. Soit $(a_{i,j})$ une famille de réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}M_{i,j} = 0$. Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$
$$0 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}M_{i,j}(X_k) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}X_i({}^tX_jX_k) = \sum_i\left(\sum_j a_{i,j}({}^tX_jX_k)\right)X_i$$
La famille (X_i) est une base ; donc pour tout $(i,k) \in [\![1, n]\!]^2$, $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}({}^tX_jX_k) = 0$.
Le vecteur ligne $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}{}^tX_j$ est orthogonal à tout l'espace : il est nul et $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}X_j = 0$.
Ainsi pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = 0$.
7. Soit $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, avec $\lambda \neq 0$. Considérons l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par
$$\varphi : M \to MX$$
Cette application est surjective ; en effet, soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe une matrice M telle que $MX = Y$: par exemple, on complète X en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et M est la matrice dans la base canonique de l'application qui envoie X sur Y et les autres vecteurs sur le vecteur nul.
Soit $(M_{i,j})$ une base de vecteurs propres de Φ_A. Par la surjectivité, la famille $(\varphi(M_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On en extrait une base $(M_1X, \dots, M_nX)$.
Notons λ_i les valeurs propres de Φ_A correspondantes aux M_i, c'est-à-dire que ${}^tAM_iAX = \lambda_iM_iX$. Or $AX = \lambda X$. Donc (puisque $\lambda \neq 0$) :
$${}^tAM_iAX = \lambda_iM_iX \Leftrightarrow \lambda^tA(M_iX) = \lambda_iM_iX \Leftrightarrow {}^tA(M_iX) = \frac{\lambda_i}{\lambda}M_iX$$
Ainsi, la matrice ${}^tA$ est diagonalisable (dans la base $(M_1X, \dots, M_nX)$). Et donc sa transposée A aussi.

Sujet 1.8

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soient g, h deux endomorphismes de E.
   Soit alors l'application $\mathrm{Ker}(g \circ h) \xrightarrow{\varphi} E$ définie par :
   $$\forall u \in \mathrm{Ker}(g \circ h),\ \varphi(u) = h(u).$$
   (a) Comparer $\mathrm{Im}\,\varphi$ et $\mathrm{Ker}\,g$.
   (b) En déduire que $\dim\left(\mathrm{Ker}(g \circ h)\right) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,h) + \dim(\mathrm{Ker}\,g)$.

On considère désormais un endomorphisme f de E.

2. On suppose que f est diagonalisable. Montrer qu'il existe p nombres $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{R}$ *distincts* (avec $p \in \mathbb{N}^*$) tels que le polynôme $P = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$ soit un polynôme P annulateur de f.
3. Réciproquement, on suppose qu'il existe p nombres $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{R}$ *distincts* tels que le polynôme $P = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$ soit un polynôme annulateur de f.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{Ker}(f - r_i \mathrm{Id}_E) \geqslant n$.
   (b) Montrer que f est diagonalisable.
4. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que si E_0 est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors l'endomorphisme $f_{|E_0}$ de E_0 induit par f est, lui aussi, diagonalisable.
5. Dans cette question, E est un espace vectoriel de dimension 3 et f est un endomorphisme diagonalisable de E dont l'ensemble des valeurs propres est formé de deux réels distincts λ et μ.
   Déterminer tous les sous-espace vectoriels de E stables par f.

Solution du sujet 1.8

1. (a) Pour tout $u \in \operatorname{Im}\varphi$, il existe $v \in \operatorname{Ker}(g \circ h)$ tel que $u = h(v)$.
   Donc $g(u) = (g \circ h)(v) = 0$ *i.e.* $u \in \operatorname{Ker} g$. Ainsi $\boxed{\operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Ker} g.}$

   (b) Le $\boxed{\text{théorème du rang pour } \varphi}$ donne : $\dim(\operatorname{Ker}(g \circ h)) = \dim(\operatorname{Im}\varphi) + \dim(\operatorname{Ker}\varphi)$.
   Or, par croissance de la dimension, la question précédente donne $\dim(\operatorname{Im}\varphi) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} g)$.
   Et, comme φ est une restriction de h, on a $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker} h$, donc $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} h)$.

2. Si $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres *distinctes* de f, alors $P(x) = (x - r_1) \cdots (x - r_p)$ convient, puisque $P(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \operatorname{diag}(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) = 0$, si $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est la matrice de f dans une base de vecteurs propres (car alors $\lambda_i \in \{r_1, \ldots, r_p\}$ pour tout i).

3. (a) $\boxed{\text{Par récurrence finie sur } k \in [\![1, p]\!], \text{ avec question 1b,}}$ on montre que :

$$\sum_{i=1}^{k} \dim\Big(\big(\operatorname{Ker}(f - r_i \operatorname{Id}_E)\big)\Big) \geqslant \dim\Big(\operatorname{Ker}\big((f - r_1 \operatorname{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - r_k \operatorname{Id}_E)\big)\Big).$$

   Or, pour $k = p$, comme P est annulateur de f, on a $\dim\Big(\operatorname{Ker}\big((f - r_1 \operatorname{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - r_k \operatorname{Id}_E)\big)\Big) = n.$

   (b) Comme la somme des dimensions des sous espaces propres $\operatorname{Ker}(f - r_i \operatorname{Id}_E)$ dépasse n et que ces sous-espaces sont toujours en somme directe, $\boxed{\text{les sous-espaces propres de } f \text{ sont supplementaires dans } E.}$
   Donc f est diagonalisable.

4. D'après la $\boxed{\text{question 2}}$, il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples.
   Alors ce polynôme est aussi annulateur de $f_{|E_0}$, puisque $\big(P(f_{|E_0})\big)(u) = \big(P(f)\big)(u)$ pour tout $u \in E_0$.
   Donc, d'après la $\boxed{\text{question 3b appliquée à } f_{|E_0},}$ l'endomomorphisme $f_{|E_0}$ est diagonalisable.

