

## ANALYSE

---

**Exercice 1.1.**

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt$  converge.

On note  $f(x)$  sa valeur.

Montrer de même que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt$  converge.

Montrer enfin que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$  converge et préciser sa valeur.

2. Soit  $(x, h) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$|\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt) + 2ht \sin(2xt)| \leq 2h^2 t^2.$$

En déduire que :

$$|f(x+h) - f(x) + 2h \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt| \leq 2h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

3. Montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt.$$

4. Au moyen d'une intégration par parties, montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = -2xf(x).$$

En déduire que la fonction  $x \mapsto e^{x^2} f(x)$  est constante sur  $\mathbb{R}$  et calculer la valeur de cette constante (*on recherchera pour cela la valeur de  $f$  en 0*).

En conclusion, quelle est, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la valeur de  $f(x)$  ?

5. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que les intégrales  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sin(2xt) dt$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos^2(xt) dt$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sin^2(xt) dt$  convergent et calculer leurs valeurs respectives.

**Solution :**

1. Soit  $x$  réel. Pour tout  $t$  réel, on a :

$$0 \leq |e^{-t^2} \cos(2xt)| \leq e^{-t^2}$$

Comme l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$  converge [considérer une variable suivant la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1/\sqrt{2})$ ], l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt$  est absolument convergente, donc convergente. On peut ajouter que pour tout  $x$  réel :  $|f(x)| \leq \sqrt{\pi}$ .

De même, pour tout  $t$  positif,  $0 \leq |te^{-t^2} \sin(2xt)| \leq te^{-t^2}$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$  converge (son calcul est même banal). Il s'ensuit que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin(2xt) dt$  converge (absolument) et que l'intégrale  $\int_{-\infty}^0 te^{-t^2} \sin(2xt) dt$  converge vers la même valeur, puisque son intégrande est paire.

On conclut que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} \sin(2xt) dt$  converge.

On peut ajouter que  $\left| \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} \sin(2xt) dt \right| \leq 2 \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt = 1$ .

2. Soit  $(x, h) \in \mathbb{R}^2$ . Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction cosinus à l'ordre 2 sur l'intervalle d'extrémités  $2xt, 2(x+h)t$ . On obtient pour tout  $t$  réel :

$$|\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt) + 2ht \sin(2xt)| \leq 2h^2 t^2$$

Comme les intégrales en jeu sont toutes absolument convergentes, on en déduit immédiatement que :

$$|f(x+h) - f(x) + 2h \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} \sin(2xt) dt| \leq 2h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$$

3. Il suffit de diviser par  $h$ , puis de faire tendre  $h$  vers 0 pour obtenir que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} \sin(2xt) dt.$$

4. Remarquons que pour des raisons de parité, pour tout  $x$  réel :

$$f(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt, \quad f'(x) = -4 \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin(2xt) dt$$

Soit  $x$  réel. Pour tout  $u \in \mathbb{R}^+$ , les conditions d'application du théorème d'intégration par parties sont réunies. Aussi :

$$2 \int_0^u -2te^{-t^2} \sin(2xt) dt = \left[ 2e^{-t^2} \sin(2xt) \right]_0^u - 4x \int_0^u e^{-t^2} \cos(2xt) dt$$

En faisant tendre  $u$  vers l'infini, il vient, pour tout  $x$  réel,  $f'(x) = -2xf(x)$  ou  $e^{x^2}(f'(x) + 2xf(x)) = 0$ .

La fonction  $x \mapsto e^{x^2}f(x)$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

Sa valeur est  $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ .

Ainsi, pour tout  $x$  réel :  $f(x) = \sqrt{\pi} \cdot e^{-x^2}$

5. Soit  $x$  réel.

- l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sin(2xt) dt$ , converge absolument et est nulle puisque son intégrande est impaire.

- l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos^2(xt) dt$  converge d'après les résultats précédents puisque pour tout  $t$  réel  $\cos^2(xt) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2xt))$  et elle vaut :

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \frac{1}{2} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 + e^{-x^2})$$

- l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sin^2(xt) dt$  converge d'après les résultats précédents et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (1 - \cos^2(xt)) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 - e^{-x^2}).$$

### Exercice 1.2.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 > 0$  et  $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \sqrt[3]{\sum_{k=0}^n u_k}$ .

1. Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et déterminer sa limite.
3. Montrer que  $u_{n+1} \underset{(+\infty)}{\sim} u_n$  et  $u_{n+1} - u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{3u_n}$ .

Quelle est la nature de la série de terme général  $v_n = \frac{1}{u_n}$  ?

4. Écrire une fonction Pascal de deux variables  $n$  et  $a$  permettant de calculer  $u_n$  lorsque  $u_0 = a$ .

**Solution :**

1. On a  $u_{n+1}^3 = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = u_n^3 + u_n$ . Par suite, puisque l'extraction d'une racine cubique a un sens sur  $\mathbb{R}$  :

$$u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^3 + u_n}$$

2. On montre par une récurrence immédiate que pour tout  $n$ ,  $u_n > 0$ . Cela entraîne que pour tout  $n$ ,  $u_{n+1}^3 > u_n^3$ , donc que  $u_{n+1} > u_n$ .

Par conséquent, la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante.

Supposons qu'elle soit majorée; dans ce cas, elle converge vers une limite  $\ell$  vérifiant par continuité  $\ell^3 = \ell^3 + \ell$ , soit  $\ell = 0$ , ce qui est impossible. La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  n'est donc pas majorée et, étant croissante, elle tend vers  $+\infty$ .

3. ★ On a :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{u_n^2}} \underset{(+\infty)}{\sim} 1$ , i.e.  $u_{n+1} \sim u_n$ .

★ De plus, comme au voisinage de 0 :  $(1 + u)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}u + o(u)$  :

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left( \sqrt[3]{1 + \frac{1}{u_n^2}} - 1 \right) \underset{(+\infty)}{\sim} u_n \times \frac{1}{3u_n^2} = \frac{1}{3u_n}$$

★ Ainsi :  $\frac{1}{u_n} \sim 3(u_{n+1} - u_n)$ .

Or par télescopage :  $\sum_{n=0}^N 3(u_{n+1} - u_n) = 3(u_{N+1} - u_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$ . Par application de la règle d'équivalence pour les séries à termes positifs ou nuls, la divergence de la série de terme général  $\frac{1}{u_n}$  en résulte.

4. Voici une fonction parmi d'autres possibles

```
function u(n :integer ; a :real) :real
var v :real ;
Begin
v :=a ;
for k :=1 to n do v :=exp(1/3*v*(v*v+1)) ;
u :=v
End ;
```

**Exercice 1.3.**

Soit  $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$ .

1. a) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - b) Rappeler les valeurs de  $f(0)$  et de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
2. a) Montrer que :  $\forall x > 0, xf(x) < e^{-x^2/2}$ .

b) Montrer que l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge et la calculer.

3. a) On pose  $I(a, b) = \int_a^b e^{2u(1-u)} du$ . Calculer  $I(a, b)$  en fonction de  $f$ ,  $a$  et  $b$ .

b) En déduire la convergence et la valeur de  $\int_{1/2}^{+\infty} e^{2u(1-u)} du$ .

4. On pose, pour  $x$  réel,  $g(x) = \int_x^{+\infty} e^{2u(1-u)} du$ .

Montrer que l'intégrale  $J = \int_{1/2}^{+\infty} g(x) dx$  converge et la calculer.

---

**Solution :**

1. a)  $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt - \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ .

Sous cette forme, il est clair que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^{-x^2/2}$$

b)  $f(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt{2\pi}$  (cf. la loi normale centrée réduite).

2. a) Pour  $x > 0$  :

$$xf(x) = \int_x^{+\infty} x \cdot e^{-t^2/2} dt < \int_x^{+\infty} t \cdot e^{-t^2/2} dt = e^{-x^2/2}$$

b) Pour  $A > 0$  :

$$\int_0^A f(x) dx = [xf(x)]_0^A - \int_0^A xf'(x) dx = Af(A) + \int_0^A x \cdot e^{-x^2/2} dx$$

Ainsi :  $\int_0^A f(x) dx = Af(A) - e^{-A^2/2} + 1$ . Or  $0 \leq Af(A) \leq e^{-A^2/2}$  et donc, par passage à la limite :

$$I \text{ converge et } I = 1.$$

3. a) On a  $2u(1-u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2u-1)^2$ ; on effectue alors le changement de variable  $2u-1 = t$  et :

$$I(a, b) = \frac{\sqrt{e}}{2} \int_{2a-1}^{2b-1} e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{e}}{2} [f(2a-1) - f(2b-1)]$$

b) Ici,  $a = \frac{1}{2}$  et on fait tendre  $b$  vers  $+\infty$  :  $\int_{1/2}^{+\infty} e^{2u(1-u)} du = \frac{\sqrt{2\pi e}}{4}$

4. On a  $g(x) = \frac{\sqrt{e}}{2} f(2x-1)$  et pour  $A > \frac{1}{2}$  :

$$\int_{1/2}^A g(x) dx = \frac{\sqrt{e}}{2} \int_{1/2}^A f(2x-1) dx = \frac{\sqrt{e}}{4} \int_0^{2A-1} f(y) dy$$

et, par passage à la limite :

$$J \text{ converge et } J = \frac{\sqrt{e}}{4}$$

**Exercice 1.4.**

1. a) Déterminer l'ensemble  $I$  des réels  $x$  pour lesquels la série  $\sum_{k \geq 0} (-1)^k x^k$  converge.

b) Pour tout  $x \in I$ , calculer  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ .

c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in I$ , on pose :  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k x^k$ .

Calculer  $R_n(x)$  et montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$  converge.

Calculer la somme  $\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x)$ .

2. Soit  $(u_n)$  une suite réelle positive telle que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ .

a) Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Calculer  $\sum_{k=0}^n R_k - \sum_{k=1}^n k u_k$  en fonction de  $n$  et  $R_n$ .

b) Montrer que si la série  $\sum_{n \geq 0} R_n$  converge, alors la série  $\sum_{n \geq 0} n u_n$  converge.

3. a) On suppose que la série  $\sum_{n \geq 0} n u_n$  converge. Que vaut  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)R_n$  ?

b) En déduire que les séries  $\sum_{n \geq 0} R_n$  et  $\sum_{n \geq 0} n u_n$  sont de même nature et qu'en cas de convergence, elles ont la même somme.

3. Application. Dans cette question  $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$ .

a) Pour quelles valeurs de  $x$  la série  $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$  est-elle convergente ?

On note alors :  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$

Pour quelles valeurs de  $x$  la série  $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$  est-elle convergente ? Exprimer sa somme en fonction de  $\zeta(x-1)$ .

**Solution :**

1. a) La série proposée est une série géométrique de raison  $-x$ , qui converge si et seulement si  $|x| < 1$ .

b) Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$$

c) La série définissant  $R_n(x)$  est une série géométrique de raison  $-x$ , commençant par  $(-1)^{n+1}x^{n+1}$ .

Donc, pour tout  $|x| < 1$ , il vient :

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, la série de terme général  $R_n(x)$  est convergente pour tout  $x$  tel que  $|x| < 1$  et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}x^{n+1} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

2. a) Notons  $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . Ainsi, pour tout  $k \geq 1$ ,  $R_k = S - \sum_{j=1}^k u_j$ . Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n R_k &= \sum_{k=0}^n \left( S - \sum_{j=1}^k u_j \right) = (n+1)S - \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^k u_j \\ &= (n+1)S - \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n u_j = (n+1)S - \sum_{j=1}^n (n+1-j)u_j \\ \sum_{k=0}^n R_k &= (n+1)S - (n+1) \sum_{j=1}^n u_j + \sum_{j=1}^n j u_j \\ &= (n+1)R_n + \sum_{j=1}^n j u_j \end{aligned}$$

b) Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ , la suite  $(R_n)$  est décroissante et tend vers 0 car la série  $\sum_n u_n$  converge.

Supposons que la série  $\sum_n R_n$  converge. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$  :  $\sum_{k=n}^{2n} R_k < \frac{\varepsilon}{2}$

Donc, par décroissance :

$$\forall n \geq N, |nR_{2n}| \leq \left| \sum_{k=n}^{2n} R_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui signifie que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nR_{2n} = 0$ . Enfin :

$$(2n+1)R_{2n+1} \leq 2nR_{2n} + R_{2n+1} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)R_{2n+1} = 0$$

Ainsi la suite  $(nR_n)$  tend vers 0, ce qui entraîne que la série  $\sum_j j u_j$  converge.

