1

ANALYSE

Exercice 1.1.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par leurs premiers termes a_0, b_0 et c_0 réels et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \min(x, b_n, c_n)\,dx \\ b_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{med}(a_n, x, c_n)\,dx \\ c_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \max(a_n, b_n, x)\,dx \end{cases}$$

où med désigne le réel médian entre trois réels, par exemple : $\operatorname{med}(\alpha, \beta, \gamma) = \beta$, lorsque $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$.

2. Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a $\dfrac{3}{8} \leqslant b_n \leqslant \dfrac{5}{8}$. En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, on a $0 \leqslant a_n$ et $c_n \leqslant 1$.

3. Etablir la relation de récurrence suivante, valable pour $n \geqslant 3$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n - \dfrac{b_n^2}{2} \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n^2 - c_n^2 + 2c_n) \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 + b_n^2) \end{cases}$$

4. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$b_{n+2} = \frac{1}{8}(-4b_n^3 + 6b_n^2 + 3)$$

5. En étudiant la fonction φ définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{8}(-4x^3 + 6x^2 + 3)$, montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{3}{8}$ et que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{5}{8}$.

Solution :

1. On a toujours $\min(x, b_n, c_n) \leqslant \text{med}(a_n, x, c_n) \leqslant \max(x, a_n, b_n)$.
En effet :
c'est clair si $\text{med}(a_n, x, c_n) = x$, sinon :
si $\text{med}(a_n, x, c_n) = a_n$, la deuxième inégalité est immédiate et pour la première on a bien $\min(x, b_n, c_n) \leqslant a_n$, car dans ce cas $\min(x, c_n) \leqslant a_n$.
Le dernier cas se traite de la même façon.
D'où le résultat :

$$\text{pour } n \geqslant 1,\ a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$$

2. On a tout d'abord $a_{n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \leqslant c_{n+1}$; puis :

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \int_0^1 \text{med}(a_{n+1}, x, c_{n+1})\,dx \\ &= \int_0^{1/2} \max(a_{n+1}, x)\,dx + \int_{1/2}^1 \min(x, c_{n+1})\,dx \\ &\leqslant \int_0^{1/2} \frac{1}{2}\,dx + \int_{1/2}^1 x\,dx = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

De même on montre que $b_{n+2} \geqslant \dfrac{3}{8}$.
Il vient alors $a_{n+3} = \displaystyle\int_0^1 \min(x, b_{n+2}, c_{n+2})\,dx \geqslant 0$ et $c_{n+3} \leqslant 1$.

3. A partir de $0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \leqslant 1$, pour $n \geqslant 3$, on déduit par exemple que

$$a_{n+1} = \int_0^1 \min(x, b_n, c_n)\,dx = \int_0^{b_n} x\,dx + \int_{b_n}^1 b_n dx = b_n - \frac{b_n^2}{2}$$

On procède de même pour les autres relations.

4. Par composition, on trouve facilement que :

$$b_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1}^2 - c_{n+1}^2 + 2c_{n+1}) = \frac{1}{8}(-4b_n^3 + 6b_n^2 + 3)$$

5. La fonction φ vérifie $\varphi\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}$ et on a :

$$\forall\, x \in [0,1], |\varphi'(x)| = \frac{3}{2}x(1-x) \leqslant \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Par conséquent, pour $n \geqslant 3$:

$$|b_{n+2} - \frac{1}{2}| = |\varphi(b_n) - \varphi(\frac{1}{2})| \leqslant \frac{3}{8}|b_n - \frac{1}{2}|$$

Ainsi : $\forall\, n \geqslant 3, |b_{2n} - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{3}{8}|b_{2(n-1)} - \frac{1}{2}|$ et donc :

$$|b_{2n} - \frac{1}{2}| \leqslant \big(\frac{3}{8}\big)^{n-2}|b_4 - \frac{1}{2}|$$

De même : $|b_{2n-1} - \frac{1}{2}| \leqslant \big(\frac{3}{8}\big)^{n-2}|b_3 - \frac{1}{2}|$.

On en déduit que les suites (b_{2n}) et (b_{2n+1}) sont convergentes de limite $\dfrac{1}{2}$ et, par exhaustion : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$.

On en déduit alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{8}$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{5}{8}$.

Exercice 1.2.

1. a) Déterminer l'unique fonction φ, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et telle que :

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0 \text{ et pour tout } x \text{ réel : } \varphi''(x) = -\sin(\pi x).$$

b) Soit K la fonction de $[0,1]^2$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

$$K(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x < y \\ y(1-x) & \text{si } x \geqslant y \end{cases}.$$

Etudier la continuité de la fonction K.

2. a) Justifier que pour tout y de $[0,1]$ et toute fonction f continue sur $[0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 K(x,y)f(x)\,dx$ existe.

Soit E l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$.
Dans la suite, à toute fonction $f \in E$, on associe la fonction g définie sur $[0,1]$, par : $g(y) = \displaystyle\int_0^1 K(x,y)f(x)\,dx$.

b) Montrer que la fonction g est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et calculer $g''(y)$. Que valent $g(0)$ et $g(1)$?

Pour deux fonctions h et k de E on pose : $\langle h|k\rangle = \displaystyle\int_0^1 h(x)k(x)\,dx$.

3. Soit A l'application de E vers E définie par $A(f) = g$.

a) L'application (évidemment linéaire) A est-elle surjective ? Injective ?

b) Montrer que pour tout f de E on a $\langle A(f)|f\rangle \geqslant 0$.

c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, le réel $\dfrac{1}{k^2\,\pi^2}$ est valeur propre de A.

Solution :

1. a) Il existe a et b tels que $\varphi(x) = \dfrac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + ax + b$ et les conditions $\varphi(0) = 0$ puis $\varphi(1) = 0$ donnent successivement $b = 0$ puis $a = 0$.

b) On peut considérer la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x,y) = x(1-y)$ et la fonction k définie sur $\mathbb{R}^2$ par $k(x,y) = y(1-x)$.

Les fonctions h et k sont clairement continues sur $\mathbb{R}^2$ et h concide avec K sur le domaine $\{(x,y) \in [0,1]^2, x \leqslant y\}$ tandis que k concide avec K sur le domaine $\{(x,y) \in [0,1]^2, x \geqslant y\}$.

La continuité de K sur $[0,1]^2$ en résulte.

2. a) Pour y fixé, $x \mapsto K(x,y)f(x)$ est continue, l'existence de l'intégrale en résulte.

b) Pour pouvoir dériver, il convient d'expliciter un peu $g(y)$ en écrivant :

$$g(y) = \int_0^y x(1-y)f(x)\,dx + \int_y^1 y(1-x)f(x)\,dx$$

$$= (1-y)\int_0^y xf(x)\,dx + y\int_y^1 (1-x)f(x)\,dx \qquad (*)$$

Sous cette forme, la dérivabilité est acquise (intégrales fonctions de ses bornes ...), avec :

$$g'(y) = -\int_0^y xf(x)\,dx + (1-y)\times yf(y) + \int_y^1 (1-x)f(x)\,dx - y\times(1-y)f(y)$$

$$= -\int_0^y xf(x)\,dx + \int_y^1 (1-x)f(x)\,dx$$

et en redérivant : $g''(y) = -yf(y) - (1-y)f(y)$, soit :

$$g'' = -f$$

Notons que la forme $(*)$ donne également $g(0) = 0$ et $g(1) = 0$.

3. a) E est formé des fonctions continues sur $[0,1]$ et pour tout élément f de E, $g = A(f)$ est deux fois dérivable sur $[0,1]$. Il n'existe donc pas de fonction f dans E telle que la fonction $A(f)$ soit la fonction $x \mapsto |x - \dfrac{1}{2}|$ et A n'est pas surjective.

En revanche, soit f telle que $g = A(f) = 0$, alors $g'' = -f = 0$ et f est la fonction nulle sur $[0,1]$, donc A est injective.

b) Soit $g = A(f)$, on peut écrire :

$$\langle A(f), f\rangle = \int_0^1 g(t)f(t)\,dt$$

Comme $g'' = -f$, la fonction $-g'$ est une primitive de f et une intégration par parties donne alors :

$$\langle A(f), f\rangle = \int_0^1 g(t)f(t)\,dt = \big[-g(t)g'(t)\big]_0^1 + \int_0^1 g'(t)g'(t)\,dt$$

et comme $g(0) = g(1) = 0$, il reste :

$$\langle A(f), f\rangle = \int_0^1 g'(t)g'(t)\,dt \geqslant 0$$

c) Le calcul fait en 1. a) montre que :

$$\text{si } f : x \mapsto \sin(k\pi x), \text{ alors } g = A(f) : x \mapsto \frac{1}{k^2\pi^2}\sin(k\pi x)$$

Donc f est propre pour A, associée à la valeur propre $\dfrac{1}{k^2\pi^2}$.

Exercice 1.3.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$$

1. Étude de la suite (u_n).

a) Justifier l'existence de cette suite.

b) La suite (u_n) est-elle convergente ?

c) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant 2n$.

2. Recherche de modèles.

a) Existe-t-il une suite géométrique $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $g_{n+1} - g_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{g_n}}$?

b) Existe-t-il des réels A et α tels que la suite définie par : $v_n = An^\alpha$, vérifie $v_{n+1} - v_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{v_n}}$?

