1

ANALYSE

Exercice 1-1

1. Pour quelles valeurs de x réel, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ est-elle convergente ? On pose alors : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.
Montrer que la fonction f est une fonction décroissante sur son domaine de définition.

2. Montrer que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ (on pourra considérer $f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$, puis faire tendre N vers l'infini).

3. En considérant $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^x}$, donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

4. Montrer que la fonction f est continue sur $]1, +\infty[$ (on majorera $\frac{1}{n^{x_0+h}} - \frac{1}{n^{x_0}}$ par le terme général d'une série convergente).

Solution :

1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $x > 1$.

La fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$, puisque si $1 < x < y$, alors comme $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n^y} \leq \dfrac{1}{n^x}$. La positivité des termes de cette série montre que f est décroissante.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$ donné et $f_N : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$. C'est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\lim_{x\to 1} f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \ln N$$

Or tous les termes de la série définissant f étant positifs, on a, pour tout $x > 1$:

$$f(x) > f_N(x),\ \forall N \in \mathbb{N}$$

La fonction f étant décroissante sur $]1,+\infty[$, alors $\ell = \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ (ℓ est soit fini, soit $\ell = +\infty$). On a alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\ell \geq f(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

La série harmonique étant divergente, il vient $\ell = +\infty$.

3. Par décroissance et positivité de la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^x}$ sur $[1,+\infty[$, il vient :

$$f(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^x} \geq f(x) - 1$$

(c'est une comparaison série–intégrale classique).
Un calcul de primitive donne :

$$\frac{1}{x-1} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

ce qui entraîne que $f(x)$ est équivalente à $\dfrac{1}{x-1}$ au voisinage de 1^+.

4. Soit $x_0 >$ et $\varepsilon > 0$ tel que $x_0 - \varepsilon > 1$. Soit h réel tel que $|h| < \varepsilon$. On peut écrire :

$$\frac{1}{n^{x_0+h}} - \frac{1}{n^{x_0}} = \mathrm{e}^{-(x_0+h)\ln n} - \mathrm{e}^{-x_0 \ln n}$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$$|\mathrm{e}^{-(x_0+h)\ln n} - \mathrm{e}^{-x_0 \ln n}| \leq |h| \ln(n) \mathrm{e}^{-(x_0-\varepsilon)\ln n}$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln(n) e^{-(x_0-\varepsilon)\ln n}$ est convergente. En effet :

$$\ln(n) e^{-(x_0-\varepsilon)\ln n} = \frac{\ln n}{n^{x_0-\varepsilon}} = \frac{\ln n}{n^{\alpha}},\ (\alpha > 1)$$

Soit $\beta > 1$ tel que $1 < \beta < \alpha$. Alors, par croissances comparées :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\beta}\frac{\ln n}{n^{\alpha}} = 0$$

ce qui entraîne la convergence de la série. On note S sa somme. Il vient :

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{n^{x_0+h}} - \frac{1}{n^{x_0}}\right| \leq S.|h|$$

ce qui entraîne que f est continue en x_0.

Exercice 1-2

1. Pour quelles valeurs de t réel la série $\sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-t\sqrt{n}}$ est-elle convergente ? On pose alors :

$$g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sqrt{n}}$$

2. Montrer que g est décroissante sur son domaine de définition.

3. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} g(t)$.

4. a) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

b) Déterminer $\lim_{t\to 0^+} g(t)$

c) Donner un équivalent de $g(t)$ lorsque t tend vers 0^+.

Solution :

1. Posons $u_n = \mathrm{e}^{-t\sqrt{n}}$.

⋆ Si $t \leq 0$, alors la suite (u_n) ne converge pas vers 0 et la divergence de la série est triviale.

⋆ Si $t > 0$, alors $\lim_{n\to\infty} (t\sqrt{n})^4.\mathrm{e}^{-t\sqrt{n}} = 0$ et donc u_n est négligeable devant $\frac{1}{n^2}$, ce qui prouve que la série converge.

Ainsi, g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Si $t > t' > 0$, alors pour tout n, $\mathrm{e}^{-t'\sqrt{n}} \geq \mathrm{e}^{-t\sqrt{n}}$, puis par sommation depuis $n = 0$ jusqu'à un rang N, et conservation des inégalités à la limite, on en déduit : $g(t') \geq g(t)$. Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Pour $t \geq 1$ et $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\mathrm{e}^{-t\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{-t}.\mathrm{e}^{-t(\sqrt{n}-1)} \leq \mathrm{e}^{-t}.\mathrm{e}^{-(\sqrt{n}-1)} = \mathrm{e}^{-t}.v_n$$

La série de terme général v_n est convergente (car $\lim\limits_{n\to\infty} n^2.v_n = 0$) et donc, pour $t \geq 1$, on a $0 \leq g(t) \leq \mathrm{e}^{-t}.\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, ce qui donne, par encadrement :

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$$

4. a) Ce résultat est une question de cours, il suffit d'écrire, par décroissance de f :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\, f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\, dt \leq f(n)$$

Le résultat s'en déduit alors, par sommation ...

b) On a donc ici : $g(t) - \mathrm{e}^{-t} \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sqrt{u}}\, du \leq g(t)$

Or, par le changement de variable $v = t^2 u$:

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sqrt{u}}\, dt = \frac{1}{t^2}\int_{t^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{v}}\, dv \underset{(0^+)}{\sim} \frac{1}{t^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{v}}\, dv \underset{(t\to 0^+)}{\longrightarrow} +\infty$$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = +\infty$.

c) On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{v}}\, dv = 2\int_0^{+\infty} z.\mathrm{e}^{-z}\, dz = 2$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sqrt{u}}\, dt \underset{(0^+)}{\sim} \frac{2}{t^2}$

L'encadrement : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sqrt{u}}\, du \leq g(t) \leq \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sqrt{u}}\, du + \mathrm{e}^{-t}$ montre alors que $g(t) \underset{(0^+)}{\sim} \dfrac{2}{t^2}$.

Exercice 1-3

1. Montrer que pour tout $x > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^x} du$ est convergente. On note $f(x)$ sa valeur.
2. Etablir une relation entre $f(x)$ et $f(x+2)$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution :

1. Le problème provient évidemment de la borne supérieure, et pour $A > 0$:

$$\int_1^A \frac{\sin u}{u^x}\, du = \Big[-\frac{\cos u}{u^x}\Big]_1^A - x\int_1^A \frac{\cos u}{u^{x+1}}\, du$$

On a $0 \leq \dfrac{|\cos u|}{u^{x+1}} \leq \dfrac{1}{u^{x+1}}$, et comme $x+1 > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^{x+1}}\, du$ est absolument convergente, donc convergente, tandis que $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\cos A}{A^x} = 0$.

Cela prouve que l'intégrale proposée est convergente.

2. En achevant le calcul associé à l'intégration par parties précédente, on obtient :

$$f(x) = \cos 1 - x\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^{x+1}}\, du$$

Une deuxième intégration par parties (dans le même sens) donne alors :

$$f(x) = \cos 1 + x\sin 1 - x(x+1)\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{x+2}}\, du$$

Soit : $f(x) = \cos 1 + x\sin 1 - x(x+1)f(x+2)$.

3. Pour tout $x \geq 2$, on a : $|f(x)| \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\, dx = 1$.

Par conséquent, $\forall\, x > 0, \left|\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{x+2}}\, du\right| \leq 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \cos 1$.

On écrit : $f(x+2) = -\dfrac{f(x)}{x(x+1)} + \dfrac{\cos 1}{x(x+1)} + \dfrac{\sin 1}{x+1}$ et puisque f est bornée sur $[2, +\infty[$, il vient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x+2) = 0.$$

Exercice 1-4

1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$F(x,y,z) = 24x^2 + 2y^2 + z^2 + 12xy + 2yz + 4zx - 240x - 48y - 12z$$

a) Déterminer les points critiques de F.

b) Montrer que :

$$F(x,y,z) = (2x + y + z - 6)^2 + (4x + y - 18)^2 + 4(x-9)^2 - 684$$

c) Montrer que F atteint son minimum sur $\mathbb{R}^3$ en un unique point. Préciser ses coordonnées, ainsi que la valeur du minimum.

2. a) Rappeler la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^n dt$.

b) Justifier la convergence et exprimer en fonction de F, l'intégrale :

$$I(a,b,c) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(t^3 - a\,t^2 - b\,t - c\right)^2 dt$$

c) Déterminer :

$$I = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} I(a,b,c)$$

3. a) Justifier (brièvement) que :

$$\left(P \mid Q\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, P(t)\, Q(t) dt$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

b) Calculer la distance du polynôme $P_0(X) = X^3$ au sous-espace $H = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 2.

c) Soit $T(X) = a\,X^2 + b\,X + c$ un polynôme appartenant à H.
Montrer que T est la projection orthogonale du polynôme X^3 sur le sous-espace H si et seulement si :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) & = & 0 \end{cases}$$

et retrouver le résultat précédent.

Solution :

1. a) L'application $(x,y,z) \mapsto F(x,y,z)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, car polynomiale par rapport à chacune de ses variables. De plus :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 48x + 12y + 4z - 240 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 12x + 4y + 2z - 48 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 4x + 2y + 2z - 12 \end{cases}$$

Les points critiques sont les solutions du système :

$$\begin{cases} 12x + 3y + z = 60 \\ 6x + 2y + z = 24 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x + y = 36 \\ 4x + y = 18 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 9 \\ y = -18 \\ z = 6 \end{cases}$$

b) Il suffit de développer le terme de droite de l'égalité proposée pour aboutir au résultat demandé.

c) On vérifie que $(9, -18, 6)$ annule $F(x,y,z) + 684$ (qui est un réel positif comme somme de trois carrés). Il en résulte que F admet un minimum absolu en ce point qui vaut -684.

2. a) Une intégration par parties évidente sur un intervalle de la forme $[0, X]$, suivie d'un passage à la limite, montre que $I_n = nI_{n-1}$ et $I_0 = 1$ entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = n!$.

b) La fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)^2$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc intégrable sur tout segment de cet intervalle. De plus $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 h(t) = 0$ entraîne la convergence en $+\infty$ de l'intégrale proposée. Un simple développement de $(t^3 - at^2 - bt - c)^2$, l'existence et la linéarité de l'intégrale donnent :

$$I(a,b,c) = a^2 I_4 + b^2 I_2 + c^2 I_0 + 2abI_3 + 2acI_2 + 2bcI_1 - 2aI_5 - 2bI_4 - 2cI_3$$

ou :

$$I(a,b,c) = F(a,b,c) + 720$$

c) D'après la première question :

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} I(a,b,c) = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} F(a,b,c) + 720 = 36$$

qui est atteint en $(9, -18, 6)$.

3. a) On vérifie que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)\, Q(t) dt$ existe (même raisonnement qu'à la question précédente) et que la forme proposée est bilinéaire (existence et linéarité de l'intégrale), symétrique (commutativité du produit de réels), positive (positivité de l'intégrale) et définie (car $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} P^2(t)$ est une fonction positive, continue sur $\mathbb{R}^+$). On définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

b) On sait que :

$$d^2(P_0, H) = \inf_{P\in H} ||P_0 - P||^2 = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^3 - a\,t^2 - b\,t - c)^2 dt = 36$$

c) On sait que T est la projection orthogonale du polynôme X^3 sur le sous-espace H si et seulement si $T \in H$ et $(P_0 - T) \in H^\perp$. Si l'on pose $T(X) = aX^2 + bX + c$, ceci est équivalent à :

$$\begin{cases} (X^3 - T \mid X^2) = 0 \\ (X^3 - T \mid X) = 0 \\ (X^3 - T \mid 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^5 - at^4 - bt^3 - ct^2) dt = 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^4 - at^3 - bt^2 - ct) dt = 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c) dt = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} 120 - 24a - 6b - 2c = 0 \\ 24 - 6a - 2b - c = 0 \\ 6 - 2a - b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) = 0 \end{cases}$$

On retrouve ainsi le point critique de la première question.