3. a) Si la série  $\sum_n n u_n$  converge, alors :

$$(n+1)R_n = (n+1) \sum_{j=n+1}^{\infty} u_j \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} ju_j$$

cette dernière expression tendant vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

b) On déduit des deux dernières questions que les séries  $\sum_{n \geq 0} R_n$  et  $\sum_{n \geq 0} nu_n$  sont de même nature et qu'en cas de convergence, elles ont la même somme.

4. a) La série de terme général  $u_n(x)$  est une série de Riemann qui converge si et seulement si  $x > 1$ .

b) Par la question 3, la série  $\sum_{n \geq 0} R_n$  converge si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 0} nu_n(x)$  converge, donc si et seulement si  $x > 2$ .  
Enfin, dans ce cas, sa somme vaut évidemment  $\zeta(x-1)$ .

### Exercice 1.5.

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite telle que pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n \in ]-1, 1[$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $p_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k)$ .

1. a) On suppose dans cette question que  $u_n = \frac{1}{n}$ . La suite  $(p_n)$  a-t-elle une limite ?

b) On suppose maintenant que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n \in [0, 1[$ . Montrer que la suite  $(p_n)$  admet une limite finie si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge.

c) **Application.** Déterminer la limite de la suite  $(p_n)$  lorsque  $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$

2. a) On suppose dans cette question que  $u_1 = 0$  et  $u_n = -\frac{1}{n}$  pour  $n \geq 2$ . La suite  $(p_n)$  a-t-elle une limite ?

b) On suppose maintenant que  $u_n \in ]-1, 0[$ , pour tout  $n \geq 1$ . Que peut-on dire de la suite  $(p_n)$  si la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  diverge ?

c) Montrer que la suite  $(p_n)$  admet une limite  $\lambda > 0$  si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge.

d) **Application.** Déterminer la limite de la suite  $(p_n)$  lorsque l'on a  $u_1 = 0$  et  $u_n = -\frac{2}{n(n+1)}$ , pour  $n \geq 2$ .

3. On suppose maintenant que  $u_n$  est de signe quelconque et que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  est absolument convergente. Que peut-on conclure sur la suite  $(p_n)$  ?

**Solution :**



1. a) On a pour tout  $k, 1 + u_k = \frac{k+1}{k}$ . Donc par télescopage :

$$p_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = n+1$$

La suite  $(p_n)_n$  tend vers l'infini.

b) On sait que pour tout  $k, 1 + u_k \geq 1$ . Aussi  $p_n \geq 1$  et :

$$\ln(p_n) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + u_k)$$

Ainsi la suite  $(p_n)_n$  admet une limite si et seulement si la suite  $(\ln p_n)_n$  admet une limite c'est-à-dire si et seulement si la série  $\sum_k \ln(1 + u_k)$  converge.

- si  $u_n$  ne tend pas vers 0, alors  $\ln(1 + u_n)$  ne tend pas vers 0, et la série  $\sum_k \ln(1 + u_k)$  diverge grossièrement.

- si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , alors  $\ln(1 + u_n) \sim u_n$  et, par la règle d'équivalence pour les séries à termes positifs, la suite  $(p_n)_n$  admet une limite si et seulement si la série  $\sum_n u_n$  converge.

c) Comme la série  $\sum_n \frac{1}{n(n+2)}$  converge (règle de Riemann), on sait que la suite  $(p_n)_n$  admet une limite. Or, en revenant aux sommes partielles, on a :

$$\begin{aligned} \ln p_N &= \sum_{n=1}^N \ln \left[ \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right] \\ &= 2 \sum_{n=1}^N \ln(n+1) - \sum_{n=1}^N \ln(n) - \sum_{n=1}^N \ln(n+2) \\ &= 2 \sum_{n=2}^{N+1} \ln n - \sum_{n=2}^N \ln(n) - \sum_{n=3}^{N+2} \ln(n) = \ln 2 + \ln \left( \frac{N+1}{N+2} \right) \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N = 2$ .

2. a) Comme dans la question précédente pour tout  $k, 1 + u_k = \frac{k-1}{k}$ . Donc

$$p_n = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

b) On sait que pour tout  $k, 1 + u_k \geq 0$ . Aussi

$$\ln(p_n) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + u_k)$$

Ainsi la suite  $(p_n)_n$  admet une limite si et seulement si la suite  $(\ln p_n)_n$  admet une limite c'est-à-dire si et seulement si la série  $\sum_k \ln(1 + u_k)$  converge.

On suppose que la série  $\sum_n u_n$  diverge.

• si  $u_n$  ne tend pas vers 0, alors  $\ln(1 + u_n)$  non plus et la série à termes négatifs  $\sum_k \ln(1 + u_k)$  diverge vers  $-\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ ,

• si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , alors  $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ , et la série à termes négatifs  $\sum_k \ln(1 + u_k)$  diverge vers  $-\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ .

c) On vient de voir que si la série  $\sum_n u_n$  diverge, alors la suite  $(p_n)_n$  ne tend pas vers une limite  $\lambda > 0$ .

Réciproquement si  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lambda > 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln p_n = \ln \lambda$ . Ceci entraîne que la série  $\sum_n \ln(1 + u_n)$  converge et donc que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + u_n) = 0$ . Ainsi on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  et donc  $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ , ce qui entraîne que la série  $\sum_n u_n$  converge.

d) On a  $1 + u_n = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$ . Ainsi :

$$p_n = \frac{\prod_{k=2}^n (k-1) \prod_{k=2}^n (k+2)}{\prod_{k=2}^n k \prod_{k=2}^n (k+1)} = \frac{1}{n} \times \frac{n+2}{3}$$

dont la limite est  $1/3$ .

3. Si la série  $\sum |u_n|$  converge, son terme général tend vers 0. Un développement limité à l'ordre 2 donne :

$$\ln(1 + u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$$

et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , on a, à partir d'un certain rang,  $u_n^2 \leq |u_n|$ .

Ainsi la série  $\sum_n \ln(1 + u_n)$  converge, ce qui entraîne la convergence de la suite  $(p_n)_n$ .

### Exercice 1.6.

Soit  $a$  un réel positif ou nul. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $P_a(x) = x^3 + ax - 1$ .

1. Montrer que ce polynôme admet une unique racine réelle  $u(a)$ .

On note  $u$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^+$  qui à tout réel  $a$  associe  $u(a)$ .

2. Montrer que  $u(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^{+*}$ .

3. Montrer que l'application  $u$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

4. Calculer  $u(0)$ , puis  $\lim_{a \rightarrow +\infty} u(a)$ .

5. Déterminer l'application réciproque de  $u$ .

6. Montrer que  $u$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
7. Montrer que  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Montrer qu'elle est également dérivable à droite en 0. Calculer pour tout  $a \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $u'(a)$ , ainsi que la valeur de la dérivée à droite en 0.
8. Esquisser l'allure de la courbe représentant  $u$ .

---

**Solution :**

1. La fonction  $x \mapsto P_a(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $P'_a(x) = 3x^2 + a$ . Pour tout  $a$ , la fonction  $P_a$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_a(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_a(x) = +\infty$ ,  $P_a$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur lui-même; 0 a donc un unique antécédent que l'on note  $u(a)$ .

2. Comme  $P_a$  est une fonction strictement croissante et que  $P_a(0) = -1$ , on a  $u(a) > 0$ , donc  $u$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^{+*}$ .

3. Soit  $0 \leq a < b$ . On a :

$$\begin{aligned} P_a(u(b)) &= u(b)^3 + au(b) - 1 = u(b)^3 + bu(b) - 1 + (a - b)u(b) \\ &= (a - b)u(b) < 0. \end{aligned}$$

Or,  $P_a$  est une fonction strictement croissante : on a donc  $u(b) < u(a)$  et  $u$  est strictement décroissante.

4.  $u(0)$  est la racine positive de l'équation  $P_0(x) = x^3 - 1 = 0$  donc  $u(0) = 1$ . Par ailleurs  $au(a) = 1 - u(a)^3 \leq 1$ ; donc  $0 < u(a) \leq \frac{1}{a}$ , ce qui entraîne :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} u(a) = 0.$$

5. On sait que  $u(a) \neq 0$  (on a même  $u(a) \geq 1$ ). La relation définissant  $u(a)$  permet donc d'écrire :

$$a = \frac{1 - u(a)^3}{u(a)}$$

Ainsi l'application réciproque de  $u$  sur  $[1, +\infty[$  est  $u^{-1} : t \mapsto \frac{1 - t^3}{t}$ .

6. La fonction  $u^{-1}$  est clairement continue sur  $[1, +\infty[$ , donc  $u$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , la continuité en 0 s'entendant à droite.

7. La fonction  $u^{-1}$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et :

$$(u^{-1})'(t) = -\frac{1}{t^2} - 2t = -\frac{1 + 2t^3}{t^2}.$$

Cette dérivée n'étant jamais nulle,  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  (la dérivée en 0 s'entendant à droite) et :

$$\forall a \geq 0, u'(a) = \frac{1}{(u^{-1})'(u(a))} = -\frac{u(a)^2}{1 + 2u(a)^3}$$

et comme  $u(a)^3 = 1 - au(a)$ , il vient :

$$\forall a \geq 0, u'(a) = -\frac{u(a)^2}{3 - 2au(a)}$$

En particulier la dérivée en 0 à droite de  $u$  vaut :  $u'(0) = -\frac{1}{3}$ .

8. L'allure de la courbe représentant  $u$  se déduit par symétrie par rapport à la première bissectrice de celle de  $u^{-1}$  dont le tracé est élémentaire.

**Exercice 1.7.**

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{n \cdot e^{-t}}{1 + nt} dt$  est convergente.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $I_n$  cette intégrale.

2. a) Soit  $J_n = \int_{1/n}^1 \frac{e^{-u}}{u} du$ . Montrer que  $J_n$  est équivalent à  $\ln(n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

b) En déduire une constante  $C$  telle que  $I_n$  soit équivalent à  $C \ln(n)$  pour  $n$  tendant vers l'infini.

3. a) Déterminer les valeurs de l'entier naturel  $n$  pour lesquelles la série de terme général  $\frac{n \cdot e^{-k}}{1 + nk}$  ( $k$  décrivant  $\mathbb{N}$ ) est convergente. On note alors  $S(n)$  sa somme.

b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a  $0 \leq S(n) - n \leq I_n$ .

c) En déduire une constante  $D$  telle que  $S(n)$  soit équivalent à  $nD$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

**Solution :**

1. La fonction à intégrer est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , positive et négligeable devant  $\frac{1}{t^2}$  au voisinage de  $+\infty$ . La règle de Riemann prouve donc la convergence de cette intégrale.

$$2. a) \ln(n) - J_n = \int_{1/n}^1 \frac{du}{u} - \int_{1/n}^1 \frac{e^{-u}}{u} du = \int_{1/n}^1 \frac{1 - e^{-u}}{u} du$$

Comme  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-u}}{u} = 1$ , la fonction  $u \mapsto \frac{1 - e^{-u}}{u}$  est positive et bornée sur  $[0, 1]$  ; si on note  $M$  un majorant de cette fonction, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \ln(n) - J_n \leq M$$

En particulier  $J_n \underset{(\infty)}{\sim} \ln(n)$ .

b)  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{n} + t} dt = e^{1/n} \int_{1/n}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$  (on a effectué le changement de variable  $y = t + \frac{1}{n}$ )

Soit :  $I_n \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \int_{1/n}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy = \int_{1/n}^1 \frac{e^{-y}}{y} dy + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \ln(n)$ . Donc  $C = 1$ .