3. Étude d'une variable aléatoire discrète X qui prend pour valeurs les termes de la suite (u_n).

a) Soit β un réel positif. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$p_n = \frac{1}{(u_n)^\beta} - \frac{1}{(u_{n+1})^\beta}$$

définit une loi de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par :

$$X(\Omega) = u(\mathbb{N}) \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ P(X = u_n) = p_n.$$

Donner des valeurs de β pour lesquelles on peut assurer que X admet une espérance et d'autres pour lesquelles on peut assurer que X n'en a pas.

Faire le même travail pour la variance.

Solution :

1. a) Il est clair que les calculs se font dans $\mathbb{R}_+^*$ et l'existence de u_n entraîne alors que $u_n > 0$ et u_{n+1} existe. On conclut par le principe de récurrence.

b) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}} > 0$ et la suite est croissante.

Si elle convergeait, sa limite ℓ serait dans $\mathbb{R}_+^*$ et vérifierait $\ell = \ell + \dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$, ce qui est absurde, donc (u_n) est croissante, non convergente et :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.$$

c) On a $\sqrt{1} \leqslant u_1 \leqslant 2$, donc la propriété demandée est vraie au rang 1. Supposons que pour un certain n, on ait $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant 2n$, alors :

$\star$ $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}} \leqslant 2n + \dfrac{1}{n^{1/4}} \leqslant 2n + 1 \leqslant 2(n+1)$

$\star$ $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}} \geqslant \sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$

Il reste alors à vérifier que $\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant \sqrt{n+1}$, soit $n + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{2}{\sqrt{2}} \geqslant n+1$, ce qui est clair. Ainsi $u_{n+1} \geqslant \sqrt{n+1}$.

On conclut par le principe de récurrence :

$$\forall n \geqslant 1, \sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant 2n$$

2. a) Pour définir $\dfrac{1}{\sqrt{g_n}}$, il est nécessaire que la suite soit à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, d'où :

$\star$ Si $g_n = aq^n$ et si $0 < q < 1$, on a $g_{n+1} - g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tandis que $\dfrac{1}{\sqrt{g_n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il est donc exclu que ces termes soient équivalents.

$\star$ Si $g_n = a$ on a $g_{n+1} - g_n = 0$, tandis que $\dfrac{1}{\sqrt{g_n}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, ces termes ne sont pas équivalents.

$\star$ Si $g_n = aq^n$ et si $q > 1$, on a $g_{n+1} - g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, tandis que $\dfrac{1}{\sqrt{g_n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, il est donc toujours exclu que ces termes soient équivalents.

Il n'existe pas de suite géométrique qui convient.

b) Si $v_n = An^\alpha$, on a :

$\star$ $v_{n+1} - v_n = An^\alpha\big((1+\frac{1}{n})^\alpha - 1\big) \sim An^\alpha \times \dfrac{\alpha}{n} = A\alpha n^{\alpha-1}$

$\star$ $\dfrac{1}{\sqrt{v_n}} = \dfrac{1}{\sqrt{A}}\, n^{-\alpha/2}$

Pour obtenir l'équivalence souhaitée, il faut donc prendre α tel que $\dfrac{\alpha}{2} = 1-\alpha$, soit $\alpha = \dfrac{2}{3}$, puis $A\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$, d'où $A = (\frac{3}{2})^{2/3}$.

3. a) Clairement $p_n > 0$ et par télescopage $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{1}{u_n}\big)^\beta = 1$: on a bien défini une loi de probabilité.

b) Ecrivons $p_n = \dfrac{1}{u_n^\beta}\big(1 - (\dfrac{u_n}{u_{n+1}})^\beta\big) = \dfrac{1}{u_n^\beta}\big(1 - (\dfrac{u_{n+1}}{u_n})^{-\beta}\big)$

Ainsi :

$$p_n = \frac{1}{u_n^\beta}\big(1 - (1 + \frac{1}{u_n^{3/2}})^{-\beta}\big) \sim \beta \times \frac{1}{u_n^{\beta+\frac{3}{2}}}$$

et :

$$np_n \sim \beta \times \frac{1}{u_n^{\beta+\frac{1}{2}}}\ ;\ n^2 p_n \sim \beta \times \frac{1}{u_n^{\beta-\frac{1}{2}}}$$

$\star$ Si $\beta > \dfrac{3}{2}$, comme $u_n \geqslant \sqrt{n}$, on a $u_n^{\beta+\frac{1}{2}} \geqslant n^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}$ et $\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{1}{4} > 1$, donc la série de terme général $\dfrac{1}{u_n^{\beta+\frac{1}{2}}}$ converge et la série de terme général np_n est (absolument) convergente. Ainsi X admet une espérance.

$\star$ Si $\beta < \dfrac{1}{2}$, comme $u_n \leqslant 2n$, on a $u_n^{\beta+\frac{1}{2}} \leqslant (2n)^{\beta+\frac{1}{2}}$ et $\beta + \dfrac{1}{2} < 1$, donc la série de terme général $\dfrac{1}{u_n^{\beta+\frac{1}{2}}}$ diverge et la série de terme général np_n est divergente. Ainsi X n'admet pas d'espérance.

On raisonne de même pour l'existence de $\sum n^2 u_n$ en décalant simplement d'un cran, c'est-à-dire en distinguant les deux cas $\beta > \dfrac{5}{2}$ et $\beta < \dfrac{3}{2}$.

Exercice 1.4.

1. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, on pose :

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)\, dt$$

a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, (x,t) \in [x_0 - 1, x_0 + 1] \times [0,1],\ \Big|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\Big| \leqslant M$$

b) Établir que :

$$\forall\, h \in [-1,1],\ \Big|F(x_0+h) - F(x_0) - h\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\, dt\Big| \leqslant h^2 \frac{M}{2}$$

c) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx)\,dt$$

a) Montrer que I_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $I_n'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

b) Établir une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n'(x)$.

c) Démontrer que I_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

d) À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre $I_{n+1}(0)$ et $I_n(0)$. En déduire $I_n(0)$.

e) En utilisant la notation factorielle, exprimer la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k\,!(n-k)\,!}$$

Solution :

1. a) Le réel x_0 étant fixé, l'application $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur $[x_0-1, x_0+1] \times [0,1]$ qui est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$. Cette application est donc bornée sur cet ensemble. Cela prouve l'existence d'un réel M strictement positif tel que :

$$\forall (x,t) \in [x_0-1, x_0+1] \times [0,1], \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant M$$

b) Fixons un réel x_0 dans $\mathbb{R}$ et un réel t dans $[0,1]$. Considérons la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x,t)$.
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ et } \varphi''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$$

Appliquons-lui l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[x_0, x_0+h]$:

$$|\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) - h\varphi'(x_0)| \leqslant h^2 \frac{M}{2}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\left|f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant h^2 \frac{M}{2} \qquad (1)$$

D'autre part :

$$\left|F(x_0+h) - F(x_0) - h\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right| = \left|\int_0^1 \Big(f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\Big)dt\right|$$

d'où :

$$\left|F(x_0+h) - F(x_0) - h\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right|dt$$

Comme la majoration (1) est valable pour t quelconque dans $[0,1]$, on obtient :

$$\left|F(x_0+h) - F(x_0) - h\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right| \leqslant (1-0)h^2 \frac{M}{2}$$

d'où le résultat demandé.

c) En divisant les deux membres par $|h|$ pour h non nul, il vient :

$$0 \leqslant \Big| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt \Big| \leqslant |h| \frac{M}{2}$$

On en déduit :

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt$$

ce qui prouve que F est dérivable en x_0. Ce résultat étant valable pour x_0 quelconque dans $\mathbb{R}$, on conclut que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

2. a) L'entier naturel n étant fixé, posons : $f : (x,t) \mapsto (1-t^2)^n \cos(tx)$. Cette fonction, en tant que composée et produit, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, donc *a fortiori* de classe $\mathcal{C}^2$. D'autre part : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t(1-t^2)^n \sin(tx)$, donc la fonction I_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, I_n'(x) = \int_0^1 -\, t(1-t^2)^n \sin(tx)\,dt$$

b) Intégrons $I_n'(x)$ par parties :

$$\begin{cases} u(t) = \sin(tx) \implies u'(t) = x\cos(tx) \\ v'(t) = -t(1-t^2)^n \impliedby v(t) = \dfrac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1} \end{cases}$$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, il vient :

$$I_n'(x) = \Big[\frac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1}\sin(tx)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1} x\cos(tx)\,dt$$

et, finalement :

$$I_n'(x) = -\frac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x)$$

c) On vient de montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction I_n est dérivable, sa dérivée s'exprimant avec I_{n+1}, donc la dérivabilité de I_{n+1} montre que I_n est en fait de classe $\mathcal{C}^2$, puis le fait que I_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^2$ montre que I_n est de classe $\mathcal{C}^3$. On conclut en mettant en place un raisonnement par récurrence simple.

d) Intégrons $I_{n+1}(0)$ par parties :

$$I_{n+1}(0) = \int_0^1 1\times(1-t^2)^{n+1}dt = \big[t(1-t^2)^{n+1}\big]_0^1 - \int_0^1 t(n+1)(-2t)(1-t^2)^n dt$$

donc :

$$I_{n+1}(0) = 2(n+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt = 2(n+1)\int_0^1 (1-(1-t^2))(1-t^2)^n dt$$

ce qui donne :

$$I_{n+1}(0) = 2(n+1)I_n(0) - 2(n+1)I_{n+1}(0), \text{ d'où } I_{n+1}(0) = \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n(0)$$

Comme $I_0(0) = 1$, on obtient :

$$I_n(0) = \frac{2(n)\times 2(n-1)\times\ldots\times 2(1)}{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times(3)} = \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!}$$

e) Comme, d'autre part :

$$I_n(0) = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}\Big[\frac{1}{2k+1} t^{2k+1}\Big]_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}.$$

En rapprochant les deux résultats obtenus pour $I_n(0)$ et en remplaçant les combinaisons par leur version factorielle, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!(n-k)!} = \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$$

Exercice 1.5.

