1

ANALYSE

Exercice 1.01.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f(x_1,\dots,x_n) = \exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\big) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x_k}$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

2. Déterminer le gradient ∇f de f. En déduire que f admet un unique point critique noté $\widehat{x}$.

3. a) Calculer la hessienne $\nabla^2 f(\widehat{x})$ de f en ce point critique.

   b) Montrer que $\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tX\nabla^2 f(\widehat{x})X > 0$.

4. a) En déduire f admet en $\widehat{x}$ un minimum local.

   b) Ce minimum est-il un minimum global sur $\mathbb{R}^n$?

Solution :

1. La fonction f est de classe C^2 comme somme et composée de fonctions de classe C^2.

2. Un calcul élémentaire donne pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = -\exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\big) + \mathrm{e}^{x_i}$$

donc :

$$\nabla f_x = \Big(\mathrm{e}^{x_1} - \exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\big),\dots,\mathrm{e}^{x_n} - \exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\big)\Big)$$

Un point critique x est déterminé par $\nabla f_x = 0$, soit pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = -\exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\big) + e^{x_i} = 0$$

Ainsi, $e^{x_1} = \dots = e^{x_n} = \exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\big)$, donc $x_1 = \dots = x_n$ et $x_1 = n+1-nx_1$, donc $x_1 = \dots = x_n = 1$.

$$\widehat{x} = (1,\dots,1)$$

3. a) La matrice hessienne est égale à

$$\nabla^2 f_x = (a_{i,j}),\ \text{avec } a_{i,j} = \begin{cases} e^{x_i} + \exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\big) & \text{si } i = j \\ \exp\big(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\big) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et en $\widehat{x} = (1,\dots 1)$,

$$\nabla^2 f_{\widehat{x}} = e \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives. Ici la matrice $\nabla^2 f_{x_0}$ vaut $e(I+J)$, où J est la matrice composée uniquement de 1. La matrice J est de rang 1 et la somme de chacune de ses lignes est égale à n. Ainsi ses valeurs propres sont 0 et n ; les valeurs propres de $I+J$ sont 1 et $n+1$ et les valeurs propres de $e(I+J)$ sont e et $e(n+1)$ qui sont strictement positives. D'où le résultat.
4. a) On sait alors qu'en le point critique $\widehat{x}$ f admet un minimum local. La valeur de ce minimum est $(n+1)e$.

b) C'est un minimum global. En effet $\lim\limits_{||x||\to+\infty} f(x) = +\infty$, car $f(x) > \sum_{k=1}^{n} e^{x_k}$. Ainsi, il existe $A > 0$ tel que si $||x|| \geqslant A$, $f(x) > (n+1)e + 1$. Sur le disque fermé et borné, centré en 0, de rayon A, la fonction f est continue et atteint son minimum. Celui-ci ne peut être atteint au bord car pour $||x|| \geqslant A$, $f(x) > (n+1)e$. Il est donc atteint en un point de l'intérieur qui est un ouvert, donc au point critique déterminé précédemment.

Exercice 1.02.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2x^2}$.

1. Discuter, selon les valeurs réelles de x, la convergence de la série de terme général $u_n(x)$.

Lorsque cette série converge, on note $f(x)$ sa somme, soit : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Dans la suite, on considère un réel $a > 0$.

2. a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

b) On admet que la fonction f est continue sur $[a, +\infty[$. Justifier la convergence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

3. a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_a^{+\infty} u_n(x)\,dx$ converge et la calculer.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Big|J - \sum_{k=1}^{n} J_k\Big| \leqslant \frac{1}{a}\,\Big[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\Big].$$

c) En déduire l'expression de J comme la somme d'une série.

4. a) Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t + t^2x^2} \leqslant \frac{1}{n + n^2x^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t + t^2x^2}$$

b) Déterminer deux réels b et c (indépendants de t, mais pouvant dépendre de x) tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{t + t^2x^2} = \frac{b}{t} + \frac{c}{1 + tx^2}$$

c) En déduire un encadrement de $f(x)$, puis un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

d) En déduire la nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

Solution :

1. On a $u_n(0) = 1/n$, qui est le terme général d'une série divergente ; pour $x \neq 0$, $u_n(x) \sim \dfrac{1}{n^2x^2}$, qui est le terme général d'une série convergente.

2. a) On a : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$.

b) $f \in C^0([a, +\infty[)$ et $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi^2}{6x^2}$ d'intégrale convergente en $+\infty$, donc par la règle de Riemann J converge.

3. a) $u_n \in C^0([a, +\infty[)$ et $u_n(x) \sim \dfrac{1}{n^2x^2}$, donc J_n converge encore par application de la règle de Riemann.
Par le changement de variable affine $x \mapsto x\sqrt{n} = t$, on a :

$$J_n = \frac{1}{n}\int_a^{+\infty} \frac{dx}{1 + nx^2} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\int_{a\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\Big[\arctan(t)\Big]_{a\sqrt{n}}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{n}}\big(\frac{\pi}{2} - \arctan(a\sqrt{n}\big).$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\big|J - \sum_{k=1}^{n} J_k\big| = \int_a^{+\infty} \big[\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\big]dx \leqslant \int_a^{+\infty} \big[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2x^2}\big]dx$$
$$= \big[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\big]\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

c) Comme $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge, son reste tend vers 0, donc $\sum\limits_{k\geqslant 1} J_k$ converge vers J, soit :

$$J = \sum_{n=1}^{+\infty} J_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \big[\frac{1}{n\sqrt{n}}\big(\frac{\pi}{2} - \arctan(a\sqrt{n})\big)\big]$$

4. a) L'encadrement demandé est une conséquence banale de la décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t + t^2x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Par identification : $\dfrac{1}{t + t^2x^2} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{x^2}{1 + tx^2}$.

c) La convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ garantit celle des intégrales, d'où en sommant pour $n \geqslant 2$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2x^2} \leqslant f(x) - \frac{1}{1 + x^2} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2x^2}$$

Soit :

$$\int_2^{+\infty} \big(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{1 + tx^2}\big)\, dt \leqslant f(x) - \frac{1}{1 + x^2} \leqslant \int_1^{+\infty} \big(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{1 + tx^2}\big)\, dt$$

ou encore :

$$\Big[- \ln \frac{1 + tx^2}{t}\Big]_2^{+\infty} \leqslant f(x) - \frac{1}{1 + x^2} \leqslant \Big[- \ln \frac{1 + tx^2}{t}\Big]_1^{+\infty}$$

C'est-à-dire :

$$\ln\big(\frac{1 + 2x^2}{2}\big) - \ln(x^2) \leqslant f(x) - \frac{1}{1 + x^2} \leqslant \ln(1 + x^2) - \ln(x^2)$$

En regardant les termes prépondérants, on obtient par encadrement d'équivalents : $f(x) \underset{0^+}{\sim} -2\ln x$.

d) La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)dx$ donne, par la règle d'équivalence pour les intégrales de fonctions de signe fixe, la convergence de l'intégrale définissant I.

Exercice 1.03.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t + \sin t}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur D_f.

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en $x=0$.
On note $\widetilde{f}$ la fonction ainsi prolongée.

5. Montrer que $\widetilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $\widetilde{f}'(0)$.

6. La fonction $\widetilde{f}$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Solution :

1. On étudie $\varphi : t \to t + \sin t$. On a $\varphi'(t) = 1 + \cos t \geqslant 0$, nul seulement en des points isolés, et $\lim\limits_{-\infty} \varphi = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty$, ce qui montre que φ est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0, donc seulement en 0.
Ainsi pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{1}{t+\sin t}$ est continue sur $[x, 2x]$ et $D_f = \mathbb{R}^*$.