5. Comme f est diagonalisable, on a $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E) = 3$.
   Quitte à échanger λ et μ, on peut supposer que $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) = 2$ et $\dim \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E) = 1$.
   Tout sous-espace propre de f est stable par f, voire tout sous-espace d'un sous-espace propre est stable.
   Par ailleurs, la somme de deux sous-espaces stables est stable.
   Donc, en triant selon la dimension, cela donne déjà les sous-espaces propres suivants :

   - dimension 0 : $\boxed{\{0\};}$
   - dimension 1 : $\boxed{\operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E),}$ $\boxed{\text{toute droite vectorielle incluse dans } \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E);}$
   - dimension 2 : $\boxed{\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E);}$
     tout $\boxed{\operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E) \oplus D,}$ où D est une droite incluse dans $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$;
   - dimension 3 : $\boxed{E.}$

   Montrons qu'il n'y en a pas d'autres ; les dimensions 0 et 3 sont évidentes.
   Soit E_0 un sous-espace stable de dimension 1 ou 2, alors, d'après la question 4, $f_{|E_0}$ est diagonalisable.
   De plus les vecteurs propres de $f_{|E_0}$ sont des vecteurs propres de f, donc E_0 possède une base formée de vecteurs propres de f.
   Si E_0 est de dimension 1, alors forcément $E_0 = \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E)$ ou $E_0 \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$.
   Si E_0 est de dimension 2, alors forcément $E_0 = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ ou $E_0 = \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_E) \oplus D$, où D est une droite vectorielle incluse dans $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

Sujet 1.9

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_m[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à m.

1. (a) Expliciter la matrice $Q \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tous U et V deux vecteurs colonne de $\mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées respectives $(u_n)_{0 \leqslant n \leqslant m}$ et $(v_n)_{0 \leqslant n \leqslant m}$, on ait :

$$\forall\, n \in [\![0, m]\!]\,, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} v_k \right] . \tag{1.1}$$

Justifier que Q est inversible.

(b) Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$ défini par, pour tout $P \in \mathbb{R}_m[X]$, $T(P)(X) = P(X+1)$. Déterminer la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$. En déduire l'inverse de Q.

(c) En déduire, si U, V vérifient (1), alors :

$$\forall\, n \in [\![0, m]\!]\,, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k \right] . \tag{1.2}$$

Soit φ l'application définie sur E par :

$$\forall\, P \in E,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \big[\varphi(P)\big](x) = P(x+1) - P(x)\,.$$

2. (a) Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et expliciter sa matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant m+1} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \big(1, X, X^2, \ldots, X^m\big)$ de E.

(b) Déterminer l'image et le noyau de φ.

(c) Étudier la diagonalisabilité de φ.

(d) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note φ^p la composée p fois : $\varphi^p = \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi$; on convient que $\varphi^0 = \mathrm{Id}_E$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout polynôme $P \in E$, on a :

$$\big[\varphi^p(P)\big](X) = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} \left[(-1)^k \binom{p}{k} P(X+k) \right] . \tag{1.3}$$

(e) En déduire, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![0, p-1]\!]$, la valeur de

$$S_{j,p} = \sum_{k=0}^{p} \left[(-1)^k \binom{p}{k} k^j \right] .$$

3. Pour tous $P \in E$ et $n \in [\![0, m]\!]$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \varphi^k(P)(x) \right] .$$

Solution du sujet 1.9

1. (a) La relation s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \binom{m}{1} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

où $Q = (q_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant m+1}$ est la matrice de Pascal (triangulaire inférieure, carrée de taille $m+1$), de coefficients $q_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$ en position (i,j), avec la convention usuelle $\binom{i}{j} = 0$ si $j > i$.
La matrice Q est triangulaire à éléments diagonaux non nuls, donc est inversible.

(b) Il est clair que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$; on trouve que sa matrice est ${}^t\!Q$.
Or la réciproque de T est $P \to P(X-1)$, dont la matrice s'obtient comme dans la question préédente ; cette matrice est $({}^t\!Q)^{-1} = {}^t(Q)^{-1}$; on en déduit la valeur de Q^{-1}, soit $Q^{-1} = \left(c_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant m+1}$ avec $c_{i,j} = (-1)^{i-j} \binom{i-1}{j-1}$.

(c) Comme $V = Q^{-1}U$, on a

$$\forall\, n \in [\![0, m]\!], \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k \right]$$

2. (a) L'application φ est linéaire de E dans E et pour tout $j \in [\![0, m]\!]$,

$$\varphi(x^j) = (x+1)^j - x^j = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} x^i \in E \quad \text{d'où} \quad a_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } j > i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, A est triangulaire supérieure stricte.

(b) D'après la matrice, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_{m-1}[X]$; d'où $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_{m-1}[X]}$ par égalité des dimensions (car A est clairement de rang m).
On a clairement $\mathbb{R}_0[X] \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$, d'où l'égalité $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]}$ par la dimention (via le théorème du rang).

(c) La matrice A est triangulaire supérieure stricte non nulle, donc $\mathrm{Sp}\,(A) = \{0\}$ et A non diagonalisable.

(d) Soit τ l'endomorphisme de E défini par $\forall\, P \in E$, $\tau(P) = P(X+1)$.
Comme τ et Id_E commutent, la formule du binôme dans $\mathcal{L}(E)$ appliquée à $\varphi = \tau - \mathrm{Id}_E$ donne (1.3).

(e) Comme φ abaisse le degré de 1, pour $j < p$ et $P(X) = X^j$, on a $\varphi^p(X^j) = 0$, d'où en évaluant en 0 : $0 = \varphi^p(X^j)(0) = (-1)^p S_{j,p}$.

3. La matrice Q étant inversible, si (u_n) et (v_n) vérifient (1.2) alors ils vérifient (1.1) ; donc

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \varphi^k(P)(x) \right] = P(x+n)$$

(qu'on peut aussi retrouver par la formule du binôme appliquée à $\tau = \varphi + \mathrm{Id}_E$).

Sujet 1.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de la forme $f : x \mapsto xP(x) + x\ln(x)Q(x)$, où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soient les fonctions $e_k : x \mapsto x^k$, et $f_k : x \mapsto x^k \ln(x)$.

1. (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n)$ est une base de E. En déduire la dimension de E.

2. Pour toute fonction f de E et tout $x > 0$, montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

Pour tout $f \in E$ on définit la fonction $u(f)$ par :

$$\forall x > 0,\ (u(f))(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ déterminer $u(e_k)$ et $u(f_k)$.
4. Montrer que u est un endomorphisme de E et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.
5. Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il bijectif ?
6. Soit f un vecteur propre de E associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$.