Exercice 1-5

Soit f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$.

1. Étudier la convergence des intégrales

$$I = \int_{-1}^{1} f(t)dt \qquad \text{et} \qquad J = \int_{0}^{+\infty} f(t)dt$$

Soit F la fonction définie par : $F(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x^2} f(t)dt$

2. Déterminer le domaine de définition D de la fonction F.

3. Préciser les limites de F aux bornes de D.

4. Étudier les variations de F. On montrera en particulier que F' s'annule en une unique valeur a qu'on déterminera.
Dresser le tableau de variations de F.

5. Tracer l'allure du graphe de F et préciser son intersection avec l'axe (Ox).

Solution :

1. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est positive et continue sur $]-1,+\infty[$.

• Au voisinage de -1, $h(t)$ est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ qui est intégrable (intégrale de Riemann).

• Au voisinage de l'infini, $h(t)$ est équivalent à $\dfrac{1}{t^{3/2}}$ qui est intégrable pour la même raison.

Ainsi les deux intégrales I et J convergent-elles.

2. La fonction F est définie si et seulement si h est définie sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{x}, x^2\right]$, donc si et seulement si $\left[\dfrac{1}{x}, x^2\right] \subset]-1,+\infty[$, soit :

$$(x>0) \;\text{ ou }\; (x<0) \cap \left(\tfrac{1}{x} > -1\right) \Longleftrightarrow (x>0) \cup (x<-1)$$

La première question montre d'une part que $F(-1) = I$ existe et d'autre part que $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = -J$.

Finalement, le domaine de définition de F est :

$$D_F =]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[$$

3. De nouveau, la première question nous assure que :

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = J,\; \lim_{x\to+\infty} F(x) = J,\; \lim_{x\to 0^+} F(x) = -J,\; \lim_{x\to 0^-} F(x) = I$$

4. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$. Sur cet intervalle, la dérivée F' est donnée par :

$$F'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^6}} + \frac{1}{\sqrt{x+x^4}}$$

- on a trivialement $F'(x) > 0$ pour $x > 0$.
- pour $x < -1$, il vient :

$$F'(x) > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x^2}{1+x^6} > \dfrac{1}{x^4+x} \\ x < -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^6 + 4x^3 - 1 > 0 \\ x < -1 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$x \in]\alpha, -1[, \text{ avec } \alpha = \left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right)^{1/3}$$

On remarquera que $\lim\limits_{x\to -1^-} F'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} F'(x) = +\infty$, ce qui donne en ces points des demi–tangentes verticales.

Exercice 1-6

On rappelle les formules de trigonométrie :

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

1. Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\int_0^a \sin(\lambda x)\, f(x)dx\right] = 0$$

De la même manière, on a (et on n'en demande pas la démonstration) :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\int_0^a \cos(\lambda x)\, f(x)dx\right] = 0$$

2. Pour $a \in [0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin(nx)}{\sin x}dx$$

  a) Justifier la convergence de $I_n(a)$.
  b) Montrer que pour $a \in [0, \pi[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[I_{n+1}(a) - I_n(a)\right] = 0$.

3. a) Déterminer $I_n(\pi)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  b) Pour $a \in]0, \pi[$, écrire une relation entre $I_n(a)$ et $I_n(\pi - a)$.
  c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a) = \dfrac{\pi}{2}$.

4.a) Justifier la convergence de l'intégrale :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

b) Soit $a \in]0, \pi[$. Montrer que la fonction :

$$x \mapsto \phi(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

peut se prolonger en une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[0, a]$.

c) Déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^a \frac{\sin(nx)}{x} dx$$

et en déduire la valeur de J.

Solution :

1. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, une intégration par parties est légitime et en supposant $\lambda > 0$ (ce qui n'est pas une restriction, puisque l'on cherche la limite lorsque $\lambda \to +\infty$) :

$$I_\lambda = \int_0^a \sin(\lambda x) f(x)\, dx = \Big[-\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda} f(x) \Big]_0^a + \frac{1}{\lambda}\int_0^a \cos(\lambda x) f'(x)\, dx$$

Ainsi : $\quad |I_\lambda| \leq \dfrac{|f(0)|}{\lambda} + \dfrac{|f(a)|}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^a |f'(x)|\, dx \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

2. a) L'intégrale est impropre pour la borne 0, mais : $\dfrac{\sin(nx)}{\sin x} \sim \dfrac{nx}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} n$, et la fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0.

Si $a = \pi$, l'intégrale est aussi impropre en π, mais le changement de variable $t = \pi - x$ montre que le problème est le même qu'en 0 et la fonction à intégrer se prolonge encore par continuité.

L'intégrale est donc en fait «fausement impropre».

b) A l'aide des formules de trigonométrie données dans l'énoncé, on obtient :

$$I_{n+1}(a) - I_n(a) = \int_0^a \cos \frac{2n+1}{2} x \cdot \frac{1}{\cos(x/2)}\, dx$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x/2)}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a] \subset [0, \pi[$, on conclut, grce à la première question :

$$\lim_{n \to \infty} [I_{n+1}(a) - I_n(a)] = 0$$

3. a) Toujours avec les formules données, on a :

$$I_{n+1}(\pi) - I_{n-1}(\pi) = \int_0^\pi 2\cos(nx)\, dx = 0$$

Donc $I_{n+1}(\pi) = I_{n-1}(\pi)$ et, par récurrence :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, I_{2p}(\pi) = I_0(\pi) = 0 \text{ et } I_{2p+1}(\pi) = I_1(\pi) = \pi$$

b) En effectuant le changement de variable $x = \pi - t$:

$$I_n(\pi - a) = \int_0^{\pi-a} \frac{\sin(nx)}{\sin x}\, dx = \int_a^{\pi} (-1)^n \frac{\sin(nt)}{\sin t}\, dt$$

Donc :

$$I_n(\pi - a) = (-1)^n [I_n(\pi) - I_n(a)]$$

c) Ainsi : $I_n a) = I_n(\pi) + (-1)^{n+1} I_n(\pi - a)$, d'où :

$$\begin{aligned} I_{n+1}(a) + I_n(a) &= I_{n+1}(\pi) + I_n(\pi) + (-1)^n [I_{n+1}(\pi - a) - I_n(\pi - a)] \\ &= \pi + (-1)^n [I_{n+1}(\pi - a) - I_n(\pi - a)]. \end{aligned}$$

On a donc $I_{n+1}(a) + I_n(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi$ et $I_{n+1}(a) - I_n(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où :

$$I_n(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi/2$$

4. a) La fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$ existe.

Pour $x \geq 1$, en intégrant par parties :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} + \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

Comme $\dfrac{|\cos t|}{t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ est (absolument) convergente, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$. Par conséquent $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et donc J existe.

b) La fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, a]$ et pour $x0$:

$$\phi(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \sim \frac{x^3/6}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi ϕ est prolongeable par continuité en 0, en posant $\phi(0) = 0$.
On a alors, pour $x0$:

$$\phi'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^2 \sin^2 x}$$

Un développement limité donne : $\sin^2 x - x^2 \cos x = \dfrac{1}{6} x^4 + o(x^4)$, tandis que l'on a : $x^2 \sin^2 x = x^4 + o(x^4)$, donc $\displaystyle\lim_0 \phi' = \frac{1}{6}$.

Par théorème, on en déduit que le prolongement par continuité de ϕ est dérivable en 0, avec $\phi'(0) = \dfrac{1}{6}$, donc ce prolongement est bien de classe $\mathcal{C}^1$.

c) $\displaystyle I_n(a) - \int_0^a \frac{\sin(nx)}{x}\, dx = \int_0^a \sin(nx)\phi(x)\, dx$. La première question montre donc que cette expression est de limite nulle, lorsque n tend vers l'infini, et :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a \frac{\sin(nx)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Le changement de variable $t = nx$, pour $n \geq 1$, donne :

$$\int_0^a \frac{\sin(nx)}{x}\,dx = \int_0^{na} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

La convergence de l'intégrale étant acquise, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 1-7

1. Pour $x \in [0,1[$, on pose $h(x) = \ln(1-x)$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée p-ième de h.

b) Soit $x \in [0,1[$ fixé.

Étudier les variations de la fonction $t \mapsto \phi(t) = \dfrac{t-x}{t-1}$ sur l'intervalle $[0,x]$.

En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$:

$$|H_p(x)| \leq x^p\,|\ln(1-x)| \qquad \text{où} \qquad H_p(x) = \int_0^x h^{(p+1)}(t)\,\frac{(x-t)^p}{p!}dt$$

2. Montrer que la fonction $x \mapsto g(x) = \ln(x^2)\,\ln(1-x^2)$ est bornée sur l'intervalle $]0,1[$.

3. a) Justifier la convergence de l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln\left(x^2\right)\,\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}dx$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, après en avoir justifié la convergence, calculer :

$$I_n = -\int_0^1 \frac{x^{2n}\,\ln\left(x^2\right)}{n+1}dx$$

c) Montrer que :

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)\,(2n+1)^2}$$

4. A-t-on :

$$(\forall x \in [0,1[) \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad ?$$

Solution :

1. a) Des calculs évidents et une démonstration par récurrence donnent pour tout $p \geq 1$ et pour tout $x \in [0,1[$:

$$h^{(p)}(x) = -\frac{(p-1)!}{(1-x)^p}$$

b) Pour tout $x \in [0,1[$ fixé, l'application $t \mapsto \phi(t) = \dfrac{t-x}{t-1}$ est continue et dérivable sur l'intervalle $[0,x]$. de plus

$$\phi'(t) = \frac{x-1}{(t-1)^2} < 0$$

Ainsi, par décroissance et comme $\phi(0) = x$, il vient pour tout $t \in [0,x]$:

$$0 \leq \phi(t) \leq x$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x h^{(p+1)}(t)\,\frac{(x-t)^p}{p!}dt\right| &= \left|\int_0^x -(\phi(t))^p)\,\frac{dt}{1-t}\right| \\ &\leq x^p \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -x^p \ln(1-x) \\ &= x^p|\ln(1-x)|\end{aligned}$$

2. La fonction g est continue sur l'intervalle $]0,1[$.
- au voisinage de 0, $g(x)$ est équivalent à $h(x) = -x^2 \ln(x^2)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
- au voisinage de 1, $g(x)$ est équivalent à $h(x) = 2\ln(x)\ln(1-x)$ soit encore $g(x) \sim 2(1-x)\ln(1-x)$ qui tend également vers 0 lorsque x tend vers 1.

Ainsi g est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,1]$ et y est donc bornée.

3. a) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2\right)\,\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}$ est continue sur $]0,1[$.
Au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalent à $-2\ln x$ qui est une fonction intégrable sur $[0,1]$.
Au voisinage de 1, $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ qui tend vers 0.
Ainsi l'intégrale proposée existe.

b) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^{2n}\,\ln\left(x^2\right)}{n+1}$ est continue sur $]0,1]$ et tend vers 0 en 0, si $n \geq 1$. Elle est donc prolongeable par continuité sur $[0,1]$ ce qui assure l'existence de I_n, pour $n \geq 1$.
Pour $n = 0$, elle est équivalente à $2\ln x$ au voisinage de 0 qui est une fonction intégrable sur $[0,1]$.