2.Notons F une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t+\sin t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Par le théorème fondamental du calcul intégral, comme $f(x) = F(2x) - F(x)$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$f'(x) = \frac{2}{2x+\sin(2x)} - \frac{1}{x+\sin(x)}$$

3. Pour tout $t > 1$, $\dfrac{1}{t+1} \leqslant \dfrac{1}{t+\sin t} \leqslant \dfrac{1}{t-1}$. Ainsi :

$$x > 1 \implies \int_x^{2x} \frac{dt}{t+1} \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}, \text{ d'où :}$$

$$x > 1 \implies \ln\frac{2x+1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \ln\frac{2x-1}{x-1}$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$.

La fonction φ est impaire, le changement de variable $t = -u$ donne donc :

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{t+\sin t} = \int_x^{2x} \frac{du}{u+\sin u} = f(x)$$

Donc f est paire et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2$.

4. On écrit : $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t+\sin t} - \int_x^{2x} \frac{dt}{2t} = \int_x^{2x} \frac{t-\sin t}{t(t+\sin t)}dt.$

Or un développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 3 donne : $\dfrac{t-\sin t}{t(t+\sin t)} \sim \dfrac{t}{12}$, qui tend vers 0. Ainsi la fonction $t \mapsto \dfrac{t-\sin t}{t(t+\sin t)}$ admet

un prolongement par continuité en 0 et est donc continue sur $[-2,2]$ et ainsi majorée par une constante C.
Il vient donc pour $|x| \leq 1$:

$$|\int_x^{2x} \frac{dt}{t+\sin t} - \int_x^{2x} \frac{dt}{2t}| \leqslant C|x|$$

ce qui montre que $\left|f(x) - \frac{\ln 2}{2}\right| \leqslant C|x|$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{\ln 2}{2}$.

5. Le calcul de f' a été fait précédemment. Après réduction, il vient :

$$f'(x) = \frac{2\sin x(1-\cos x)}{(2x+\sin(2x))(x+\sin(x))}$$

Effectuant un développement limité au voisinage de 0, il vient $f'(x) \underset{(0)}{\sim} \frac{x}{8}$.

Ainsi la fonction $\widetilde{f}$ est-elle dérivable en 0 (théorème des fonctions de classe C^1) et $\widetilde{f}'(0) = 0$.

6. On a déjà vu que la fonction $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, car elle l'est en 0 et l'est banalement ailleurs.

Exercice 1.04.

1. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels strictement positifs, telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 0$$

a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\, u_n$.

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

Soit un réel $q \in\,]-1,1[$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = (1-qx)(1-q^2x)\cdots(1-q^nx) = \prod_{k=1}^{n} \left(1-q^kx\right)$$

2. a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note $f(x)$ sa limite.

b) Vérifier que $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = (1-qx)f(qx) \quad (1)$.

3. On suppose que f admet un développement limité à tout ordre N en 0, noté :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n + o\left(x^N\right) \qquad N \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{q^n}{q^n - 1}\, a_{n-1}$ et en déduire l'expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Justifier que la série de terme général $a_n\, x^n$ converge pour tout x réel. On note $g(x)$ sa somme.

c) On admet que g est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g = f$.

Solution :

1. a) Le résultat demandé n'est autre que la définition quantifiée de la limite avec $\varepsilon = 1/2$, et $u_n > 0$.

b) Par récurrence, $n \geq n_0 \implies 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$, d'où la convergence par comparaison à une série géométrique convergente.

2. a) • S'il existe n_0 , $x = 1/q^{n_0}$, alors $\forall\, n \geq n_0$, $f_n(x) = 0$ et la suite $(f_n(x))$ est constante à partir d'un certain rang, donc convergente ;

• sinon, $\forall\, n, f_n(x) \neq 0$ et $\ln|f_n(x)| = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln|1 - q^k x|$ converge absolument car à partir d'un certain rang $|q^k x| < 1$ puis $\lim\limits_{k\to\infty} q^k x = 0$ et $|\ln|1 - q^k x|| \underset{(\infty)}{\sim} |q^k x| \geqslant 0$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

D'autre part $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - q^n x) = 1$ implique que $f_n(x)$ est de signe constant à partir d'un certain rang, donc $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation s'obtient par passage à la limite dans la relation

$$f_n(x) = (1 - qx) \prod_{k=2}^{n} (1 - q^{k-1} qx) = (1 - qx)\, f_{n-1}(qx)$$

3. a) Par substitution dans la relation précédente et identification par unicité du développement limité, on a : $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n + o(x^N) = (1 - qx)\big[\sum\limits_{n=0}^{N} a_n (qx)^n + o(x^N)\big]$, donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n = a_n q^n - a_{n-1} q^n \text{ et } a_0 = f(0) = 1$$

d'où par récurrence $a_n = \dfrac{q^n}{q^n - 1}\, a_{n-1} = \dfrac{q^{n\,(n+1)/2}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (q^k - 1)}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{|a_{n+1}\, x^{n+1}|}{|a_n\, x^n|} = \left|\dfrac{q^{n+1}\, x}{q^{n+1} - 1}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui assure la convergence absolue de la série.

4. g vérifie la relation (1) (cf. 3.a) et $g(0) = f(0) = 1$, d'où, par récurrence et continuité de g en 0, on écrit pour tout n :

$$g(x) = \Big[\prod_{k=1}^{n}(1-q^k x)\Big]\, g(q^n x) = f_n(x)\, g(q^n x)$$

puis on fait tendre n vers l'infini et à la limite :

$$g(x) = f(x)\, g(0) = f(x)$$

Exercice 1.05.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, avec $n > p$, et posons $q = n - p$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère l'équation d'inconnue réelle y :

$$(E) : y^n + xy^p - 1 = 0.$$

1. Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, l'équation (E) admet une racine unique y_x dans $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par : $x \longmapsto f(x) = y_x$ où y_x est défini dans la première question.
Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et $f(x)$.

3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

4. Montrer que f admet une limite, que l'on calculera, lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Démontrer que $f(x) \sim x^{-\frac{1}{p}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $\Psi_x(y) = y^n + xy^p - 1$, fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a $\Psi_x'(y) = ny^{n-1} + pxy^{p-1} = y^{p-1}(ny^q + px)$.
$\to$ Si x est positif ou nul, Ψ_x croît.
$\to$ Si x est strictement négatif Ψ_x commence par décroître avant de croître.
Comme $\lim\limits_{0} \Psi_x(y) = -1$ et que $\lim\limits_{+\infty} \Psi_x(y) = +\infty$, on en déduit que Ψ_x ne prend qu'une fois la valeur 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. L'équation (E) montre que pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ on a $x = \dfrac{1-y^n}{y^p} = \Phi(y)$.
On a Φ qui est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\Phi'(y) = \dfrac{-ny^n - (1-y^n)p}{y^{p+1}} = \dfrac{-ny^q - px}{y}$.
On a $\Phi' < 0$ et Φ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet une fonction réciproque qui n'est autre que la fonction f qui est aussi C^∞. On a :

$$f'(x) = -\frac{y}{ny^q + px} = -\frac{f(x)}{nf(x)^q + px}$$

3. On a, $f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$.
On obtient immédiatement $a = f(0) = 1, b = f'(0) = -\dfrac{1}{n}$, puis on utilise :
$$(1 - \frac{1}{n}x + cx^2 + o(x^2))^n + x(1 - \frac{1}{n}x + cx^2 + o(x^2))^p - 1 = 0.$$
Ce qui conduit à : $ncx^2 + \dfrac{n-1}{2n}x^2 - \dfrac{p}{n}x^2 = 0$ puis
$$c = -\frac{n-1-2p}{2n^2} = -\frac{q-p-1}{2n^2}$$

4. L'examen de la fonction Φ montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. On a donc, $xy^p \underset{+\infty}{\sim} 1$, d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{-\frac{1}{p}}$.