Soit $I = [0,1]$, on note pour $p \geqslant 0$, $\mathcal{C}^p(I)$ l'ensemble des fonctions définies sur I et dont les dérivées jusqu'à l'ordre p sont définies et continues sur I.
On considère $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{C}^3(I) / f(0) = f(1) = 0\}$.

1. a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^3(I)$.

b) Soient 2 réels a et b tels que : $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ et s la fonction définie sur I par :

$$s(x) = \begin{cases} (x-a)^4(x-b)^4 & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que s est dans $\mathcal{E}$.

c) Soit $k \in \mathcal{C}^1(I)$. Montrer les équivalences :

$$\forall f \in \mathcal{E}, \int_0^1 k(x) f'(x)\, dx = 0 \iff \forall f \in \mathcal{E}, \int_0^1 k'(x) f(x)\, dx = 0$$

$$\iff \forall x \in [0,1], k'(x) = 0.$$

Indication : pour la dernière implication directe, on pourra raisonner par contraposée, en supposant que k' n'est pas la fonction nulle et en utilisant alors une fonction du type s, défini en b), pour des valeurs de a et b bien choisies).

2. Soit $g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, \theta) \mapsto g(x, \theta)$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2(I \times \mathbb{R})$.
Soit la fonction : φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(\theta) = \displaystyle\int_0^1 g(x,\theta)\, dx$,

a) Montrer que : $\exists M > 0, \forall h > 0, |g(x,h) - g(x,0) - h \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(x,0)| \leqslant h^2.M$

b) En déduire la dérivabilité de φ en 0, avec $\varphi'(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial \theta}(x,0)\, dx$.

3. Soit la fonction $\psi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,u) \mapsto \psi(x,u) = \dfrac{u^2}{2} - ux$.
On considère l'application :

$$\Psi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 \psi(x, f'(x))\, dx = \int_0^1 \big(\frac{f'^2(x)}{2} - x f'(x)\big)\, dx$$

On dira que Ψ admet un minimum strict sur $\mathcal{E}$ en la fonction y si :

$$\forall f \in \mathcal{E}, f \neq y \implies \Psi(f) - \Psi(y) > 0.$$

a) Montrer que si Ψ admet un minimum strict sur $\mathcal{E}$ en y, alors, pour toute fonction f non nulle de $\mathcal{E}$, l'application $G_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \theta \mapsto \Psi(y + \theta f)$ présente un minimum local strict en $\theta = 0$.

b) Utiliser la question 2 pour prouver que G_f est dérivable en 0 et que :

$$G'_f(0) = \int_0^1 (y'(x) - x)e'(x)\,dx.$$

En déduire que si Ψ présente un minimum strict en $y \in \mathcal{E}$, aors $x \mapsto y'(x) - x$ est constante sur I.

Solution :

1. a) $\mathcal{E}$ contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire.

b) Comme a et b sont racines d'ordre 4 du polynôme $(X-a)^4(X-b)^4$, les dérivées à gauche en b et à droite en a sont nulles jusqu'aux dérivées troisièmes. Comme les dérivées à gauche en a et à droite en b sont toutes nulles, il en résulte que s est bien de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,1]$. Enfin, on a clairement $s(0) = s(1) = 0$. Bref $s \in \mathcal{E}$.

c) En intégrant par parties, pour $f \in \mathcal{E}$:

$$\int_0^1 k(x)f'(x)\,dx = \big[k(x)f(x)\big]_0^1 - \int_0^1 k'(x)f(x)\,dx = -\int_0^1 k'(x)f(x)\,dx$$

Ce qui démontre la première équivalence.

Supposons l'intégrale nulle. Si $k' \neq 0$, il existe un segment $[a,b]$, avec $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ sur lequel k' (étant continue) est (par exemple) positive, $\forall x \in [a,b], k'(x) > 0$.

Alors, pour $f = s$ (la fonction définie à la question précédente), on aurait :

$$\int_0^1 k'(x)f(x)dx > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc $k' = 0$ sur I, ce qui entraine que k est constante sur I.

2. a) Soit $h > 0$, par l'inégalité de Taylor sur $[0,h]$:

$$\big|g(x,h) - g(x,0) - h\frac{\partial g}{\partial \theta}(x,0)\big| \leqslant \frac{h^2}{2}\sup_I \big|\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\big| = h^2 M,$$

ce qui a bien un sens, puisque $\theta \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(x,\theta)$ est continue sur I borné, donc majorée par un réel $2M > 0$.

b) Ainsi : $\displaystyle\int_0^1 \big|\frac{g(x,h)-g(x,0)}{h} - \frac{\partial g}{\partial \theta}(x,0)\big|dx \leqslant hM$ et, *a fortiori*

$$\big|\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial \theta}(x,0)dx\big| \leqslant hM$$

d'où, en passant à la limite lorsque h tend vers 0 :

$$\varphi'(0) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial \theta}(x,0)\,dx$$

3. a) On a : $G_f(\theta) = F(y + \theta f)$. Donc :

F présente un minimum strict $\implies \forall \theta \neq 0, F(y+\theta f) > F(y)$

$$\implies \forall \theta \neq 0,\ G_f(\theta) > G_f(0).$$

b) On pose $g(x,\theta) = \psi(x, y'(x) + \theta f'(x))$, alors g est de classe $\mathcal{C}^2(I \times \mathbb{R})$ (car $\psi \in \mathcal{C}^2(I \times \mathbb{R})$ et f et y sont dans $\mathcal{C}^3(I)$).

On peut appliquer le résultat de la question 2 :

G_f est dérivable en 0 et $G'_f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial \theta}(x,0)dx$.

On a : $g(x,\theta) = \frac{1}{2}(y'(x)+\theta f'(x))^2 - x(y'(x)+\theta f'(x))$, d'où :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(x,\theta) = y'(x)f'(x) + \theta f'^2(x) - xf'(x)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(x,0) = (y'(x)-x)f'(x)$$

d'où : $G'_f(0) = \displaystyle\int_0^1 (y'(x)-x)f'(x)dx$.

Si F présente un minimum strict en $y \in \mathcal{E}$, alors : $\forall f \in \mathcal{E}, G'_f(0) = 0$, ce qui donne $\forall\, f \in \mathcal{E}$, $\displaystyle\int_0^1 (y'(x)-x)f'(x)dx = 0$, soit :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}, \forall\, x \in I, y'(x) - x = C \text{ (en utilisant 1. c)}$$

Exercice 1.6.

1. a) Prouver que, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\sum\limits_{j=2}^{k} \frac{1}{j} \geqslant \ln\big(\frac{k+1}{2}\big)$.

b) Justifier, pour tout $u < 1$, $\ln(1-u) \leqslant -u$.

c) On définit une suite (a_n) par $a_0 = 1$, $a_1 = 1/2$ et, pour k entier, $k \geqslant 2$:

$$a_k = (-1)^{k-1}\,\frac{1{\times}3{\times}\cdots{\times}(2k-3)}{2^k k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2}\prod_{j=2}^{k}\frac{2j-3}{2j}$$

À l'aide des questions précédentes, montrer que pour tout $k \geqslant 1$:

$$|a_k| \leqslant \big(\frac{2}{k+1}\big)^{3/2}$$

2. a) Soit $g :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, la fonction définie par $g(t) = \sqrt{1+t}$.
Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\big|g(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k\, t^k\big| \leqslant t^{n+1}\,\big(\frac{2}{n+2}\big)^{3/2}$$

b) Soit f la fonction définie pour x réel par :

$$f(x) = \int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\;dt$$

Déterminer le domaine de définition D de f.

c) Montrer que, pour tout x de D :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{k+1-x}$$

Solution :

1. a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour $j \geqslant 2$, $\frac{1}{j} \geqslant \displaystyle\int_j^{j+1}\frac{dx}{x}$.

Par sommation, il vient :

$$\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j} \geqslant \int_2^{k+1}\frac{dx}{x} = \ln\big(\frac{k+1}{2}\big)$$

b) Cette inégalité classique résulte de la concavité de la fonction logarithme népérien.

c) On a : $\ln(|a_k|) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{j=2}^{k} \ln(1 - \frac{3}{2j}) \leqslant -\frac{3}{2}\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j}$, d'où :

$$\ln(|a_k|) \leqslant -\frac{3}{2}\ln\left(\frac{k+1}{2}\right) \text{ et } |a_k| \leqslant \left(\frac{2}{k+1}\right)^{3/2}$$

2. a) On a $g(t) = (1+t)^{\frac{1}{2}}$, d'où :

$g'(t) = \frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}$, $g''(t) = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)(1+t)^{-\frac{3}{2}}$, et par récurrence, on obtient :

$$g^{(k)}(t) = k!a_k(1+t)^{\frac{1}{2}-k}$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 donne alors, pour $t \geqslant 0$:

$$\left|g(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right| \leqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|g^{(n+1)}(u)| \leqslant t^{n+1}|a_{n+1}| \leqslant t^{n+1}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{3/2}$$

b) La fonction à intégrer est continue sur $]0,1]$ et équivalente à $t \mapsto t^{-x}$ au voisinage de 0. Ainsi l'intégrale converge si et seulement si $-x > -1$, soit :

$$D =]-\infty, 1[$$

c) On écrit :

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1-x}\right| &= \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 a_k t^{k-x}dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 t^{-x}\left|\sqrt{1+t} - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right|dt \\ &\leqslant \int_0^1 t^{n+1-x}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{3/2}dt \leqslant \left(\frac{2}{n+2}\right)^{3/2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que pour $x \in D$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{k+1-x}$$

Exercice 1.7.