3. a) On a :  $0 \leq \frac{n \cdot e^{-k}}{1 + nk} \leq n \cdot e^{-k}$ . La série majorante est une série géométrique de raison  $e^{-1}$ , donc convergente et la convergence de la série proposée s'en déduit, pour toute valeur de  $n \in \mathbb{N}$ .

b) La fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\frac{1}{n} + t}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ , d'où :

$$\forall k \geq 1, \int_k^{k+1} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{n} + t} dt \leq \frac{e^{-k}}{\frac{1}{n} + k} \leq \int_{k-1}^k \frac{e^{-t}}{\frac{1}{n} + t} dt$$

En sommant, pour  $k$  variant de 1 à l'infini et en ajoutant le terme d'indice  $k = 0$ , on obtient :

$$0 \leq S(n) - n \leq I_n$$

c) Il résulte du b) que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n} = 1$ , i.e.  $S(n) \underset{(\infty)}{\sim} n$

### Exercice 1.8.

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$ .

Montrer que cette intégrale est convergente. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .

Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)$ . En déduire sa convergence.

2. a) Montrer que  $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) En déduire la nature de la série de terme général  $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$ , puis la limite de la suite  $(I_n)$ .

3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $J_n = \sqrt{n}I_n$  et  $K_n = \sqrt{n+1}I_n$ .

Montrer que les suites  $(J_n)$  et  $(K_n)$  sont adjacentes.

En déduire l'existence d'un réel  $\alpha$  strictement positif tel que  $I_n \sim \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$  au voisinage de  $+\infty$ .

4. a) A l'aide de la relation de récurrence de la question 2. a), trouver une expression de  $I_n$  utilisant  $C_{2n}^n$ .

b) On admettra la formule de Stirling : au voisinage de  $+\infty$ ,  $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ .

Déterminer  $\alpha$ .

### Solution :

1. ★ La fonction à intégrer est continue sur  $[0, 1[$  et équivalente en 1 à  $\frac{1}{(1-x)^{1/2}}$  ; la règle de Riemann montre que l'intégrale converge.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = [-2\sqrt{1-x}]_0^1 = 2.$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1-(1-x)}{\sqrt{1-x}} dx = I_0 - \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = 2 + \frac{2}{3} [(1-x)^{3/2}]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

★ Enfin,  $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$  donne  $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ .

La suite  $(I_n)$  est décroissante et minorée par 0, donc est convergente.

2. a) En intégrant par parties, pour  $n \geq 1$  :

$$I_n = [x^n(-2\sqrt{1-x})]_0^1 + 2n \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x} dx = 2n \int_0^1 \frac{x^{n-1}(1-x)}{\sqrt{1-x}} dx,$$

soit :  $I_n = 2n(I_{n-1} - I_n)$  et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$$

$$b) v_n = \ln\left(\frac{I_n}{I_{n-1}}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

La série de terme général  $v_n$  est une série à termes tous négatifs. Son terme général est équivalent à celui d'une série divergente :  $\sum v_n$  diverge et on peut même dire que ses sommes partielles tendent vers  $-\infty$ .

Par télescopage :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{I_n}{I_0}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v_k = -\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(I_n) = -\infty$ ,

soit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$$

3. Pour  $n \geq 2$  :

$$\star \frac{J_n}{J_{n-1}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \times \frac{2n}{2n+1} > 1 \text{ (en élevant au carré) : } (J_n) \text{ croît.}$$

$$\star \frac{K_n}{K_{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \times \frac{2n}{2n+1} < 1 \text{ (encore en élevant au carré) : } (K_n) \text{ décroît.}$$

$$\star K_n - J_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})I_n = \frac{I_n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Les suites  $(J_n)$  et  $(K_n)$  sont bien adjacentes, donc sont convergentes de même limite notée  $\alpha$  et on a  $\alpha \geq J_1 > 0$ .

Ainsi  $\sqrt{n}I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$  et :  $I_n \sim \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ .

$$4. a) I_n = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2(n-1)}{2n-1} \times \dots \times \frac{2}{3} I_0 = \frac{2(2^n \cdot n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)C_{2n}^n}$$

$$b) \text{ On a } C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} = 2^{2n} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \text{ d'où :}$$

$$I_n \sim \frac{2\sqrt{\pi n}}{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} \quad \text{d'où } \alpha = \sqrt{\pi}.$$

### Exercice 1.9.

Soit  $\alpha$  un réel strictement supérieur à 1.

1. Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$  converge pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On pose alors  $u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ .

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$u_n(\alpha) = \alpha n(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$$

Donner alors une expression de  $u_n(\alpha)$  en fonction de  $u_1(\alpha)$ .

3. a) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n(\alpha))$ . En déduire sa convergence.

b) En partageant l'intervalle d'intégration  $[0, +\infty[$  en trois intervalles, à l'aide des points  $b$  et  $1$ , démontrer que, pour tout réel  $b$  de  $]0, 1[$ , on a :

$$u_n(\alpha) \leq b + \frac{1}{(1+b^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1}$$

c) Donner alors la valeur de la limite de la suite  $(u_n(\alpha))$ .

4. On pose, pour tout entier  $n$  non nul :  $w_n(\alpha) = \ln(u_n(\alpha)) + \frac{\ln(n)}{\alpha}$ .

a) Démontrer que la série de terme général  $(w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha))$  est convergente (utiliser la formule de la question 2 puis un développement limité).

b) En déduire l'existence d'un réel  $K(\alpha)$  tel que  $u_n(\alpha)$  soit équivalent à  $\frac{K(\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$ , lorsque  $n$  tend vers l'infini.

### Solution :

1. La fonction à intégrer est continue et positive sur  $\mathbb{R}^+$  et équivalente au voisinage de l'infini à  $\frac{1}{t^{\alpha n}}$ . Comme  $\alpha > 1$  et  $n \geq 1$ , on a  $\alpha n > 1$  et la convergence de l'intégrale résulte de la règle de Riemann.

2. En intégrant par parties, directement avec la borne  $+\infty$ , puisque cela n'introduit pas d'ambiguïté :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt = \left[ -t \times \frac{\alpha n t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \right]_0^{+\infty} + \alpha n \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}} dt$$

$$\text{Soit : } u_n(\alpha) = \alpha n \int_0^{+\infty} \frac{1+t^\alpha-1}{(1+t^\alpha)^{n+1}} dt = \alpha n(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \geq 1, u_{n+1}(\alpha) = \frac{\alpha n - 1}{\alpha n} u_n(\alpha)$$

et, par récurrence :

$$\forall n \geq 1, u_n(\alpha) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\alpha(n-k) - 1)}{\alpha^{n-1}(n-1)!} u_1(\alpha)$$

3. a)  $\forall t \geq 0, 1 + t^\alpha \geq 1$ , donc pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $\frac{1}{(1 + t^\alpha)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1 + t^\alpha)^n}$

et en intégrant :

$$u_{n+1}(\alpha) \leq u_n(\alpha)$$

La suite  $(u_n(\alpha))_n$  est décroissante et minorée par 0, donc est convergente.

b) ★ Clairement  $\int_0^b \frac{dt}{(1 + t^\alpha)^n} \leq b$

★ De même  $\int_b^1 \frac{dt}{(1 + t^\alpha)^n} \leq (1 - b) \frac{1}{(1 + b^\alpha)^n}$

★ Enfin, sur  $[1, +\infty[$ ,  $\frac{1}{(1 + t^\alpha)^n} \leq \frac{1}{t^{\alpha n}}$ , d'où :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^\alpha)^n} \leq \left[ \frac{1}{(1 - \alpha n)t^{\alpha n - 1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha n - 1}$$

D'où le résultat par application de la relation de Chasles.

c)  $b$  étant fixé, par prolongement des inégalités à la limite, on obtient :

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\alpha) \leq b$$

et ceci étant valable pour tout  $b \in ]0, 1[$  :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\alpha) = 0$ .

4. a) Pour  $n \geq 1$ ,  $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha) = \ln \left( \frac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)} \right) + \frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$

Or  $\frac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)} = 1 - \frac{1}{\alpha n} \implies \ln \left( \frac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)} \right) = -\frac{1}{\alpha n} - \frac{1}{2\alpha^2 n^2} + o(n^{-2})$ , et :

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(n^{-2})$$

Donc  $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha) = -\frac{1}{2n^2} \left( \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right) + o(n^{-2})$  et la règle de Riemann donne la convergence de la série de terme général  $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha)$ , c'est-à-dire, par télescopage, de la suite  $w_n(\alpha)$ .

b) En notant  $T(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(\alpha)$ , on a donc :

$$\ln u_n(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \ln n = T(\alpha) + o(1), \text{ i.e. :}$$

$$u_n(\alpha) = \frac{1}{n^{1/\alpha}} e^{T(\alpha) + o(1)} \sim \frac{1}{n^{1/\alpha}} e^{T(\alpha)}, \text{ donc } K(\alpha) = e^{T(\alpha)}$$

### Exercice 1.10.

Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels. On lui associe la suite  $(A_n)_{n \geq 0}$  définie, pour tout  $n \geq 0$ , par :

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

Pour tout  $x$  réel tel que les séries suivantes convergent, on pose

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, \quad A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \frac{x^n}{n!}$$

1. Dans cette question, on suppose que pour tout  $n \geq 0$ ,  $a_n = (-1)^n$ .



- a) Déterminer le domaine de définition des fonctions  $a$  et  $A$ .  
 b) Déterminer, si elle existe,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} A(x)$ .  
 c) Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-x} a(x) dx$  converge et déterminer sa valeur.

2. Soit  $\alpha$  un réel non nul. On pose dans cette question, pour tout  $n \geq 0$ ,  $a_n = \alpha^n$ .

- a) Déterminer le domaine de définition des fonctions  $a$  et  $A$ .  
 b) Déterminer, suivant les valeurs de  $\alpha$ , l'existence de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} A(x)$ .  
 c) Pour quelles valeurs de  $\alpha$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-x} a(x) dx$  converge-t-elle?

Déterminer alors sa valeur.

3. On suppose dans cette question que la série  $\sum a_n$  est convergente. On note

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

- a) Soit  $(c_n)$  une suite de réels tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ . Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{x^n}{n!} \right) = 0$$

- b) En utilisant le reste de la série convergente  $\sum_n a_n$ , montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} A(x)$  existe et la calculer.

---

**Solution :**

1. a) On a immédiatement :

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = e^{-x}, \quad A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Ces deux fonctions sont définies pour tout  $x$  réel.

- b) Il est immédiat que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} A(x) = \frac{1}{2}$ .

c) On a : 
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} a(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}.$$

2. a) On a :  $a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = e^{\alpha x}$ .

Cette fonction est définie pour tout  $x$  réel. De plus :

$$A_n = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

et :

$$A(x) = \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \alpha^{n+1}) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1 - \alpha} (e^x - \alpha e^{\alpha x})$$

Cette fonction est définie pour tout  $x$  réel.

b) On a :

$$e^{-x}A(x) = \frac{1}{1-\alpha}(1 - \alpha e^{(\alpha-1)x})$$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}A(x)$  existe si et seulement si  $\alpha < 1$ . Sa valeur est alors  $\frac{1}{1-\alpha}$ .

c) On a  $e^{-x}a(x) = e^{(\alpha-1)x}$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-x}a(x)dx$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$ .

Dans ce cas, sa valeur est  $\frac{1}{1-\alpha}$ .

3. a) Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  tel que si  $n \geq N$ , alors  $|c_n| \leq \varepsilon$ . Écrivons

$$e^{-x} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{x^n}{n!} \right) = e^{-x} \left( \sum_{n=0}^N c_n \frac{x^n}{n!} \right) + e^{-x} \left( \sum_{n=N+1}^{+\infty} c_n \frac{x^n}{n!} \right)$$

On a :

$$\left| e^{-x} \left( \sum_{n=N+1}^{+\infty} c_n \frac{x^n}{n!} \right) \right| \leq \varepsilon \cdot e^{-x} \left( \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) < \varepsilon$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \left( \sum_{n=0}^N c_n \frac{x^n}{n!} \right) = 0$$

puisque le second terme de ce produit est un polynôme.

b) On écrit  $A_n = A - R_n$ , avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} R_n = 0$ . On a alors :

$$e^{-x}A(x) = e^{-x} \left[ A e^x - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n \frac{x^n}{n!} \right]$$

et, par la question précédente :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}A(x) = A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

### Exercice 1.11.

Soient  $A = (0, 1)$ ,  $B = (-1, 1)$ ,  $C = (-1, -1)$ ,  $D = (0, -1)$  quatre points du plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = -2x^3 - x^2 - y^2 + 5$ .