Exercice 1.06.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t}\,dt$ converge.

On note f l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : pour tout $x > 0$,
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t}\,dt$$

2. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis un équivalent de $f(x)$ pour x au voisinage de $+\infty$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

4. a) En utilisant le changement de variable $u = x.\mathrm{e}^t$ que l'on justifiera, montrer que :
$$f(x) = \ln x(\ln x - \ln(1+x)) + \int_x^{+\infty} \frac{\ln u}{u(1+u)}\,du$$

b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$. Retrouver ainsi le sens de variations de f.

Solution :

1. Soit $x > 0$. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t}{1 + x\mathrm{e}^t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et positive.

Au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) \sim \dfrac{t}{x}\,\mathrm{e}^{-t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} t.\mathrm{e}^{-t}dt$ converge. Ainsi f est-elle bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Si $0 < x < y$, alors, pour $t \geqslant 0$, $\dfrac{t}{1 + x\mathrm{e}^t} \geqslant \dfrac{t}{1 + y\mathrm{e}^t}$ ce qui entraîne la décroissance de f.

3. a) Comme $1+xe^t \geqslant xe^t$, il vient : $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = \dfrac{1}{x}$ (calcul simple ou référence probabiliste) ce qui montre que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Montrons que $\dfrac{1}{x}$ est équivalent à $f(x)$ au voisinage de $+\infty$. En effet :

$$\Big|f(x) - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} te^{-t}dt\Big| = \int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+xe^t)(xe^t)}dt \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt = \frac{C}{x^2}$$

Donc $f(x) - \dfrac{1}{x} = o\big(\dfrac{1}{x}\big)$ et $f(x) \underset{+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{x}$

b) Soit $A > 0$. On peut écrire :

$$f(x) \geqslant \int_0^A \frac{t}{1+xe^t}dt \geqslant \frac{1}{1+xe^A}\int_0^A tdt = \frac{A^2}{2(1+xe^A)}$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{A^2}{2(1+xe^A)} = \frac{A^2}{2}$, et comme ceci est vérifié pour tout A, il s'ensuit que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

4. a) Le changement de variable proposé est de classe C^1 et bijectif. Il vient

$$f(x) = \int_x^{+\infty}\frac{\ln(u/x)}{u(1+u)}du = \int_x^{+\infty}\frac{\ln(u)}{u(1+u)}du - \ln(x)\int_x^{+\infty}\frac{1}{u(1+u)}du$$

Or, pour $A > 0$:

$$\int_x^A \frac{1}{u(1+u)}du = \int_x^A\frac{du}{u} - \int_0^A\frac{du}{1+u} = -\ln(x) + \ln(1+x) - \ln\big(1+\frac{1}{A}\big)$$

et, en prenant la limite lorsque A tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty}\frac{1}{u(1+u)}du = \ln(1+x) - \ln(x)$$

Finalement $f(x) = \ln x(\ln x - \ln(1+x)) + \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\ln u}{u(1+u)}du.$

b) La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\ln u}{u(1+u)}du$ est dérivable (intégrale fonction de sa borne inférieure), et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}\left(\ln x - \ln(1+x)\right) + \ln x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) - \frac{\ln x}{x(1+x)} \\ &= \frac{1}{x}\left(\ln x - \ln(1+x)\right) < 0. \end{aligned}$$

On retrouve bien la décroissance de f.

Exercice 1.07.

Dans tout l'exercice, E désigne l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $2\pi-$périodiques, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f vérifiant :

$$f \in C^0(\mathbb{R}) \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+2\pi) = f(x)$$

Pour toute fonction f de E, on pose : $c(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$.

1. a) Montrer que toute fonction de E est bornée.

b) En déduire que, pour toute fonction f de E et tout réel α strictement plus grand que 1, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,dt$ est convergente.

2. a) Montrer, pour toute fonction f de E, l'égalité suivante :

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

b) En déduire que pour toute fonction f de E, les primitives de f sont $2\pi-$périodiques si et seulement si $c(f) = 0$.

3. On considère une fonction f appartenant à E et on note g la fonction définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, g(t) = f(t) - c(f).$$

a) Montrer que g appartient à E et que $c(g) = 0$.

b) Montrer que l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt$ est convergente.

c) On suppose dans cette question que $c(f) \neq 0$. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt$ quand x est au voisinage de $+\infty$.

4. On considère dans cette question la fonction f définie, pour tout réel t, par : $f(t) = |\sin(t)|$.

a) Vérifier que f est un élément de E.

b) En déduire que : $\displaystyle\int_1^x \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln(x)$.

c) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$?

d) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$?

Solution :

1. a) Soit f une fonction de E. Comme f est continue, elle est bornée sur l'intervalle fermé borné $[0, 2\pi]$, il existe donc un réel M positif, tel que :

$$\forall\, y \in [0, 2\pi],\ |f(y)| \leq M$$

Soit x un réel donné. Il existe alors un entier relatif k tel que $x + 2k\pi$ appartienne à $[0, 2\pi]$. Comme f est $2\pi-$périodique, $f(x) = f(x + 2k\pi)$ et, $x + 2k\pi$ étant dans $[0, 2\pi]$, on a bien $f(x) \leq M$.

b) D'après ce qui précède, on a :$|\dfrac{f(t)}{t^\alpha}| \leq \dfrac{M}{t^\alpha}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{M}{t^\alpha}$ est, à un scalaire près, une fonction de Riemann et pour $\alpha > 1$ son intégrale en $+\infty$ est convergente. Le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives permet de conclure à la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\frac{f(t)}{t^\alpha}| dt$.

Enfin, comme la convergence absolue entraîne la convergence, on peut bien conclure à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$.

2. a) On écrit : $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\, dt = \int_x^0 \ldots + \int_0^{2\pi} \ldots + \int_{2\pi}^{x+2\pi} \ldots$.

Dans la dernière intégrale, on effectue le changement de variable $t = u + 2\pi$ et par périodicité de f la première et la dernière intégrale se détruisent. On obtient ainsi le résultat escompté.

b) Soit F une primitive d'une fonction f de E. On a alors, pour tout réel x, $F(x + 2\pi) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt = 2\pi c(f)$.

On en déduit : F est $2\pi-$périodique si, et seulement si, $\forall\, x, F(x+2\pi)-F(x) = 0$, soit si et seulement si $c(f) = 0$.

3. a) La fonction g est continue comme somme de fonctions continues.

Ensuite, $g(x + 2\pi) = f(x + 2\pi) - c(f) = f(x) - c(f) = g(x)$.

Enfin, $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t) dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(f) dt = c(f) - c(f) = 0$.

On a donc $c(g) = 0$.

b) Soit A un réel plus grand que 1 et considérons : $\displaystyle\int_1^A \frac{g(t)}{t} dt$.

Notons G une primitive de g. On a alors, en intégrant par parties :

$$\int_1^A \frac{g(t)}{t} dt = \Big[\frac{G(t)}{t}\Big]_1^A + \int_1^A \frac{G(t)}{t^2} dt$$

$\star$ Comme g appartient à E et que $c(g) = 0$, la primitive G de g est $2\pi-$périodique (question 2.b)) et évidemment continue. G est donc dans E. On en déduit qu'elle est bornée. Alors, comme G est bornée : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{G(t)}{t} = 0$.

$\star$ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{G(t)}{t^2} dt$ converge.