Soit p un entier naturel.

Pour tout entier naturel n, on note $S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{p+1}}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{e}^{-nx}\,dx$.

1. Montrer l'existence de S_n

2. Pour a et b entiers naturels, avec $b > 0$, on note $T(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^a\mathrm{e}^{-bx}\,dx$.

Montrer l'existence de $T(a,b)$ et calculer $T(a,b)$ en fonction de a et b.

3. Pour $n \geqslant 1$, montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-kx} + \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x - 1}$$

4. En déduire : $\forall\, n \geqslant 1, S_0 = (p+1)!\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{p+2}} + S_n$.

5. Montrer que la suite S_n est convergente.

6. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

7. Conclure.

Solution :

1. $\star$ La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^{p+1}}{e^x - 1}\, e^{-nx}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et puisque $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1$, f est prolongeable par continuité en 0.
$\star$ La présence du facteur $\dfrac{1}{e^x - 1}$ suffit pour assurer que l'on a $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$, et la convergence pour la borne infinie résulte de la règle de Riemann.

2. En posant $bx = t$, il vient :
$$\int_0^{+\infty} x^a e^{-bx}\, dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{b}\right)^a e^{-t} \frac{dt}{b} = \frac{1}{b^{a+1}} \int_0^{+\infty} t^{a+1-1} e^{-t}\, dt = \frac{1}{b^{a+1}} \Gamma(a+1)$$
Ce calcul prouve l'existence de $T(a, b)$ et donne en prime :
$$T(a, b) = \frac{a!}{b^{a+1}}$$

3. Pour $x > 0$, on a $0 < e^x < 1$, ce qui permet d'utiliser l'identité géométrique, qui s'écrit :
$$\sum_{k=1}^{n} e^{-kx} = \sum_{k=1}^{n} (e^{-x})^k = \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1}$$
et, en séparant :
$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$$

4. En multipliant la relation précédente par x^{p+1} et en intégrant, il vient :
$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} x^{p+1} e^{-kx}\, dx + S_n = \sum_{k=1}^{n} T(p+1, k) + S_n$$
$$S_0 = (p+1)! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + S_n$$

5. La série de terme général $\dfrac{1}{k^{p+2}}$, $k \geqslant 1$ est une série de Riemann convergente, puisque $p + 2 > 1$.
Comme $S_n = S_0 - (p+1)! \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{p+2}}$, la convergence de la suite (S_n) en résulte.

6. La fonction $x \mapsto x^p \dfrac{1}{e^x - 1}$ est prolongeable par continuité en 0 et de limite nulle en $+\infty$.
Par conséquent cette fonction (positive) est majorée sur $\mathbb{R}_+^*$ et si on note M un majorant, on a :
$$0 \leqslant S_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1}\, e^{-nx}\, dx \leqslant \int_0^{+\infty} M.e^{-nx}\, dx = \frac{M}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0$$

7. On a donc montré l'égalité :
$$S_0 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$$

Exercice 1.8.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$.

1. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$, le réel u_n est-il défini ?

2. a) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave et en déduire que pour tout x de $[0,1]$: $(\ln 2).x \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

b) Montrer que : $\forall\, n \geqslant -1, \ln 2 \leqslant (n+2)u_n \leqslant 1$.

c) Quelle est la nature de la suite (u_n), de la série $\sum u_n$?

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-x)^k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.

a) Etudier les suites (T_{2p}) et (T_{2p+1}), en déduire la nature de la suite (T_n).

b) On considère le programme Pascal :

```
program Oral-escp ;
Var K,N,signe :integer ; t : real ;
begin
for N :=0 to 99 do
  begin
  for K :=0 to N do
    begin
    t :=t + signe/(K+1) ;
    signe :=-signe ;
    end ;
  writeln(t) ; end ;
end.
```

Le corriger de telle sorte qu'il affiche les 100 premiers termes de la suite (T_n) : $T_0, \ldots, T_{99}$.

4. a) Montrer que si $x \neq -1$: $\dfrac{x^{n+1}}{1+x} = (-1)^n S_n(x) + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{1+x}$.

b) En intégrant par parties en déduire :

$$(n+1)u_n = (\ln 2)[1 + (-1)^n] + (-1)^{n+1} T_n$$

5. En déduire un encadrement de la suite T_n.

6. Etudier la nature de la suite $(n.u_n)$.

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^n \ln(1+x)$ est positive et continue sur $]0,1]$.

- Si $n \geqslant 0$, $x \mapsto x^n \ln(1+x)$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable.
- Si $n = -1$, $x \mapsto x^n \ln(1+x)$ admet un prolongement par continuité en 0, en posant $0 \mapsto 1$.
- Si $n < 0$, au voisinage de 0, $x^n \ln(1+x) \sim x^{n+1}$. Par référence standard, u_n existe si et seulement si $-n-1 < 1$, soit $n > -2$ donc $n \geqslant -1$.

$$u_n \text{ existe si et seulement si } n \geqslant -1.$$

2. a) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe C^2 et de dérivée seconde négative sur $[0,1]$. Par concavité, elle est au-dessous de sa tangente en 0 et au dessus

de la corde joignant l'origine au point $(1, \ln 2)$ pour ses points d'abscisse x telle que $0 \leqslant x \leqslant 1$. Ce qui donne, pour tout x de $[0,1]$,

$$\ln 2 \cdot x \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

b) Il suffit de multiplier les inégalités précédentes et d'intégrer sur $[0,1]$ pour obtenir, pour tout $n \geqslant -1$

$$\ln 2 \leqslant (n+2)u_n \leqslant 1$$

c) La première inégalité montre que la série $\sum u_n$ est divergente.

3. a) On vérifie que la suite $(T_{2p})_p$ est décroissante alors que la suite $(T_{2p+1})_p$ est croissante. De plus

$$\lim_{p\to+\infty} |T_{2p} - T_{2p+1}| = \lim_{p\to+\infty} \tfrac{1}{2p+1} = 0$$

montre que les deux suites sont adjacentes et donc convergent vers une même limite.

b) Il manque essentiellement les initialisations de $t = 0$ et signe=1. Ainsi, un programme possible est :

```
Program Oral ;
Var K,N,signe : integer ;
     t : real ;
Begin
For N := 0 to 99 do
  Begin
  t := 0 ; signe := 1 ;
     For K := 0 to N do
      Begin
      t := t+signe/(K+1) ;
      signe := -signe
      end ;
  writeln(t)
  end ;
end.
```

4. a) $S_n(x)$ représente la somme partielle d'une suite géométrique de raison $-x$. Donc

$$S_n(x) = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$$

b) En intégrant l'égalité ci-dessus entre 0 et 1, il vient :

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx = (-1)^n \int_0^1 S_n(x)\,dx + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

Et une intégration par parties (licite car les fonctions sont de classe C^1) de la partie gauche de l'équation précédente donne :

$$(n+1)u_n = (\ln 2)(1+(-1)^n) + (-1)^n T_n$$

5. Pour n pair, il vient $T_n = 2\ln 2 - (n+1)u_n$ et en utilisant l'encadrement trouvé pour u_n, on obtient : $2\ln 2 - 1 \leqslant T_n \leqslant \dfrac{3\ln 2}{2}$.

Pour n impair, $T_n = (n+1)u_n$ et : $\dfrac{\ln 2}{2} \leqslant T_n \leqslant 1$.

Donc, dans les deux cas :

$$\frac{\ln 2}{2} \leqslant T_n \leqslant \frac{3\ln 2}{2}$$

6. Par la question 4. b) : $\ln 2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = T_n + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.

Donc : $|\ln 2 - T_n| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leqslant \int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et :

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \ln 2$$

Or, pour n pair, : $(n+1)u_n = 2\ln 2 - T_n$, et pour n impair, $(n+1)u_n = T_n$.
Par conséquent, en regroupant ces deux cas :

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)u_n = \ln 2$$

Par la question 2, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = \lim_{n\to+\infty}(n+1)u_n = \ln 2$$

Exercice 1.9.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel.
On se propose d'étudier l'ensemble A des suites réelles vérifiant pour tout entier naturel n, la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2.u_n + (-1)^n$$

1. Montrer qu'il existe un réel α que l'on déterminera, tel que la suite w définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, w_n = \alpha.n.(-1)^n$, soit élément de A.

2. Montrer que u appartient à A si et seulement si la suite $v = u - w$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux.

3. Calculer v_n en fonction de v_0, v_1 et n, puis en fonction de u_0, u_1 et n.
En déduire u_n en fonction de u_0, u_1 et n.
Donner un équivalent simple de u_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On suppose ici que $u_0 = u_1 = 1$. Calculer u_n en fonction de n.
Montrer que, pour tout entier naturel n, $|u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$.