1. Montrer que la restriction de  $f$  au rectangle  $ABCD$  (notée encore  $f$ ) est bornée.

2. Déterminer le maximum et le minimum de  $f$  sur le rectangle  $ABCD$ .

### Solution :

1. La fonction  $f$  est continue sur le fermé borné  $ABCD$ . Elle y est donc bornée et atteint ses bornes.

2. Soit  $(x, y)$  un point où  $f$  admet un extremum. Si  $(x, y)$  appartient à (l'ouvert) l'intérieur du rectangle,  $f$  admet des dérivées partielles d'ordre 1 en  $(x, y)$ , et  $(x, y)$  est un point critique de  $f$ . Il vérifie donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -6x^2 - 2x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y = 0$$

Il existe deux solutions :  $O = (0, 0)$ ,  $E = (-1/3, 0)$ , mais seul le second appartient à l'intérieur du rectangle.

En ce second point, on a avec les notations de Monge :  $r = 2$ ,  $s = 0$ ,  $t = -2$ ,  $s^2 - rt = 4 > 0$ . Il s'agit d'un point col.

Les extremums de  $f$  se trouvent donc à la frontière de  $ABCD$ .

- Sur  $[AB]$ ,  $y = 1$ ,  $x \in [-1, 0]$ ,  $f(x, y) = -2x^3 - x^2 + 4$ . Une étude de cette fonction sur l'intervalle  $[-1, 0]$  montre que son maximum est atteint en  $x = 0$  et vaut 5, et que son minimum est atteint en  $x = -1/3$  et vaut  $107/27$ .

- Sur  $[BC]$ ,  $x = -1$ ,  $y \in [-1, 1]$ ,  $f(x, y) = 6 - y^2$ . Une étude de cette fonction sur l'intervalle  $[-1, 1]$  montre que son maximum est atteint en  $x = 0$  et vaut 6, et que son minimum est atteint en  $x = 1$  et  $x = -1$  et vaut 5.

- Sur  $[AD]$ ,  $x = 0$ ,  $y \in [-1, 1]$ ,  $f(x, y) = 5 - y^2$ . Une étude de cette fonction sur l'intervalle  $[-1, 1]$  montre que son maximum est atteint en  $y = 0$  et vaut 5, et que son minimum est atteint en  $y = 1$  et  $y = -1$  et vaut 4.

En conclusion, le maximum de  $f$  vaut 6 et est atteint en  $(-1, 0)$  et le minimum de  $f$  vaut  $107/27$  et est atteint en  $(-1/3, 1)$  et  $(-1/3, -1)$ .

### Exercice 1.12.

1. Soit la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = e - 1$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n = -1 + nu_{n-1}$ .

Quelles sont les limites possibles de cette suite ?

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$ .

a) Déterminer la limite de la suite  $(I_n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

b) Établir une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n-1}$ .

c) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$  puis que :

$$I_n = n! \left( e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$$

3. Soit  $a$  un nombre réel et soit  $(v_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $v_0 = a - 1$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $v_n = -1 + nv_{n-1}$ .

Montrer que si  $a \neq e$ , la suite  $(v_n)$  est divergente.

4. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n = \frac{u_{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

En déduire que  $u_n$  est équivalent à  $\frac{1}{n}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

5. Pourquoi la plupart des calculatrices sur lesquelles on programme la suite  $(u_n)$  vous inciteront à une mauvaise conclusion sur la limite de cette suite ?

**Solution :**

1. Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ .

Si on avait  $\ell \neq 0$ , alors  $n \cdot u_{n-1}$  serait de limite infinie et la relation  $u_n = -1 + nu_{n-1}$  conduit à une contradiction. La seule limite réelle possible est donc 0 (mais *a priori* rien ne dit que la suite converge et on ne peut exclure que la suite soit de limite infinie).

2. a) On peut écrire :

$$\int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$$

Donc :  $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ , ce qui entraîne que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$$

b) Une intégration par parties donne facilement

$$I_n = -1 + nI_{n-1}.$$

c) ★ Comme  $I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx = e - 1$ , les suites  $(I_n)$  et  $(u_n)$  vérifient la même relation de récurrence à un cran et ont même terme initial, donc coïncident. En particulier :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

★ La relation  $I_n = -1 + nI_{n-1}$  donne, en divisant par  $n!$  :

$$\frac{I_n}{n!} = \frac{-1}{n!} + \frac{I_{n-1}}{(n-1)!}$$

En sommant ces relations à partir de  $n = 1$ , et avec  $I_0 = e - 1$ , il vient :

$$I_n = n! \left( e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$$

3. Posons pour tout  $n \geq 0$ ,  $w_n = u_n - v_n$ . Alors  $w_0 = e - a$ , et pour tout  $n \geq 1$ ,  $w_n = nw_{n-1}$ .

Ainsi pour tout  $n \geq 0$ ,  $w_n = n!w_0$ . Cette dernière suite ne converge que si  $w_0 = 0$ .

La suite  $(u_n)$  étant convergente, la suite  $(v_n)$  converge si et seulement si  $v_0 = u_0$ .

4. Les relations :

$$\begin{cases} u_{n+2} &= -1 + (n+2)u_{n+1} \\ u_{n+1} &= -1 + (n+1)u_n \end{cases}$$

donnent :

$$u_{n+2} = -n - 3 + (n+2)(n+1)u_n$$

soit :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{u_{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \frac{n+3}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{u_{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , pour  $n$  assez grand  $|u_n| \leq 1$  et  $\left| \frac{u_{n+2}}{(n+2)(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ .

Le terme prépondérant est donc  $\frac{1}{n+1}$  et :

$$u_n \sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$$

5. La valeur de  $e$  contenue en mémoire des calculatrices numériques est une valeur approchée de la valeur exacte de  $e$  (car une calculatrice ne reconnaît que des nombres décimaux, ou parfois aussi des nombres rationnels). Ainsi, la suite  $(u_n)$  programmée sur une telle calculatrice est en fait une suite  $(v_n)$  qui divergera vers l'infini.

### Exercice 1.13.

On considère deux nombres réels strictement positifs  $u_0$  et  $v_0$ . On définit par récurrence les suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  en posant pour  $n \geq 0$  :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} [u_n + v_n] \\ \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \right] \end{cases}$$

1. Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs, montrer que l'on a :

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

2. On se propose de montrer que les suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  sont adjacentes.

a) Montrer par récurrence que  $v_n \leq u_n$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

b) Prouver que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante et que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est croissante.

c) Terminer en montrant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .

3. Déterminer la limite commune des suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$ .

**Solution :**

1. Après réduction, l'inégalité  $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$  est équivalente à  $(a-b)^2 \geq 0$ ,

ce qui semble raisonnable !

De plus on a égalité dans cette inégalité si et seulement si  $a = b$ .

2. a) On voit par une récurrence immédiate que  $u_n$  et  $v_n$  sont deux réels positifs, pour tout  $n \geq 1$ . On applique l'inégalité de la question précédente et il vient :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \geq \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} = v_{n+1}$$

b) Comme  $v_n \leq u_n$ , il vient :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \leq \frac{1}{2}(u_n + u_n) = u_n$$

Ainsi la suite  $(u_n)_n$  est décroissante.

Pour tout  $n \geq 1$ , on a également :

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \right] \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{v_n} + \frac{1}{v_n} \right] = \frac{1}{v_n}$$

Ainsi la suite  $(v_n)_n$  est croissante.

c) Les relations de récurrence impliquent que :

$$0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{2} [u_n + v_n] - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leq \frac{u_n - v_n}{2}$$

Ainsi, pour tout  $n \geq 1$  et par récurrence :

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{u_1 - v_1}{2^{n-1}}$$

et par conséquent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .

Ceci achève de prouver que les suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont adjacentes.

3. Soit  $\ell$  la limite commune de ces deux suites. On remarque que :

$$v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \implies u_{n+1} v_{n+1} = u_n v_n = \dots = u_0 v_0.$$

Par passage à la limite, il vient  $\ell^2 = u_0 v_0$  et par positivité :

$$\ell = \sqrt{u_0 v_0}.$$

### Exercice 1.14.

On désignera par  $\mathbb{R}_+^*$  l'ensemble des réels strictement positifs.

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$f(t) = t - \ln(t) - \frac{1}{t}.$$

a) Etudier les branches infinies de  $f$ .

b) Faire une étude des variations, de la convexité de  $f$  et donner une représentation graphique de  $f$ .

c) Résoudre l'équation  $f(t) = 0$ .

2. On considère la fonction  $g$  définie sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  par

$$g(x, y) = x \ln y - y \ln x$$

- Montrer que  $g$  est de classe  $C^\infty$ .
- Calculer les dérivées partielles du premier et du second ordre de  $g$ .
- Étudier l'existence d'extremums locaux ou globaux de  $g$ .

---

**Solution :**

1. a) Par les théorèmes de comparaison, il vient  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = -\infty$ .

Ainsi la droite d'équation  $t = 0$  est asymptote à la courbe représentant  $f$  au voisinage de  $0^+$ .

De plus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - t = -\infty$$

Lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , on a une direction asymptotique d'équation  $y = t$  et la courbe représentative présente une branche parabolique oblique.

b) La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et un calcul élémentaire donne, pour tout  $t > 0$  :

$$f'(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2} > 0, \quad f''(t) = \frac{t - 2}{t^3}$$

Il en découle que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , admet un point d'inflexion en  $t = 2$ , est concave sur l'intervalle  $]0, 2]$  et convexe sur l'intervalle  $[2, +\infty[$ .

c) Puisque  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et comme

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty,$$

par le théorème de la bijection, il existe une seule valeur de  $t > 0$  pour laquelle  $f(t) = 0$ ; cette valeur est  $t = 1$ .

2. a) La fonction  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ , en utilisant les théorèmes du cours sur les sommes et produits de fonctions deux fois dérivables.

b) Un calcul élémentaire donne :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \ln y - \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{y} - \ln x$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{x}{y^2}$$

c) Les points critiques sont donnés par  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$ , soit :

$$\begin{cases} y = \frac{x}{\ln x} \\ \ln x - \ln(\ln x) - \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases}$$

Par la première question, le seul point critique est le point  $(e, e)$ . D'autre part, avec les notations de G. Monge, en ce point :

$$r = \frac{1}{e}, s = 0, t = -\frac{1}{e}, \text{ d'où } s^2 - rt > 0.$$

Le point  $(e, e)$  n'est donc pas un extremum local. Donc ce n'est pas non plus un extremum global.

### Exercice 1.15.

On considère la fonction  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par la relation  $\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} dt$ .

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, quel que soit  $u \in \mathbb{R}$ ,  $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$ .

2. En déduire que, pour tout  $(x, h) \in \mathbb{R}^2$  :

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) + h \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t dt| \leq \frac{1}{2} h^2 e^{|h|} \varphi(x).$$

3. En déduire que  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que, quel que soit  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\varphi'(x) = - \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t dt.$$

Indiquer sans démonstration pourquoi  $\varphi$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et préciser sa dérivée seconde.

4. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi'(x) < 0$  et  $\varphi''(x) > 0$ .

5. Étudier la variation de  $x \mapsto x - \varphi(x)$  et montrer qu'il existe un et un seul réel  $x$  tel que  $\varphi(x) = x$ .

On note  $\alpha$  ce réel. Montrer que  $0 < \alpha < 1$ . *On justifiera (et utilisera) que, pour tout  $t \in [0, \pi/2]$ ,  $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ . On admettra que  $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-1}) < 0,993$ .*

On considère maintenant une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ .

6. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) > 0$  et  $\varphi(\varphi(x)) < \frac{\pi}{2}$ .

(Par conséquent,  $0 < u_2 < \frac{\pi}{2}$ .)

Montrer aussi que, pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $-1 < \varphi'(x) < 0$ .

7. Que peut-on dire de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si  $u_2 = \alpha$  ?

8. On suppose que  $u_2 < \alpha$ . Montrer que  $u_2 < \alpha < u_3$  et plus généralement que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{2n} < \alpha < u_{2n+1}$ .

Montrer que la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  croît et que la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  décroît.

Montrer que, pour tout  $x \in [u_2, u_3]$ ,  $|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(u_2)| < 1$ . En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ .



9. Que peut-on dire de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si  $u_2 > \alpha$  ?

**Solution :**

1. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, appliquée à la fonction exponentielle sur le segment  $[0, u]$  donne :

$$|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} \sup_{[0, u]} |\exp''|$$

Si  $u > 0$ ,  $\sup_{[0, u]} |\exp''| = e^u$ , si  $u \leq 0$ ,  $\sup_{[0, u]} |\exp''| = e^0 = 1$ , et dans les deux

cas on a bien :  $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$ .

2. En plaçant tout sous la même intégrale :

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= \left| \varphi(x+h) - \varphi(x) + h \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t \, dt \right| \\ &= \left| \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} (e^{-h \sin t} - 1 - h \sin t) \, dt \right| \\ &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} |e^{-h \sin t} - 1 - h \sin t| \, dt \\ &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \frac{h^2 \sin^2 t}{2} e^{|h \sin t|} \, dt \leq \frac{h^2 e^{|h|}}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \, dt \leq \frac{h^2 e^{|h|}}{2} \varphi(x). \end{aligned}$$

3. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}^*$ , on a donc :

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \int_0^{\pi/2} -e^{-x \sin t} \sin t \, dt \right| \leq \frac{1}{2} |h| e^{|h|} \varphi(x)$$

Par encadrement, on en déduit que  $\varphi$  est dérivable au point  $x$ , avec :

$$\varphi'(x) = - \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t \, dt$$

Le même type de calcul montre que  $\varphi$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec :

$$\varphi''(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin^2 t \, dt$$

4. Le théorème de positivité de l'intégrale montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) < 0 \text{ et } \varphi''(x) > 0.$$

5. La fonction  $\delta : x \mapsto x - \varphi(x)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  ; elle s'annule donc en au plus un réel.

$$\delta(0) = -\varphi(0) = -\pi/2 < 0$$

$$\delta(1) = 1 - \varphi(1) > 0$$

En effet, par concavité de la fonction sinus sur  $[0, \pi/2]$ , on a  $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$  et donc

$$\varphi(1) = \int_0^{\pi/2} e^{-\sin t} \, dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2t/\pi} \, dt = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-1}) < 1.$$

De tout ceci, il résulte qu'il existe un unique  $\alpha$  tel que  $\varphi(\alpha) = \alpha$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ .

6. La fonction  $t \mapsto e^{-x \sin t}$  étant continue, positive et non identiquement nulle sur le segment d'intégration  $[0, \pi/2]$ , on a  $\varphi(x) > 0$ . Comme  $\varphi$  est strictement décroissante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\varphi(x)) < \varphi(0) = \frac{\pi}{2}$$

Soit  $x > 0$ , on sait déjà que  $\varphi'(x) < 0$ . Comme  $\varphi'$  est strictement croissante :

$$\forall x > 0, \varphi'(x) > \varphi'(0) = -1$$

7. Si  $u_2 = \alpha$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire à partir du rang 2. On peut même dire que cette suite est constante, puisque  $\varphi$  étant injective l'équation  $\varphi(x) = \alpha$  n'admet que la solution  $\alpha$  et donc  $u_1 = \alpha$  et  $u_0 = \alpha$ .

8. ★ Comme  $\varphi$  décroît strictement :  $\varphi(u_2) > \varphi(\alpha)$ , soit  $u_3 > \alpha$ , et par une récurrence simple :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} < \alpha < u_{2n+1}$$

★ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par le théorème des accroissements finis, on a :

$$\exists c \in [\alpha, u_n] \subset \mathbb{R}_+, \varphi(u_n) - \varphi(\alpha) = \varphi'(c)(u_n - \alpha)$$

Il s'ensuit que  $|u_{n+1} - \alpha| < |u_n - \alpha|$ .

La suite de terme général  $|u_n - \alpha|$  est strictement décroissante et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha - u_{2n+2} < \alpha - u_{2n}, \text{ soit } u_{2n} < u_{2n+2}.$$

On conclut que la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  croît (strictement) et comme  $\varphi$  est décroissante, la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  décroît (strictement).

★ Pour tout  $x \in [u_2, u_3]$ ,  $\varphi'(u_2) \leq \varphi'(x) < 0$  et  $|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(u_2)| < 1$ . Pour tout  $n \geq 2$ , on a donc :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq |\varphi'(u_2)| \cdot |u_n - \alpha|$ .

Ainsi  $\forall n \geq 2, |u_n - \alpha| \leq |\varphi'(u_2)|^{n-2} |u_2 - \alpha|$  et donc :

la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$

9. Si  $u_2 > \alpha$ , alors  $0 < u_1 < \alpha$  et il suffit de permuter les rôles des indices pairs et des indices impairs.

### Exercice 1.16.

1. Étudier la convergence de la suite de terme général  $p_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

2. Soit  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  une suite à termes positifs telle que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

Montrer que la série de terme général  $u_k$  converge.

[On pourra chercher à majorer  $\sigma_p = \sum_{k=1}^{2^p} u_k$ , pour  $p \geq 1$ .]

**Solution :**

1. Étudions la suite  $(\ln(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . On a :

$$\ln(p_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

Or  $v_k = \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$  est positif et  $v_k \sim \frac{1}{2^k}$ , qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Ainsi la série de terme général  $v_k$  est convergente et si on note  $\ell$  sa somme, la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite  $e^\ell$ .

2. On remarque que pour tout  $p \geq 1$

$$\sigma_p = \sum_{k=1}^{2^p} u_k = \sum_{k=1}^{2^{p-1}} u_k + \sum_{k=2^{p-1}+1}^{2^p} u_k \leq \left(1 + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \sum_{k=1}^{2^{p-1}} u_k$$

soit :  $\sigma_p \leq \left(1 + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \sigma_{p-1}$ .

Par récurrence, il vient donc :  $\sigma_p \leq \sigma_0 \prod_{k=1}^p \left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right) = u_1 \prod_{k=0}^{p-1} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

La suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la première question étant convergente, la suite  $(\sigma_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  est majorée par une constante  $M$  (que l'on peut prendre égale à  $u_1 e^\ell$ , puisque la suite  $(p_n)$  est croissante).

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $p_n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \leq 2^{p_n}$  ; donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \leq \sigma_{p_n} \leq M$$

La série  $\sum u_n$  étant à terme positifs et ses sommes partielles étant majorées, cela signifie qu'elle converge.

### Exercice 1.17.

Soit  $f$  l'application définie par :  $f(x) = \exp(-\lambda x^2)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\lambda > \frac{e}{2}$ .

1. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\ell$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $\ell$  vérifie :  $\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} < \ell < 1$ .

2. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Montrer que les suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones et convergentes.

3. a) On pose  $g = f \circ f$ . Montrer que l'équation  $g(x) = x$  ne peut admettre de solution que sur  $]0, 1[$ . Vérifier que  $g(\ell) = \ell$ .

b) Montrer que l'équation  $g(x) = x$  admet trois solutions sur  $]0, 1[$  :  $a, b$  et  $\ell$ . Vérifier que  $\ell$  est strictement compris entre  $a$  et  $b$ .

c) Déterminer les limites des suites  $(u_{2n})$  et de  $(u_{2n+1})$ .

**Solution :**

1.  $f$  est à valeurs strictement positives, donc l'équation  $f(x) = x$  n'a pas de solution sur  $\mathbb{R}^-$ .

En revanche  $\varphi : x \mapsto f(x) - x$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ , avec  $\varphi(0) = 1$ ,

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right) = e^{-1/2} - \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} > 0 \text{ et } \varphi(1) = e^{-\lambda} - 1 < 0$$

Ainsi  $\varphi$  s'annule en un point  $\ell$  et un seul et  $\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} < \ell < 1$ .

2. Comme  $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ , la suite  $(u_n)$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ .

La fonction  $f$  étant décroissante, la fonction  $f \circ f$  est croissante sur  $[0, 1]$  et les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones de sens contraires (le signe de  $u_{n+2} - u_n$  est le signe contraire de celui de  $u_{n+1} - u_{n-1}$ , donc celui de  $u_n - u_{n-2}$ ). Comme  $u_2 > 0 = u_0$  on peut même dire que  $(u_{2n})$  est croissante et  $(u_{2n+1})$  est décroissante. De plus ces deux suites sont bornées et sont donc convergentes.

3. a) Déjà :  $f(\ell) = \ell \implies g(\ell) = f(f(\ell)) = \ell$ .

D'autre part,  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in ]0, 1]$ , donc *a fortiori*  $g(x) \in ]0, 1]$  et l'équation  $g(x) = x$  ne peut admettre des solutions que dans l'intervalle  $]0, 1]$  et on vérifie aisément que  $g(1) = 1$ .

$$\text{b) } g(x) = x \iff -\lambda[f(x)]^2 = \ln x \iff \ln \lambda - 2\lambda x^2 = \ln(-\ln x)$$

Soit  $h : x \mapsto \ln(-\ln x) + 2\lambda x^2 - \ln \lambda$ , pour  $0 < x < 1$ . La fonction  $h$  est dérivable et :  $h'(x) = \frac{1}{x \ln x} (1 + 4\lambda x^2 \ln x)$ .

Posons  $k : x \mapsto 1 + 4\lambda x^2 \ln x$ , on a  $k'(x) = 4\lambda x(2 \ln x + 1)$  et comme  $k\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) < 0$  :

$x$	0	$\alpha$	$1/\sqrt{e}$	$\beta$	1
$k'(x)$	-	-	0	+	+
$k(x)$	1	$\searrow$ 0	$\searrow$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ 1

Ce qui donne :

$x$	0	$a$	$\alpha$	$\ell$	$\beta$	$b$	1
$h'(x)$	-	-	0	+	0	-	-
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0	$\searrow$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$	$\searrow$ 0	$\searrow$ $-\infty$

(Comme  $h(\ell) = 0$  et  $h$  croissante sur  $[\alpha, \ell]$ , on a  $h(\alpha) < 0$  et l'équation  $h(x) = 0$  a une solution entre 0 et  $\alpha$  ; même raisonnement entre  $\ell$  et  $\beta \dots$ ).

Comme  $g(x) = x \iff h(x) = 0$ , la question est achevée :

l'équation  $g(x) = x$  admet trois solutions :  $a, \ell, b$ .

c) On a  $u_0 = 0 < a$ . Par croissance stricte de  $g = f \circ f$ , on a donc :  $u_2 = g(u_0) < g(a) = a$ , puis par récurrence  $\forall n, u_{2n} < a$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} \leq a$ .

La suite  $(u_{2n})$  converge vers un point fixe de  $g$  (car  $g$  est continue), donc nécessairement vers  $a$ .

Alors  $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(a) > \ell$ , et comme  $(u_{2n+1})$  converge aussi vers un point fixe de  $g$ , elle converge vers  $b$ .

**Exercice 1.18.**

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction non identiquement nulle, continue et périodique de période  $T > 0$ . On note :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

1. Étudier la convergence de la série de terme général

$$u_k = \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|f(t)|}{t} dt \quad (k \geq 1)$$

2. On suppose  $M \neq 0$ .

a) Montrer que  $F(x) \underset{(+\infty)}{\sim} Mx$ .

b) L'intégrale  $I = \int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  est-elle convergente ?

3. On suppose  $M = 0$ .

Montrer que l'intégrale  $I = \int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  est convergente mais non absolument convergente.

**Solution :**

1. Par le changement de variable  $t = kT + u$  :

$$u_k = \int_0^T \frac{|f(u)|}{u + kT} du \geq \frac{1}{(k+1)T} \int_0^T |f(u)| du$$

Comme  $\int_0^T |f(u)| du > 0$ , la règle de Riemann donne la divergence de la

série de terme général positif  $u_k$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = +\infty$  et par la règle de

comparaison série-intégrale, l'intégrale  $\int_T^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t} dt$  est divergente.

2. a) Soit  $x > 0$ , posons  $p_x = \lfloor x/T \rfloor$  et  $y = x - p_x T$ . Par découpage et périodicité :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{p_x-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t) dt + \int_{p_x T}^{p_x T + y} f(t) dt = p_x M T + \int_{p_x T}^{p_x T + y} f(t) dt$$

On a :  $\left| \int_{p_x T}^{p_x T + y} f(t) dt \right| \leq \int_{p_x T}^{(p_x+1)T} |f(t)| dt = \int_0^T |f(t)| dt$ , et  $p_x \underset{(x \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{x}{T}$ .