Conclusion, le second membre de l'égalité possède une limite finie en $+\infty$ et l'intégrale est convergente.

c) On a : $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{f(t)-c(f)}{t} dt + \int_1^x \frac{c(f)}{t} dt.$

Soit $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{g(t)}{t} dt + c(f)\ln(x).$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{g(t)}{t} dt = L$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} c(f)\ln(x) = \pm\infty$, $(c(f) \neq 0)$ on en déduit :

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{(+\infty)}{\sim} c(f)\ln(x)$$

4. a) f est évidemment continue et $2\pi-$périodique, $c(f) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin(t)| dt = \frac{2}{\pi}$.

b) En utilisant le résultat obtenu à la fin de la question 3, on a bien le résultat demandé.

c) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge.

d) Une intégration par parties de renforcement de convergence prouve la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, donc aussi celle de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 1.08.

Pour toutes fonctions f, g continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\, dt$ converge, on pose $(f \star g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt$.

1. On suppose dans cette question que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge et que g est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \star g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose dans cette question que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\, dt$ convergent. Montrer que $f \star g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $\lambda_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,dt$ et

$$h_n(t) = \begin{cases} \dfrac{(1-t^2)^n}{\lambda_n} & \text{si } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{si } t \notin [-1,1] \end{cases}$$

a) Montrer, à l'aide du changement de variable $t = \cos\theta$, que

$$\lambda_n = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2n+1}\,d\theta.$$

On admet que $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

b) Montrer que h_n est une densité de probabilité.

c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n(t)\,dt = 0$$

d) Déterminer pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} (f \star h_n)(x)$ pour f continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t)g(x-t)| \leqslant K|f(t)|$. Comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$ converge, les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions continues positives permettent de conclure à l'existence de $(f \star g)(x)$ pour tout réel x et au fait que $(f \star g)(x) \leqslant \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$.

2. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t)g(x-t)| \leqslant \dfrac{1}{2}\big(|f(t)|^2 + |g(x-t)|^2\big)$. Or $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$ converge ainsi que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|^2 dt$ par un changement de variable évident.
Les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions continues positives permettent de conclure comme dans la question précédente.

3. Le changement de variable $t = \cos\theta$ de classe C^1 donne

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt = \int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2n+1} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2n+1} d\theta$$

Montrons le résultat admis dans l'énoncé :

Posons $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^n d\theta$. Alors, une intégration par parties donne

$$W_n = \big[-(\sin\theta)^{n-1}\cos\theta\big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{n-2}\cos^2\theta d\theta$$

soit ; $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$.
La suite (W_n) est décroissante (car sur $[0, \pi/2]$, $0 \leqslant \sin\theta \leqslant 1$) et la relation précédente donne $nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2}$, donc :

$$nW_nW_{n-1} = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$$

Finalement $W_n \leqslant W_{n-1} \leqslant W_{n-2} = \frac{n}{n-1}W_n$. Ceci entraîne que $\frac{W_{n-1}}{W_n}$ tend vers 1, donc $W_n \sim W_{n-1}$ et $nW_nW_{n-1} = \pi/2$ entraîne que $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ et $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ Ainsi $\lambda \sim 2\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

b) La fonction h_n est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et son intégrale est égale à 1 de par sa définition.

c) On a $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n(t)dt = \frac{1}{\lambda_n}\int_{\varepsilon}^{1}(1-t^2)^n \leqslant \frac{(1-\varepsilon^2)^n}{\lambda_n} \leqslant \frac{1}{\lambda_n}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n(t)dt = 0$. Même démonstration pour $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)dt$.

d) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et bornée par K. Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\delta > 0$ tel que $|t| < \delta$ entraîne $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon/3$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
|(f \star h_n)(x) - f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)h_n(t)dt - \int_{\mathbb{R}} f(x)h_n(t)dt\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|h_n(t)dt \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-\delta} \dots + \int_{-\delta}^{+\delta} \dots + \int_{\delta}^{+\infty} \dots = I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Or, par la continuité de f en x et la positivité de h_n, $I_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\int_{\mathbb{R}} h_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{3}$.

$\rightarrow$ comme $|f| \leqslant K$: $I_1 \leqslant 2K\displaystyle\int_{-\infty}^{-\delta} h_n(t)dt$ et $I_3 \leqslant 2K\displaystyle\int_{-\delta}^{+\infty} h_n(t)dt$

Par la question c, il existe N tel que si $n \geqslant N$, $I_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, I_3 \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour $n \geqslant N, |(f \star h_n)(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, \displaystyle\lim_{n\to\infty} (f \star h_n)(x) = f(x)$.

Exercice 1.09.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n. On définit par récurrence la suite de polynômes $(T_n)_n$ par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X,\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X), \forall\, n \geqslant 0.$$

Dans cet exercice, on identifiera polynôme et fonction polynomiale associée.

On rappelle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

1. Expliciter T_2, T_3 et T_4.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.
   b) Montrer que $T_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} X^{n-2k}(X^2-1)^k$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n possède exactement n racines distinctes.

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul. On note $x_1, \dots, x_n$ les racines de T_n.
Pour $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, continue sur $[0, 1]$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [-1,1]} |f(x)|$.

4. Calculer $\|T_n\|_\infty$.

5. On pose $S_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n qui possèdent n racines distinctes sur $[-1, 1]$. On souhaite montrer que
$$\forall\, P \in \mathcal{P}_n, \|S_n\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty.$$
   a) Calculer $\|S_n\|_\infty$.
   b) Montrer le résultat annoncé en raisonnant par l'absurde.

Solution :

1. D'après les définitions :
$T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1, T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X$,
$T_4 = 2XT_3 - T_2 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

2. a) On montre cette propriété par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a bien $T_0(\cos t) = 1 = \cos(0.t)$ et $T_1(\cos t) = \cos t$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $T_n(\cos t) = \cos(nt)$ et $T_{n+1}(\cos t) = \cos((n+1)t)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos t) &= 2\cos(t) T_{n+1}(\cos t) - T_n(\cos t) = 2\cos(t)\cos((n+1)t) - \cos(nt) \\ &= \cos((n+2)t) + \cos(nt) - \cos(nt) = \cos((n+2)t). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

b) Soit $x \in [-1, 1]$. On note $x = \cos t$. Alors :
$T_n(x) = T_n(\cos t) = \cos(nt) = \text{Ré}(e^{int}) = \text{Ré}[(e^{it})^n]$

$$= \text{Ré} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k t \cos^{n-k} t = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} i^{2k} \sin^{2k} t \cos^{n-2k} t$$
$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-\cos^2 t)^k \cos^{n-2k} t = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-x^2)^k x^{n-2k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (x^2-1)^k x^{n-2k}$$

Ainsi, les polynômes T_n et $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2-1)^k X^{n-2k}$ coïncident sur $[-1,1]$. Ces polynômes sont égaux

3. Comme T_n est un polynôme de degré n, il possède au plus n racines distinctes.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, notons $x_k = \cos \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$. Alors, $x_k \in [-1,1]$, les nombres x_k sont tous distincts car la fonction cosinus est injective sur $[0,\pi]$ et $T_n(x_k) = \cos(n\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}) = \cos \dfrac{(2k+1)\pi}{2} = 0$.
Nous avons donc identifié tous les zéros du polynôme T_n et T_n possède exactement n racines distinctes toutes dans $[-1,1]$.

4. Pour tout $x \in [-1,1]$, il existe $t \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos t$. Alors, $T_n(x) = \cos(nt)$. Ainsi, $\|T_n\|_\infty \leqslant 1$. De plus, $T_n(0) = 1$. Donc $\|T_n\|_\infty = 1$.