Solution :

1. On remplace u_n par $\alpha\, n(-1)^n$ dans l'équation de récurrence et on obtient $\alpha = \frac{1}{3}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n \\ w_{n+2} = w_{n+1} + 2w_n + (-1)^n \end{cases}$

En soustrayant, la suite $v = u - w$ est élément de A si et seulement si v vérifie la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$$

3. L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence précédente est $r^2 - r - 2 = 0$. Les réels -1 et 2 en sont les solutions. Aussi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$$

En considérant les conditions initiales v_0, v_1, il vient :

$$\mu = \frac{1}{3}(v_0 + v_1), \qquad \lambda = \frac{1}{3}(2v_0 - v_1)$$

et :

$$v_n = \frac{1}{3}(2v_0 - v_1)(-1)^n + \frac{1}{3}(v_0 + v_1)\,2^n$$

Un calcul immédiat donne $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1 + \dfrac{1}{3}$. Donc :

$$v_n = \frac{1}{3}\left[(2u_0 - u_1 - \frac{1}{3})(-1)^n + (u_0 + u_1 + \frac{1}{3})2^n\right], \text{ et } u_n = v_n + \frac{1}{3}n(-1)^n$$

Par conséquent :

- Si $(u_0 + u_1 + \frac{1}{3}) \neq 0$, alors $u_n \sim \frac{1}{3}(u_0 + u_1 + \frac{1}{3})2^n$.
- Si $(u_0 + u_1 + \frac{1}{3}) = 0$, alors (v_n) est bornée et $u_n \sim \frac{1}{3}\,n(-1)^n$.

4. On applique les résultats des questions précédentes. Il vient :

$$u_n = \frac{1}{9}\left(2(-1)^n + 7{\times}2^n + 3n(-1)^n\right)$$

Enfin, on vérifie la propriété $|u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$ par récurrence sur n :

- c'est immédiat pour $n = 0, n = 1$;
- supposons la propriété vérifiée pour u_k, avec $k \leqslant n + 1$. Alors :

$$|u_{n+2}| \leqslant |u_{n+1}| + 2|u_n| + 1 \leqslant 2^{n+2} - 1 + 2(2^{n+1} - 1) + 1 < 2^{n+3} - 1$$

On conclut par le principe de récurrence.

Exercice 1.10.

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = k(\cos x)\mathrm{e}^{-y},$$

où $k \in]0, 1/\sqrt{2}[$. On désignera par I le segment $[0, 1]$.

1. Montrer que $f(I \times I) \subseteq I$.

2. Soient (u, v) et (u', v') deux éléments de $I \times I$. On définit l'application φ sur $[0, 1]$, en posant :

$$\varphi(t) = f(u + t(u' - u), v + t(v' - v))$$

Montrer que φ est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $\varphi'(t)$.
En déduire que : $|f(u', v') - f(u, v)| \leqslant k\sqrt{2}\max(|u' - u|, |v' - v|)$.

3. Soit $(a, b) \in I \times I$.
On pose $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$, pour tout entier n.
Vérifier que la suite (u_n) est bien définie.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite (v_n), par :

$$v_n = \max(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+1} - u_n|)$$

a) La série $\sum v_n$ est-elle convergente ?

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

5. On considère la fonction g d'une variable réelle définie par $g(t) = k(\cos t)\mathrm{e}^{-t} - t$.

a) Etudier la fonction g sur l'intervalle I.

b) En déduire qu'il existe un unique réel $\ell \in I$ tel que $g(\ell) = \ell$.

c) Montrer que la limite de la suite (u_n) est indépendante du choix de (a, b).

Solution :

1. On a $0 < k < 1$, $\cos(I) \subset I$ et pour $x \in I$, $0 < \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$, donc $f(I \times I) \subseteq I$.

La fonction $t \mapsto \varphi(t)$ est dérivable sur $[0,1]$ comme composée de fonctions dérivables et par théorème :

$$\varphi'(t) = (u'-u)\frac{\partial f}{\partial x}(u+t(u'-u), v+t(v'-v)) + (v'-v)\frac{\partial f}{\partial y}(u+t(u'-u), v+t(v'-v))$$

Par l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(u',v') - f(u,v)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |\varphi'(t)|$$

Or :

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big| = |k \sin x.\mathrm{e}^{-y}| \leqslant k \sin x \text{ , et } \Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big| = |k \cos x.\mathrm{e}^{-y}| \leqslant k \cos x$$

entraînent que :

$$|f(u',v') - f(u,v)| \leqslant k\sqrt{2}\max(|u'-u|, |v'-v|)$$

3. La suite (u_n) est bien définie puisque $f(I \times I) \subseteq I$.

4. a) On a : $|u_{n+3} - u_{n+2}| = |f(u_{n+1}, u_{n+2}) - f(u_n, u_{n+1})| \leqslant k\sqrt{2}v_n$.
Ainsi $v_{n+1} \leqslant k\sqrt{2}v_n$.
Cette majoration par une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 entraîne la convergence de la série $\sum v_n$.

b) La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est donc absolument convergente, et *a fortiori* convergente.

Par « télescopage », cela entraîne que la suite (u_n) est elle-même convergente.

5. a) La fonction $t \mapsto g(t)$ est continue sur I, dérivable et :

$$g'(t) = -k(\cos t + \sin t)\mathrm{e}^{-t} - 1 < 0.$$

Cette fonction est strictement décroissante de I sur $[k, g(1)]$, avec $g(1) < 0$.

b) On invoque la question précédente et le théorème des valeurs intermédiaires.

c) Notons λ la limite de la suite (u_n). Par continuité de f, il vient :

$$\lambda = f(\lambda, \lambda), \text{ soit } g(\lambda) = 0 \text{ et } \lambda = \ell$$

Donc λ ne dépend que de ℓ !

Exercice 1.11.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose :

$$\Delta = \inf_{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^1 (1 + x_1 t + \ldots + x_n t^n)^2\, dt$$

1. Justifier l'existence de Δ.

2. En considérant le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$ défini sur $\mathbb{R}_n[X]$, établir l'existence et l'unicité de $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\Delta = \int_0^1 (1 + a_1 t + \ldots + a_n t^n)^2 \, dt$$

On définit alors la fonction F par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \ldots, -n-1\}, F(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{a_1}{x+2} + \cdots + \frac{a_n}{x+n+1}$$

3. Montrer que : $\Delta = F(0)$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} (x+1)F(x)$.

5. Prouver que : $\forall k \in [\![1, n]\!], F(k) = 0$.

6. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \ldots, -n-1\}, F(x) = \frac{P(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}$$

7. Établir que : $P(X) = \dfrac{1}{n+1}(1-X)(2-X)\cdots(n-X)$.

8. En déduire que : $\Delta = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Solution :

1. L'ensemble $\left\{ \displaystyle\int_0^1 (1 + x_1 t + \cdots + x_n t^n) \, dt \right\}$ est un ensemble de nombres réels positifs, et est donc minoré. Aussi Δ existe-t-il.

2. Munissons $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t) \, dt$. Avec ces notations, Δ n'est autre que la distance de 1 au sous-espace $F = \text{Vect}(X, \ldots, X^n)$.

On sait, par le cours, que non seulement cette distance existe mais qu'elle est atteinte en un unique polynôme de F qui est la projection orthogonale de 1 sur F.

Ce polynôme $Q(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} -a_i X^i$ est de plus défini par :

$$\text{pour tout } j \in [\![1, n]\!], \langle 1 - Q(X), X^j \rangle = 0.$$

3. À l'aide de la norme euclidienne associée au produit scalaire :

$$\begin{aligned}\Delta &= ||1 - Q(X)||^2 = \langle 1 - Q(X), 1 - Q(X) \rangle = \langle 1 - Q(X), 1 \rangle \\ &= \int_0^1 (1 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) \, dt = 1 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = F(0)\end{aligned}$$

4. On a :

$$(x+1)F(x) = (x+1)\Big(\frac{1}{x+1} + \frac{a_1}{x+2} + \cdots + \frac{a_n}{x+n+1}\Big)$$

et $\lim\limits_{x \to -1} (x+1)F(x) = 1$.

5. Par la remarque faite à la fin de la question 2, on sait que, pour tout $k \in [1, n]\!]$:

$$\int_0^1 (1 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) t^k \, dt = 0$$

soit :

$$0 = \frac{1}{k+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{k+i+1} = F(k)$$

6. La réduction au même dénominateur de la fraction définissant F montre l'existence du polynôme P. De plus ce polynôme est unique, car si l'on a, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots, -n\}$, $\dfrac{P(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \dfrac{Q(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$, alors le polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines, donc $P = Q$.

7. le polynôme P est de degré n. Les deux questions précédentes montrent que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(k) = 0$. Ainsi, il existe une constante C réelle telle que $P(X) = C(X-1)\cdots(X-n)$.

Enfin, $\lim\limits_{x \to -1} (x+1)F(x) = 1 = \lim\limits_{x \to -1} (x+1)\dfrac{P(x)}{(x+2)\cdots(x+n+1)}$, entraîne que

$$C = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

8. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots, -n-1\}$:

$$F(x) = \frac{1}{n+1} \times \frac{(1-x)(2-x)\cdots(n-x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}, \text{ et } \Delta = F(0) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Exercice 1.12.