   Soit g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = x^{-\frac{1}{\lambda}} \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

   Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire une expression explicite de la fonction f.
7. Pour chaque valeur propre λ de u, déterminer la dimension de l'espace propre associé.

   L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Solution du sujet 1.10

1. (a) Chaque fonction e_k ou f_k est continue sur $\mathbb{R}^+$ ou admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $E = \text{Vect}(e_1, f_1, \dots, e_n f_n)$ est un sous espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. E est un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions continues $C^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

   (b) Soit $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{k=1}^{n} \beta_i f_i = P(x) + Q(x)\ln x = 0$, avec P et Q éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

   Si l'on avait $P \neq 0$, on pourrait écrire que $\ln x = -\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ qui est une fraction rationnelle.

   Donc au voisinage de $+\infty$, on aurait $\ln x = -\dfrac{P(x)}{Q(x)} \sim \lambda x^{\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{Z}$, ce qui contradirait les théorèmes de croissances comparées que que soit α. Donc $P = 0$, d'où $Q = 0$. Ainsi $\dim(E) = 2n$.

2. Comme $x \mapsto x \ln x$ converge vers 0 en 0 tout élément de f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$, d'où la convergence de l'intégrale.

3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$u(e_k)(x) = \frac{1}{k+1}x^k = \frac{1}{k+1}e_k(x) \text{ et } u(f_k) = \frac{1}{k+1}f_k - \frac{1}{(k+1)^2}e_k \qquad (**)$$

4. La linéarité de u provient de la linéarité de l'intégration. On sait que $u(e_k)$ et $u(f_k)$ sont tous deux dans E. Par linéarité, l'image de toute f de E est dans E.
   D'après $(**)$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure,
   avec sur la diagonale $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1}$,
   sur la sur-diagonale $\left(-\dfrac{1}{2^2}, 0, -\dfrac{1}{3^2}, 0, \dots, -\dfrac{1}{n^2}, 0, -\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$,
   et des 0 partout ailleurs.

5. La matrice M étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale.
   Comme 0 n'est pas valeur propre de u, u est bijectif.

6. D'après la question 2, l'intégrale définissant $g(x)$ est bien définie pour $x \geqslant 0$.
   Comme $u(f) = \lambda f$, on a pour $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x\lambda f(x)$. Ainsi, pour $x > 0, g(x) = \lambda x^{1-\frac{4}{\lambda}} f(x)$.

   En dérivant l'égalité définissant g, il vient $\forall x > 0, g'(x) = \frac{-1}{\lambda} x^{-\dfrac{1}{\lambda}-1} \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + x^{-\frac{1}{\lambda}} f(x) = 0$.
   La fonction g est donc égale à une constante c sur $\mathbb{R}_+^*$. Et, comme $\lambda > 0$, on obtient :

$$\exists c \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = c x^{\frac{1}{\lambda}-1}$$

7. Les valeurs propres de u sont toutes non nulles (cf. Q5), donc les sous-espaces propres sont tous de dimension 1 (cf. Q6). Précisément pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $E_{\frac{1}{k+1}} = \text{Vect}(e_k)$, car d'après $(**)$, $e_k \in E_{\frac{1}{k+1}}(u)$.
   Donc u n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n tandis que la dimension de E est $2n$ — et $n \neq 2n$ car $n \neq 0$.

Sujet 1.11

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels.

- pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la notation $M \geqslant 0$ (respectivement $M > 0$) signifie que tous les coefficients de M sont positifs (respectivement strictement positifs).
  On dit alors que M est positive (respectivement strictement positive).
- pour toutes $M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la notation $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geqslant 0$ (respectivement $M - N > 0$).

1. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $B \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$, alors on a $BX \geqslant 0$.
   (b) Établir, réciproquement, que si, pour tout matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive on a $BX \geqslant 0$, alors B est positive.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, on dit qu'elle est **productive** si A est positive et s'il existe une matrice colonne $P \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, positive, telle que $P > AP$.

Dans les questions 2 à 4 on considère A et P deux matrices vérifiant les conditions de cette définition.

2. Montrer que $P > 0$.
3. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, telle que $X \geqslant AX$. On pose $c = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \dfrac{x_j}{p_j}$.
   Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $c = \dfrac{x_k}{p_k}$.
   (a) Établir que : $c\left(p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j\right) \geqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(x_j - c p_j)$.
   (b) En déduire que $c \geqslant 0$, puis que X est positive.
   (c) On suppose que : $X = AX$.
   En utilisant l'inégalité $-X \geqslant A(-X)$, montrer que $X = 0$ et en déduire que $I_n - A$ est inversible.
4. (a) Soit $X \geqslant 0$. Montrer que $Y = (I_n - A)^{-1} X$ est positive. En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.
   (b) On considère dans cette question B une matrice carrée positive telle que $I_n - B$ soit inversible et d'inverse positive.
   Soit $V = (I_n - B)^{-1} U$, où U est la matrice colonne dont toutes les composantes valent 1.
   Montrer que $V > BV$. Conclure.
5. Donner une caractérisation des matrices productives.

Solution du sujet 1.11

1. (a) Si l'on note $b_{i,j}$ les coefficients de B et x_j ceux de X, alors les coefficients de BX sont les $\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}x_j$ qui sont tous positifs.

   (b) Notons $E_1, ..., E_n$ la base canonique des matrices colonnes d'ordre n, alors BE_j est égale à la j-ème colonne de B. Elle est positive d'où B est positive.

2. $AP \geqslant 0$ et $P > AP$ d'où $P > 0$ (en raisonnant coefficient par coefficient).

3. (a) $c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j\right) = x_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}cp_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}cp_j$

   d'où $c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j\right) \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(x_j - cp_j)$.

   (b) Pour tout j compris entre 1 et n, $x_j \geqslant cp_j$ par définition de c d'où $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(x_j - cp_j) \geqslant 0$ et $p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j > 0$, d'uù $c \geqslant 0$.

   c étant positif, pour tout k compris entre 1 et n, $\dfrac{x_k}{p_k} \geqslant 0$, d'où $x_k \geqslant 0$ *i.e.* $X \geqslant 0$.

   (c) Puisque $AX = X$ alors $-AX = -X$ donc $A(-X) \geqslant -X$. D'après la question précédente $-X \geqslant 0$. Ainsi ayant aussi $X \geqslant 0$, on a $X = 0$.