5. a) On remarque que S_n est un polynôme unitaire de degré n et que, d'après la question précédente : $\|S_n\|_\infty = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b) Soit $P \in \mathcal{P}_n$ tel que $\|P\|_\infty < \|S_n\|_\infty$. On pose $D = S_n - P$.
Comme P et S_n sont dans $\mathcal{P}_n$, ils sont tous deux unitaires et le degré de D est strictement inférieur à n.
De plus, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $D(\cos \dfrac{k\pi}{n}) = P(\cos \dfrac{k\pi}{n}) - \dfrac{(-1)^k}{2^{n-1}}$. Ainsi, D change $n+1$ fois de signe sur $[-1,1]$. D'après le théorème de Rolle, D s'annule donc au moins en n points distincts. Ainsi, $D = 0$ et on obtient une contradiction. Finalement,

$$\forall\, P \in \mathcal{P}_n, \|S_n\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty.$$

Exercice 1.10.

Soit f l'application définie par :

$$f : (x,y) \mapsto \frac{1}{1-y^2} \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ?

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathcal{D}$.
3. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$:

$$2yf(x,y) + (1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - (1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

4. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout y tel que $0 < y < 1$:

$$\left|\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\right| \leqslant |\ln y|$$

En déduire que pour tout $x \geq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,dy$ est convergente.

Solution :

1. Pour définir $f(x,y)$, il faut avoir $y \neq 1$, $y \neq -1$ et $\dfrac{x+y}{1+xy} > 0$, donc $x+y$ et $1+xy$ de même signe et non nuls.

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$, car composée, produit, quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, les fonctions apparaissant en dénominateur ne s'annulant pas et la fonction placée dans le logarithme étant strictement positive.

3. On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)(1+xy)}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-1}{(x+y)(1+xy)(y^2-1)} + \frac{2y}{(y^2-1)^2}\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

On vérifie alors facilement la formule demandée.

4. Fixons y dans $]0,1[$ et étudions la fonction $h : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec $h'(x) = \dfrac{1-y^2}{(x+y)(1+xy)} > 0$.

Par conséquent h est strictement croissante.

De plus $h(0) = \ln y$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\ln y$. Donc $|h(x)| \leqslant |\ln y|$, ce qui est le résultat demandé.

Pour x fixé, la fonction, de la variable y, à intégrer est continue sur $]0,1[$.

Au voisinage de $y = 0$, $|f(x,y)| \leqslant |\ln y| = -\ln y$, et la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln y\,dy$ donne la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x,y)\,dy$.

Au voisinage de $y = 1$, $|f(x,y)| \leqslant \dfrac{1}{1+y}\cdot\dfrac{-\ln y}{1-y}$ et la fonction majorante se prolonge par continuité en 1, donc est intégrable sur $[1/2,1]$.

La convergence de $\displaystyle\int_{1/2}^1 f(x,y)\,dy$ en résulte.

Par disjonction des problèmes, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,dy$ est convergente.

Exercice 1.11.

Soit un réel x et un entier naturel $n > 0$; on note :

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-x)^p}{p+1}$$

1. Montrer que les relations $u_n = S_{2n}(1)$ et $v_n = S_{2n+1}(1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ définissent deux suites réelles adjacentes. En déduire la convergence de la suite $(S_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel ℓ.

Les questions suivantes sont indépendantes ; elles permettent toutes le calcul de ℓ.

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x)$. Pour $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f^{(k)}(x)$ puis déterminer $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |f^{(k)}(x)|$.

En déduire la valeur de ℓ par application de l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur $[0,1]$.

3. Établir que, pour tout réel $x \geqslant 0$ et pour tout entier $n > 0$:

$$S_{2n}(x) \leqslant f(x) \leqslant S_{2n+1}(x)$$

et en déduire la valeur de ℓ.

4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$: $\displaystyle S_{2n}(1) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

En déduire la valeur de ℓ en faisant apparaître une somme de Riemann.

5. Montrer que pour tout entier $n > 0$:

$$S_n(1) = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt$$

et en déduire la valeur de ℓ.

Solution :

1. On a : $v_n - u_n = S_{2n+1}(1) - S_{2n}(1) = \dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

D'autre part : $u_{n+1} - u_n = S_{2n+2}(1) - S_{2n}(1) = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} \geqslant 0$

et $v_{n+1} - v_n = S_{2n+3}(1) + S_{2n+1}(1) = -\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+3} \leqslant 0$

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes ; elles convergent vers un même réel ℓ. Les deux suites extraites $S_{2n}(1)$ et $S_{2n+1}(1)$ convergent vers la même limite ℓ. Par exhaustion la suite $(S_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

2. Pour $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

On montre facilement par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$,
d'où $\sup\{|f^{(k)}(x)|, x \in [0,1]\} = (k-1)!$.
La fonction f est de classe C^∞ sur $[0,1]$; on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre n :

$$\begin{aligned}|f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}| &\leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup\{|f^{(n+1)}(x)|, x \in [0,1]\} = \frac{1}{(n+1)!} n! \\ &\leqslant \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

soit $|\ln(2) - S_n(1)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(1) = \ln(2)$

3. Soit un réel $x \geqslant 0$ et un entier $n > 0$:
Soit la fonction : $f_1(x) = \ln(1+x) - S_{2n}(x) = \ln(1+x) - \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$f_1'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{1-(-x)^{2n}}{1+x} = \frac{x^{2n}}{1+x} \geqslant 0$$

La fonction f_1 est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $f_1(0) = 0$, elle est positive sur $\mathbb{R}^+$. Ce qui prouve la première inégalité.
On montre, de même, l'inégalité de droite en étudiant la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_2(x) = S_{2n+1}(x) - \ln(1+x)$, et on obtient : $S_{2n}(x) \leqslant f(x) \leqslant S_{2n+1}(x)$.
En particulier pour $x = 1$ et en passant à la limite : $\ell = \ln(2)$.

4. On montre le résultat par récurrence :
→ L'initialisation est banale.
→ On suppose la propriété vraie au rang n : $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = S_{2n}(1)$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = S_{2n}(1) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= S_{2n+2}(1)\end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité et donne la conclusion.

On reconnaît une somme de Riemann :

$$S_{2n}(1) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n}(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(2)$

5. Soit $n > 0$. On a : $\dfrac{1-(-t)^n}{1+t} = \sum\limits_{p=0}^{n-1}(-t)^p$, donc :

$$\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}dt = \sum_{p=0}^{n-1}\int_0^1 (-t)^p dt = \sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{p-1}}{p} = S_n(1)$$

et : $S_n(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}dt = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}dt$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $|\dfrac{(-t)^n}{1+t}| = \dfrac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$

et

$$0 \leqslant |\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}dt| \leqslant \int_0^1 |\frac{(-t)^n}{1+t}|dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \leqslant \int_0^1 t^n dt \leqslant \frac{1}{n+1}$$

ce qui entraîne que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}dt = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(1) = \ln(2)$.

Exercice 1.12.

Soit r un réel strictement positif. On considère un réel strictement positif u_0 et on définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{r+u_n^2}$$

1. Etudier la fonction $x \mapsto x^3 + rx - 1$ et montrer qu'elle s'annule en un seul point ℓ. En déduire que la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{r+x^2}$ admet un seul point fixe (*i.e.* il existe un unique x_0 tel que $f(x_0) = x_0$).

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(f(x))$.

a) Que vaut $g(x)$?

b) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c que l'on déterminera, tels que pour tout x réel on a :

$$(1-rx)(r+x^2)^2 - x = (x^3+rx-1)(ax^2+bx+c)$$

c) Déterminer la fonction $x \mapsto h(x) = g(x) - x$.