Une intégration par parties sur $[a,b] \subset]0,1[$ donne :

$$-\int_a^b \frac{x^{2n}\,\ln\left(x^2\right)}{n+1}dx = \left[-\frac{x^{2n+1}\ln x^2}{(n+1)(2n+1)}\right]_a^b + \int_a^b \frac{2x^{2n}}{(n+1)(2n+1)}dx$$

puis en prenant les limites en 0 et 1 :

$$I_n = \frac{2}{(n+1)(2n+1)^2}$$

c) Utilisons la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction h :

$$h(x) = -\sum_{n=1}^{p} \frac{x^n}{n} + \int_0^x h^{(p+1)}(t) \frac{(x-t)^p}{p!} dt$$

d'où :

$$\left| J - \sum_{n=0}^{p-1} I_n \right| \leq \int_0^1 \frac{|\ln x^2|}{x^2} |H_p(x^2)| dx$$

$$\leq \int_0^1 |g(x)| x^{2p-2} dx \leq \frac{M}{2p-1}$$

cette dernière expression tendant vers 0 lorsque p tend vers l'infini. On en déduit que :

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)(2n+1)^2}$$

4. Il suffit de reprendre la formule de Taylor de la question précédente :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{p} \frac{x^n}{n} + H_p(x)$$

et pour $x \in [0,1[, |H_p(x)| \leq x^p |\ln(1-x)|$ qui tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini. Donc pour tout $x \in [0,1[$:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Exercice 1-8

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit n un entier naturel. On pose $P_n(x) = (1+x^2)^{n+1} f^{(n)}(x)$ où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f.

a) Montrer que l'on a :

$$(1+x^2)P_n'(x) = 2(n+1)xP_n(x) + P_{n+1}(x)$$

b) Établir que P_n est un polynôme dont le terme de plus haut degré est égal à $(-1)^n(n+1)!x^n$.

3. Soit a un réel et g une fonction continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]a, +\infty[$ et qui vérifie $g(a) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

a) On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$G : x \mapsto \begin{cases} g(\frac{1}{x}+a-1) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que G est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

b) Montrer que G' s'annule en un point de $]0,1[$. En déduire que g' s'annule en un point de $]a,+\infty[$.

4. Soit h une fonction qui est continue sur l'intervalle $]-\infty,a]$, dérivable sur l'intervalle $]-\infty,a[$, telle que $h(a)=0$ et telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$. Montrer que h' s'annule en un point de l'intervalle $]-\infty,a[$.

5. Montrer par récurrence sur n que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes.

Solution :

1. La fonction $x \mapsto 1+x^2$ étant strictement positive sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞. La fonction f, qui est son inverse, est de classe C^∞.

2. a) Si $P_n(x) = (1+x^2)^{n+1} f^{(n)}(x)$, alors :

$$P_n'(x) = (n+1)2x(1+x^2)^n f^{(n)}(x) + (1+x^2)^{n+1} f^{(n+1)}(x)$$

et un calcul immédiat donne :

$$(1+x^2)P_n'(x) = 2(n+1)xP_n(x) + P_{n+1}(x)$$

b) Montrons le résultat demandé par récurrence sur n.

- $P_0 = 1$ vérifie l'hypothèse.
- Supposons l'hypothèse vérifiée pour tout $k \leq n$. Alors :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x) \\ &= (1+x^2)[(-1)^n(n+1)!nx^{n-1} + R'(x)] \\ &\qquad - 2(n+1)x\left((-1)^n(n+1)!x^n + R(x)\right) \\ &= (-1)^{n+1}(n+2)!x^{n+1} + Q(x) \end{aligned}$$

3. a) La fonction G est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 par $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Par composition, elle est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout x dans cet intevalle :

$$G'(x) = \frac{-1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}+a-1\right)$$

b) On peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction G et on en déduit qu'il existe $C \in]0,1[$ tel que $G'(C) = 0$. Donc, il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $g'(c) = 0$, avec $c = \dfrac{1}{C} + a - 1$.

4. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la fonction g définie par :

$g(x) = h(-x)$.

5. Montrons le résultat par récurrence.

- on vérifie que P_0 et P_1 admettent respectivement 0 et une racine sur $\mathbb{R}$.
- supposons que le polynôme P_n admette n racines distinctes $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. La fonction $f^{(n)}$ s'annule donc en ces points.

Du théorème de Rolle appliqué à chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}], 1 \leq i \leq n-1$, on déduit que $f^{(n+1)}$ (donc P_{n+1}) s'annule en $(n-1)$ point distincts $b_2 < b_3 < \ldots < b_n$, avec pour tout $1 \leq i \leq n-1 : b_i \in]a_i, a_{i+1}[$.
Or la fonction $f^{(n)}$ est continue sur l'intervalle $[a_n, +\infty[$, dérivable sur $]a_n, +\infty[$ et vérifie $f^{(n)}(a_n) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$. D'après la question 3, il existe $b_{n+1} > a_n$ tel que $f^{(n+1)}(b_{n+1}) = 0$.
De même, en appliquant la question 4 à $f^{(n)}$ sur l'intervalle $]-\infty, a_1[$, on trouve $b_1 < a_1$ tel que $f^{(n+1)}(b_1) = 0$.
On a ainsi trouvé $(n+1)$ points distincts où P_{n+1} s'annule.
Ce polynôme étant de degré $(n+1)$, il n'admet pas d'autres racines.

Exercice 1-9

Soit r un réel strictement positif. On considère un réel strictement positif u_0 et on définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en posant :

$$u_{n+1} = \frac{1}{r + u_n^2} \quad \text{si} \quad n \geqslant 0$$

1. Etudier la fonction $x \mapsto x^3 + rx - 1$ et montrer qu'elle s'annule en un seul point ℓ. En déduire que la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{r + x^2}$$

admet un seul point fixe (i.e. il existe un unique x_0 tel que $f(x_0) = x_0$).

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(f(x))$.

a) Que vaut $g(x)$?

b) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c que l'on déterminera, tels que pour tout x réel on a :

$$(1 - rx)(r + x^2)^2 - x = (x^3 + rx - 1)(ax^2 + bx + c)$$

c) Déterminer la fonction $x \mapsto h(x) = g(x) - x$.

3. On prend pour r la valeur 1.

a) Montrer que g admet un seul point fixe.

b) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$?

4. On prend pour r la valeur 1/2.

a) Montrer que g admet trois points fixes. On notera α et β les deux points fixes qui sont différents de ℓ avec $\alpha < \beta$.

b) On pose $E = \{\alpha, \beta, \ell\}$. Montrer que f laisse l'ensemble E invariant (i.e que l'on a $f(E) = E$).

En déduire que $\alpha < \ell < \beta$.

c) Etudier le signe de la fonction h définie par $h(x) = g(x) - x$.

d) Etudier la convergence des suites $(u_{2n})_{n \geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geqslant 0}$ en fonction de la valeur initiale u_0.

Solution :

1. Une étude immédiate montre que l'application $x \mapsto x^3 + rx - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. L'étude de ses limites en $\pm\infty$ montre qu'elle s'annule en un unique point ℓ.
Il en résulte que la fonction f admet un unique point fixe ℓ.

2. a) Un calcul immédiat donne, pour tout x réel :

$$g(x) = \frac{(r + x^2)^2}{r(r + x^2)^2 + 1}$$

b) En effectuant le produit du membre de droite et par identification, il vient :

$$(1 - rx)(r + x^2)^2 - x = (x^3 + rx - 1)(-rx^2 + x - r^2)$$

c) La fonction h est définie par :

$$h(x) = \frac{(1 - rx)(r + x^2)^2 - x}{r(r + x^2)^2 + 1} = \frac{(x^3 + rx - 1)(-rx^2 + x - r^2)}{r(r + x^2)^2 + 1}$$

Remarquons que le discriminant Δ du trinôme $-rx^2 + x - r^2$ est égal à $1 - 4r^3$.

3. a) Lorsque $r = 1$, Δ est négatif. La fonction h n'admet qu'un seul zéro qui est ℓ. La fonction g admet donc ℓ comme unique point fixe.

b) La suite (u_n) est bornée par construction. La fonction g étant croissante, les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (et bornées). Elles convergent donc chacune vers l'unique point fixe de g.
La suite (u_n) converge donc vers ℓ.

4. a) Lorsque $r = 1/2$, Δ est strictement positif. La fonction h a trois zéros et la fonction g admet trois points fixes α, β, ℓ. Un calcul immédiat donne :

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Posons $E = \{\alpha, \beta, \ell\}$. On remarque que :

$$f(\alpha) = f(g(\alpha)) = g(f(\alpha)),\ f(\beta) = f(g(\beta)) = g(f(\beta)).$$

L'application f étant injective, les points $f(\alpha), f(\beta)$ ℓ sont trois points distincts, invariants par g. Comme f admet un unique point fixe, il vient :

$$f(\alpha) = \beta,\ f(\beta) = \alpha$$

On considère alors les différentes possibilités pour ordonner α, β et ℓ, et en appliquant f, on a nécessairement $\alpha < l < \beta$.

c) Le signe de h est immédiat :

$$\operatorname{sgn}(h(x)) = \begin{cases} +1 & x \in]-\infty, \alpha[\cup]\ell, \beta[\\ -1 & x \in]\alpha, \ell[\cup]\beta, +\infty[\end{cases}$$

d) Il faut distinguer plusieurs cas :

• $0 < u_0 < \alpha$. On a alors $h(u_0) > 0$ et donc $u_2 > u_0$. La fonction g étant croissante, la suite (u_{2n}) est croissante et majorée par α.

Elle converge vers un point fixe de g qui ne peut être que α.

Comme f est décroissante, la suite (u_{2n+1}) est décroissante (car $u_{2n+1} = f(u_{2n})$) et minorée par $\beta = f(\alpha)$. Elle converge donc vers β.

• $u_0 = \alpha$. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont constantes égales respectivement à α et β.

• $\alpha < u_0 < \ell$. Le tableau des signes de h et un raisonnement identique à celui du premier cas montrent que la suite (u_{2n}) est décroissante et converge vers α, alors que la suite (u_{2n+1}) est croissante et converge vers β.

• $u_0 = \ell$. La suite (u_n) est constante égale à ℓ.

• $\ell < u_0 < \beta$. La suite (u_{2n}) est croissante et converge vers β, alors que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et converge vers α.

• $u_0 = \beta$. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont constantes égales respectivement à β et α.

• $u_0 > \beta$. La suite (u_{2n}) est décroissante et converge vers β, alors que la suite (u_{2n+1}) est croissante et converge vers α.

Exercice 1-10

On considère une fonction f définie et continue sur $[0, \pi]$ et l'intégrale

$$I_n = \int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt.$$

1. On suppose dans cette question seulement que f est de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que la suite (I_n) tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

2. On suppose ici que f est seulement de classe C^0 sur $[0, \pi]$. On veut démontrer que le résultat précédent est encore valable.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout n-uplet de réels $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ associe le nombre $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \left(f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \sin(kt)\right)^2 dt$.

On pose $b_k(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(kt)dt$.

Enfin, on rappelle que pour tout couple de réels (a, b), on a

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right).$$

Calculer pour tout couple (k, l) d'entiers strictement positifs l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin(kt)\sin(lt)dt.$$

En déduire que quel que soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2\sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(t)dt$$

b) Montrer que F admet un minimum global au point $(b_1(f), \cdots, b_n(f))$. Quelle est la valeur de ce minimum ?

c) Montrer que la série $\sum (b_k(f))^2$ est convergente et donner un majorant de sa somme.

d) Conclure.

Solution :

1. Les deux fonctions à intégrer étant de classe C^1 sur $[0, \pi]$, une intégration par parties donne :

$$I_n = \left[-\frac{1}{n}f(t)\cos nt\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi f'(t)\cos nt dt$$

Les fonctions f et f' sont bornées sur le segment $[0, \pi]$ par M et M' respectivement. Ainsi :

$$|I_n| \leq \frac{2M}{n} + \frac{\pi M'}{n}$$

cette dernière expression tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

2. a) Comme $\sin kt \sin \ell t = \dfrac{1}{2}\cos(k-\ell)t - \dfrac{1}{2}\cos(k+\ell)t$, il vient :

$$\int_0^\pi \sin(kt)\sin(lt)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ \pi/2 & \text{si } k = l \end{cases}$$

Ainsi :

$$F(a_1, \ldots, a_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(t)dt - 2\sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^n a_k \sin(kt)\right)^2 dt$$

Lorsqu'on développe le carré de la dernière expression, tous les termes des doubles produits ont une intégrale nulle, alors que l'intégrale des autres termes vaut $\dfrac{\pi}{2}$. On obtient ainsi le résultat demandé.

b) Il suffit de vérifier, par un calcul, que :

$$F(a_1,\ldots,a_n) - F(b_1(f),\ldots,b_n(f)) = \sum_{k=1}^{n} [a_k - b_k(f)]^2 \geq 0$$

Il en résulte que F admet un minimum global en $(b_1(f),\ldots,b_n(f))$.

c) Comme F est à valeurs positives, son minimum est positif ou nul, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2(f) - 2\sum_{k=1}^{n} b_k(f)b_k(f) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt \geq 0$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2(f) \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt$$

Les sommes partielles de la série $\sum b_k^2(f)$ sont majorées par $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f^2(t)dt$. La série est donc convergente et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2(f) \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt$$

d) Puisque la série $\sum b_k^2(f)$ converge, son terme général tend vers 0 c'est-à-dire $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k(f) = 0$.