1. On considère les fonctions hyperboliques définies par :

$$\mathrm{sh}(t) = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} \text{ et } \mathrm{ch}(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$$

a) Etudier rapidement ces deux fonctions et esquisser leur représentation graphique, dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

b) Montrer que l'on a : pour tout réel t, $\mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t) = 1$.

2. Pour toute fonction f de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$, on admet que la longueur $L(f)$ de la courbe représentative de f, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, est donnée par :

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

a) Calculer la longueur de la courbe $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$, sur un intervalle $[a, b]$ donné de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction $\psi : t \to \sqrt{1+t^2}$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire l'inégalité :

$$\text{pour tout couple } (s,t) \in \mathbb{R}^2, \psi(t) \geqslant \psi(s) + (t-s)\psi'(s)$$

c) On suppose désormais que f est une fonction convexe de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$ et que g est une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ telle que $g(x) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ et qui vérifie : $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$.

En utilisant l'inégalité précédente, prouver que $L(f) \leqslant L(g)$.

d) On considère une fonction g de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$ qui est telle que $g(x) \leqslant \mathrm{ch}(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$ avec $g(-1) = g(1) = \mathrm{ch}(1)$. Quelle inégalité portant sur $L(g)$ en déduit-on ?

Solution :

1. a) On voit que $\mathrm{sh}'(t) = \mathrm{ch}(t)$ et $\mathrm{ch}'(t) = \mathrm{sh}(t)$. La fonction $t \mapsto \mathrm{sh}(t)$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$, admet un point d'inflexion en $t = 0$. Elle est concave sur $\mathbb{R}^-$ et convexe sur $\mathbb{R}^+$. Enfin $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{sh}(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{sh}(t) = -\infty$. Notons d'ailleurs que sh est impaire.

La fonction $t \mapsto \mathrm{ch}(t)$ est paire. Sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}^+$; elle y est donc croissante vers $+\infty$. Enfin elle est convexe sur $\mathbb{R}$.

Les représentations graphiques ne posent pas de problème.

b) Un calcul immédiat donne :

$$\mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t) = 4\frac{\mathrm{e}^t \times \mathrm{e}^{-t}}{4} = 1$$

2. a) La longueur de la courbe $t \mapsto \mathrm{ch}(t)$ (appelée chaînette) sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(t)}\, dt = \int_a^b \mathrm{ch}(t)\, dt = \mathrm{sh}(b) - \mathrm{sh}(a)$$

b) Immédiatement $\psi'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ et $\psi''(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} > 0$. la fonction $t \mapsto \psi(t)$ est donc convexe sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative reste au-dessus de sa tangente en tout point s, ce qui donne l'inégalité demandée.

c) On utilise l'inégalité précédente avec $t = g'(x)$ et $s = f'(x)$. Il vient :

$$\begin{aligned} L(g) = \int_a^b \psi(g'(x))dx &\geqslant \int_a^b \left(\psi(f'(x)) + (g'(x) - f'(x))\psi'(f'(x))\right) dx \\ &= L(f) + \int_a^b (g'(x) - f'(x))\psi'(f'(x))\, dx \\ &= L(f) + \left[(g(x) - f(x))\psi'(f'(x))\right]_a^b - \int_a^b (g(x) - f(x))\psi''(f'(x))f''(x)\, dx \\ &= L(f) + \int_a^b (f(x) - g(x))\psi''(f'(x))f''(x)dx \geqslant L(f) \end{aligned}$$

la dernière intégrale étant positive puisque $f \geqslant g$ et ψ et f sont convexes.

d) En appliquant l'inégalité précédente, il vient $L(g) \geqslant L(f) = 2\,\mathrm{sh}(1)$.

Exercice 1.13.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(t) = \dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1}$.

1. Montrer que φ admet un prolongement par continuité en $t = 0$. (On notera encore φ la fonction ainsi prolongée.)

On admet que cette fonction admet, en 0, un développement limité à tout ordre $N \geqslant 0$ de la forme :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{t^k}{k!} + o(t^N)$$

2. Calculer b_0, b_1, b_2, b_3.

3. Montrer que $\varphi(t) - b_1 t$ est une fonction paire. En déduire b_{2n+1} pour tout $n \geqslant 1$.

4. On pose pour tout x réel et tout t réel : $f(x,t) = \mathrm{e}^{tx}\varphi(t)$.

Montrer que $t \mapsto f(x,t)$ admet un développement limité à tout ordre N au voisinage de 0, que l'on écrit :

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{N} B_k(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^N)$$

montrer que, pour tout $k \geqslant 0$, B_k est un polynôme unitaire de degré k.
Exprimer $B_k(0)$ en fonction de b_k.

5. Montrer que pour tout $k \geqslant 0$, $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$.

En déduire la valeur de $B_k(1)$, en fonction de b_k, pour tout $k \geqslant 1$.

6. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$.

Solution :

1. Comme $\mathrm{e}^t - 1 \underset{(0)}{\sim} t$, il vient : $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = 1$. On peut donc prolonger φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$.

2. De même, au voisinage de 0 : $\mathrm{e}^t - 1 = t + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^4}{24} + o(t^4)$, et :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{1}{1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24} + o(t^3)}\\ &= 1 - \big(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24}\big) + \big(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24}\big)^2 - \big(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24}\big)^3 + o(t^3)\\ &= 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} + o(t^3)\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, il vient :

$$b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{12}, b_3 = 0$$

3. On écrit : $\varphi(t) - b_1 t = \varphi(t) + \dfrac{1}{2}t = \dfrac{t}{2}\times\dfrac{\mathrm{e}^t + 1}{\mathrm{e}^t - 1}$

et :

$$\varphi(-t) - b_1(-t) = \varphi(-t) - \frac{1}{2}t = \frac{t}{2}\times\frac{\mathrm{e}^t + 1}{\mathrm{e}^t - 1} = \varphi(t) - b_1 t$$

Une fonction paire admettant un développement limité, n'ayant dans son développement que des puissances paires de t, il vient :

$$b_{2n+1} = 0, \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

4. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ admet au voisinage de 0 un développement limité à tout ordre, comme produit de deux fonctions en admettant un. On sait alors que pour obtenir la partie régulière de ce développement, il suffit de faire le produit des deux parties régulières qu'on tronque à l'ordre voulu, soit :

$$\sum_{k=0}^{N} c_k \frac{t^k}{k!} + o(t^N) = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{t^k x^k}{k!}\right) \times \left(\sum_{k=0}^{N} b_k \frac{t^k}{k!}\right) + o(t^N)$$

d'où :

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{b_j}{j!}\times\frac{x^{k-j}}{(k-j)!}$$

et :

$$c_k = B_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} b_j x^{k-j}$$

Ainsi $B_k(x)$ est-il un polynôme unitaire de degré k, avec $B_k(0) = b_k$.

5. Un calcul donne, pour tout x réel, pour tout t réel : $f(1-x,t) = f(x,t)$. Or :

$$\begin{cases} f(1-x,t) = \sum_{k=0}^{N} B_k(1-x)\dfrac{t^k}{k!} + o(T^N) \\ f(x,-t) = \sum_{k=0}^{N} B_k(x)(-1)^k \dfrac{t^k}{k!} + o(T^N) \end{cases}$$

Par unicité du développement limité : $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$.
Donc $B_{2k+1}(1) = b_{2k+1} = 0$ et $B_{2k}(1) = b_{2k}$.

6. On utilise la même méthode que dans la question précédente : pour tous x, t réels

$$f(x+1,t) - f(x,t) = t.\mathrm{e}^{xt} = \sum_{k=0}^{N-1} x^k \frac{t^{k+1}}{k!} + o(t^N)$$

Donc $B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$.

Exercice 1.14.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} \times u_n$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on déterminera.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$

Déterminer α pour que la série de terme général $\ln v_n$ converge.

3. En déduire que la série de terme général u_n converge.

4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$2\sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} ku_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$$

5. En déduire la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Solution :

1. Une récurrence immédiate montre que $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$. La relation de récurrence montre alors que la suite (u_n) est décroissante ; comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.
Pour déterminer ℓ, on utilise la fonction logarithme :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\big(1 - \frac{3}{2n+5}\big) = -\frac{3}{2n+5} + o\big(\frac{1}{n}\big)$$

La série $\sum[\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)]$ est donc divergente et son terme général est négatif. Donc :

$$\ln(u_n) - \ln(u_1) = \sum_{k=1}^{n-1} [\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

ce qui entraîne (limite de la fonction exponentielle) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. On a : $v_n = \dfrac{2n^{\alpha+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}}{2n^{\alpha+1}\left(1+\frac{5}{2n}\right)}$. Donc :

$$\begin{aligned}\ln v_n &= (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right)\\ &= \left(\alpha-\frac{3}{2}\right)\times\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{25}{4}-\alpha-1\right)\times\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi la série $\sum \ln v_n$ converge si et seulement si $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

3. On a, pour tout $N \geqslant 2$:

$$\sum_{n=1}^{N-1} \ln v_n = \frac{3}{2}\ln N + \ln u_N - \ln u_1$$

Donc

$$u_N = \exp\left(\sum_{n=1}^{N-1} \ln v_n + \ln u_1 - \frac{3}{2}\ln N\right)$$

et, en notant $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln u_n$, on a : $u_N \sim u_1 \dfrac{\mathrm{e}^S}{N^{3/2}}$ et (référence de Riemann) :

la série $\sum u_n$ converge.