3. On prend pour r la valeur 1.

a) Montrer que g admet un seul point fixe.

b) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?

4. On prend pour r la valeur 1/2.

a) Montrer que g admet trois points fixes. On notera α et β les deux points fixes qui sont différents de ℓ avec $\alpha < \beta$.

b) On pose $E = \{\alpha, \beta, \ell\}$. Montrer que f laisse l'ensemble E invariant (i.e que l'on a $f(E) = E$).

En déduire que $\alpha < \ell < \beta$.

c) Etudier le signe de la fonction h définie par $h(x) = g(x) - x$.

d) Etudier la convergence des suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ en fonction de la valeur initiale u_0.

Solution :

1. Une étude immédiate montre que l'application $x \mapsto x^3 + rx - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. L'étude de ses limites en $\pm\infty$ montre qu'elle s'annule en un unique point ℓ.
Il en résulte que la fonction f admet un unique point fixe ℓ.

2. a) Un calcul immédiat donne, pour tout x réel :

$$g(x) = \frac{(r+x^2)^2}{r(r+x^2)^2+1}$$

b) En effectuant le produit du membre de droite et par identification, il vient :

$$(1-rx)(r+x^2)^2 - x = (x^3+rx-1)(-rx^2+x-r^2)$$

c) La fonction h est définie par :

$$h(x) = \frac{(1-rx)(r+x^2)^2 - x}{r(r+x^2)^2+1} = \frac{(x^3+rx-1)(-rx^2+x-r^2)}{r(r+x^2)^2+1}$$

Remarquons que le discriminant Δ du trinôme $-rx^2+x-r^2$ est égal à $1-4r^3$.

3. a) Lorsque $r=1$, Δ est négatif. La fonction h n'admet qu'un seul zéro qui est ℓ. La fonction g admet donc ℓ comme unique point fixe.

b) La suite (u_n) est bornée par construction. La fonction g étant croissante, les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (et bornées). Elles convergent donc chacune vers l'unique point fixe de g.
La suite (u_n) converge donc vers ℓ.

4. a) Lorsque $r = 1/2$, Δ est strictement positif. La fonction h a trois zéros et la fonction g admet trois points fixes α, β, ℓ. Un calcul immédiat donne :

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Posons $E = \{\alpha, \beta, \ell\}$. On remarque que :

$$f(\alpha) = f(g(\alpha)) = g(f(\alpha)),\ f(\beta) = f(g(\beta)) = g(f(\beta)).$$

L'application f étant injective, les points $f(\alpha), f(\beta)$, ℓ sont trois points distincts, invariants par g. Comme f admet un unique point fixe, il vient :

$$f(\alpha) = \beta,\ f(\beta) = \alpha$$

On considère alors les différentes possibilités pour ordonner α, β et ℓ, et en appliquant f, on a nécessairement $\alpha < \ell < \beta$.

c) Le signe de h est immédiat :

$$\mathrm{sgn}(h(x)) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in \,]-\infty, \alpha[\cup]\ell, \beta[\\ -1 & \text{si } x \in \,]\alpha, \ell[\, \cup \,]\beta, +\infty[\end{cases}$$

d) Il faut distinguer plusieurs cas :

$\star$ $0 < u_0 < \alpha$. On a alors $h(u_0) > 0$ et donc $u_2 > u_0$. La fonction g étant croissante, la suite (u_{2n}) est croissante et majorée par α.
Elle converge vers un point fixe de g qui ne peut être que α.
Comme f est décroissante, la suite (u_{2n+1}) est décroissante (car $u_{2n+1} = f(u_{2n})$) et minorée par $\beta = f(\alpha)$. Elle converge donc vers β.

$\star$ $u_0 = \alpha$. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont constantes égales respectivement à α et β.

$\star$ $\alpha < u_0 < \ell$. Le tableau des signes de h et un raisonnement identique à celui du premier cas montrent que la suite (u_{2n}) est décroissante et converge vers α, alors que la suite (u_{2n+1}) est croissante et converge vers β.

$\star$ $u_0 = \ell$. La suite (u_n) est constante égale à ℓ.

$\star$ $\ell < u_0 < \beta$. La suite (u_{2n}) est croissante et converge vers β, alors que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et converge vers α.

$\star$ $u_0 = \beta$. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont constantes égales respectivement à β et α.

$\star$ $u_0 > \beta$. La suite (u_{2n}) est décroissante et converge vers β, alors que la suite (u_{2n+1}) est croissante et converge vers α.

Exercice 1.13.

Soient $a > 0$ et $b \geqslant 0$. Soit la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$u_0 \in \,]0, +\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (au_n + b)^{\frac{1}{2}}.$$

1. On suppose $b = 0$.

a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a\big(\dfrac{u_0}{a}\big)^{2^{-n}}$.

b) Étudier la convergence de la suite (u_n).

c) Déterminer la nature de la série $\sum 2^n(u_n - a)$.

2. On suppose $b > 0$ et on note $a^* = \dfrac{a + (a^2 + 4b)^{\frac{1}{2}}}{2}$.

a) Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers a^*.

b) Montrer que (u_n) converge vers a^*.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - a^*| \leqslant \dfrac{a}{2\min(a^*, u_{n+1})}|u_n - a^*|$.

d) En déduire la nature de la série $\sum 2^n(u_n - a^*)$.

Solution :

1. a) Récurrence facile.

b) On a : $u_n = a\exp\big(\dfrac{1}{2^n}\ln\dfrac{u_0}{a}\big)$; l'exposant tend vers 0 donc l'exponentielle tend vers 1.

c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}\ln\dfrac{u_0}{a} = 0$, on a :

$$2^n(u_n - a) = 2^n a\big(e^{\frac{1}{2^n}\ln\frac{u_0}{a}} - 1\big) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} a\ln\frac{u_0}{a}.$$

Si $u_0 \neq a$ la série diverge grossièrement ; si $u_0 = a$ la série (nulle) converge.

2. a) Comme la fonction $f : x \to \sqrt{ax+b}$ est continue la limite éventuelle ℓ de (u_n) vérifie :

$$\ell = \sqrt{a\ell + b} \iff \begin{cases} \ell \geqslant 0 \\ \ell^2 = a\ell + b \end{cases} \iff \begin{cases} \ell \geqslant 0 \\ \ell = \dfrac{a + (a^2+4b)^{\frac12}}{2} \text{ ou } \dfrac{a - (a^2+4b)^{\frac12}}{2} \\ (\text{car } a^2 + 4b > 0) \end{cases}$$

Soit $\ell = a^*$ $\quad$ (car $\dfrac{a - (a^2+4b)^{\frac12}}{2} < 0$).

b) La fonction f est croissante, sa représentation graphique coupe la droite $y = x$ en a^*, est au-dessus avant a^* et au-dessous après a^*. Par conséquent :

- si $u_0 \leqslant a^*$, alors $u_1 \geqslant u_0$ puis par récurrence évidente, $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n. La suite est croissante et majorée, donc converge.
- si $u_0 \geqslant a^*$, alors $u_1 \leqslant u_0$ puis par récurrence évidente, $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout n. La suite est décroissante et minorée, donc converge.

c) D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|u_{n+1} - a^*| = |f(u_n) - f(a^*)| \leqslant \sup_{[u_n, a^*]} |f'| \times |u_n - a^*|.$$

Or $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$; ainsi f' est décroissante positive ; donc :

$$\sup_{[u_n,a^*]} |f'| = \begin{cases} \dfrac{a}{2\sqrt{au_n + b}} = \dfrac{a}{2u_{n+1}} & \text{si } u_n \leqslant a^* \\ \dfrac{a}{2\sqrt{aa^* + b}} = \dfrac{a}{2a^*} & \text{si } u_n \geqslant a^* \end{cases}$$

Dans tous les cas, on a donc bien : $|u_{n+1} - a^*| \leqslant \dfrac{a}{2\min(a^*, u_{n+1})}|u_n - a^*|$.

d) • Si $u_0 = a^*$, alors $\sum 2^n(u_n - a)^*$ est la série nulle (convergente).