Ce résultat suppose seulement que f soit continue sur $[0,\pi]$.

Exercice 1-11

Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(f(x)) = \sin(f(x))$$

Solution :

On sait que les solutions de l'équation $\cos x = \sin y$ sont :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} - y + 2k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{2} + y + 2k\pi \end{cases}$$

Donc $\cos(f(x)) = \sin(f(x))$ est équivalent à :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\pi}{2} - f(x) + 2k\pi \\ f(x) = \dfrac{-\pi}{2} + f(x) + 2k\pi \end{cases}$$

La seconde solution est impossible. La première correspond à $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, k étant une fonction de x. Mais f étant une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle et f est une fonction constante de la forme $\dfrac{\pi}{4} + k_0\pi$.

Exercice 1-12

On rappelle les formules trigonométriques suivantes :

$$\begin{cases} \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t} dt$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et J_n sont des intégrales convergentes.

Pour $n \geqslant 1$, déterminer $I_n - I_{n-1}$. En déduire la valeur de I_n, pour tout $n \geq 0$.

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

3. Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$.
En utilisant à une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin[(2n+1)t]dt = 0.$$

4. Soit g l'application définie sur $]0, \pi/2]$ par $g(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)} = \dfrac{\sin(t) - t}{t\sin(t)}$.

Montrer que g est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty}(I_n - J_n)$ puis $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$

5. Comparer J_n et $\displaystyle\int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u} du$.

En déduire finalement la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$.

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonction $t \mapsto \dfrac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}$ et $t \mapsto \dfrac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}$ sont continues sur $]0, \pi/2]$ et prolongeables par continuité en 0 par $(2n+1)$.
Ainsi les intégrales I_n et J_n existent.
L'utilisation de la formule trigonométrique

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

donne :

$$I_{n+1} - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \cos(2nt)\,dt = 0$$

et comme $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, il vient, pour tout $n \geq 0$, $I_n = I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Une intégration par parties donne, pour tout $A > 0$:

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}dt$$

Or par les régles de comparaison avec les intégrales de Riemann :

$$\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

entraîne que $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. De plus $\lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{\cos A}{A^2} = 0$ entraîne que :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{\sin t}{t}dt \text{ existe et est égale à } \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$$

3. Une intégration par parties pour f de classe C^1 donne :

$$\int_a^b f(t)\sin(2n+1)tdt = \left[\frac{-1}{2n+1}f(t)\cos(2n+1)t\right]_a^b + \frac{1}{2n+1}\int_a^b f'(t)\cos(2n+1)tdt$$

Les fonctions $t \mapsto f(t)\cos(2n+1)t$ et $t \mapsto f'(t)\cos(2n+1)t$ étant continues sur le segment $[a, b]$, elle y sont bornées par des constantes M et N. Ainsi :

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(2n+1)tdt\right| \leq \frac{M}{2n+1} + \frac{N(b-a)}{2n+1}$$

et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t)\sin(2n+1)tdt = 0$$

4. La fonction g est clairement de classe C^1 sur $]0,\pi/2]$. Au voisinage de 0, un développement limité donne :

$$g(x) = \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{-x^3/6 + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = -\frac{x}{6} + o(x)$$

Ainsi, on peut prolonger g en $x = 0$ par $g(0) = 0$. Il reste à prouver que g' est une fonction continue en $x = 0$. Pour cela :

$$g'(x) = \frac{x^2 \cos x - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)}$$

et un développement limité de g' en 0 donnent :

$$g'(x) = -\frac{1}{6} + o(1)$$

D'après le théorème de prolongement de la dérivée, on en déduit qu g est dérivable en 0, que $g'(0) = 1/6$ et que g' est continue en 0. Ainsi g est de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$.

On a alors $I_n - J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g(t)\sin(2n+1)t dt$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (question 3.) D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$$

5. En posant $t = \dfrac{u}{2n+1}$, il vient :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u} du$$

et d'après la question 2, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 1-13

1. Étudier la fonction définie par $f(x) = 1 - \sin x$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = 1 - \sin u_n$$

Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \geq 3$, on a $\alpha \leq u_n \leq 1$. Etudier la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Solution :

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique. Comme $f(\pi - x) = f(x)$, il suffit de faire l'étude sur le segment $[-\pi/2, \pi/2]$, puis de compléter le dessin par une symétrie par rapport à la verticale d'abscisse $\pi/2$, suivie de translations horizontales d'amplitudes $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ayant $f'(x) = -\cos x$, f est décroissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$, avec $f(-\pi/2) = 2$ et $f(\pi/2) = 0$. Le dessin s'en déduit sans peine.

2. u_0 est réel, donc $u_1 \in f(\mathbb{R}) = [0,2] \in [0,\pi]$. Par conséquent :
$u_1 \in f([0,\pi]) = [0,1] \subset [0,\pi/2]$
$u_2 \in f([0,1]) = [\alpha, 1] \subset [0,1]$, avec $\alpha = 1 - \sin 1 > 0$.
A partir du rang 3, on a donc $u_n \in [\alpha, 1]$.

$\star$ Comme f est continue, si la suite u converge, sa limite ℓ est un point fixe de f.
Une étude rapide de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ montre que cette fonction est décroissante et s'annule en un unique point de $\mathbb{R}$.
On a :

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 1 - \sin\alpha - \alpha = \sin 1 - \sin\alpha > 0 \text{ et } g(1) = -\sin 1 < 0,$$

ce qui prouve que $\alpha \leq \ell \leq 1$.
Or sur $[\alpha, 1]$, $|f'(x)| = \cos x \leq \cos\alpha < 1$. Ainsi, par application de l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall\, n \geq 3, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \cos\alpha |u_n - \ell|$$

Ainsi, $\forall\, n \geq 3, |u_n - \ell| \leq (\cos\alpha)^{n-3}|u_3 - \ell|$.
Puisque $|\cos\alpha| < 1$, on en déduit : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

Exercice 1-14

1. Etudier la fonction réelle $f : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ et tracer sa courbe représentative.

2. Etudier la série $\sum\limits_n \dfrac{1}{n \ln n}$.

3. On considère une suite réelle $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$x_0 > 0, x_1 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n \ln n} x_{n-2}$$

a) Écrire un programme en Pascal qui calcule et affiche les termes successifs de cette suite pour des valeurs initiales et jusqu'à un rang n entrés par l'utilisateur.

b) Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.

c) Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
Que se passe-t-il si on remplace les conditions initiales par $x_0 < 0$ et $x_1 < 0$?

Solution :

1. La fonction f est définie et de classe C^∞ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Sa dérivée vaut :

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x\ln x)^2}$$

Son signe est déterminé par celui de $\ln x + 1$ soit :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^{-1}$$

2. La fonction f étant positive, décroissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$, on peut faire une comparaison série/intégrale, soit, pour tout $k \geq 2$:

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x\ln x} \leq \frac{1}{k\ln k}$$

En notant $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$ et en sommant les inégalités précédentes :

$$S_n \geq \int_2^{n+1} \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$$

ce qui entraîne la divergence de la série proposée.

3. a) Voici une proposition de programme :

```
program
Var a,b,c : real ;
i,n : integer ;
Begin
writeln('premier terme, x0>0 ?') ; readln (a) ;
writeln('second terme, x1>0 ?') ; readln (b) ;
writeln('rang, n ?') ; readln (n) ;
For i := 2 to n do
begin
c := b+a/(n*ln(n)) ;
writeln('au rang', i, 'la suite vaut :', c) ;
a := b ; b := c
end ;
End.
```

b) Comme $x_0 > 0$ et $x_1 > 0$ et $n\ln n > 0$, on montre par récurrence que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\forall n \geq 2,\ x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-2}}{n\ln n} > 0$$

ce qui signifie que la suite (x_n) est strictement croissante.

c) La suite (x_n) étant strictement croissante, on a, pour tout $n \geq 2, x_n > x_1$ et donc :

$$x_n - x_{n-1} \geq x_1 \frac{1}{n \ln n}$$

En sommant, il vient :

$$x_n - x_2 \geq x_1 \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln k} \right)$$

Et comme $x_1 > 0$, la suite (x_n) tend vers l'infini.

d) Si $x_0 < 0$ et $x_1 < 0$, on est ramené à l'étude précédente avec $y_n = -x_n$. Dans ce cas, (x_n) tend vers $-\infty$.

Exercice 1-15

On considère un entier naturel non nul n, et la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution. On notera a_n cette solution.

2. Écrire un programme en Pascal qui détermine et affiche une valeur approchée de a_n à 10^{-2} près pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

3. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et convergente.

4. Quelle est la nature de la série $\sum_n a_n$?

5. Quelle est la nature de la série $\sum_n n^\alpha \left(a_n - \frac{2}{n^2} \right)$?

Solution :

1. Une étude rapide de la fonction f_n montre que $f'_n(x) = nx^2 + n^2 > 0$. La fonction f_n est strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et continue. Elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution réelle $a_n = f_n^{-1}(0)$.
On remarque que $a_n \in]0, 1[$, puisque $f_n(0) = -2$ et $f_n(1) = n^2 + n - 2 > 0$ si $n \geq 2$.

2. Utilisons la méthode de dichotomie sur $[0, 1]$.

```
Function f(n :integer ; x : real) : real ;
begin
f := n*x*x*x+n*n*x-2
end ;
Function racine : real ;
```

```
Var z, eps, a, b : real ;
begin
Writeln('Entrez une valeur de n') ; readln(n) ;
a := 0 ; b := 1 ;  eps := abs(b-a) ;
while eps >= .01
begin
c := (a+b)/2 ;
z := f(n,c) ;
if z<0 then b := c else a := c ;
eps := abs(b-a)
end ;
racine := c
end ;
```

3. On a :

$$f_{n+1}(a_n) = (n+1)a_n^3 + (n+1)^2 a_n - 2 = a_n^3 + (2n+1)a_n > 0$$

Comme f_n est strictement croissante et comme $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$, il vient : $a_{n+1} < a_n$. La suite (a_n) est positive et décroissante ; elle converge vers une limite $\ell \geq 0$. Comme $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + n - 2 \geq 0$, on a :

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

4. On peut écrire :

$$2 = na_n(a_n^2 + n) \sim n^2 a_n$$

Ainsi $a_n \sim \frac{2}{n^2}$. La positivité de a_n entraîne que la série $\sum a_n$ est convergente.

5. On a pour $n \geq 1$:

$$a_n - \frac{2}{n^2} = \frac{n^2 a_n - 2}{n^2} = -\frac{a_n^3}{n} < 0$$

Ainsi $\left(\frac{2}{n^2} - a_n\right) n^\alpha > 0$ et

$$\left(\frac{2}{n^2} - a_n\right) n^\alpha \sim \frac{a_n^3}{n} n^\alpha \sim \frac{8}{n^{7-\alpha}}$$

Enfin la série $\sum \frac{8}{n^{7-\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha < 6$.