   On vient de prouver que $AX = X$ implique $X = 0$ ce qui prouve de $I_n - A$ est inversible.

4. (a) $Y - AY = (I_n - A)(I_n - A)^{-1}X = X$. D'où $Y \geqslant AY$ ce qui montre d'après la question 3.b) que $Y \geqslant 0$.

   On a établi que pour tout $X \geqslant 0$, $(I_n - A)^{-1}X \geqslant 0$, donc d'après la question 2, $(I_n - A)^{-1} \geqslant 0$.

   (b) On a $V - BV = (I_n - B)V = (I_n - B)(I_n - B)^{-1}U = U$, d'où on a bien $V - BV > 0$ i.e. $V > BV$. D'où B est productive.

5. On a démontré dans les questions 1 à 4.a) que si A est une matrice productive alors $(I_n - A)$ est inversible et $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

   Dans la question 4.b), on a établi que si B est positive, $(I_n - B)$ inversible et $(I_n - B)^{-1} \geqslant 0$ alors elle est productive.

   Ainsi A est productive si et seulement si $A \geqslant 0$, $(I_n - A)$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} \geqslant 0$.

Sujet 1.12

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et u un endomorphisme de E.

On dit que l'endomorphisme u est antisymétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle .$$

1. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E$, $\langle u(x), x \rangle = 0$. (on pourra développer $\langle u(x+y), x+y \rangle$ pour démontrer une direction).

Dans la suite de l'exercice, on suppose que u est un endomorphisme antisymétrique de E.

2. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est antisymétrique.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si λ est valeur propre de u, alors $\lambda = 0$.
4. Montrer que $u \circ u$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont toutes négatives ou nulles.
5. Montrer que si un sous-espace vectoriel F de E est stable par u, alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par l'endomorphisme u.

On suppose désormais que u est un isomorphisme de E sur E.

6. Soit $\lambda < 0$ et $e \neq 0$ tels que $(u \circ u)(e) = \lambda e$. Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e, u(e))$ est un plan vectoriel stable par u.
7. Montrer qu'il existe des plans vectoriels $P_1, \ldots, P_k$ de E vérifiant :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, k]\!], P_i \text{ est stable par } u. \\ E = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_k \\ \forall (i, j) \in [\![1, k]\!]^2, i \neq j \Rightarrow P_i \perp P_j \end{cases}$$

8. Que peut-on en conclure sur la dimension de E ?

Solution du sujet 1.12

1. $\langle u(x+y), x+y\rangle = \langle u(x)+u(y), x+y\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle$.
   $(\Rightarrow)$: $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle$ donc $\langle u(x), x\rangle = 0$.
   $(\Leftarrow)$: $0 = \langle u(x+y), x+y\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle = \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle$ donc u est antisymétrique.
2. $(\Rightarrow)$: Soit $M = M_B(u) = (m_{i,j})$. La base B est orthonormée donc $m_{i;j} = \langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle e_j, u(e_i)\rangle = -m_{j,i}$ donc M est antisymétrique.

   $(\Leftarrow)$: Soit X, Y vecteurs coordonnées de x, y dans B.
   On a $\langle u(x), y\rangle = (MX)^T Y = X^T M^T \times Y = -X^T \times MY = -\langle x, u(y)\rangle$ donc u est un endomorphisme antisymétrique.
3. Soit x un vecteur propre associé à λ. On a $\langle u(x), x\rangle = 0$ donc $\langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2 = 0$ donc $\lambda = 0$ (car $x \neq 0$).
4. On a $\langle u \circ u(x), y\rangle = -\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u \circ u(y)\rangle$ donc $u \circ u$ est un endomorphisme sym étrique.
   Soit x un vecteur propre de $u \circ u$ associé à λ.
   On a $\langle u \circ u(x), x\rangle = -\langle u(x), u(x)\rangle = -\|u(x)\|^2$ et $\langle u \circ u(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$
   donc $\lambda \leqslant 0$ donc $\mathrm{Sp}\,(u \circ u) \subset \mathbb{R}_-$.
5. On suppose que F est stable par f. Montrons que $F^\perp$ est stable par f. Soit $x \in F^\perp$. Montrons $u(x) \in F^\perp$ c'est-à-dire que $\forall y \in F$, $\langle u(x), y\rangle = 0$. Soit $y \in F$. On a $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle = 0$ car $x \in F^\perp$ et $y \in F$ donc $u(y) \in F$.
6. On a montré que les valeurs propres de u^2 (endomorphisme symétrique) sont des réels strictement négatifs car u est bijectif.
   Si $u(e) = \mu e$ alors $\mu^2 = \lambda < 0$ donc $(e, u(e))$ est libre.
   $u(ae + bu(e)) = au(e) + b\lambda e \in \mathrm{Vect}\,(e, u(e))$ qui est donc un plan stable par u.
7. Posons $P_1 = vect\,(e, u(e))$. Si $P_1 = E$, le résultat est obtenu.
   Sinon, soit $F = P_1^\perp$. Recommençons le processus avec F.
   Supposons qu'il existe ℓ plans $P_1, \ldots, P_\ell$ de E stables par u et deux à deux orthogonaux.
   Soit $F = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_\ell$ (la somme est directe car les sous espaces sont orthogonaux deux à deux)
   Si $F = E$, le résultat est obtenu. Sinon le sous-espace F est stable par u donc $F^\perp$ est stable par u.
   Soit $v : F^\perp \to F^\perp$ défini par $v(x) = u(x)$. L'endomorhisme u est antisymétrique et bijectif donc v est antisymétrique et injectif donc bijectif donc d'après ce qui précède, il existe un plan $P_{l+1} \subset F^\perp$ stable par v donc par u.et donc
   les plans $P_1, \ldots, P_{\ell+1}$ sont stables par u et orthogonaux deux à deux.
   L'espace E étant de dimension finie, cette construction s'arrête nécessairement, ce qui entraîne le résultat demandé.
8. De par la construction précédente, la dimension de E est paire

Sujet 1.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E.
On note I_n la matrice identité d'ordre n. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit s un endomorphisme symétrique de E. On note $S = (s_{i,j})_{n,n}$ la matrice de s dans la base canonique. Les valeurs propres de s sont rangées par ordre croissant : $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. On note :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, |a_{i,j}| \leqslant 1$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E formée de vecteurs propres de s.