• Si $u_0 > a^*$, alors $u_n > a^*$ pour tout n et par récurrence évidente, on a : $|2^n(u_n - a^*)| \leqslant \big(\frac{a}{2a^*}\big)^n |u_0 - a^*|$.
Comme $0 < \frac{a}{2a^*} < \frac{1}{2}$, par comparaison avec une série géométrique convergente, la série $\sum 2^n(u_n - a)^*$ est absolument convergente, donc convergente.
• Si $u_0 < a^*$, alors $u_n < a^*$ pour tout n et la suite (u_n) converge vers a^*, donc :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{2u_{n+1}} = \dfrac{a}{2a^*} < \dfrac{1}{2}$.
Donc $\dfrac{a}{2u_{n+1}} < \dfrac{3}{4}$ à partir d'un certain rang et on peut raisonner comme dans le cas précédent (comparaison à une série géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$)
Ainsi, dans tous les cas, la série converge.

Exercice 1.14.

Pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{x}{k}}$

On pose également $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

Pour toute suite $(h_n)_{n\geq 1}$ positive, on définit $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+h_n x}$.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = +\infty$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

2. Trouver une suite $(h_n)_{n\geq 1}$ pour laquelle $\forall\, n \geqslant 1, I_n \leqslant J_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3. Déterminer deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ toutes deux équivalentes à $(\ln n)_n$, telles que pour tout $x \in [0,1]$

$$\mathrm{e}^{-xu_n} \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-xv_n}$$

(on pourra utiliser $\ln(f_n(x))$).

4. a) Montrer que I_n est équivalent à $\dfrac{1}{\ln n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   b) Déterminer la nature de la série $\sum I_n$.

Solution :

1. Avec $h_n > 0$, on a : $J_n = \dfrac{1}{h_n}\Big[\ln(1+xh_n)\Big]_0^1 = \dfrac{\ln(1+h_n)}{h_n}$, et par négligeabilité classique : $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = 0$.

2. On a : $A_n = (1+x)(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n}) \geqslant 1 + x\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Or, par comparaison série-intégrale, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant\int_1^{n+1}\frac{dt}{t}=\ln(n+1)$. Ainsi, il suffit de choisir $h_n=\ln(n+1)$. Il vient également $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

3. Comme $f_n(x)>0$ sur $[0,1]$, on a :
$\ln f_n(x)=-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\big(1+\frac{x}{k}\big)\implies\frac{d}{dx}(\ln f_n(x))=-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k}$
En intégrant : $\int_0^x(-\ln f_n(t))dt=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_0^x\frac{dt}{t+k}$
Comme $t\in[0,1]$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k+t}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, donc :

$$x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqslant-\ln f_n(x)\leqslant x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Il suffit de poser $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $v_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$, puis de composer les inégalités par la fonction croissante exponentielle.

4. a) On intègre la dernière inégalité. Il vient : $\int_0^1 \mathrm{e}^{-xu_n}dx\leqslant I_n\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^{-xv_n}dx$,
soit $\frac{1-\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n}\leqslant I_n\leqslant\frac{1-\mathrm{e}^{-v_n}}{v_n}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$, on obtient :

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n}\underset{(\infty)}{\sim}\frac{1}{u_n}\underset{(\infty)}{\sim}\frac{1-\mathrm{e}^{-v_n}}{v_n}$$

et par encadrement d'équivalents : $I_n\underset{(\infty)}{\sim}\frac{1}{u_n}\underset{(\infty)}{\sim}\frac{1}{\ln n}$

b) La série $\sum I_n$ diverge, car $n\geqslant 2\implies\frac{1}{\ln n}\geqslant\frac{1}{n-1}>0$. On conclut par la règle de comparaison des séries à termes positifs.

Exercice 1.15.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2x}}{1+t^2}dt$ converge pour tout $x\geqslant 0$. On pose alors :

$$h(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2x}}{1+t^2}dt$$

Calculer $h(0)$.

2. a) Montrer que pour tout $u\geqslant 0, |\mathrm{e}^{-u}-1+u|\leqslant\frac{u^2}{2}$.

b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que pour tout $x>0$,

$$h'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2} dt$$

(on pourra revenir à la définition de la dérivée de h en x).

On admet que h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. Montrer qu'il existe une constante A telle que pour tout $x \geqslant 0$, $h(x) - h'(x) = \dfrac{A}{\sqrt{x}}$

4. On pose pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = e^{-x} h(x)$.

a) Montrer que : $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - A \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Solution :

1. La fonction $\varphi : t \to \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

dont l'intégrale converge sur $\mathbb{R}^+$. De plus $h(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

2. a) On utilise l'inégalité de Taylor à l'ordre 2, soit :

$$|e^{-u} - 1 + u| \leqslant \frac{u^2}{2} \sup_{u \geq 0}(e^{-u}) = \frac{u^2}{2}$$

b) On remarque que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2} dt$ converge pour tout $x > 0$.

Soit a réel tel que $x \pm a > 0$:

$$h(x+a) - h(x) + a\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2(x+a)} - e^{-t^2(x+a)} a t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2} dt$$

Ainsi :

$$\left|h(x+a) - h(x) + a\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2} dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x}(e^{-t^2 a} - 1 + at^2)}{1+t^2} dt$$
$$\leqslant \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^4 e^{-t^2 x}}{1+t^2} dt = \frac{a^2 C_x}{2}$$

Ceci répond à la question, en prenant la limite lorsque a tend vers 0.

3. Par la question précédente, en posant $u = t\sqrt{x}$, changement de variable linéaire :

$$h(x) - h'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 x} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du$$

4. a) On a $g'(x) = (h'(x) - h(x))\mathrm{e}^{-x} = -\dfrac{A}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}$
et
$g(x) = g(0) + \displaystyle\int_0^x g'(t)dt = h(0) - A\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \frac{\pi}{2} - A\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}dt$

b) Comme $0 \leqslant g(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 x} = \frac{A}{\sqrt{x}}$, il vient $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

c) En réunissant les questions précédentes, il vient

$$\frac{\pi}{2} = A\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}dt = A\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du = A^2$$

Comme $A > 0$, on conclut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 1.16.

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$, on définit la suite $w = (w_n)_{n\geq 0}$ par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.
On note alors $w = u \star v$.

1. Dans cette question, la suite (u_n) est définie par : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et (v_n) est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) tels que $n < m$, l'inégalité : $\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$.

b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Montrer que :

$$w_{2n} \leqslant v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n$$

c) Montrer que la suite (w_n) converge vers une limite à déterminer.

d) Soit b la suite définie par : $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Montrer que la suite $b \star v$ est convergente de limite nulle.

2. Dans cette question, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$
$b = (b_n)$ est la suite de la question 1.d, et $c = (c_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = a_n + \dfrac{a_{n-1}}{2} \quad \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Montrer que la suite (c_n) est convergente . On note ℓ sa limite.

b) Montrer que $a = b \star c$.

c) Soit d la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}, d_n = c_n - \ell$. Montrer que la suite $b \star d$ tend vers 0.

3. Dans cette question, les suites u et v sont définies par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \ln(n+1), \quad v_n = \frac{1}{n+1}$$

Écrire un programme en Pascal qui calcule et rend, pour tout n, le réel w_n.