Exercice 1-16

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On rappelle que f est convexe sur $\mathbb{R}$ si pour tout entier $n \geq 2$: $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$$

1. Démontrer que $\sqrt[n]{n!} \leq (n+1)/2$.

2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

3. Étudier la convergence de la suite définie, pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln i}{n^2}\right)$$

Solution :

1. La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$, puisque sa dérivée seconde est positive. Donc, pour $n \geq 1$:

$$(n!)^{1/n} = e^{1/n \ln(n!)} = e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\ln k}$$

Donc

$$(n!)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

2. Il suffit d'étudier rapidement les fonctions $x \mapsto \ln(1+x) - x$ et $x \mapsto \ln(1+x) - x - \dfrac{x^2}{2}$ pour démontrer les inégalités demandées.

3. Chacun des termes du produit est strictement positif. On peut donc prendre le logarithme de u_n, soit :

$$v_n = \ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\ln k}{n^2}\right)$$

D'après la question précédente, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{\ln k}{n^2} - \frac{\ln^2 k}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{\ln k}{n^2}\right) \leq \frac{\ln k}{n^2}$$

D'où :

$$\frac{\ln n!}{n^2} - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2 \leq v_n \leq \frac{\ln n!}{n^2}$$

Mais :

$$\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2 \leq \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$$

entraîne que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2 = 0$$

Et par la première question :

$$0 \leq \frac{\ln n!}{n^2} = \frac{1}{n}\ln(n!)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n!}{n^2} = 0$$

Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

Exercice 1-17

Soit a un réel strictement positif. On note $I =]-a, a[$.
Dans tout l'exercice, on considère une application f de $I \times I$ dans I qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times I$ et pour laquelle il existe un réel $k \in [0, 1[$ vérifiant : $\forall (x, y) \in I \times I$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq k$$

1. Soit (x, y) et (x_0, y_0) deux couples de $I \times I$. On définit l'application φ sur $[0, 1]$ par :

$$\varphi(t) = f\left((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty\right)$$

a) Montrer que φ est dérivable sur $[0, 1]$ et exprimer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

b) En déduire que

$$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| \leq k. \max(|x - x_0|, |y - y_0|)$$

2. Soient $(\alpha, \beta) \in I \times I$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \alpha, \quad u_1 = \beta, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \max(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+1} - u_n|)$.

a) Etudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2}\hat{\text{E}} \leq ka_n$.

c) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.

d) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3. Montrer que la limite de la suite (u_n) est indépendante du couple (α, β).

Solution :

1. a) φ est dérivable sur $[0, 1]$, et même de classe $\mathcal{C}^1$, car composée de telles fonctions et, par application de la formule générale :

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = (x - x_0)&\frac{\partial f}{\partial x}((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty) \\ &+ (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty)\end{aligned}$$

b) On a donc $\forall t \in [0, 1], |\varphi'(t)| \leq \max(|x - x_0|, |y - t_0|).k$, et par application de l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| \leq \max(|x - x_0|, |y - y_0|).k$$

2. a) Pour tout n :
$$|u_{n+3} - u_{n+2}| = |f(u_{n+2}, u_{n+1}) - f(u_{n+1}, u_n)| \leq k.a_n \leq a_n.$$
De plus, par définition de a_n, on a $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq a_n$. D'où :
$$a_{n+1} = \max(|u_{n+3} - u_{n+2}|, |u_{n+2} - u_{n+1}|) \leq a_n$$
La suite (a_n) est donc décroissante.

b) On a : $|u_{n+3} - u_{n+2}| \leq k.a_n$ et $|u_{n+4} - u_{n+3}| \leq k.a_{n+1} \leq k.a_n$.
Par conséquent : $a_{n+2} = \max(|u_{n+4} - u_{n+3}|, |u_{n+3} - u_{n+2}|) \leq ka_n$.

c) Ainsi, par récurrence, $a_{2n} \leq k^n a_0$ et $a_{2n+1} \leq k^n a_1$.
On en déduit : $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n \leq (a_0 + a_1)\dfrac{1}{1-k}$ (en majorant les sommes partielles de la série géométrique de raison k, par la somme de cette série).
Ainsi la série à termes positifs $\sum a_n$ a ses sommes partielles majorées, donc est convergente.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_{n+1} - u_n| \leq a_n$. La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est donc (absolument) convergente, ce qui signifie que la suite de terme général u_n est convergente.

3. Soient (u_n) et (u'_n) les suites définies comme en 2. et initialisées respectivement par les couples (α, β) et (α', β').
D'après la question 2. d) ces suites convergent. Notons $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim u'$.
Pour tout n, on a : $|u_{n+2} - u'_{n+2}| \leq k.\max(|u_{n+1} - u'_{n+1}|, |u_n - u'_n|)$, ce qui, par prolongement des inégalités à la limite donne :
$$|\ell - \ell'| \leq k.|\ell - \ell'|$$
Comme $0 \leq k < 1$, on en déduit $\ell = \ell'$ et la limite de u ne dépend pas de ses deux premiers termes.

Exercice 1-18

Dans tout l'exercice, g désigne une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, qui est périodique de période 1.

1. a) Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} g(x)\,dx$ est convergente. On pose alors $G(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} g(x)\,dx$.

b) Montrer que $G(\lambda)$ admet une limite quand λ tend vers $+\infty$ et préciser sa valeur.

2. a) Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$,
$$G(\lambda) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda x} g(x)\,dx$$

b) Justifier l'existence d'un réel positif M tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |\mathrm{e}^{-x} - 1 + x| \leq Mx^2$$

et en déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda x} g(x)\, dx$.

c) Montrer que $G(\lambda)$ possède une limite finie quand λ tend vers 0 par valeurs supérieures si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx = 0$ et montrer que cette limite vaut alors $\displaystyle\int_0^1 -xg(x)\, dx$.

3. Dans cette question on suppose de plus que g est à valeurs positives ou nulles et que g est différente de la fonction nulle.
Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, décroissante et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge.

a) Montrer que $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx$ est strictement positif.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$\int_{n-1}^{n} f(x)g(x)\, dx \geq J.\int_n^{n+1} f(x)\, dx$$

c) En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\, dx$.

Solution :

1. a) La fonction g est continue et périodique, donc est bornée. Il existe M tel que : $\forall\, x, |\mathrm{e}^{-\lambda x} g(x)| \leq M.\mathrm{e}^{-\lambda x}$. La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$ donne alors la convergence (absolue) de l'intégrale proposée.

b) De plus $|G(\lambda)| \leq M\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \frac{M}{\lambda} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} G(\lambda) = 0$.

2. a) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt = \int_0^1 \ldots + \int_1^x \ldots = \int_0^1 \ldots + \int_0^{x-1} \mathrm{e}^{-\lambda(u+1)} g(u+1)\, du$

Par 1-périodicité de g, on en déduit, pour $x \geq 1$:

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt + \mathrm{e}^{-\lambda} \int_0^{x-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt$$

et, en faisant tendre x vers l'infini : $G(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt + \mathrm{e}^{-\lambda} G(\lambda)$, *i.e.* :

$$G(\lambda) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt$$

b) La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, par l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+, |\mathrm{e}^{-x} - 1 + x| \leq \frac{x^2}{2} \sup_{[0,x]} |f''| = \frac{x^2}{2}$$

D'où : $\left|\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\,dt - \int_0^1 g(t)\,dt + \lambda \int_0^1 tg(t)\,dt\right| \leq \dfrac{\lambda^2}{2} \displaystyle\int_0^1 t^2 g(t)\,dt$

et, en chassant les valeurs absolues :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\,dt \leq \int_0^1 g(t)\,dt - \lambda \int_0^1 tg(t)\,dt + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 t^2 g(t)\,dt$$
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\,dt \geq \int_0^1 g(t)\,dt - \lambda \int_0^1 tg(t)\,dt - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 t^2 g(t)\,dt$$

c) Par encadrement, on a donc $\displaystyle\lim_{\lambda \to 0^+} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt$.

$\star$ Si $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt 0$, La formule vue en 2. a) montre que$G(\lambda)$ n'a pas de limite finie lorsque λ tend vers 0, puisque le facteur placé devant l'intégrale est de limite infinie.

$\star$ Si $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt = 0$, l'encadrement vu en b) donne :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\,dt = -\lambda \int_0^1 tg(t)\,dt + o(\lambda)$$

Tandis que $1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \sim \lambda$, d'où $\displaystyle\lim_{\lambda \to 0^+} G(\lambda) = -\int_0^1 tg(t)\,dt$

3. a) g n'est pas la fonction nulle et est 1-périodique, donc il existe au moins un point x de $[0,1]$ tel que $g(x) 0$. Par positivité et continuité de g, on en déduit $J > 0$.

b) Par décroissance de f, on a :

$$\int_{n-1}^n f(x)g(x)\,dx \geq f(n) \int_{n-1}^n g(x)\,dx = f(n).J$$

Comme $f(n) \geq \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$ (encore par décroissance de f), on a bien l'inégalité demandée.

c) Par sommation : $\displaystyle\int_0^n f(x)g(x)\,dx \geq J \int_1^{n+1} f(x)\,dx \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui prouve la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$.

Exercice 1-19

1. Etudier pour un réel x donné, la convergence des intégrales

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$
$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

2. Montrer que pour a et h réels :
$$|\cos(a+h) - \cos(a) + h\sin(a)| \leq \frac{1}{2}h^2$$

3. En déduire que
$$|F(x) - F(x_0) - (x-x_0)G(x_0)| \leq \frac{1}{2}(x-x_0)^2 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

4. Montrer que la fonction F est dérivable, quelle est sa dérivée ?

5. On pose $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\, dt$

Montrer par une méthode analogue à celle des questions 3 et 4 que G est dérivable et que $G'(x) = H(x)$

6. Vérifier que $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{-\mathrm{e}^{-t}\cos(tx) + x.\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{1+x^2}\right) = \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}$.

En déduire $H(x)$.

7. A l'aide du changement de variable $x = \tan u$ dans $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, calculer $G(1)$. En déduire que $F(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

Solution :

1. a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(tx)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et se prolonge par continuité en 0, car au voisinage de ce point :
$$\frac{1-\cos(tx)}{t^2}\mathrm{e}^{-t} \sim \frac{t^2x^2}{2t^2} = \frac{x^2}{2}$$
De plus, pour tout $t > 0$:
$$\left|\frac{1-\cos(tx)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\right| \leq \frac{2}{t^2}$$
ce qui montre que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(tx)}{t}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et se prolonge par continuité en 0, car au voisinage de ce point :
$$\frac{\sin(tx)}{t}\mathrm{e}^{-t} \sim \frac{tx}{t} = x$$
De plus, pour tout $t > 0$:
$$\left|\frac{\sin(tx)}{t}\mathrm{e}^{-t}\right| \leq |x|e^{-t}$$

ce qui montre que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2. Pour montrer que pour a et h réels :

$$|\cos(a+h) - \cos(a) + h\sin(a)| \leq \frac{1}{2}h^2$$

il suffit d'appliquer l'inégalité de Taylor à la fonction $x \mapsto \cos x$ sur $[a, a+h]$.

3. On a par linéarité :

$$F(x) - F(x_0) - (x - x_0)G(x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{-\cos(tx) + \cos(tx_0) - t\sin(tx_0)}{t^2} e^{-t}\,dt$$

Par la question précédente :

$$|-\cos(tx) + \cos(tx_0) - t\sin(tx_0)| \leq \frac{1}{2}(tx - tx_0)^2$$

Donc :

$$|F(x) - F(x_0) - (x - x_0)G(x_0)| \leq \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$$

4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Par la question précédente, pour tout $x \neq x_0$, on a :

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - G(x_0)\right| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$$

ce qui entraîne que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = G(x_0)$.

