

# ANALYSE

## Exercice 1.01.

Pour tout réel  $x$ , on pose  $\varphi(x) = \int_1^e \frac{\ln t}{1+x^2 t^2} dt$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est ainsi bien définie sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs strictement positives et paire.

2. a) Prouver que pour tout  $(x_0, x) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq |x^2 - x_0^2| \int_1^e t^2 \ln t dt$$

b) En déduire la continuité de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. a) Prouver que  $\varphi$  est dérivable en 0 et calculer  $\varphi'(0)$ .

b) Démontrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

4. Étudier la monotonie de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

5. a) Calculer  $\int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt$ .

b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \varphi(x)$ .

## Solution

1. La fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{1+x^2 t^2}$  est continue et positive sur  $[1, e]$  pour tout  $x$  réel. Ainsi  $\varphi$  est-elle définie sur  $\mathbb{R}$  et positive sur  $\mathbb{R}$  puisque  $1 < e$ . Elle est de manière évidente paire.

2. a) Pour tout  $x_0$  et tout  $x$ , on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \varphi(x_0) &= \int_1^e \ln(t) \left( \frac{1}{x^2 t^2 + 1} - \frac{1}{x_0^2 t^2 + 1} \right) dt \\ \varphi(x) - \varphi(x_0) &= \int_1^e \frac{\ln(t)(x_0^2 - x^2)t^2}{(x^2 t^2 + 1)(x_0^2 t^2 + 1)} dt\end{aligned}$$

Comme  $t \in [1, e]$  et  $(x^2 t^2 + 1)(x_0^2 t^2 + 1) \geq 1$ , on déduit :

$$\begin{aligned}|\varphi(x) - \varphi(x_0)| &= \left| \int_1^e \frac{(x_0^2 - x^2) \ln(t) t^2}{(x^2 t^2 + 1)(x_0^2 t^2 + 1)} dt \right| \leq \int_1^e \frac{|x_0^2 - x^2| \ln(t) t^2}{(x^2 t^2 + 1)(x_0^2 t^2 + 1)} dt \\ &\leq |x^2 - x_0^2| \int_1^e \ln(t) t^2 dt\end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \forall (x_0, x) \in \mathbb{R}^2 : |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq |x^2 - x_0^2| \int_1^e t^2 \cdot \ln t dt \quad (1)$$

b) Par encadrement on déduit que pour tout  $x_0$  :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) - \varphi(x_0) = 0$ , ce qui prouve que  $\varphi$  est continue en tout  $x_0$  de  $\mathbb{R}$  donc sur  $\mathbb{R}$ .

3. a) D'après l'inégalité (1), avec  $x_0 = 0$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq |x^2| \int_1^e t^2 \cdot \ln t dt \implies \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right| \leq |x| \int_1^e t^2 \ln t dt$$

On en déduit par encadrement que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = 0$ , ce qui prouve que  $\varphi$  est dérivable en 0, et que  $\varphi'(0) = 0$ .

b) Pour tout réel  $x$  strictement positif, effectuons le changement de variable affine  $u = tx$  dans l'intégrale définissant  $\varphi(x)$ , on a alors :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_1^e \frac{\ln t}{x^2 t^2 + 1} dt = \int_x^{ex} \frac{\ln(u/x)}{(u^2 + 1)x} du \\ \varphi(x) &= \frac{1}{x} \int_x^{ex} \frac{\ln u}{u^2 + 1} du - \frac{\ln x}{x} \int_x^{ex} \frac{1}{u^2 + 1} du \quad (2)\end{aligned}$$

Sous cette forme  $\varphi$  est clairement dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et étant dérivable en 0 et paire elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

4.  $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [1, e]$  :

$$\begin{aligned}x \leq y &\implies x^2 t^2 + 1 \leq y^2 t^2 + 1 \implies \frac{\ln t}{y^2 t^2 + 1} \leq \frac{\ln t}{x^2 t^2 + 1} \\ &\implies \int_1^e \frac{\ln t}{y^2 t^2 + 1} dt \leq \int_1^e \frac{\ln t}{x^2 t^2 + 1} dt.\end{aligned}$$

D'où  $\varphi(y) \leq \varphi(x)$ . Ce qui montre que  $\varphi$  est une fonction décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

5. Pour tout  $x > 0$ , on a :

$$\left| \varphi(x) - \int_1^e \frac{\ln t}{x^2 t^2} dt \right| = \left| \int_1^e \left( \frac{\ln t}{x^2 t^2 + 1} - \frac{\ln t}{x^2 t^2} \right) dt \right|$$

$$= \left| \int_1^e \frac{\ln t}{(x^2 t^2 (x^2 t^2 + 1))} dt \right| \leq \frac{1}{x^4} \int_1^e \frac{\ln t}{t^4} dt$$

$$\text{D'où : } \left| x^2 \varphi(x) - \int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_1^e \frac{\ln t}{t^4} dt$$

On déduit par encadrement et limite que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \varphi(x) - \int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt = 0$  (3)

La relation (3) entraîne  $\varphi(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{x^2} \int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt$ .