Dans toute la suite,pour tout vecteur x de E, on note : $R_s(x) = \langle s(x), x\rangle$.

3. Soit $S(0,1) = \{x \in E \mid ||x|| = 1\}$. Montrer que :
$$\forall x \in S(0,1),\ R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n].$$
4. Inversement, tout élément de $[\lambda_1, \lambda_n]$ est-il de la forme $R_s(x)$, avec $x \in S(0,1)$?
5. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S à l'aide d'un produit scalaire.
Démontrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $\lambda_1 \leqslant s_{i,i} \leqslant \lambda_n$.

Dans toute la suite, si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $\mathrm{Tr}(AS)$, où $\mathrm{Tr}(M)$ désigne la trace de la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que $T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$.
(On pourra utiliser sans démonstration le fait que le produit de deux matrices orthogonales d'ordre n est aussi une matrice orthogonale.)
7. Dans cette question, on suppose que s a toutes ses valeurs propres positives ou nulles.
Montrer que pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a : $T(A) \leqslant \mathrm{Tr}(S)$.
En déduire que T admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, maximum que l'on précisera.
Montrer de même que T admet sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ un minimum à préciser.

SOLUTION DU SUJET 1.13

1. La matrice A étant orthogonale, chaque colonne constitue un vecteur normé, d'où pour tout i, j, $a_{i,j}^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = 1$. Donc $|a_{i,j}| \leqslant 1$.
2. On applique le théorème spectral.
3. Si l'on note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, et X la matrice colonne associée, la matrice de $s(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ est égale à ΔX. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a donc $R_s(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i^2$.

   Si $||x|| = 1$ alors $\sum_{k=1}^{n} x_i^2 = 1$. Par croissance des (λ_i), il vient
   $$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
4. Soit $\mu \in [\lambda_1, \lambda_n]$. Alors il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\mu = \alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_n$.
   Posons $x = \sqrt{\alpha}\varepsilon_1 + \sqrt{1 - \alpha}\varepsilon_n$. Alors
   $$\langle s(x), x\rangle = \langle \sqrt{\alpha}\lambda_1\varepsilon_1 + \sqrt{1 - \alpha}\lambda_n\varepsilon_n, \sqrt{\alpha}\varepsilon_1 + \sqrt{1 - \alpha}\varepsilon_n\rangle = \alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_n = \mu$$
   Autre idée : on peut remplacer les indices 1 et n par i et $i + 1$ tels que $\lambda_i < \mu < \lambda_{i+1}$.
5. $s_{i,j} =< s(e_j), e_i >$ d'où $s_{i,i} = R_s(e_i)$ Il suffit de remarquer que $\|e_i\| = 1$.
   Donc par l'inégalité de Raleigh (Q3) $\lambda_1 \leqslant s_{i,i} \leqslant \lambda_n$.
6. On applique le théorème spectral à S : S étant symétrique (réelle), il existe une matrice orthogonale $n \times n$ notée Q telle que $S = Q\Delta{}^tQ$ d'où $AS = AQ\Delta{}^tQ$ et $T(A) = \mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}({}^tQAQ\Delta) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$.
   Il reste à vérifier que B est orthogonale.
   Or B est le produit de trois matrices orthogonales, ${}^tQ$, A et Q. B est bien orthogonale.
7. Tout d'abord, il est clair que $T(I_n) = \mathrm{Tr}(S)$
   D'autre part, nous avons vu précédemment que pour toute matrice orthogonale A il existe une matrice orthogonale B telle que $T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$ Or, $(B\Delta)_{i,i} = \lambda_i b_{i,i} \leqslant \lambda_i$, puisque B est orthogonale : car ici $\lambda_i \geqslant 0$.
   D'où $\mathrm{Tr}(B\Delta) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(S)$.
   Donc finalement, pour toute matrice orthogonale A, $T(A) \leqslant \mathrm{Tr}(S) = T(I_n)$, le maximum de T sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est $\mathrm{Tr}(S)$, atteint au moins en $A = I_n$.
   De même, on remarque que $T(-I_n) = \mathrm{Tr}(-S) = -\mathrm{Tr}(S)$. Or, $-I_n$ est aussi dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   De plus, $\forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} \geqslant -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ puisque $b_{i,i} \geqslant -1$ et $\lambda_i \geqslant 0$.
   Ainsi, $\forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), T(A) \geqslant -\mathrm{Tr}(S) = T(-I_n)$

Sujet 1.14

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynôme réels de degré inférieur ou égal à n.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{R}_n[X]$ associés aux nombres $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i} .$$

Cette notation de produit signifie que l'indice i prend toutes les valeurs entières de 0 à n, sauf k.

1. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner l'écriture de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{R}[X]$ et $V \in \mathbb{R}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V)) .$$

Dans la suite de cet exercice, on se donne un couple (A, B) de polynômes avec $A \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\deg(B) = n + 1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

3. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On suppose dans la suite de l'exercice que B est le polynôme $B(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$ où les réels (x_k) sont distincts.

4. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ et $R_k \in \mathbb{R}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.
   (a) Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. Déterminer $R_k(x_j)$.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.
   L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Solution du sujet 1.14

1. On montre que famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre en évaluant une combinaisaon linéaire nulle en tout x_k, car $L_k(x_j) = \delta_{k,j}$.
   Elle est de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Grâce à la relation $L_k(x_j) = \delta_{k,j}$, il vient $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(x_k)L_k(X)$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Le polynôme B est non nul car de degré $n+1$. D'après le théorème de la division euclidienne, le reste dans la division euclidienne de AP par B est nul ou de degré strictement inférieur à $\deg(B) = n+1$. Ainsi, $\varphi(P)$ est nul ou de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire que $\varphi(P)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.

   Soit $AP_1 = BQ_1 + R_1$ et $AP_2 = BQ_2 + R_2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
   $$A(P_1 + \lambda P_2) = AP_1 + \lambda AP_2 = BQ_1 + R_1 + \lambda(BQ_2 + R_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2\,.$$
   De plus, R_1 et R_2 appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$ donc $R_1 + \lambda R_2$ aussi.
   Par unicité de la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B, le quotient et le reste dans cette division euclidienne sont respectivement $Q_1 + \lambda Q_2$ et $R_1 + \lambda R_2$.
   L'application φ est donc linéaire.
4. (a) On a $AL_k = BQ_k + R_k$ donc
   $$A(x_j)L_k(x_j) = B(x_j)Q_k(x_j) + R_k(x_j) = R_k(x_j)$$
   car x_j est racine de B.
   Étant donné la valeur de $L_k(x_j)$, on a donc $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et $R_k(x_k) = A(x_k)$.