Solution :

1. a) On a :

$$\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1-1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = u_n$$

b) Il vient :

$$w_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k v_{2n-k} = v_0 u_{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} u_k v_{2n-k}$$

$$w_{2n} = v_0 u_{2n} + \sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_{2n-k}$$

$$w_{2n} \leqslant v_0 u_{2n} + v_n \sum_{k=0}^{n} u_k + v_1 \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k \leqslant v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n$$

c) Les suites (u_n) et (v_n) tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} w_{2n} = 0$.

On montre comme dans la question précédente que

$$w_{2n+1} \leqslant v_0 u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1 u_n,$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n+1} = 0$. Par exhaustion $(w_n)_n$ converge de limite nulle.

d) Écrivons $|(b \star v)_n| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |b_k||v_{n-k}| = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = w_n$, ce qui donne le résultat demandé.

2. a) La suite (c_n) est positive. Comme $a \in A$:

$$c_{n+1} = a_{n+1} + \frac{a_n}{2} \leqslant \frac{a_n + a_{n-1}}{2} + \frac{a_n}{2} = a_n + \frac{a_{n-1}}{2} = c_n$$

La suite (c_n) est décroissante minorée et converge donc vers une limite ℓ.

b) On montre par récurrence que $a_n = (b \star c)_n$.

- c'est vérifié pour $n = 0$.
- supposons cette relation vérifiée pour n. Alors

$$a_{n+1} = c_{n+1} + \frac{a_n}{2} = c_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} c_{n-k} = c_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k}$$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k}$$

ce qui prouve l'hérédité. On conclut par le principe de récurrence.

c) La suite d tend vers 0. Il faut montrer qu'alors $b\star d$ tend vers 0.
Pour tout $\varepsilon>0$, il existe N tel que $n\geqslant N$ entraîne $|d_n|\leqslant\varepsilon$.
On a :

$$\begin{aligned}|(b\star d)_n| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{|d_k|}{2^{n-k}}=\sum_{k=0}^{N}\frac{|d_k|}{2^{n-k}}+\sum_{k=N+1}^{n}\frac{|d_k|}{2^{n-k}}\\ &\leqslant \big(\max_{0\leq k\leq N}|d_k|\big)\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^{n-k}}+\varepsilon\sum_{k=N+1}^{n}\frac{1}{2^{n-k}}\\ &\leqslant \big(\max_{0\leq k\leq N}|d_k|\big)\sum_{k=n-N}^{n}\frac{1}{2^{k}}+2\varepsilon\leqslant\frac{C_N}{2^{n-N+1}}+2\varepsilon\end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Une proposition de fonction :

```
Function escp2013(n : integer) : real ;
Var i,k : integer ;
w : real ;
Begin
For f := 0 to n do
      begin
      w := 0 ;
      for i := 0 to k do w := w+ln(i+1)/(k-i+1)
      end ;
escp2013 := w
end ;
```

Exercice 1.17.

On considère l'ensemble $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; x>0 \text{ et } y>0\}$ et la fonction f définie sur U par :

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

1. Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer le gradient de f en un point quelconque de U.

3. a) Montrer que les coordonnées x et y d'un point critique sont solutions du système d'équations

$$\begin{cases}3(x+y)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\\ x-y=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\end{cases}$$

b) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t)=t-\dfrac{1}{t^2}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'il n'y a qu'un seul point critique M dans l'ouvert U. Déterminer ce point critique.

c) Quelle est la nature de ce point critique ?

4. Déterminer les valeurs propres de la hessienne de f en tout point de U. Écrire l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en M. Que peut-on en déduire ?

5. On veut étudier les extremums de f sur U sous la contrainte $\mathcal{C}$ donnée par $x - y = -1$.

a) Montrer que les coordonnées des points critiques de f sous la contrainte $\mathcal{C}$ vérifient un système d'équations que l'on déterminera.

b) A l'aide de l'étude d'une fonction, prouver qu'il y a un seul point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer). Quelle est sa nature ?

Solution :

1. Si $(a, b) \in U$, il est clair que la boule ouverte $B = B((a, b), \frac{1}{2}\min(a, b))$ est contenue dans U. En effet, si $(x, y) \in B$ on a $|x-a|^2+|y-b|^2 \leqslant \frac{1}{4}\min(a, b)^2$, d'où $|x - a| \leqslant \frac{1}{2}\min(a, b) \leqslant \frac{1}{2}a$ et par conséquent $x \geqslant a - \frac{1}{2}a = \frac{a}{2} > 0$ (de la même manière $y > 0$). L'ensemble U est donc bien ouvert.

2. Si $M = (x, y) \in U$, on a $\nabla f_M = (2x + y - \dfrac{1}{x^2}, 2y + x - \dfrac{1}{y^2})$.

3. a) D'après le cours, un point $M = (x, y) \in U$ est donc critique si et seulement si :

$$\begin{cases} 2x + y - \dfrac{1}{x^2} &= 0 \\ 2y + x - \dfrac{1}{y^2} &= 0 \end{cases}$$

En faisant la somme et la différence de ces deux équations, on obtient le système souhaité.

b) Comme $g'(t) = 1 + \dfrac{2}{t^3}$, on voit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, comme $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$, la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. La deuxième équation du système obtenu en a) peut s'écrire $g(x) = g(y)$ pour x et y dans $\mathbb{R}_+^*$, on a donc nécessairement $x = y$.
En reportant cette égalité dans la première équation, on obtient $x = y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

c) Avec les notations de Monge, on a $rt-s^2 = 4\times(1+3)(1+3)-1 = 63 > 0$, par conséquent f admet un minimum local au point $M = (\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}})$.

4. Si $M = (x, y) \in U$, on voit que la hessienne de f au point M est donnée par

$$\nabla^2 f_M = \begin{pmatrix} 2(1+\frac{1}{x^3}) & 1 \\ 1 & 2(1+\frac{1}{y^3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

avec $a, b > 1$. On voit facilement que les valeurs propres sont
$\lambda_1 = \dfrac{a+b+\sqrt{4+(a-b)^2}}{2} > 0$ et $\lambda_2 = \dfrac{a+b-\sqrt{4+(a-b)^2}}{2} > 0$ puisque $a, b > 1$.
L'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en M nous dit que
$f(M+H) = f(M) + \langle \nabla f_M, H\rangle + \frac{1}{2} q_{M+\theta H}(H) = f(M) + \frac{1}{2} q_{M+\theta H}(H)$ où $\theta \in [0, 1]$.
Comme les valeurs propres de la hessienne sont strictement positives en tout point de U, on a $q_{M+\theta H}(H) > 0$ pour tout $H \neq 0$. Par conséquent, f admet un minimum global en M qui vaut $3^{\frac{4}{3}}$.

5. a) Si $\mathcal{H} = \{(x, y); x - y = 0\}$, un point $A = (x, y) \in U$ est critique sous la contrainte $\mathcal{C}$ si ∇f_A est orthogonal à $\mathcal{H}$. On obtient donc le système

$$\begin{cases} 3(x+y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} \\ y = x + 1 \end{cases}$$

On voit immédiatement que ceci est équivalent à l'équation $h(x) = 0$ où

$$h(t) = 6t + 3 - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}.$$

Or $h'(t) = 6 + \dfrac{2}{t^3} + \dfrac{2}{(1+t)^3} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} h(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$.
La fonction h est donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, il existe un unique point critique $A = (x_0, x_0+1)$ où x_0 est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

b) Comme ∇f_A est orthogonal à $\mathcal{H}$ et que la hessienne a des valeurs propres strictement positives en tout point de U, on sait avec l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en A que le point A est un minimum global de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.