Le terme résiduel est borné, donc négligeable devant le premier terme et :

$$F(x) \underset{(x \rightarrow +\infty)}{\sim} p_x T M \underset{(x \rightarrow +\infty)}{\sim} x M$$

b) En intégrant par parties :

$$\int_T^X \frac{f(t)}{t} dt = \frac{F(X)}{X} - \frac{F(T)}{T} + \int_T^X \frac{F(t)}{t^2} dt$$

On a  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{F(X)}{X} = M$  et  $\frac{F(t)}{t^2} \underset{(t \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{M}{t}$ . La règle de Riemann prouve

que l'intégrale  $\int_T^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt$  est divergente et  $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  aussi.

3. Le calcul fait au début de la question 2. montre que dans le cas  $M = 0$ , la fonction  $F$  est bornée. En reprenant l'intégration par parties faite en 2. b),

la règle de Riemann prouve que l'intégrale  $\int_T^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt$  est convergente et  $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  aussi (et on a vu en 1. que  $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  n'est pas absolument convergente).

### Exercice 1.19.

Pour  $\alpha$  et  $\beta$  réels, on considère l'intégrale

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta dt$$

1. Déterminer et représenter le domaine de définition  $D$  de  $I$  :

$$D = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, I(\alpha, \beta) \text{ converge} \right\}$$

2. a) Montrer que, pour  $(\alpha, \beta) \in D$ ,

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} (1 - e^{-x})^\beta dx$$

b) Calculer  $I(n, 0)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

3. a) Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $(\alpha, 0) \in D$ , on a :

$$I(\alpha, n) = \Gamma(\alpha + 1) \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{C_n^k}{(k+1)^{\alpha+1}}$$

b) En déduire un équivalent de  $I(\alpha, n)$  lorsque  $\alpha \rightarrow +\infty$ , à  $n$  fixé.

c) Déterminer  $\lim I(\alpha, n)$  lorsque  $\alpha \rightarrow +\infty$ , à  $n$  fixé.

### Solution :

1. Soit  $f_{\alpha, \beta} : t \mapsto (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta$ . La fonction  $f_{\alpha, \beta}$  est continue et positive sur  $]0, 1[$ .

★ On a :  $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{(0^+)}{\sim} (-\ln t)^\alpha = o(t^{-1/2})$  et par la règle de Riemann l'intégrale  $\int_0^{1/2} f_{\alpha,\beta}(t) dt$  est convergente.

★ On a :  $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{(1^-)}{\sim} (1-t)^{\alpha+\beta}$  (car  $\ln t \underset{(1^-)}{\sim} t-1$ ) et par la règle de Riemann l'intégrale  $\int_{1/2}^1 f_{\alpha,\beta}(t) dt$  est convergente si et seulement si  $\alpha + \beta > -1$ .

Ainsi  $I(\alpha, \beta)$  existe si et seulement si  $\alpha + \beta > -1$ .

2. a) Par le changement de variable  $t = e^{-x}$ , il vient, pour  $\alpha + \beta > -1$  :

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} (1 - e^{-x})^\beta dx$$

b) En particulier, pour  $n \in \mathbb{N}$  :  $I(n, 0) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \Gamma(n+1) = n!$ .

3. a) Si  $(\alpha, 0) \in D$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}, (\alpha, n) \in D$  et toutes les intégrales écrites étant convergentes :

$$\begin{aligned} I(\alpha, n) &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k e^{-kx} dx = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(k+1)x} dx \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du \quad [\text{on a posé } u = (k+1)x] \end{aligned}$$

Soit :

$$I(\alpha, n) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}}$$

b) Si  $n$  est fixé, lorsque  $\alpha$  tend vers l'infini, tous les termes de la somme ont pour limite 0, sauf celui pour  $k=0$  qui vaut 1, donc :

$$I(\alpha, n) \underset{(\alpha \rightarrow +\infty)}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$$

c) Or :  $\Gamma(\alpha+1) \geq \int_2^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx \geq 2^\alpha \int_2^{+\infty} e^{-x} dx \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} +\infty$ , d'où toujours pour  $n$  fixé :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha, n) = +\infty$$

### Exercice 1.20.

Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq y \leq 1\}$  et  $f$  la fonction définie sur  $D$  par

$$f(x, y) = (y-x)^2 + 6xy$$

1. La fonction  $f$  admet-elle des extremums ?
2. Déterminer les points critiques de  $f$ . Déterminer les extremums de  $f$ .

**Solution :**

1. La fonction  $f$  est continue sur le fermé borné  $D$ , donc est bornée et atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

2. La fonction  $f$  est polynomiale, donc est de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x + 2y$$

Ainsi le seul point critique de  $f$  est  $(0, 0)$ . Or  $f(x, x) = 6x^2$  et  $f(-x, x) = -2x^2$ , alors que  $f(0, 0) = 0$ . Il n'y a donc pas d'extremum en ce point.

Les extremums de  $f$  sur  $D$  sont donc atteints en des points de la frontière de  $D$ . Or :

★ Pour  $x = -1$ ,  $f(-1, y) = y^2 - 4y + 1 = (y - 2)^2 - 3$  est maximal pour  $y = -1$  de maximum 6 et minimum pour  $y = 1$  de minimum  $-2$ .

★ Pour  $y = 1$ ,  $f(x, 1) = x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 3$ , qui est maximal pour  $x = 1$ , de maximum 6 et minimum pour  $x = -1$ , de minimum  $-2$ .

★ Pour  $y = x$ ,  $f(x, x) = 6x^2$ , maximal en 1, de maximum 6 et minimal en 0, de minimum 0.

Finalement  $f$  est minimale au point  $(-1, 1)$ , de minimum  $-2$  et maximale aux points  $(-1, -1)$  et  $(1, 1)$  de maximum 6.

*Remarque* : on pouvait noter que  $f(x, y) = f(y, x)$  et ne faire l'étude que sur la moitié de la frontière.

### Exercice 1.21.

1. Soit  $a$  un réel appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ .

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \int_0^a \frac{t^n e^t}{1+t^n} dt \leq \frac{e}{n+1}$

b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{e^t}{1+t^n} dt = e^a - 1$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier fixé. On note  $F_n$  l'application de  $[0, +\infty[$  dans lui-même définie par  $F_n(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t^n} dt$ .

a) Montrer que  $F_n$  est une bijection. On note  $x_n$  sa bijection réciproque ; ainsi, pour tout réel  $y$  positif ou nul,  $x_n(y)$  est l'unique réel positif ou nul tel

que  $\int_0^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt = y$ .

b) Préciser le sens de variation de la fonction  $x_n : y \mapsto x_n(y)$  ainsi que sa limite en  $+\infty$ .

c) Montrer que  $x_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

3. Dans cette question  $y$  est fixé tel que  $y < e - 1$ .

a) Démontrer qu'il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n \geq N$ ,  $x_n(y) < 1$ .



b) Pour  $n \geq N$ , comparer les trois réels  $\int_0^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt$ ,  $\int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{e^t}{1+t^{n+1}} dt$  et  $\int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt$ .

En déduire les variations de la suite  $(x_n(y))$  pour  $n \geq N$  et la convergence de la suite  $(x_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ . On note  $\ell$  sa limite.

c) Démontrer, pour  $n \geq N$ , l'inégalité  $\left| \int_\ell^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt \right| \leq e|x_n(y) - \ell|$

En déduire l'expression de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\ell \frac{e^t}{1+t^n} dt$  en fonction de  $y$  puis l'expression de  $\ell$  en fonction de  $y$ .

---

**Solution :**

1. a) Pour  $t \in [0, a]$ ,  $\frac{t^n e^t}{1+t^n} \leq t^n e^a \leq t^n e$ , d'où en intégrant :

$$0 \leq \int_0^a \frac{t^n e^t}{1+t^n} dt \leq \frac{ae}{n+1} \leq \frac{e}{n+1}$$

b)  $e^a - 1 - \int_0^a \frac{e^t}{1+t^n} dt = \int_0^a e^t dt - \int_0^a \frac{e^t}{1+t^n} dt = \int_0^a \frac{t^n e^t}{1+t^n} dt$ , d'où, par l'encadrement vu en a) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{e^t}{1+t^n} dt = e^a - 1$$

2. a)  $F_n$  est la primitive nulle en 0 de l'application  $t \mapsto \frac{e^t}{1+t^n}$ , continue sur  $\mathbb{R}^+$ , donc  $F_n$  est dérivable de dérivée  $F'_n(x) = \frac{e^x}{1+x^n}$  qui est strictement positive sur  $\mathbb{R}^+$ . Ainsi  $F_n$  réalise une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}^+$  vers  $[0, \lim_{+\infty} F_n[$ .

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+t^n} dt$  est trivialement divergente, donc  $\lim_{+\infty} F_n = +\infty$  et  $F_n$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^+$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

b) La bijection réciproque  $x_n$  est donc également strictement croissante, de limite  $+\infty$  en  $+\infty$ .

c)  $x_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , en tant que bijection réciproque d'une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$ , dont la dérivée ne s'annule pas.

3. a)  $\int_1^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt = y - \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y - e + 1 < 0$ .

A partir d'un certain rang  $N$ , on a donc  $\int_1^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt < 0$ , ce qui, compte

tenu de la positivité de la fonction intégrée, impose  $x_n(y) < 1$  à partir de ce même rang.

b) Pour  $n \geq N$ , on a  $\forall t \in [0, x_{n+1}(y)] \subset [0, 1]$ ,  $\frac{e^t}{1+t^n} \leq \frac{e^t}{1+t^{n+1}}$ , d'où :

$$\int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt \leq \int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{e^t}{1+t^{n+1}} dt = y = \int_0^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt$$

et comme la fonction intégrée, dans les termes extrêmes, est positive on en déduit  $x_{n+1}(y) \leq x_n(y)$ .

La suite  $(x_n(y))_n$  est décroissante à partir d'un certain rang et minorée par 0, donc est convergente vers  $\ell \in [0, 1[$ .

c) Pour  $n \geq N$ , on a  $\ell \leq x_n(y) < 1$  et pour tout  $t \in [\ell, x_n(y)]$ ,  $0 \leq \frac{e^t}{1+t^n} \leq e$ , d'où pour  $n \geq N$  :

$$0 \leq \int_{\ell}^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt \leq \int_{\ell}^{x_n(y)} e dt = e(x_n(y) - \ell)$$

et, par encadrement :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\ell}^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt = 0$ .

Or  $\int_0^{\ell} \frac{e^t}{1+t^n} dt = \int_0^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt - \int_{\ell}^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt = y - \int_{\ell}^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt$

donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\ell} \frac{e^t}{1+t^n} dt = y$  et d'après la première question, cette limite vaut également  $e^{\ell} - 1$ , donc  $y = e^{\ell} - 1$ , soit  $\ell = \ln(y + 1)$ .

### Exercice 1.22.

Pour  $n$  entier naturel non nul, on définit l'application  $f_n$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

1. Déterminer l'ensemble  $A$  des entiers naturels pour lesquels l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$  est convergente. Lorsque  $n$  appartient à  $A$ , on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$$

2. a) A l'aide d'un encadrement de  $\frac{f_n(x)}{f_2(x)}$ , montrer que la suite  $(I_n)$  est majorée par la suite de terme général  $\frac{B}{n!}$  pour une valeur convenable de  $B$ .

b) Préciser la nature de la série de terme général  $I_n$ .

3. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

a) Montrer qu'au voisinage de  $+\infty$ ,  $H_n \sim \ln n$ .

b) Calculer  $\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}$  pour  $x \in \mathbb{R}^+$ , puis, encadrer à l'aide de termes de la suite  $(H_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  la quantité  $-\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}$  pour  $x$  élément de  $[0, 1]$ .

c) En déduire qu'au voisinage de  $+\infty$ ,  $\int_0^1 f_n(x) dx \sim \frac{1}{n! \ln n}$

4. Montrer que pour  $n \in A$ ,  $\int_0^1 f_n(x) dx = nI_{n+1}$  et en déduire un équivalent simple de  $I_n$ .

---

**Solution :**

1. L'application  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , à valeurs positives et équivalente en  $+\infty$  à  $\frac{1}{x^n}$ . Donc  $A = \{n \in \mathbb{N}^*, n > 1\} = \{n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2\}$ .