5. La fonction H est définie sur $\mathbb{R}$, puisque $t \mapsto \cos(tx)e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $|\cos(tx)e^{-t}| \leq e^{-t}$. En appliquant l'inégalité de Taylor à la fonction sinus, il vient :

$$|G(x) - G(x_0) - (x - x_0)H(x_0)| \leq \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = (x - x_0)^2$$

ce qui entraîne que, pour tout $x \neq x_0$:

$$\left|\frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} - H(x)\right| \leq |x - x_0|$$

6. La vérification de $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{-\mathrm{e}^{-t}\cos(tx) + x.\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{1 + x^2}\right) = \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}$ est immédiate. Soit $A > 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^A \cos(tx)e^{-t}dt &= \left[\frac{-\mathrm{e}^{-t}\cos(tx) + x.\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{1 + x^2}\right]_0^A \\ &= \frac{1}{1 + x^2} + \frac{-\mathrm{e}^{-A}\cos(Ax) + x.\mathrm{e}^{-A}\sin(Ax)}{1 + x^2}\end{aligned}$$

Il reste à faire tendre A vers l'infini pour obtenir :

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-t}dt = \frac{1}{1 + x^2}$$

7. Sachant que $F(0) = 0$, on peut écrire :

$$F(x) = \int_0^x F'(t)\,dt = \int_0^x G(t)\,dt = xG(x) - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt = xG(x) - \frac{\ln x}{2}$$

Pour $x = 1$:

$$G(1) = \int_0^1 G'(t)\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} \quad (t = \tan(u/2))$$

entraîne que :

$$F(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

Exercice 1-20

1. Montrer que pour x réel non nul, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est convergente.

Dans la suite de l'exercice, on pose alors $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$

2. Montrer que f est une fonction paire et déterminer le signe de $f(x)$.

3. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. A l'aide d'un changement de variable simple, montrer que pour $x > 0$, on a :

$$x.f(x) = f(\frac{1}{x})$$

5. En découpant l'intégrale définissant $f(x)$ à l'aide de la borne intermédiaire $\sqrt{x}$, et en effectuant un changement de variable dans la seconde intégrale, montrer que pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$$

6. a) Quelle est la dérivée de la fonction $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$? En déduire, pour $x > 0$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

b) Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) \leq \dfrac{2}{x}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$. En déduire $\lim\limits_{+\infty} f$.

7. a) Montrer que pour $x > 0$:

$$0 \leq \frac{2}{x}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - f(x) \leq \frac{2}{x^3}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{1}{x^2}$$

En déduire que $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{\ln x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

b) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et est dominée par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

La règle de Riemann permet de conclure à la convergence.

2. La parité de f est évidente, et la positivité de la fonction à intégrer donne la (stricte) positivité de $f(x)$.

3. Pour $0 < x < y$ et $t \geq 0$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(y^2+t^2)}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$.

Par conservation des inégalités par intégration, puisque les bornes sont dans le sens croissant, on conclut à la décroissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, fait d'abord sur un segment $[\alpha, \beta]$, avec $0 < \alpha < \beta$, suivi d'un passage à la limite donne :

$$f(x) = \int_{+\infty}^{0} \frac{-\frac{du}{u^2}}{\sqrt{(1+\frac{1}{u^2})(x^2+\frac{1}{u^2})}} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2+1)(u^2+\frac{1}{x^2})}} = \frac{1}{x} f(\frac{1}{x})$$

5. On écrit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \ldots + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \ldots$

Dans la première intégrale, on fait le changement de variable $u = \frac{x}{t}$ (d'abord sur un segment $[\alpha, \sqrt{x}]$ puis on passe à la limite et on se rend alors compte que les deux intégrales sont égales. D'où :

$$f(x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$$

6. a) La dérivée de $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ est $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. On en déduit :

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \Big[\ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big]_0^{\sqrt{x}} = \ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$$

b) Or, pour tout $x > 0$, $f(x) \leq 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)x^2}} = \frac{2}{x}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)}}$

et donc : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$.

Or $\dfrac{2}{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

7. a) En plaçant tout sous la même intégrale, et en réduisant au même dénominateur, on a :

$$\frac{2}{x}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - f(x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2\,dt}{(\sqrt{x^2+t^2}+\sqrt{x^2})\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)x^2}}$$

$$\leq \frac{2}{x^3}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{2}{x^3}\int_0^{\sqrt{x}} t\,dt = \frac{1}{x^2}$$

Comme $\dfrac{1}{x^2}$ est négligeable devant $\dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{2}{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$, on en déduit que $f(x)$ est équivalent au voisinage de $+\infty$ à $\dfrac{2}{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$, donc également à $\dfrac{\ln x}{x}$.

b) Comme $f(x) = \dfrac{1}{x}f(\dfrac{1}{x})$, on a : $f(x) \underset{(0)}{\sim} \dfrac{1}{x}\dfrac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -\ln x$

Exercice 1-21

On note f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \text{ est strictement positif} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note I_n l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Préciser sa dérivée à droite en zéro.
Montrer que f est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$, de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, montrer que la dérivée de f s'annule sur I_n en un unique point noté x_n.
4. Montrer l'existence de deux suites réelles $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(y_n) = \frac{1}{y_n},\ f(z_n) = -\frac{1}{z_n}, \text{ avec } y_n \text{ dans } I_{2n}\ , \text{ et } z_n \text{ dans } I_{2n+1}.$$

Déterminer la dérivée de f en y_n et en z_n. Que peut-on en conclure ?

5. Etudier les variations de f sur I_0, puis sur I_{2n} et I_{2n-1}, pour $n \geqslant 1$.

6. Tracer la courbe représentative de f sur $[0, 3\pi]$.

Solution :

1. La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $\sin x \underset{(0)}{\sim} x$, le choix de $f(0)$ est tel que f est aussi continue en 0, donc sur $\mathbb{R}_+$.

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, car quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, le dénominateur ne s'annulant pas.
$\star$ Pour $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Un développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 donne : $x\cos x - \sin x = -\dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, et :

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x + o(x)$$

Ainsi, f' a une limite en 0 et comme f est continue en 0, on en déduit par théorème, que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = -\frac{1}{3}$ et f' est donc continue en 0.
Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

$\star$ De la même façon, on a pour $x > 0$, $f''(x) = -\dfrac{\sin x}{x} - 2\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ et le même développement limité que précédemment donne $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x) = -\dfrac{1}{3}$.
Ainsi f est deux fois dérivable en 0 avec $f''(0) = -\dfrac{1}{3}$ et f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. Le signe de f' sur I_n est celui de $g : x \mapsto x\cos x - \sin x$.
On a $g'(x) = -x\sin x$ et donc, pour n pair, g est strictement décroissante sur I_n, tandis que pour n impair elle est strictement croissante sur I_n.
Comme $g(2n\pi) > 0$ et $g((2n+1)\pi) < 0$, on en déduit que g, donc f', s'annule une fois et une seule sur chaque intervalle I_n.

4. Il est clair que $y_n = (2n + \frac{1}{2})\pi$ et $z_n = (2n + \frac{3}{2})\pi$.
On a alors $f'(y_n) = -\dfrac{1}{y_n^2}$ et $f'(z_n) = \dfrac{1}{z_n^2}$.
On en conclut qu'aux points d'abscisses y_n la courbe représentative de f est tangente à l'hyperbole d'équation $xy = 1$, tandis qu'aux points d'abscisses z_n elle est tangente à l'hyperbole d'équation $xy = -1$.

5. Les questions précédentes permettent de conclure :

$\star$ f est strictement décroissante sur I_0 ;

$\star$ Pour $n \geq 1$, f est strictement décroissante sur $[(2n-1)\pi, x_{2n-1}]$, strictement croissante sur $[x_{2n-1}, x_{2n}]$ et à nouveau strictement décroissante sur $[x_{2n}, (2n+1)\pi]$.

6. L'esquisse du tracé (en forme de «sinusoïde amortie») s'en déduit sans peine.

Exercice 1-22

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on considère l'équation (E_n) définie par :

$$(E_n) \quad x^{n+2} - 2.x^{n+1} + x^n + x^3 - (2+n)x^2 + x(1+2n) - n = 0$$

1. Montrer que 1 est solution de (E_n) et déterminer son ordre de multiplicité en fonction de n.

2. a) Désormais on suppose que n est supérieur ou égal à trois. Montrer qu'il existe une solution et une seule de (E_n) dans l'intervalle $]1, +\infty[$. Dans la suite on note a_n cette solution.

b) Ecrire un programme turbo-pascal permettant d'obtenir une valeur approchée de a_3 à ε près, $\varepsilon > 0$ étant donné.

3. Montrer que la suite de terme général a_n converge et déterminer sa limite L (on pourra, par exemple, comparer a_n et $1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, pour n assez grand).

4. Déterminer un équivalent simple de $a_n - L$, quand n tend vers l'infini.

Solution :

1. Soit $P = X^{n+2} - 2X^{n+1} + X^n + X^3 - (2+n)X^2 + X(1+2n) - n$.

Des calculs simples donnent $P(1) = P'(1) = 0$. Par conséquent P est divisible par $(X-1)^2$ et on voit alors que $P = (X-1)^2(X^n + X - n) = (X-1)^2 Q$.

Si $n = 2$, on a encore $Q(1) = 0$ et 1 est racine triple de P.
Si $n2$, alors 1 n'est pas racine de Q et 1 est racine double de P.

2. a) Chercher les solutions de (E_n) dans $]1,+\infty[$, revient à chercher les solutions, dans cet intervalle, de l'équation $x^n + x - n = 0$.

Une étude rapide de la fonction $f_n : [1,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^n + x - n$ montre que cette fonction est strictement croissante, telle que $f_n(1) = 2-n < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
Ainsi, par le théorème de la bijection, f_n s'annule en un point a_n et un seul de $]1,+\infty[$.

b) On peut procéder par dichotomie, en notant déjà que $f_3(2) = 7 > 0$ et donc que l'on a : $1 < a_3 < 2$.

Après les présentations d'usage, le corps du programme est alors :

```
...A :=1 ; B :=2 ;
While B-A>eps do
  begin M :=(A+B)/2 ;
  if M*M*M+M-3 < 0 then A := M else B := M
  end ;
  R :=(A+B)/2 ...end.
```

3. On a : $f_n\big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\big) = \big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\big)^n + 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - n$.

Or : $\ln\Big[\big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\big)^n\Big] = n\ln\big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\big) = \sqrt{n} - \frac{1}{2} + o(1)$, donc :

$$\Big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n \sim \mathrm{e}^{-1/2}.\mathrm{e}^{\sqrt{n}}$$

Cette expression domine largement n, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\big) = +\infty$.

Par conséquent, pour n assez grand, $f_n\big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\big) > 0$, d'où $1 < a_n < 1+\frac{1}{\sqrt{n}}$, et :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

4. Posons $a_n = 1 + \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \to 0$.

On a : $(1+\varepsilon_n)^n = n-1-\varepsilon_n$, *i.e.* $\ln(n-1-\varepsilon_n) = n\ln(1+\varepsilon_n)$.
Ce que l'on peut écrire :

$$n.\varepsilon_n \sim n\ln(1+\varepsilon_n) = \ln n + \ln(1-\frac{1}{n}-\frac{\varepsilon_n}{n}) \sim \ln n$$

$$a_n - 1 = \varepsilon_n \sim \frac{\ln n}{n}$$

Exercice 1-23

On considère la suite $x=(x_n)$ définie par :

$$x_0 = 1, x_1 = \frac{1}{2}, \text{ et } \forall n \geq 2, (n^2+1)x_n = (2n^2-n)x_{n-1} - (n^2-n)x_{n-2}$$

1. On considère la suite $y=(y_n)$ définie par : $y_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, y_n = n(x_n - x_{n-1})$. Calculer x_n en fonction de y_n, y_{n-1} et n.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note z_n le nombre complexe de partie réelle x_n et de partie imaginaire y_n.

a) Calculer z_n en fonction de z_{n-1} et de n.

b) Montrer que $z_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{i+k}\right)$ (i étant le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$).