   (b) D'après la question sur les polynômes de Lagrange, on a donc
   $$\varphi(L_k) = R_k = \sum_{j=0}^{n} R_k(x_j)L_j = R_k(x_k)L_k + \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} R_k(x_j)L_j = A(x_k)L_k$$
   On a donc $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$; ainsi L_k est un vecteur propre de φ associé à la valeurs propre $A(x_k)$.

   L'endomorphisme φ admet une base formée de vecteurs propres (les polynômes deLagrange).
   Il est donc diagonalisable et il n'y a pas d'autres éléments propres que ceux déjà trouvés.

SUJET 1.15

Soit un entier $p \geqslant 2$. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels. On note I la matrice identité d'ordre p. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on note $\mathrm{Ker}(M)$ (resp. $\mathrm{Im}(M)$) le noyau (resp. l'image) de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ défini par $X \mapsto MX$.

1. (a) Montrer que l'on a : $\mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(AB)$ et $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}(A)$.

   (b) Montrer que si le produit AB est inversible, alors les matrices A et B sont inversibles.

2. Soit λ un nombre réel **non nul.**

   (a) Montrer que la matrice $(\lambda I - AB)$ est inversible si et seulement si la matrice $(\lambda I - BA)$ l'est.

   (b) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ qui n'est pas valeur propre de la matrice AB, on a :

$$(\lambda I - AB)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda} A(\lambda I - BA)^{-1} B$$

3. Montrer que les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

4. Dans cette question, on choisit les matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice BA.

   (b) Après avoir justifié son existence, calculer l'inverse de la matrice $I - AB$.

Solution du sujet 1.15

1. (a) Si $BX = 0$, alors $ABX = 0$. De même, tout vecteur ABX s'écrit $A(BX)$.

   (b) Si la matrice AB est inversible, on a $\operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker}(AB) = \{0\}$, donc B est inversible.
   De plus, $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = \operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Im}(A)$ entraîne que A est inversible.
   Autre idée : il existe une matrice C telle que $I_n = (AB)C$, soit $I_n = A(BC)$, d'où A inversible et (idem pour B).

2. (a) Supposons la matrice $\lambda I - AB$ inversible. Soit $X \in \operatorname{Ker}(\lambda I - BA)$.
   Alors, $BAX = \lambda X$ implique $ABAX = \lambda AX$, ce qui donne : $AX \in \operatorname{Ker}(\lambda I - AB) = \{0\}$.
   Donc $AX = 0$; d'où $\lambda X = BAX = 0$; soit $X = 0$ puisque $\lambda \neq 0$.
   Ainsi, $\operatorname{Ker}(\lambda I - BA) = \{0\}$ *i.e.* $(\lambda I - BA)$ est inversible.
   La réciproque s'obtient en échangeant A et B dans le sens direct.

   (b) Comme $\lambda \in \mathbb{R}$ n'est pas valeur propre de AB, alors $\lambda I - AB$ est inversible, donc $\lambda I - BA$ aussi.
   Posons $M = \dfrac{1}{\lambda} I + \dfrac{1}{\lambda} A(\lambda I - BA)^{-1} B$. On a :

$$\begin{aligned}
(\lambda I - AB)M &= \frac{1}{\lambda}(\lambda I - AB) + \frac{1}{\lambda}(\lambda A - ABA)\,(\lambda I - BA)^{-1}\,B \\
&= \frac{1}{\lambda}(\lambda I - AB) + \frac{1}{\lambda}(A(\lambda I - BA))\,(\lambda I - BA)^{-1}\,B \\
&= \frac{1}{\lambda}(\lambda I - AB) + \frac{1}{\lambda}AB = I
\end{aligned}$$

3. La question 2.a) montre que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.
   La question 1.b) montre que 0 est valeur propre de AB si et seulement si 0 est valeur propre de BA.

4. (a) En effectuant le produit BA, on trouve :

$$BA = \begin{pmatrix} p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

   On en déduit que les valeurs propres de BA sont 0 et p.

   (b) Le réel 1 n'étant pas valeur propre de BA, il n'est pas valeur propre de AB, d'où l'existence de $(I - AB)^{-1}$. Pour calculer cette matrice, on utilise la question 2.b), ce qui donne :

$$(I - AB)^{-1} = \frac{1}{1-p} \begin{pmatrix} (2-p) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & (2-p) \end{pmatrix}$$

Sujet 1.16

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable. Soit D une matrice diagonale semblable à A.
2. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré le plus petit possible. Déterminer ses racines.
3. Montrer, sans calculs matriciels supplémentaires, que le spectre de A est égal à $\{2, 6\}$.
4. En utilisant uniquement la trace de A, préciser la dimension de chacun des sous-espaces propres.
5. Soit $\mathcal{C}'$ l'ensemble des matrices qui commutent avec D :

$$\mathcal{C}' = \{M' \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid DM' = M'D\}.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{C}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}'$.
   (c) Déterminer la dimension de $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Solution du sujet 1.16

1. La matrice A est symétrique réelle, donc il existe une matrice P orthogonale et d'une matrice D diagonale telles que $D = {}^tPAP$.
2. Le calcul matriciel donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4&0&2&0\\ 0&4&0&2\\ 2&0&4&0\\ 0&2&0&4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4&0&2&0\\ 0&4&0&2\\ 2&0&4&0\\ 0&2&0&4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20&0&16&0\\ 0&20&0&16\\ 16&0&20&0\\ 0&16&0&20 \end{pmatrix} = 8A - 12I_4.$$