2. a) Si  $n > 2$ , on a pour tout  $x > 0$  :

$$0 \leq \frac{f_n(x)}{f_2(x)} = \frac{1}{(x+3)(x+4)\dots(x+n)} \leq \frac{2}{n!}$$

d'où, en multipliant par  $f_2(x)$  qui est strictement positif et en intégrant :

$$0 \leq I_n \leq \frac{2I_2}{n!}$$

b) La série de terme général  $\frac{1}{n!}$  étant convergente, on en déduit, par majoration, la convergence de la série de terme général  $I_n$ .

3. a) Par décroissance de  $t \mapsto \frac{1}{t}$ , on a pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$  et par sommation, en mettant à part le terme d'indice 1 dans la somme de droite :

$$\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$$

D'où  $H_n \sim \ln n$ .

b) Pour  $x \geq 0$ ,  $\frac{f'_n(x)}{f_n(x)} = \frac{d}{dx}[\ln f(x)] = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k}$ . Ainsi pour  $x \in [0, 1]$  :

$$H_{n+1} - 1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k} \leq -\frac{f'_n(x)}{f_n(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n$$

c) Les termes étant tous positifs, on déduit de l'encadrement précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \frac{-f'_n(x)}{H_n} \leq f_n(x) \leq \frac{-f'_n(x)}{H_{n+1} - 1}$$

d'où, en intégrant, compte tenu du fait que :

$$\int_0^1 -f'_n(x) dx = f_n(0) - f_n(1) = \frac{n}{(n+1)!}$$

$$\frac{n}{(n+1)!H_n} \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{n}{(n+1)!(H_{n+1} - 1)}$$

Finalement, d'après a) :

$$\int_0^1 f_n(x) dx \sim \frac{n}{(n+1)! \ln n} \sim \frac{1}{n! \ln n}$$

$$4. \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx - \int_1^{+\infty} f_n(x) dx$$

Or, par le changement de variable  $x+1=t$  :

$$\int_1^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+2)(t+3)\dots(t+n+1)} dt$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{(x+1)\dots(x+n)} - \frac{1}{(x+2)\dots(x+n+1)} \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{n}{(x+1)\dots(x+n+1)} dx = nI_{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit  $I_{n+1} \sim \frac{1}{(n+1)! \ln n}$  et donc :

$$I_n \sim \frac{1}{n! \ln(n-1)} \sim \frac{1}{n! \ln n}$$

### Exercice 1.23.

Dans cet exercice  $E$  désigne l'espace vectoriel réel des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  et  $I_E$  désigne l'application identité de  $E$  dans lui-même.

Si  $f \in E$ , on note  $u(f)$  la primitive de  $f$  sur  $[0, 1]$  nulle en 0 et  $v(f)$  l'application de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in [0, 1], v(f)(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$$

1. Montrer que  $u$  et  $v$  définissent deux applications de  $E$  dans lui-même.

2. a) Montrer que pour tout  $f \in E$ ,  $v \circ u(f) = v(f) - u(f)$ , puis que  $u \circ v(f) = v(f) - u(f)$ .

b) Calculer les composées  $(I_E - u) \circ (I_E + v)$  et  $(I_E + v) \circ (I_E - u)$ .

3. Soit  $g$  l'élément de  $E$ , affine sur les segments  $[0, \frac{1}{2}]$  et  $[\frac{1}{2}, 1]$ , et tel que  $g(0) = g(1) = 0$ ,  $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ .

Montrer qu'il existe un unique élément  $f$  de  $E$  tel que, pour tout  $x$  appartenant à  $[0, 1]$ ,

$$f(x) - \int_0^x f(t) dt = g(x)$$

et le déterminer.

4. On définit par récurrence  $u^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$u^0 = I_E \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u^{n+1} = u \circ u^n$$

a) Montrer que si  $f \in E$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ ,

$$u^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt.$$

b) Montrer que si  $f \in E$  et  $x \in [0, 1]$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u^n(f)(x)$  est convergente et que :  $\sum_{n=1}^{\infty} u^n(f)(x) = v(f)(x)$ .

**Solution :**

1. Si  $f \in E$ ,  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ ; elle y admet donc des primitives. Ainsi  $u(f)$  existe et  $u(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  et *a fortiori* appartient à  $E$ .

On remarque que si  $f \in E$ , pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $v(f)(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$ , donc  $v(f)$  est également de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ , donc élément de  $E$ .

2. a) ★ En intégrant par parties, pour tout  $x \in [0, 1]$  :

$$v \circ u(f)(x) = [-e^{x-t} u(f)(t)]_0^x + \int_0^x e^{x-t} f(t) dt = -u(f)(x) + v(f)(x)$$

Donc  $v \circ u(f) = v(f) - u(f)$ .

★  $u \circ v(f)$  a pour dérivée  $v(f)$  et :

$$[v(f) - u(f)]'(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt + e^x e^{-x} f(x) - f(x) = v(f)(x)$$

Donc  $u \circ v(f)$  et  $v(f) - u(f)$  diffèrent d'une constante; étant nulles en 0, elles sont égales.

b)  $(I_E - u) \circ (I_E + v) = I_E + v - u - u \circ v = I_E$  et comme  $u$  et  $v$  commutent (question a)), on a aussi  $(I_E + v) \circ (I_E - u) = I_E$ .

3.  $I_E - u$  est bijective de bijection réciproque  $I_E + v$ . Il existe donc un unique élément  $f$  de  $E$  tel que  $f - u(f) = g$ , qui est  $f = g + v(g)$ .

★ Pour  $x \in [0, 1/2]$ ,  $f(x) = x + \int_0^x e^{x-t} t dt = e^x - 1$ .

★ Pour  $x \in [1/2, 1]$ ,  $f(x) = x + \int_0^{1/2} e^{x-t} t dt + \int_{1/2}^x e^{x-t} (1-t) dt = 1 - 2e^{x-1/2} + e^x$ .

4. Si  $f$  appartient à  $E$ ,  $u^n(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[0, 1]$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $((u^n)(f))^{(k)} = u^{n-k}(f)$ ; en particulier pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $((u^n)(f))^{(k)}(0) = 0$ .

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre  $n-1$  sur le segment  $[0, x]$  se réduit donc à :

$$u^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (u^n(f))^{(n)}(t) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$$

b) Soit  $f \in E$  et  $x \in [0, 1]$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$v(f)(x) - \sum_{k=1}^n u^k(f)(x) = \int_0^x (e^{x-t} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!}) f(t) dt$$

Or, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle, pour tout  $t \in [0, x]$  :

$$|e^{x-t} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!}| \leq \frac{|x-t|^n}{n!} \sup_{[0, x-t]} |e^u| \leq \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|}$$

$$\text{D'où : } |v(f)(x) - \sum_{k=1}^n u^k(f)(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|} \left| \int_0^x |f(t)| dt \right|.$$

Ce majorant tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, donc par encadrement :

$$v(f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k(f)(x)$$

### Exercice 1.24.

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^x & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. a) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .  
b) Etudier l'existence des dérivées partielles de  $f$ .
2. On pose, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f(x, 0) - 1$ .  
a) Etudier les variations de  $h$ .  
b) En déduire que  $f$  n'admet pas d'extremum en  $(0, 0)$ .
3. Déterminer les points critiques de  $f$ .
4. a) Montrer que  $\forall x \geq 0$ ,  $f(x, y) \geq h(x) + 1$ .  
b) En déduire que  $f$  admet en  $(\frac{1}{e}, 0)$  un minimum local.
5. On pose  $g(x) = f(x, 1) - f(0, 1)$ .  
a) Montrer que  $g(x)$  est du signe de  $x$ .  
b) En déduire que  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $(0, 1)$ .

### Solution :

1. a) La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  comme somme, produit, composée de fonctions continues.

Posons  $u = (x, y)$  et  $\|u\|^2 = x^2 + y^2$ . Alors :

$$|x \ln(x^2 + y^2)| \leq \|u\| \cdot \ln(\|u\|^2)$$

Donc  $\lim_{\|u\| \rightarrow 0} |x \ln(x^2 + y^2)| = 0$  et  $\lim_{\|u\| \rightarrow 0} e^{x \ln(x^2 + y^2)} = 1$ , ce qui signifie que  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .

b) On a

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{e^{x \ln x^2} - 1}{x} \underset{(0)}{\sim} \ln x^2 = 2 \ln |x|$$

d'où :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = -\infty,$$

ce qui signifie que  $f$  n'est pas dérivable par rapport à  $x$  en  $(0,0)$ .

En revanche :

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Enfin, en tout point  $(x,y) \neq (0,0)$ ,  $f$  admet des dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$  et :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = [\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}](x^2 + y^2)^x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy(x^2 + y^2)^{x-1} \end{cases}$$

2. a) Il vient pour  $x > 0$ ,  $h(x) = e^{x \ln x^2} - 1$ . Donc  $h'(x) = (\ln x^2 + 2)e^{x \ln x^2}$ . Ainsi  $h'(x) = 0 \iff x = \pm e^{-1}$ , ce qui donne les variations de  $h$  :

$x$	$-\infty$	$-e^{-1}$	$0$	$e^{-1}$	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$h(x)$	$-1$	$\nearrow$	$\searrow 0$	$\searrow$	$\nearrow +\infty$

b) D'après la question précédente :

- si  $x \in ]0, 1/e]$ , alors  $f(x,0) - f(0,0) < 0$ ,
- si  $x \in ]-1/e, 0[$ , alors  $f(x,0) - f(0,0) > 0$ .

Donc  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $(0,0)$ .

3. On a vu que pour  $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = [\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}](x^2 + y^2)^x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy(x^2 + y^2)^{x-1} \end{cases}$$

Les points critiques sont donnés par :

$$\begin{cases} \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

système qui admet 4 solutions :  $(0,1)$ ,  $(0,-1)$ ,  $(1/e,0)$ ,  $(-1/e,0)$ .

4. a) Pour tout  $(x,y) \neq (0,0)$  et  $x > 0$ , on a :

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^x \geq x^{2x} = f(x,0) = h(x) + 1$$

b) Or on sait que  $h$  admet en  $1/e$  un minimum local ; donc  $f$  admet en  $(1/e,0)$  un minimum local.

5. a) On a  $g(x) = (x^2 + 1)^x - 1$ . Donc  $g'(x) = [\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1}] e^{x \ln(x^2 + 1)}$   
 et  $g'(x)$  est du signe de  $k(x) = \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1}$ . Or :

$$k'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \times \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} \text{ est du signe de } x$$

Comme  $k(0) = 0$ , la fonction  $k$  est positive, donc la fonction  $g'$  aussi et comme  $g(0) = 0$ ,  $g$  est négative sur  $\mathbb{R}^-$  et positive sur  $\mathbb{R}^+$ , donc du signe de  $x$ .

Ainsi  $f(x, 1) - f(0, 1)$  est du signe de  $x$  et  $f$  n'admet pas d'extremum en  $(0, 1)$ .

### Exercice 1.25.

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , et on pose, pour tout élément  $f$  de  $E$ ,  $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$

On définit la fonction  $K$  de  $[0, 1]^2$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{t^2}{x} & \text{si } x > t \\ \frac{x^2}{t} & \text{si } x < t \\ x & \text{si } x = t \end{cases}$$

Pour  $f \in E$ , on pose  $T(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^1 K(x, t) f(t) dt$ .

1. a) Calculer  $T(f)(0)$ .  
 b) Montrer que  $\forall f \in E, \forall x \in ]0, 1], |T(f)(x)| \leq \|f\|_\infty (\frac{x^2}{3} - x^2 \ln x)$ .  
 c) Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .  
 d)  $T$  est-il surjectif?
2. Montrer que  $T(f) \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ .
3. Calculer  $T(f)(1) + [T(f)]'(1)$ .

### Solution :

1. a) On a  $K(0, t) = 0$  et donc  $T(f)(0) = 0$ .  
 b) Par la relation de Chasles, pour  $x \in ]0, 1]$  :

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_0^x K(x, t) f(t) dt + \int_x^1 K(x, t) f(t) dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x t^2 f(t) dt + x^2 \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt \quad (*) \end{aligned}$$

D'où :  $|T(f)(x)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{x} \int_0^x t^2 dt + x^2 \|f\|_\infty \int_x^1 \frac{1}{t} dt$ , c'est-à-dire :



$$|T(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \left( \frac{x^2}{3} - x^2 \ln x \right)$$

c) La linéarité de  $T$  est évidente.