3. On pose $1+\frac{i}{k} = \frac{1}{r_k}\,\mathrm{e}^{i\theta_k}$, avec $r_k > 0$ et $0 < \theta_k < \frac{\pi}{2}$.

a) Calculer r_k en fonction de k.

b) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k$. Calculer x_n en fonction de S_n et de $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

4. Montrer que la suite x est bornée.

Solution :

1. La relation de récurrence peut s'écrire :

$$\begin{aligned} x_n &= n^2(x_{n-1}-x_n) + n^2(x_{n-1}-x_{n-2}) + n(x_{n-2}-x_{n-1}) \\ &= n(n-1)(x_{n-1}-x_{n-2}) - n^2(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\forall n \geq 2, x_n = -ny_n + ny_{n-1} = n(y_{n-1}-y_n)$$

2. a) On a : $z_n = x_n + iy_n = -ny_n + ny_{n-1} + i(nx_n - nx_{n-1})$
D'où : $z_n = ni(x_n+iy_n) - ni(x_{n-1}+iy_{n-1}) = niz_n - niz_{n-1}$
et on en déduit : $\forall n \geq 1, z_n = \dfrac{n}{n+i}z_{n-1}$.

b) Par récurrence, on a donc : $z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+i}\right)z_0 = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+i}$.

3. a) $|1+\frac{i}{k}|^2 = 1+\frac{1}{k^2}$, soit $|1+\frac{i}{k}| = \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$ et $r_k = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$.

b) $z_n = \prod_{k=1}^{n} r_k \mathrm{e}^{-i\theta_k}$, d'où $z_n = \mathrm{e}^{-iS_n} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{k^2+1}} = \mathrm{e}^{-iS_n} P_n$

On en déduit $x_n = P_n . \cos(S_n)$.

$\star$ On a $\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$.

Or $\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{k^2}$ et la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ est convergente.

Par application de la règle d'équivalence, pour les séries à termes positifs, on en déduit la convergence de la suite de terme général $\ln P_n$, puis celle de la suite de terme général P_n. En particulier la suite (P_n) est bornée.
Comme la fonction cosinus est bornée, on en déduit que la suite (x_n) est bornée.

Exercice 1-24

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction φ_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\varphi_n(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}$.

1. a) Etudier la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt$ (on donnera le tableau des variations et les limites aux bornes du domaine de définition).

b) Soit a un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un unique réel, noté $x_n(a)$ tel que $\int_0^{x_n(a)} \varphi_n(t)\,dt = a$.

2. On note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h_n(a) = x_n(a)$.

a) Montrer que la fonction h_n est croissante.

b) Montrer que $\lim_{a\to+\infty} h_n(a) = +\infty$.

3. On suppose dans cette question que $a > \mathrm{e} - 1$, où e désigne la base des logarithmes népériens. Soit A un réel fixé, strictement supérieur à 1 et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t & , \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & , \text{si } t > 1 \end{cases}$.

a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^A \varphi_n(t)\,dt = \int_0^A g(t)\,dt$.

b) On pose $J_n = \int_A^{x_n(a)} \varphi_n(t)\,dt$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} J_n$.

c) Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que : $\forall\, n \geq n_0, J_n > 0$.

En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(a) = +\infty$.

Solution :

1. a) La fonction φ_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, avec : $f_n'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x^n} > 0$.

Par conséquent, la fonction f_n est strictement croissante, avec $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ (car $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_n(t) = +\infty$, ce qui entraîne la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n(t)\,dt$).

b) f_n réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, donc f atteint une fois et une seule la valeur a. Nous noterons x_n le point où f prend la valeur a et :

$$f_n(x_n) = a \iff \int_0^{x_n(a)} \varphi_n(t)\,dt = a$$

2. a) b) On a $h_n(a) = x_n(a) = f_n^{-1}(a)$.

Or f_n^{-1} est également croissante et de limite $+\infty$ en $+\infty$, ce qui résout les deux questions.

3. a) Grce à la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\int_0^A \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt - \int_0^A g(t)\,dt = \underbrace{\int_0^1 \Big(\frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n} - \mathrm{e}^t\Big)dt}_{\alpha} + \underbrace{\int_1^A \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt}_{\beta}$$

On a : $0 \leq \alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt \leq \int_0^1 \mathrm{e}.t^n\,dt \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Pour $n \geq 2$, $0 \leq \beta = \displaystyle\int_1^A \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt \leq \mathrm{e}^A \int_1^A \frac{1}{t^n}\,dt = \frac{\mathrm{e}^A}{n-1}\Big(1 - \frac{1}{A^{n-1}}\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

D'où le résultat.

b) On a $J_n = \displaystyle\int_0^{x_n(a)} \varphi_n(t)\,dt - \int_0^A \varphi_n(t)\,dt = a - \int_0^A \varphi_n(t)\,dt.$

et comme $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^A \varphi_n(t)\,dt = \int_0^A g(t)\,dt = \mathrm{e} - 1$, il vient :

$$\lim_{n\to\infty} J_n = a + 1 - \mathrm{e}$$

c) J_n ayant une limite strictement positive, il existe un rang n_0 à partir duquel $J_n > 0$.

On a donc $n \geq n_0 \implies \displaystyle\int_A^{x_n(a)} \varphi_n(t)\,dt > 0$ et comme la fonction à intégrer est positive, ceci impose d'avoir $x_n(a) > A$.

Donc : $\forall A > 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies x_n(a) > A$, ce qui est la définition de :

$$\lim_{n\to\infty} x_n(a) = +\infty$$

Exercice 1-25

On admet que $n! \underset{(n\to\infty)}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

1. a) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de nombres réels positifs de limite nulle. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$.
Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes et en déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

b) Quelle est la nature de la série de terme général $b_n = (-1)^n[\ln(n+1) - \ln n]$?

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $K_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{(-1)^{E(\frac{1}{x})}}{x}\, dx$, où E désigne la fonction partie entière, c'est-à-dire que $E(t)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à t.

a) Montrer que $K_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \displaystyle\int_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{(-1)^k}{x}\, dx$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} K_n$.

Solution :

1. a) La décroissance de la suite (a_n) entraîne :

$$S_{2n} - S_{2n-2} = a_{2n} - a_{2n-1} \leq 0, \quad S_{2n+1} - S_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0$$

La suite (S_{2n}) est décroissante, alors que la suite (S_{2n+1}) est croissante. De plus :

$$\lim_{n\to+\infty} |S_{2n} - S_{2n-1}| = \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 0$$

Les deux suites sont adjacentes et admettent une limite commune. Les sommes partielles de la série $\sum(-1)^n a_n$ ont donc une limite ce qui entraîne que la série converge.

b) On a :

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

Ainsi $a_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ est positif et tend vers 0. Montrons la décroissance :

$$a_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n$$

par la croissance de la fonction logarithme.

Par suite la série $\sum(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est convergente.

2. a) La relation de Chasles donne :

$$\int_{1/n}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} f(x)dx$$

Ici $f(x) = (-1)^{E\left(\frac{1}{x}\right)} = (-1)^k$ lorsque $x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$. Donc :

$$K_n = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(\ln(k+1) - \ln(k))$$

Utilisons la formule de Stirling rappelée en début d'exercice pour calculer la limite de K_n.

$$\begin{aligned}
K_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(\ln(k+1) - \ln(k)) \\
&= -2(-\ln(2) + \ln(3) - \ldots - \ln(2n)) + \ln(2n+1) \\
&= \ln\left[\left(\frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\right)^2 (2n+1)\right] \\
&= \ln\left[\frac{((2n)!)^2(2n+1)}{2^{4n}(n!)^4}\right]
\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{((2n)!)^2(2n+1)}{2^{4n}(n!)^4} \sim \left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} \frac{(\sqrt{4n\pi})^2(2n+1)}{2^{4n}\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}(\sqrt{2\pi n})^4} \sim \frac{2}{\pi}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left[\frac{((2n)!)^2(2n+1)}{2^{4n}(n!)^4}\right] = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

Ainsi la suite (K_{2n}) tend vers $\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$. La suite (K_{2n+1}) également puisque le terme qu'on ajoute tend vers 0. Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} K_n = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

Exercice 1-26

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et telle que $f(0) = 0$. On définit alors la fonction φ sur $]0,1]$ par : $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$.

1. Montrer que φ peut être prolongée en une fonction, notée $\widetilde{\varphi}$, continue sur $[0,1]$.

2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à f sur le segment $[x,0]$, et la formule de Leibniz, montrer que :

$$\forall\, x \in \,]0,1], x^{n+1}\varphi^{(n)}(x) = \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

3. Montrer que la fonction $\varphi^{(n)}$ a une limite en 0 et l'exprimer en fonction de $f^{(n+1)}(0)$.

4. Montrer que $\widetilde{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

Solution :

1. Comme f est une fonction de classe C^∞ telle que $f(0)=0$, on sait que :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \varphi(x)$$

ce qui signifie que φ peut être prolongée en une fonction, notée $\widetilde{\varphi}$, continue sur $[0,1]$.

2. La formule de Taylor appliquée à la fonction f sur $[x,0]$ donne :

$$0 = f(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) + \int_x^0 (-1)^n \frac{t^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

La formule de Leibniz appliquée à la fonction φ donne :

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} f^{(k)}(x)$$

Or :

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} = \frac{(n-k)!(-1)^{n-k}}{x^{n-k+1}}$$

d'où :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x)$$

puis, en reportant dans la première formule :

$$x^{n+1}\varphi^{(n)}(x) = -n!(-1)^n \int_x^0 (-1)^n \frac{t^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

et après simplifications :

$$x^{n+1}\varphi^{(n)}(x) = \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

3. En intégrant par parties, les fonctions étant de classe C^∞, il vient :

$$\int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \left[\frac{f^{(n+1)}(t)t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

d'où :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)x^{n+1}} \int_0^x t^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

Mais, la fonction $f^{(n+2)}$ étant continue sur l'intervalle $[0,1]$, elle y est bornée par M_{n+2}. Donc :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{(n+1)x^{n+1}} \int_0^x t^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt\right| &\leq \frac{M_{n+2}}{(n+1)} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^{n+1}\,dt \\ &\leq \frac{M_{n+2}}{(n+2)(n+1)} x\end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Finalement :

$$\lim_{x\to 0} \varphi^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$$

4. Montrons par récurrence que $\widetilde{\varphi}$ est de classe C^n sur $[0,1]$.
- c'est vrai pour $n=0$ (première question).
- supposons que $\widetilde{\varphi}^{(n-1)}$ soit continue sur $[0,1]$. La question précédente montre que :

$$\lim_{x\to 0} (\widetilde{\varphi}^{(n-1)})'(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$$

On applique alors le théorème des fonctions de classe C^1 pour conclure.

Exercice 1-27

On considère la suite de terme général $u_n = \left(\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^n}\,dt\right)^{\frac{1}{n}}$, pour $n \geq 1$.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que : $\forall\, n \geq 1$, on a : $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$.
3. Soit $a \in [0,1]$, montrer que $u_n \geq (1-a)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{a}{1+a}$.
4. Montrer, en utilisant une suite (a_n) bien choisie de points de $[0,1]$, que la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Solution :

1. $u_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 1 - \ln 2$.

2. On a déjà remarqué que $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$, donc $\forall\, t \in [0,1], 0 \leq \frac{t}{1+t} \leq \frac{1}{2}$.

Par conséquent $0 \leq \left(\frac{t}{1+t}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, puis $0 \leq u_n^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, soit :

$$\forall\, n \geq 1\ ;\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$$

3. L'écriture précédente montre que $\forall\, t \in [a,1]$, $\dfrac{t}{1+t} \geq 1 - \dfrac{1}{1+a} = \dfrac{a}{1+a}$.
Par positivité de la fonction à intégrer, il vient alors :

$$(u_n)^n \geq \int_a^1 \Big(\frac{a}{1+a}\Big)^n\, dt = (1-a)\Big(\frac{a}{1+a}\Big)^n$$

et donc :

$$\frac{a}{1+a}(1-a)^{1/n} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$$

4. Le résultat précédent étant valable pour tout choix de $a \in [0,1]$, on cherche une suite (a_n) de points telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ et telle que $\lim\limits_{n\to\infty} (1-a_n)^{1/n} = 1$.

On veut donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\ln(1-a_n) = 0$ et $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ (ou $a_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \ldots$) convient.