   Le polynôme $X^2 - 8X + 12$, est annulateur de A (il n'y en a pas de degré 1, sauf pour les matrices scalaires). Donc les valeurs propres sont parmi des racines, soit 2 et 6.
3. Il y a des valeurs propres car A est diagonalisable.
   Il ne peut y avoir une seule valeur propre λ, sinon A serat semblable à λI_4 donc égale à λI_4.
   Donc le spectre de A est égal à $\{2, 6\}$.
4. On sait que $\mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(A) = 16$.
   Et D comporte $\dim(\mathrm{Ker}(A - 2I_4))$ (resp. $\dim(\mathrm{Ker}(A - 6I_4))$) coefficients diagonaux égaux à 2 (resp. 6).
   Ces deux dimensions sont non nulles de somme 4.
   Donc, selon que la dimension de $\mathrm{Ker}(A - 2I_4)$ vaut 1,2 ou 3, on a

$$\mathrm{Tr}(D) = 2+6+6+6 = 20 \text{ ou } \mathrm{Tr}(D) = 2+2+6+6 = 16 \text{ ou } \mathrm{Tr}(D) = 2+2+2+6 = 12.$$

   Ainsi seul le cas $\dim \mathrm{Ker}(A - 2I_4) = 2 = \dim \mathrm{Ker}(A - 6I_4)$ est possible.
   Autre idée pour 3+4 : résoudre le système 2×2 :

$$\begin{cases} 2 \times \dim E_2 + 6 \times \dim E_6 & = \mathrm{Tr}(D) \\ \dim E_2 + \dim E_6 & = 4. \end{cases}$$

5. (a) L'ensemble $\mathcal{C}'$ est une partie de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ contenant la matrice nulle. Il reste à vérifier la stabilité par combinaison linéaire, ce qui est élémentaire par bilinéarité du produit matriciel.
   (b) Le candidat fera un calcul avec les 16 coefficients de la matrice M'.
   Le jury pourra vérifier en écrivant $D = \begin{pmatrix} 2I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 6I_2 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$.
   Rappel : les produits par blocs ne sont pas au programme en ECG.
   Les solutions sont les matrices de la forme $M' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$.
   Finalement,

$$\mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} | E, H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$$

   On en déduit que $\mathcal{C}'$ est de dimension 8.
   Remarque : dans la solution proposée les valeurs propres sont rangées dans l'ordre $(2, 2, 6, 6)$. *Qu'obtient-on si on les range par exemple sous la forme* $(2, 6, 2, 6)$ *ou* $(6, 6, 2, 2)$ *?*
   (c) On vérifie que $M' \mapsto PM'P^{-1}$ induit un isomorphisme de $\mathcal{C}'$ sur $\mathcal{C}$.
   L'ensemble $\mathcal{C}$ est isomorphe à $\mathcal{C}'$, donc de dimension 8 également.

Sujet 1.17

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une suite finie de nombres réels $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ est dite :

- *log-concave* lorsque, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$;
- *ultra-log-concave* lorsque la suite finie $\left(\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est log-concave.

1. Montrer que la suite finie $\left(\binom{n}{k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ (formée de coefficients du binôme) est log-concave.
2. Montrer que si une suite finie $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est ultra-log-concave, alors elle est log-concave.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit P un polynôme de degré n.
   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q, tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ Q(x) = x^n P(1/x)$.
   Ce polynôme Q sera noté $X^n P(1/X)$.
   (b) Soit $\nu \in \mathbb{N}$ la multiplicité de 0 comme racine de P.
   Exprimer le degré de $X^n P(1/X)$ à l'aide de n et de ν.

Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ sera dit *scindé* lorsque :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists \lambda, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R},\ P = \lambda(X - x_1)\cdots(X - x_n).$$

Ainsi tout polynôme constant est scindé (cas $n = 0$). On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes scindés.

4. Montrer que, pour tout $P \in \mathcal{S}$ de degré n, on a : $X^n P(1/X) \in \mathcal{S}$.
5. Montrer que, pour tout $P \in \mathcal{S}$, on a : $P' \in \mathcal{S}$.
   Indication : penser au théorème de Rolle.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ telle que $a_n \neq 0$ et $P \in \mathcal{S}$, où l'on a noté $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
   (a) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on pose : $Q_1 = P^{(k-1)},\ Q_2 = X^{n-k+1}Q_1(1/X),\ Q_3 = Q_2^{(n-k-1)}$.
   Montrer que $Q_3 \in \mathcal{S}$ et que Q_3 est de degré au plus deux.
   (b) En déduire que la suite finie $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est ultra-log-concave.

Solution du sujet 1.17

1. Posons $b_k = \binom{n}{k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Alors $b_k > 0$ et, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :
$$\frac{b_k^2}{b_{k-1}b_{k+1}} = \frac{(n!)^2}{(k!)^2\big((n-k)!\big)^2} \times \frac{(k-1)!(k+1)!(n-k-1)!(n-k+1)!}{(n!)^2} = \frac{k+1}{k} \times \frac{n-k+1}{n-k} \geqslant 1,$$

2. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant \dfrac{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}^2} a_k^2$; et d'après Q1, on a : $\dfrac{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}^2} \leqslant 1$.

   D'où, par produit d'inégalités lorsque $a_{k-1}a_{k+1} \geqslant 0$, et de manière évidente si $a_{k-1}a_{k+1} < 0$, on obtient $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$, pour tout k, c'est-à-dire que $\boxed{(a_k) \text{ est log-concave.}}$

3. (a) Tout polynôme P de degré n s'écrit : $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$.

   Alors : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^n P(1/x) = x^n \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j x^{-j} = Q(x)$ avec $\boxed{Q = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j X^{n-j}.}$

   Si Q_2 est une autre solution, alors tout $x \in \mathbb{R}^*$ serait racine de $Q - Q_2$ d'où $Q = Q_2$.