L'expression (\*) montre que  $T(f)$  est continue sur  $]0, 1]$  (intégrales d'une fonction continue les bornes étant elles-mêmes des fonctions continues), et la majoration précédente prouve que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} T(f)(x) = 0 = T(f)(0)$ .

Donc  $T(f)$  est continue sur  $[0, 1]$  et  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

d) On a vu que  $T(f)(0) = 0$ ;  $T(f)$  ne peut donc pas être la fonction constante égale à 1 qui appartient à  $E$ . Ainsi  $T$  n'est pas surjectif.

2. La relation (\*) montre que  $T(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1]$ , avec :

$$\forall x \in ]0, 1], [T(f)]'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x t^2 f(t) dt + \frac{1}{x} x^2 f(x) + 2x \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt - x^2 \frac{f(x)}{x}$$

$$\forall x \in ]0, 1], [T(f)]'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x t^2 f(t) dt + 2x \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$$

Un calcul analogue à celui effectué dans la question 1. montre que :

$$\forall x \in ]0, 1], |[T(f)]'(x)| \leq \|f\|_\infty \left( \frac{x}{3} - 2x \ln x \right)$$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [T(f)]'(x) = 0$  et comme  $T(f)$  est continue en 0, le théorème des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  montre que  $T(f)$  est dérivable en 0 avec

$$[T(f)]'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} [T(f)]'(x) = 0$$

Donc  $T(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$3. T(f)(1) = \int_0^1 t^2 f(t) dt \text{ et } [T(f)]'(1) = -\int_0^1 t^2 f(t) dt, \text{ donc :}$$

$$T(f)(1) + [T(f)]'(1) = 0.$$

### Exercice 1.26.

On considère la fonction  $f$  de deux variables définie par :

$$f(x, y) = xy \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$$

1. Déterminer l'ensemble  $D$  de définition de  $f$ .
2. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation  $f(x, y) = 0$  est la réunion de deux segments et d'une courbe  $C$  que l'on précisera.
3. Montrer que  $D$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^2$  et que  $D \setminus C$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  (on pourra admettre cette question).
4. Étudier les extremums de  $f$  sur  $D$ .

(On pourra montrer que  $f$  admet un minimum et un maximum et qu'il suffit de s'intéresser aux points de l'ouvert  $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x^2 + 2y^2 < 1\}$ .)

**Solution :**

1. La fonction  $f$  est définie sur l'ensemble  $D = \{(x, y) \mid 1 - x^2 - 2y^2 \geq 0\}$

2. L'équation  $f(x, y) = 0$  admet comme solutions tous les couples  $(x, y) \in D$  tels que :

$$x = 0, \text{ ou } y = 0, \text{ ou } x^2 + 2y^2 = 1$$

Comme on sait également que  $x^2 + 2y^2 \leq 1$ , on obtient la réunion des segments  $\{(0, y) \mid -1/\sqrt{2} \leq y \leq 1/\sqrt{2}\}$ ,  $\{(x, 0) \mid -1 \leq x \leq 1\}$  et de la courbe  $C$  d'équation  $x^2 + 2y^2 = 1$ .

3. On vérifie aisément que l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$N : (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$$

est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi  $D$  est la boule unité fermée de  $(\mathbb{R}^2, N)$  : c'est donc un fermé borné.

De même  $U = D \setminus C = \{(x, y) \mid N(x, y) < 1\}$ . C'est la boule unité ouverte du même espace.

4. On a pour tout  $(x, y) \in D$ ,  $f(-x, y) = f(x, -y) = -f(x, y)$  et donc  $f(-x, -y) = f(x, y)$ . On peut donc se contenter de faire l'étude avec  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

Par les théorèmes du cours, on sait qu'il existe au moins un couple  $(A, B) \in D^2$  tel que pour tout  $(x, y) \in D$ ,  $f(A) \leq f(x, y) \leq f(B)$ .

On vérifie que  $(1/2, 1/2) \in U$  et que  $f(1/2, 1/2) > 0$ ; ainsi  $\max_D f > 0$  et par ce qui précède,  $\min_D f < 0$ .

Les extremums de  $f$  ne sont donc pas nuls et sont atteints en des points de l'ouvert  $U$  et sont nécessairement des extremums locaux.

Par symétrie et compte tenu des résultats précédents, il suffit de chercher ces extremums locaux sur l'ouvert  $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x^2 + 2y^2 < 1\}$ .

Pour tout  $(x, y) \in U_1$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \times \frac{1 - 2x^2 - 2y^2}{\sqrt{1 - 2x^2 - 2y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \times \frac{1 - x^2 - 4y^2}{\sqrt{1 - 2x^2 - 2y^2}} \end{cases}$$

Ainsi, sur  $U_1$ , les points critiques vérifient

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire  $(x, y) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6})$ , avec en ce point  $f(x, y) = \frac{1}{3\sqrt{6}}$ .

Comme on trouve un seul point critique dans  $U_1$ , celui-ci correspond nécessairement à un extremum et en conclusion :

$f$  admet un maximum  $\frac{1}{3\sqrt{6}}$  atteint en  $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6})$  et en  $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{6})$  et un minimum qui vaut  $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$  atteint en  $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6})$  et en  $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{6})$ .

### Exercice 1.27.

On administre à un patient  $q$  unités d'un médicament. Après  $t$  minutes la quantité de médicament active dans le sang est  $q \cdot e^{-ct}$ , où  $c$  est une constante strictement positive. La même dose de médicament est injectée régulièrement toutes les  $T$  minutes.

1. Déterminer la quantité  $A(k)$  de médicament encore active dans le sang immédiatement après la  $k^{\text{ème}}$  injection.
2. Calculer la borne supérieure de la quantité de médicament présente dans le sang après un nombre indéterminé d'injections. En déduire l'intervalle de temps le plus court à respecter entre deux doses pour que  $A(k)$  ne dépasse pas un niveau  $M > q$  donné.
3. On sait que si on administre une quantité  $q$  de médicament, alors au bout de 2 heures la quantité de médicament encore active dans le sang est de  $q/2$ . On administre des doses de 50 mg. Sachant que la dose maximale supportée est de 500 mg, à quelle fréquence peut-on administrer le médicament en toute sécurité?

### Solution :

1. Juste après la  $k$ -ième injection, la dose de médicament présente dans le sang est :

$$A(k) = \sum_{n=0}^{k-1} qe^{-ncT} = q \sum_{n=0}^{k-1} (e^{-cT})^n = q \frac{1 - e^{-kcT}}{1 - e^{-cT}}$$

2. La suite  $(A(k))_{k \geq 0}$  est la suite des sommes partielles d'une série géométrique de raison  $e^{-cT}$  appartenant à  $[0, 1[$ . Cette suite est donc croissante et convergente et a pour limite la somme de la série. Ainsi :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k) = \frac{q}{1 - e^{-cT}}$$

et ce nombre est le meilleur majorant de la suite  $(A(k))_{k \geq 0}$ .

La dose de médicament ne dépassera pas  $M$  si et seulement si  $\frac{q}{1 - e^{-cT}} \leq M$ , inéquation équivalente à  $T \geq -\frac{1}{c} \ln \left(1 - \frac{q}{M}\right)$ .

3. Si la demi-vie du médicament est de 120 minutes, on a :

$$e^{-120c} = \frac{1}{2}, \text{ i.e. } c = \frac{\ln 2}{120}$$

L'intervalle minimal séparant deux injections successives est donc :

$$T_m = -\frac{120}{\ln 2} \ln\left(1 - \frac{50}{500}\right) \simeq 18,24 \text{ mn}$$

Ainsi une prise de médicament toutes les 20 minutes sera satisfaisante.

**Exercice 1.28.**

1. Pour quelles valeurs réelles de  $x$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt$  est-elle convergente ?

2. Pour  $x > 0$ , on pose  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt$ . On veut écrire  $f(x)$  sous la forme  $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{k!}{x^k} + R_n(x)$ , avec  $R_n(x)$  à déterminer, en vue d'obtenir une valeur approchée de  $f(x)$ .

a) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_k = \int_0^{+\infty} t^k \cdot e^{-xt} dt$ . Etablir la convergence de cette intégrale et donner sa valeur.

b) Montrer que pour tout  $t \geq 0$  et tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k t^{k-1} + (-1)^n \frac{nt^{n+1} + (n+1)t^n}{(1+t)^2}$$

c) En déduire que  $f(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{k!}{x^k} + R_n(x)$ , avec un  $R_n(x)$  que l'on donnera sous forme d'une intégrale convergente.

d) Montrer que pour  $x > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $|R_n(x)| \leq (n+x) \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$

3. En déduire une valeur approchée décimale de  $f(100)$  à  $10^{-6}$  près.

**Solution :**

1. La fonction à intégrer est continue et positive sur  $\mathbb{R}^+$ .

Si  $x \geq 0$  elle est majorée par  $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$  qui est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , donc l'intégrale proposée est convergente.

Si  $x < 0$ , alors pour  $t$  assez grand, cette fonction est minorée par 1 et la divergence de l'intégrale est triviale.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt \text{ converge} \iff x \geq 0$$

2. a) La convergence est évidente et par le changement de variable  $u = xt$ , il vient :

$$I_k = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = \frac{\Gamma(k+1)}{x^{k+1}} = \frac{k!}{x^{k+1}}$$

b) Par l'identité géométrique, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \geq 0$  :

$$\sum_{k=0}^n (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 + t}$$

Par dérivation :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k t^{k-1} = -\frac{1}{(1+t)^2} + (-1)^n \frac{(n+1)t^n(1+t) - t^{n+1}}{(1+t)^2}$$

Ce qui est le résultat demandé, aux positions des termes près.

c) Ainsi, toutes les intégrales rencontrées étant convergentes :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k I_{k-1} + (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{nt^{n+1} + (n+1)t^n}{(1+t)^2} e^{-xt} dt$$

Soit :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{k!}{x^k} + R_n(x),$$

$$\text{avec } R_n(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{nt^{n+1} + (n+1)t^n}{(1+t)^2} e^{-xt} dt$$

$$\text{d) } |R_n(x)| \leq \int_0^{+\infty} (nt^{n+1} + (n+1)t^n) e^{-xt} dt = nI_{n+1} + (n+1)I_n$$

$$\text{Donc : } |R_n(x)| \leq n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}} + (n+1) \frac{n!}{x^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x^{n+2}} (n+x)$$

3. Avec  $x = 100$ , on veut  $\frac{(n+1)!}{100^{n+2}} (n+100) \leq 10^{-6}$ . On voit alors que ceci est réalisé pour  $n \geq 3$  et donc :

$$f(100) \simeq \frac{1}{100} - \frac{2}{10000} + \frac{6}{1000000} = 0,009806$$

l'erreur commise étant majorée par  $10^{-6}$ .

### Exercice 1.29.

Soit  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x \cos x - \sin x$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \geq 2$ , il existe un unique  $x_n$  appartenant à  $]n\pi, n\pi + \pi/2[$  tel que  $f(x_n) = 0$ .
2. Donner un équivalent simple  $u_n$  de  $x_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.
3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} [x_n - n\pi]$ .

### Solution :

1. L'étude de l'équation  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $I_n = ]n\pi, n\pi + \pi/2[$  est équivalente à l'étude de l'équation  $g(x) = x - \tan x = 0$  sur le même intervalle. La fonction  $x \mapsto g(x)$  y est de classe  $C^1$  et  $g'(x) = -\tan^2(x) < 0$ .

La fonction  $g$  est donc strictement décroissante sur  $I_n$  et induit une bijection de  $I_n$  sur  $]n\pi, -\infty[$ . Il existe donc un unique  $x_n$  appartenant à  $I_n$  tel que  $g(x_n) = 0$ , donc tel que  $f(x_n) = 0$ .

2. Comme  $n\pi < x_n < n\pi + \pi/2$ , on a immédiatement  $x_n \sim n\pi$ .

3. Posons  $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n$ . On sait déjà que  $0 < \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}$ .

On a  $n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n = \tan\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right) = \frac{1}{\tan(\varepsilon_n)}$ .

Par conséquent  $\tan(\varepsilon_n) = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . On en déduit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ,  
soit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x_n - n\pi] = \frac{\pi}{2}$$