L'encadrement obtenu en 3. donne alors, par le théorème du même nom :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

Exercice 1-28

Soient a et b deux réels distincts.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un unique polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_a^x (t-a)^{n-1}(t-b)^{n-1}\, dt = (x-a)^n P_n(x).$$

Préciser le degré de P_n.

2. Calculer $P_n(a)$.

3. On pose, pour p et q entiers naturels, $I(p,q) = \displaystyle\int_a^b (t-a)^p(t-b)^q\, dt$.

a) Déterminer une relation entre $I(p,q)$ et $I(p+1,q-1)$, lorsque $q \geqslant 1$. En déduire l'expression de $I(p,q)$ en fonction de p et q.

b) En déduire $P_n(b)$.

4. En remarquant que $t-b = (t-a)+(a-b)$, déterminer une expression de $P_n(x)$ en fonction des puissances de $(x-a)$.

En déduire $P_n^{(k)}(a)$, pour $k \in \mathbb{N}$ (où $P_n^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ du polynôme P_n).

Solution :

1. La fonction $f : x \mapsto (x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}$ est une fonction polynôme de degré $2n-2$, qui admet a comme zéro d'ordre $n-1$ et $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$

est la primitive de f nulle en a. Donc F est une fonction polynôme de degré $2n-1$, qui admet a pour racine d'ordre exactement n.

Ainsi, il existe une fonction polynôme P_n, de degré $n-1$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_a^x (t-a)^{n-1}(t-b)^{n-1} = (x-a)^n P_n(x)$$

2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$F'(x) = f(x) = (x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1} = n(x-a)^{n-1}P_n(x) + (x-a)^n P_n'(x)$.

D'où, pour xa : $(x-b)^{n-1} = nP_n(x) + (x-a)P_n'(x)$.

Or deux fonctions polynômes qui coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ sont égales. Ainsi la formule précédente reste valable pour $x = a$, ce qui donne :

$$P_n(a) = \frac{(a-b)^{n-1}}{n}$$

3. a) En intégrant par parties, on obtient :

$$\forall q \geq 1, I(p,q) = -\frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

et comme $I(p+q, 0) = \dfrac{(b-a)^{p+q+1}}{p+q+1}$, il vient, par récurrence descendante :

$$I(p,q) = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q+1)}(b-a)^{p+q+1}$$

Ce que l'on peut aussi écrire :

$$I(p,q) = (-1)^q \frac{1}{C_{p+q}^p} \frac{(b-a)^{p+q+1}}{p+q+1}$$

b) Alors : $P_n(b) = \dfrac{I(n-1, n-1)}{(b-a)^n} = (-1)^{n-1} \dfrac{1}{C_{2n-2}^{n-1}} \dfrac{(b-a)^{2n-1}}{2n-1}$

4. On remarque ! On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (a-b)^{n-1-k}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (a-b)^{n-1-k}(x-a)^{n+k-1}. \end{aligned}$$

D'où : $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (a-b)^{n-1-k} \frac{(x-a)^{n+k}}{n+k}$

$$= (x-a)^n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (a-b)^{n-1-k} \frac{(x-a)^k}{n+k}$$

Par conséquent : $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (a-b)^{n-1-k} \frac{(x-a)^k}{n+k}$.

Or, d'après la formule de Taylor pour les polynômes :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Par identification (la famille $\big((x-a)^k\big)_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre), il vient :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], P_n^{(k)}(a) = \frac{k! C_{n-1}^k (a-b)^{n-1-k}}{n+k}$$

et évidemment, $P_n^{(k)}(a) = 0$, pour $k > n-1$.

Exercice 1-29

Pour x réel positif ou nul et n entier naturel non nul, on pose :

$$s_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

1. Ecrire un programme en Turbo-Pascal, permettant la saisie du réel x, de l'entier n et affichant la valeur de $s_n(x)$.

2. Montrer que $s_n(x) + (-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt - \ln(1+x)$ est une constante.

3. Donner, en fonction de n et de x, un majorant de la valeur absolue de l'erreur commise en remplaçant $\ln(1+x)$ par $s_n(x)$.

4. Pour $x \in [0,1]$ fixé, déterminer la limite de la suite $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire la convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Solution :

1.
```
Var i,n integer ; s, u, x real ;
  begin Write ('x=') ; Readln(x) ;
  Write ('n=') ; Readln(n)
  s :=0 , u :=-1
  for i :=1 to n do
    begin u :=-u*x/i ;
        s :=s+u ; end ;
  Write('pour x=',x :0 :2,'et n=',n,'s=',s :0 :4) ;
End.
```

2. On voit ce que vaut la dérivée de la fonction s_n. On en déduit :

$$s_n(x) = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\,dt = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}\,dt$$
$$= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt - (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt$$

En mettant tout du même côté, on voit donc que :

$$s_n(x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt - \ln(1+x) = 0.$$

3. On a $|s_n(x) - \ln(1+x)| = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

4. Si $x \in [0,1]$, l'erreur commise est donc majorée par $\dfrac{1}{n+1}$ qui a 0 pour limite lorsque n tend vers l'inifini. Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \ln(1+x)$.

Ceci signifie que, pour $x \in [0,1]$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$.

En particulier $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$

Exercice 1-30

Soit f l'application définie par :

$$f : (x,y) \mapsto \frac{1}{1-y^2} \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ?

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathcal{D}$.

3. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$:

$$2yf(x,y) + (1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - (1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

4. Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout y tel que $0 < y < 1$:

$$\left|\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\right| \leq |\ln y|$$

En déduire que pour tout $x \geq 0$, l'intégrale $\int_0^1 f(x,y)\, dy$ est convergente.

Solution :

1. Pour définir $f(x,y)$, il faut avoir $y1$, $y-1$ et $\frac{x+y}{1+xy} > 0$, donc $x+y$ et $1+xy$ de même signe et non nuls.

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$, car composée, produit, quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, les fonctions apparaissant en dénominateur ne s'annulant pas et la fonction placée dans le logarithme étant strictement positive.

3. On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(x+y)(1+xy)}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-1}{(x+y)(1+xy)(y^2-1)} + \frac{2y}{(y^2-1)^2} \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

On vérifie alors facilement la formule demandée.

4. Fixons y dans $]0,1[$ et étudions la fonction $h : x \mapsto \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec $h'(x) = \frac{1-y^2}{(x+y)(1+xy)} > 0$.

Par conséquent h est strictement croissante.

De plus $h(0) = \ln y$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\ln y$. Donc $|h(x)| \leq |\ln y|$, ce qui est le résultat demandé.

Pour x fixé, la fonction, de la variable y, à intégrer est continue sur $]0,1[$ et :

Au voisinage de $y = 0$, $|f(x,y)| \leq |\ln y| = -\ln y$, et la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln y \, dy$ donne la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x,y)\, dy$.

Au voisinage de $y = 1$, $|f(x,y)| \leq \dfrac{1}{1+y} \cdot \dfrac{-\ln y}{1-y}$ et la fonction majorante se prolonge par continuité en 1, donc est intégrable sur $[1/2, 1]$.

La convergence de $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f(x,y)\, dy$ en résulte.

Par disjonction des problèmes, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\, dy$ est convergente.

Exercice 1-31

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer $g'(x)$ pour tout x réel.

2. Montrer qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que pour tout $n \geq 1$ et pour tout x non nul, on ait :

$$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}$$

où $f^{(k)}(x)$ désigne la dérivée k-ième de la fonction f.

(On déterminera une expression de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.)

3. Montrer que P_n et Q_n sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Préciser le degré, la parité et le coefficient du terme de plus haut degré de chacun de ces polynômes.

4. En écrivant que $\sin(x) = x.g(x)$, déterminer deux nouvelles relations entre $P_n, Q_n, P_{n+1}, Q_{n+1}$. En déduire que $P_n' = Q_n$.

Solution :

1. La fonction g est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, continue sur $\mathbb{R}$, car on a : $g(0) = \lim\limits_{0} g = 1$ et, pour x non nul :

$$g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

Au voisinage de 0, on a : $x\cos x - \sin x = x\big(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\big) - x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

Soit : $x\cos x - \sin x \sim -\dfrac{x^2}{3}$ et $g'(x) \sim -\dfrac{1}{3}x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Par théorème, on en déduit que g est dérivable en 0, avec $g'(0)=0$ et g' est donc continue en 0.

2. Procédons par récurrence sur n :

$\star$ Le résultat est acquis au rang 1, avec $P_1(x)=x$ et $Q_1(x)=1$.

$\star$ Si le résultat est vrai au rang n, alors en dérivant sur $\mathbb{R}^*$:

$$g^{n+1}(x) = [g^{(n)}]'(x) = \frac{1}{x^{n+2}}\big(\sin^{(n+1)}(x)(xP_n(x)+xQ'_n(x)+(n+1)Q_n(x)\\ +\sin^{(n+2)}(x)(-xP'_n(x)+xQ_n(x)+(n+1)P_n(x)\big)$$

Ce qui montre que le résultat est valable au rang $n+1$, avec :

$$\begin{cases} P_{n+1} = XP_n + XQ'_n + (n+1)Q_n \\ Q_{n+1} = -XP'_n + XQ_n + (n+1)P_n \end{cases}$$

On conclut alors par le principe de récurrence.

3. $\star$ Les polynômes P_1 et Q_1 sont à coefficients entiers et les formules de récurrence précédentes montrent que cette propriété est héréditaire. Donc, pour tout $n \geq 1$, P_n et Q_n sont des polynômes à coefficients entiers.

$\star$ Supposons que pour un certain $n \geq 1$, on ait : $P_n(x) = x^n + \cdots$ et $Q_n(x) = nx^{n-1} + \cdots$ (ce qui est vrai au rang 1). Alors les formules de récurrence donnent aisément : $P_{n+1}(x) = x^{n+1} + \cdots$ et $Q_{n+1}(x) = (n+1)x^n + \cdots$

On conclut encore par le principe de récurrence.

$\star$ Enfin, supposons que pour un certain $n \geq 1$, P_n a la parité de n et Q_n celle de $n-1$ (vrai au rang 1).

Alors XP_n a la parité de $n+1$, XQ'_n aussi et Q_n a également la parité de $n+1$. Donc P_{n+1} a la parité de $n+1$. On procède de même pour Q_{n+1} et on conclut par le principe de récurrence.

4. $\star$ On a, puisque $\sin x = x.g(x)$: $\sin^{(n)}(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}\big(x.g(x)\big)$

La formule de G. Leibniz donne alors :

$$\sin^{(n)}(x) = x.g^{(n)}(x) + n.g^{(n-1)}(x)$$

En remplaçant, il vient, pour $x0$ et $n \geq 2$:

$$x^n.\sin^{(n)}(x) = P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)\\ + nP_{n-1}(x)\sin^{(n-1)}(x) + nQ_{n-1}(x)\sin^{(n)}(x)$$

et comme $\sin^{(n+1)} = -\sin^{(n-1)}$:

$$(x^n - P_n(x) - nQ_n(x))\sin^{(n)}(x) + (-Q_n(x) + nP_{n-1}(x))\sin^{(n+1)}(x) = 0$$

$\star$ Soient A et B deux polynômes tels que $\forall\, x0, A(x)\sin x + B(x)\cos x = 0$.

• Pour $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*, B(x) = 0$, donc B a une infinité de racines et est le polynôme nul.

• Pour $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}, A(x) = 0$, donc A a une infinité de racines et est le polynôme nul.

Or, pour tout n, la paire $\{\sin^{(n)}, \sin^{(n+1)}\}$ est, au signe près, la paire $\{\sin, \cos\}$. On a donc :

$$P_n + nQ_{n-1} = X^n \text{ et } Q_n = nP_{n-1}$$

Comme $Q_n = -XP'_{n-1} + XQ_{n-1} + nP_{n-1}$, on a $-XP'_{n-1} + XQ_{n-1}$, d'où : $\forall\, x0, P'_{n-1}(x) = Q_{n-1}(x)$, *i.e.* :

$$\forall\, n \geq 1, Q_n = P'_n.$$