   (b) Si 0 est racine d'ordre ν et P, alors $a_0 = \cdots = a_{\nu-1} = 0$ et $a_\nu \neq 0$.
   L'expression trouvée juste avant s'écrit donc :
$$Q = a_n + a_{n-1}X + \cdots + a_\nu X^{n-\nu} + \cdots a_1 X^{n-1} + a_0 X^n = a_n + a_{n-1}X + \cdots + \underbrace{a_\nu}_{\neq 0} X^{n-\nu},$$
   donc $\boxed{\deg(X^n P(1/X)) = n - \nu.}$

4. Si P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, en isolant la racine 0 éventuelle, il s'écrit $P = \lambda X^\nu \displaystyle\prod_{k=1}^{n-\nu}(X - x_k)$, avec $x_1, \dots, x_{n-\nu} \in \mathbb{R}^*$ (pas forcément distincts), où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est le coefficient dominant, et $\nu \in \mathbb{N}$ est la multiplicité (éventuellement nulle) de 0 comme racine de P.
   Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, si l'on note $Q = X^n P(1/X)$, on a :
$$Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \lambda \times \left(\frac{1}{x}\right)^\nu \times \prod_{k=1}^{n-\nu}\left(\frac{1}{x} - x_k\right) = \lambda \prod_{k=1}^{n-\nu}(1 - x x_k) = \boxed{\lambda \prod_{k=1}^{n-\nu}(-x_k) \times \prod_{k=1}^{n-\nu}\left(x - \frac{1}{x_k}\right).}$$
   Et le résultat final reste vrai pour $x = 0$ (comme en Q3a), donc $\boxed{Q \text{ est scindé.}}$

5. Soit $x_1 < \cdots < x_r$ les racines de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$; alors $\deg P = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_k$. Et :
   - par Rolle, il y a une racine de P' sur chaque intervalle $]x_k, x_k + 1[$, soit $r - 1$ racines ;
   - si x_i est racine d'ordre m_i de P, alors il est racine d'ordre (au moins) $m_i - 1$ de P.

   Ainsi P' est scindé car la somme des multiplicités des racines est au moins $(r-1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{r}(m_k - 1) = \deg P'$.

6. (a) Le polynôme Q_1 est scindé d'après la question **Q5.** et il est de degré $n - k + 1$.
   Ensuite, d'après **Q4.**, le polynôme Q_2 est scindé et de degré au plus $n - k + 1$.
   Enfin, par **Q5.**, le polynôme $\boxed{Q_3 \text{ est scindé, de degré au plus 2.}}$

   (b) Si $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, on calcule $Q_3 = a_{k-1}\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{2}X^2 + a_k k!(n-k)!X + a_{k+1}\frac{(k+1)!(n-k-1)!}{2}$.
   D'après la question précédente ce trinôme est scindé, donc son discriminant est positif ou nul, soit :
$$0 \leqslant \Delta = a_k^2 (k!)^2\big((n-k)!\big)^2 - a_{k-1}a_{k+1}(k-1)!(n-k+1)!(k+1)!(n-k-1)!$$
   d'où l'ultra-log-concavité voulue en divisant par $(n!)^2$.

Sujet 1.18

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour $P \in \mathbb{R}_d[X]$ on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

On définit la famille de polynômes réels $(P_n)_{0 \leqslant n \leqslant d}$ par les relations suivantes :

$$P_0 = 1 \text{ et } \forall n \in [\![1, d]\!],\ P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-1)\dots(X-n+1)) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X-k).$$

1. (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.
   (b) Donner la matrice de Δ dans la base canonique $\left(1, X, X^2, \dots, X^d\right)$ de $\mathbb{R}_d[X]$.
2. (a) Établir que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.
   (b) Exprimer la matrice de Δ dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_d)$ de $\mathbb{R}_d[X]$.
3. Soit $n \in [\![0, d]\!]$ et $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $P_n(k) \in \mathbb{Z}$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$.
   Exprimer, $\forall k \in [\![0, d]\!]$, $\Delta^k(P)(0)$ en fonction des coordonnées de P dans la base $(P_0, \dots, P_d)$.
5. Montrer que : $[\forall k \in \mathbb{Z}, P(k) \in \mathbb{Z}]$ si et seulement si $[\forall k \in [\![0, d]\!], P(k) \in \mathbb{Z}]$.

Solution du sujet 1.18

On pose $E = \mathbb{R}_d[X]$.

1. (a) Pour $P \in E$, $P(X+1) \in E$ donc $\Delta(P) \in E$.
   Pour $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Delta(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) = \lambda\Delta(P) + \Delta(Q)$.

   (b) Si $0 \leqslant k \leqslant d$, $\Delta\left(X^k\right) = (X+1)^k - X^k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} 1^{k-i} X^i$ donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \binom{1}{1} & \dots & \binom{d}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \binom{d}{d-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) La famille $(P_0, P_1, \dots, P_d)$ est échelonnée en degrés, donc est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

   (b) $\Delta(P_0) = 1 - 1 = 0$ et si $n \in [\![0, d-1]\!]$,
   $\Delta(P_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!}[(X+1)X \cdots (X-(n-1)) - X(X-1)\dots(X-n)]$
   donc $\Delta(P_{n+1}) \frac{(X+1)-(X-n)}{(n+1)!} X(X-1)\dots(X-(n-1)) = P_n$
   d'où la matrice de Δ dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_d)$, matrice formée de 0 avec seulement une sur-diagonale formée de 1.

3. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n(k) = 0$,
   et pour $k \geqslant n$, on a $P_n(k) = \dfrac{1}{n!} k(k-1)\dots(k-n+1) = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{N}$.
   Si $k \geqslant 1$, $P_n(-k) = \frac{(-1)^n}{n!}(k)(k+1)\dots(k+n-1) = \frac{(-1)^n (k+n-1)!}{n!(k-1)!} = (-1)^n \begin{pmatrix} k+n-1 \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}$.

4. L'application Δ est linéaire donc Δ^k est linéaire donc $\Delta^k(P) = p_0\Delta^k(P_0) + p_1\Delta^k(P_1) + \dots + p_d\Delta^k(P_d)$.
   Or $\Delta(P_0) = 0$ et si $n \in [\![0, d-1]\!]$, $\Delta(P_{n+1}) = P_n$ donc $\Delta^k(P_i) = 0$ si $i < k$ et $\Delta^k(P_i) = P_{i-k}$ sinon.
   On en déduit que $\Delta^k(P) = p_k P_0 + p_{k+1} P_1 + \dots + p_d P_{d-k}$ donc $\boxed{\Delta^k(P)(0) = p_k.}$

5. Le sens direct est immédiat.
   Réciproquement, supposons $\forall j \in [\![0, d]\!]$, $P(j) \in \mathbb{Z}$.
   Alors pour tout $i \in [\![0, d]\!]$, on a a $p_i = \Delta^i(P)(0) = \sum\limits_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} (-1)^{i-j} P(j) \in \mathbb{Z}$.
   Soit $p_i \in \mathbb{Z}$. Donc $P(k) = p_0 P_0(k) + p_1 P_1(k) + \dots + p_d P_d(k) \in \mathbb{Z}$.