4. On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(2k+5)u_{k+1} = (2k+2)u_k$. Il reste à sommer ces égalités pour obtenir le résultat demandé.

5. Ainsi : $2u_0 = 2(n+1)u_{n+1} + 3u_{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

On a donc, en remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = 3u_0 = 3$$

Exercice 1.15.

Soit α et β deux réels tels que $1 < \beta < \alpha$.

L'objet de cet exercice est l'étude de la fonction f définie, pour x et y strictement positifs avec $x \neq y$, par :

$$f(x,y) = \frac{x^\alpha - y^\alpha}{x^\beta - y^\beta}$$

1. Étude d'une fonction d'une variable réelle.

a) Montrer que la fonction ϕ définie par $\phi(t) = \dfrac{1-t^\alpha}{1-t}$ est prolongeable par continuité en 1.

b) Démontrer que ce prolongement est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et étudier ses variations.

2. Étude de f.

a) Justifier que la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha - y^\alpha}{x^\beta - y^\beta} & \text{si } x \neq y \\ \dfrac{\alpha}{\beta}\, x^{\alpha-\beta} & \text{si } x = y \end{cases}$$

est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathcal{U} =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

b) Montrer que :

i) $\forall (x, y) \in \mathcal{U}, f(x, y) = f(y, x)$.

ii) $\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha-\beta} f(x, y)$.

c) Dériver, par rapport à λ, les deux membres de l'égalité précédente et en déduire :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (\alpha - \beta) f(x, y)$$

Rechercher les points critiques de f sur $\mathcal{U}$.

d) Quelle est l'image $f(\mathcal{U})$?

Solution :

1. a) La fonction ϕ est continue et C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. On a : $\lim_{t\to 1} \frac{1 - t^\alpha}{1 - t} = \alpha$, (définition de la dérivée en 1 de $t \mapsto t^\alpha$)
On peut donc prolonger ϕ par continuité en $t = 1$, en posant $\phi(1) = \alpha$.

Pour t au voisinage de 1 : $\phi(t) = \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(t-1) + o(t-1)$. La fonction ϕ, convenablement prolongée est donc dérivable en 1, avec : $\phi'(1) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$.

b) On a : $\phi'(t) = \frac{\alpha t^{\alpha-1}(t-1) - (t^\alpha - 1)}{(t-1)^2}$.
Le signe de ϕ' est celui de son numérateur N et, pour tout t :

$$N'(t) = \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2}(t - 1)$$

qui est du signe de $t - 1$. La fonction ϕ est donc décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.
De plus on remarque, avec un développement limité au voisinage de $t = 1$, que $\lim_{t\to 1} \phi'(t) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$, ce qui montre que le prolongement proposé est de classe C^1.

2. a) Notons $\phi_\alpha(t) = \frac{1 - t^\alpha}{1 - t}$. Alors, pour $x \neq y$,

$$f(x, y) = \frac{x^\alpha \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\right)}{x^\beta \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^\beta\right)} = x^{\alpha-\beta}\frac{\phi_\alpha(y/x)}{\phi_\beta(y/x)}$$

et pour $x = y$, la question précédente montre que

$$f(x, x) = x^{\alpha-\beta}\frac{\phi_\alpha(1)}{\phi_\beta(1)}$$

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ comme composée, produit, quotient de telles fonctions.

b) Les deux propriétés se vérifient immédiatement

c) En utilisant le théorème de dérivation d'une composée, pour tout λ réel :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y) = (\alpha - \beta)\lambda^{\alpha-\beta-1} f(x, y)$$

Puis on prend $\lambda = 1$.

Si (x, y) est un point critique de f, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, donc $f(x, y) = 0$, ce qui est impossible au vu des variations des fonctions ϕ_α et ϕ_β.

d) On a $f(\mathcal{U}) =]0, +\infty[$. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, $f(x, y) > 0$ et la restriction de f à toute demi-droite prend toutes les valeurs de $]0, +\infty[$.

Exercice 1.16.

La fonction de satisfaction S d'un consommateur dépend du revenu R et du temps de loisir L de la manière suivante :

$$S(R, L) = \frac{RL}{R + L}$$

1. On suppose que la fonction S est définie sur l'ensemble

$$\Omega = \{(R, L) \in \mathbb{R}^2 / R > 0 \text{ et } L > 0\}$$

Montrer que S n'admet pas d'extremum sur Ω.

2. Montrer que S est prolongeable par continuité sur l'ensemble

$$\overline{\Omega} = \{(R, L) \in \mathbb{R}^2 / R \geqslant 0 \text{ et } L \geqslant 0\}.$$

On notera encore S la fonction ainsi prolongée.

3. On suppose maintenant que $R = sW$, où W désigne le temps de travail et s le taux horaire de salaire.
On définit alors la fonction S^* sur $\Omega_T = \{(W, L) \in \Omega / W + L \leqslant T\}$ par :

$$S^*(W, L) = S(sW, L).$$

($T > 0$ désigne le temps total disponible.)
Rechercher les extremums de S^* sur Ω_T.

Solution :

1. L'ensemble Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Sur Ω, la fonction S est différentiable et les points critiques de S sont donnés par :

$$\begin{cases} \dfrac{L^2}{(R + L)^2} = 0 \\ \dfrac{R^2}{(R + L)^2} = 0 \end{cases}$$

Le seul point critique est $(0, 0)$ qui n'appartient pas à Ω.

2. On prolonge S par continuité aux points $(R, 0)$, avec $R \neq 0$,, par $S(R, 0) = 0$ et aux points $(0, L)$, avec $L \neq 0$, par $S(0, L) = 0$.
En $(0, 0)$, on pose $R = \rho \cos\theta, L = \rho \sin\theta$, avec $\theta \in]0, \pi/2[$ et $\rho \geqslant 0$ et :

$$|S(R, L)| = \rho \left| \frac{cos\theta \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \right| \leqslant \rho$$

quantité qui tend vers 0 lorsque ρ tend vers 0. On pose donc $S(0, 0) = 0$.

3. L'ensemble Ω_T est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. La fonction S^* étant continue sur cet ensemble, elle admet au moins un maximum et un minimum.

La fonction S^* est clairement minimale pour $W = 0$ ou $L = 0$.

Par la première question, cette fonction admet son maximum au bord de Ω_T, donc sur la droite $W + L = T$.

On peut ainsi étudier la fonction d'une seule variable réelle $f : W \mapsto S^*(W, T-W)$.

On a : $f(W) = \dfrac{sW(T-W)}{(s-1)W+T}$.

• Si $s=1$. La fonction f est clairement maximale pour $W = \dfrac{T}{2}$. Donc S^* est maximale en $\left(\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right)$.

• Si $s>1$. La fonction f est dérivable sur $[0,T]$ et :

$$f'(W) = -s\frac{-T^2+2TW+sW^2-W^2}{(sW+T-W)^2}$$

Cette quantité s'annule pour $W_1 = \dfrac{T}{\sqrt{s}+1} > 0$ et $W_2 = \dfrac{T}{1-\sqrt{s}} < 0$. Dans ce cas, f est maximale pour $W = W_1$ et S^* est maximale en $\left(\dfrac{T}{\sqrt{s}+1}, \dfrac{\sqrt{s}T}{\sqrt{s}+1}\right)$.

• Si $0<s<1$. Les calculs sont identiques aux calculs du cas précédent, mais cette fois $W_2 > T$. Ainsi f est maximale pour $W = W_1$ et S^* est maximale en $\left(\dfrac{T}{\sqrt{s}+1}, \dfrac{\sqrt{s}T}{\sqrt{s}+1}\right)$.

Finalement le point $\left(\dfrac{T}{\sqrt{s}+1}, \dfrac{\sqrt{s}T}{\sqrt{s}+1}\right)$ est le point où S^* est maximale dans les trois cas.

Exercice 1.17.

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

On suppose que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit l'application $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$F_a(x) = \int_{a-x}^{a+x} f(t)\,dt$$

1. Montrer que F_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée en fonction de f. Montrer que la fonction F_a est impaire ; dresser son tableau de variation et préciser ses limites aux bornes de son domaine de définition.

2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x_a \in \mathbb{R}$, tel que $F_a(x_a) = 1$.
On pose dans la suite, $g(a) = x_a$.

3. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{1}{2\ell}$.

4. On suppose que f est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Montrer que f vérifie les hypothèses de la première question. Donner la limite de g associée à f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Solution :

1. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et par les théorèmes de dérivation des intégrales dépendants de leurs bornes :

$$F'_a(x) = f(a+x) + f(a-x) > 0$$

De plus :

$$F_a(-x) = \int_{a+x}^{a-x} f(t)\,dt = -F_a(x)$$

Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$ ou elle est strictement croissante.

On a de manière évidente,

$\lim\limits_{x\to 0} F_a(x) = \displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$, et

$\lim\limits_{x\to+\infty} F_a(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$ par divergence de l'intégrale d'une fonction positive.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. La question précédente et le théorème des valeurs intermédiaires nous assurent de l'existence et de l'unicité de $x_a > 0$ tel que $F_a(x_a) = 1$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour $x > A$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Alors, comme

$$1 = F_a(x_a) = \int_{a-x_a}^{a+x_a} f(t)\,dt$$

il vient, en intégrant l'inégalité ci-dessus :

$$|1 - 2g(a)\ell| < \varepsilon 2g(a)|$$

ou

$$\Big|\frac{1}{g(a)} - 2\ell\Big| < \varepsilon$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{1}{2\ell}$.

4. La fonction f est définie et continue à valeurs dans $]0,1[$,

et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Bien sûr, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 1.18.

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

2. Étudier le sens de variation de f sur D.

3. Déterminer les limites de f aux bornes de D.

4. a) Calculer $f(0)$.

b) Établir une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

c) En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers la borne supérieure de D.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto t^{-x}\sqrt{1+t}$ positive est continue sur $]0,1]$ donc intégrable sur tout segment $[\alpha,1]$, avec $0<\alpha\leqslant 1$.

Au voisinage de 0 elle est équivalente à $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1+2}\frac{1}{t^x}\,dt$ converge si et seulement si $x<1$.

Le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f est donc $]-\infty,1[$.

2. Pour tout $t\in]0,1]$, la fonction $x\mapsto t^{-x}$ est croissante et comme $\sqrt{1+t}>0$, la fonction f est croissante sur $\mathcal{D}$.

3. Pour tout $x\in\mathcal{D}$:

$$0\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{2}\int_0^1\frac{dt}{t^x}=\frac{\sqrt{2}}{1-x}$$

cette dernière quantité tendant vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$.

De même, pour tout $x\in\mathcal{D}$:

$$f(x)\geqslant\int_0^1\frac{dt}{t^x}=\frac{1}{1-x}$$

cette dernière quantité tendant vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

4. a) Un calcul immédiat donne $f(0)=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

b) On utilise une intégration par parties de fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a,1]$, avec $a>0$. Il vient :

$$f(x)=\left[t^{-x}\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\right]_a^1+\frac{2}{3}x\int_a^1 t^{-x-1}\sqrt{1+t}\,dt+\frac{2}{3}x\int_a^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$$

Lorsque a tend vers 0 par valeurs supérieures, chacun des objets ci-dessus admet une limite. Ce qui donne :

$$f(x)=\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{2x}{3}f(x+1)+\frac{2x}{3}f(x)$$

soit :

$$f(x+1)=\big(\frac{3}{2x}-1\big)f(x)-\frac{2\sqrt{2}}{x}$$

c) Lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, il vient :

$$f(1+x)=\big(\frac{3}{2x}-1\big)\big(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}+o(1)\big)-\frac{2\sqrt{2}}{x}=-\frac{1}{x}+o\big(\frac{1}{x}\big)$$

Finalement, au voisinage à droite de 1, on a : $f(x)\sim\dfrac{1}{1-x}$.

Exercice 1.19.

1. Soit $f(t)=\ln\big(1+\mathrm{e}^{-2t}\big)$.

Étudier la convergence de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$.

2. Écrire la formule de Taylor avec «reste intégral» à l'ordre n au point 0, pour la fonction g définie par $g(x)=\ln(1+x)$. On notera $R_n(x)$ le reste d'ordre n.

3. Pour $x>0$, étudier la fonction $\varphi(u)=\dfrac{x-u}{1+u}$ sur l'intervalle $[0,x]$.

4. En déduire

$$(\forall x > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |R_n(x)| \leqslant x^{n+1}$$

5. Montrer que

$$\Big|I - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k^2}\Big| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2(n+1)t}\, dt$$

et en déduire une expression de I sous la forme d'une somme d'une série.

Solution :

1. La fonction : $t \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^{-2t})$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et au voisinage de $+\infty$, elle est équivalent à $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}$ donc l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ converge. Ainsi :

$$I = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \text{ convergee.}$$

2. On montre facilement, par récurrence sur n, que pour tout $n \geqslant 1$:

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

Aussi, la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n s'écrit :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x (-1)^n \frac{(x-u)^n}{(1+u)^{n+1}}\, du$$

3. Une étude élémentaire montre que φ est une bijection décroissante de $[0, x]$ sur lui-même.

4. Aussi, pour $x \geqslant 0$:

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^x |\varphi(u)|^n \frac{du}{1+u} \leqslant \int_0^x x^n\, du = x^{n+1}$$

5. On peut donc écrire :

$$I = \int_0^{+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-2t})\, dt = \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\mathrm{e}^{-2kt}}{k} + R_n(\mathrm{e}^{-2t})\Big)\, dt$$

et

$$\Big|\int_0^{+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-2t})\, dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2kt}\, dt\Big| \leqslant \int_0^{+\infty} |R_n(\mathrm{e}^{-2t})|\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2(n+1)t}\, dt.$$

Un calcul élémentaire donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Big|\int_0^{+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-2t})\, dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k^2}\Big| \leqslant \frac{1}{2(n+1)}$$

ce qui montre que :

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k^2}.$$

Exercice 1.20.

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x, y) = 3x^4 - 4x^2 y + y^2.$$

1. a) Justifier que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / F(x, y) = 0\}$$

c) Étudier le signe de $F(x, y)$ et représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{N}$) des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant $F(x, y) \geqslant 0$ (resp. $F(x, y) \leqslant 0$).

d) L'application F présente-t-elle des extremums locaux ?

e) Montrer que la restriction de F à toute droite passant par l'origine $O = (0, 0)$ admet un minimum strict en 0.

f) La fonction F admet-elle des extremums globaux ?

2. a) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}{F(x, y)} = \frac{\alpha}{y - x^2} + \frac{\beta}{y - 3x^2}$$

b) Soit a un paramètre réel. Déterminer les intervalles I de $\mathbb{R}$ et les fonctions g d'une variable réelle, définies et dérivables sur I, telles que, pour tout $t \in I$:

$$F(a, t)\, g'(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(a, t)\, g(t)$$

Y a-t-il des solutions sur $I = \mathbb{R}$?

Solution :

1. a) La fonction F est polynomiale en les variables x et y : elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

b) En regardant $F(x, y) = 0$ comme une équation du second degré en y, il vient :

$$F(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$$

c) Ainsi, $F(x, y) < 0$ pour tous les points (x, y) du plan situés entre les deux paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $y = 3x^2$, $F(x, y) = 0$ si et seulement si $y = x^2$ ou $y = 3x^2$ et $F(x, y) > 0$ pour les autres points.

d) Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, et F de classe $\mathcal{C}^1$, on recherche les points où F a un extremum local parmi les points critiques de F, c'est-à-dire solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x(3x^2 - 2y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(y - 2x^2) = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(0, 0)$.

Or $(0, 0)$ n'est pas un extremum local car pour tout x non nul, $F(x, 0) = 3x^4 > 0$ et $F(x, 2x^2) = -x^4 < 0$.

e) On a $h(x) = F(x, ax) = 2x(6x^2 - 6ax + a^2)$, expression qui s'annule sans changer de signe en 0. De même pour $F(0, y)$.

f) Non (voir la question d).

2. a) Par identification :

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{F(x,y)} = \frac{2y-4x^2}{(y-x^2)(y-3x^2)} = \frac{1}{y-x^2} + \frac{1}{y-3x^2}$$

b) On a $(a,t) \in \mathcal{D}$ si et seulement si :

$$I \subset]-\infty, a^2[\text{ ou } I \subset]a^2, 3a^2[\text{ ou } I \subset]3a^2, +\infty[.$$

De plus, pour $t \in I$, où I désigne l'un des trois intervalles précédent :

$$g'(t) = \Big(\frac{2t-4a^2}{(t-a^2)(t-3a^2)}\Big) g(t) \implies g(t) = \lambda \exp\Big(\int (\frac{1}{t-a^2} + \frac{1}{t-3a^2})dt\Big)$$

où λ est une constante quelconque et où $\int$ désigne l'une quelconque des primitives de la fonction placée après ce symbole.

Donc : $g(t) = \lambda \exp\big(\ln|t-a^2| + \ln|t-3a^2|\big) = \lambda \exp\big(|(t-a^2)(t-3a^2)|\big)$, et en laissant λ prendre en charge le problème de la valeur absolue :

Sur chaque intervalle $I_1 =]-\infty, a^2[$, $I_2 =]a^2, 3a^2[$, et $I_3 =]3a^2, +\infty[$ défini ci-dessus, il existe une solution g_i de la forme :

$$g_i(t) = \lambda_i(t-a^2)(t-3a^2) = \lambda_i(t^2 - 4a^2t + 3a^4) \text{ définie sur } I_i.$$

Toutes ces solutions sont prolongeables par continuité en a^2 et en $3a^2$, en prolongeant par 0.

D'autre part, on a alors :

$$\forall\, t < a^2, g_1'(t) = \lambda_1(2t - 4a^2) \text{ et } \lim_{x\to(a^2)^-} g_1'(t) = -2a^2\lambda_1,$$

$$\forall\, t \in]a^2, 3a^2[, g_2'(t) = \lambda_2(2t-4a^2)) \text{ et } \lim_{x\to(a^2)^+} g_2'(t) = -2a^2\lambda_2.$$

Ainsi une solution sur I_1 et une solution sur I_2, prolongée par 0 en a^2 est une solution sur $]-\infty, 3a^2[$ si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$.

De même une solution sur I_2 et une solution sur I_3 se «recollent» en $3a^2$ si $\lambda_2 = \lambda_3$.

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \lambda(t-a^2)(t-3a^2)$ est définie, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et est solution sur $\mathbb{R}$.

Ces fonctions sont d'ailleurs les seules solutions définies sur $\mathbb{R}$.