Une intégration par parties donne :  $\int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt = \frac{e-2}{e}$  et on conclut :

$$\varphi(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{e-2}{e} \times \frac{1}{x^2}$$

### Exercice 1.02.

Soit  $r$  un réel positif. On s'intéresse aux suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la relation de récurrence :  $u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n$ .

1. Que dire de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  quand  $r = 0$  ?
2. Dans cette question, on suppose  $r = 1$ .
  - a) Expliciter  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - b) On suppose  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 1$ . Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - c) Existe-t-il des valeurs de  $u_0$  et  $u_1$  telles que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ?
3. Dans cette question, on suppose  $r \geq 1$  et  $u_0 > 0$ ,  $u_1 > 0$ . Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
4. Dans cette question, on suppose  $0 < r < 1$  et  $u_0 > 0$ ,  $u_1 > 0$ . On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :  $v_1 = u_1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_{n+1} = (1 + r^{n-1}) v_n$ .
  - a) Étudier la convergence de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
  - b) Comparer  $u_n$  et  $v_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et en déduire la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
5. Dans cette question, on fait varier  $r$  dans l'intervalle  $[0, 1[$  et on note  $(u_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :
 
$$u_0(r) = 1, u_1(r) = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2}(r) = u_{n+1}(r) + r^n u_n(r).$$
 On note  $L(r)$  la limite de la suite  $(u_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $r \mapsto u_n(r)$  est croissante sur  $[0, 1[$ .
  - b) En déduire que la fonction  $L$  est croissante sur  $[0, 1[$ .

- c) Pour  $r \in [0, 1[$ , justifier la convergence de la série de terme général  $r^k u_k(r)$ , et exprimer sa somme en fonction de  $L(r)$ .
- d) Déterminer la limite de  $L(r)$  quand  $r$  tend vers 1.

### Solution

1. Si  $r = 0$  alors  $(u_n)_{n \geq 1}$  est constante.

2. a) L'équation caractéristique de cette relation de récurrence est  $x^2 - x - 1 = 0$  dont les racines sont  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Donc  $u_n$  est de la forme :

$$u_n = \lambda \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Les conditions initiales donnent :  $\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \mu \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \end{cases}$ , d'où :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{(\sqrt{5} - 1)u_0 + 2u_1}{2\sqrt{5}} \\ \mu = \frac{(\sqrt{5} + 1)u_0 - 2u_1}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

b) Pour  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 1$ , il vient :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Car  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$  et  $|\frac{1 - \sqrt{5}}{2}| < 1$ .

c) La suite  $(u_n)$  converge si et seulement si  $\lambda = 0$ , donc si et seulement si  $(\sqrt{5} - 1)u_0 + 2u_1 = 0$ ; et alors  $(u_n)$  converge vers 0.

3. Par récurrence  $u_n > 0$  et  $u_n \geq (n - 1)u_1$  pour  $n \geq 1$ , donc  $u_n$  tend vers  $+\infty$ .

4. a) Par récurrence,  $v_{n+2} = v_1 \prod_{k=0}^n (1 + r^k)$  pour  $n \geq 2$ .

Comme  $0 < r < 1$ , on a  $r^k \rightarrow 0$ , donc  $\ln(1 + r^k) \sim r^k > 0$ , et la série  $\sum_{k \geq 0} \ln(1 + r^k)$  converge de somme notée  $L$ . Alors :

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v_1 e^L = V$$

b)  $u_n > 0$  est clair, donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. Puis :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n \leq (1 + r^n)u_{n+1} \leq u_1 \prod_{k=0}^n (1 + r^k) = v_{n+2} \leq V$$

car  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée croissante, donc convergente.

5. a) Par récurrence on montre que la fonction  $u_n$  est positive croissante : c'est clair pour  $u_0$  et  $u_1$  et si on suppose le résultat acquis aux rangs  $n$  et  $n+1$ , on en déduit que  $u_{n+2}$  est positive croissante comme somme et produit de fonctions positives croissantes.

b) Ainsi la fonction  $L$  est croissante par passage à la limite.

c) On utilise une somme « télescopique » :

$$u_{n+2}(r) - u_1(r) = \sum_{k=0}^n (u_{k+2}(r) - u_{k+1}(r)) = \sum_{k=0}^n r^k u_k(r), \text{ d'où :}$$

$$L(r) - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} r^k u_k(r)$$

(la série écrite est bien convergente puisque  $(u_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc est bornée.)

d) On a  $\forall n, u_n(r) \geq 1$  par croissance de  $(u_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$  ; donc

$$L(r) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} r^k u_k(r) \geq 1 + \sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + \frac{1}{1-r} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} +\infty$$

### Exercice 1.03.

On note  $E$  l'ensemble des suites réelles  $(u_n)_{n \geq 1}$  telles que la série de terme général  $n^2 u_n^2$  converge et on note  $F$  le sous-ensemble de  $E$  formé des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  pour lesquelles on a  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 \leq 1$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_n = \frac{1}{n^2}$  appartient à  $E$ . Appartient-elle à  $F$  ?

2. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n(n+1)}}$  appartient à  $E$  et à  $F$ .

3. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $1/2$ .

a) Rappeler les valeurs de  $E(X)$  et  $V(X)$ .

b) Soit  $v = (v_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par  $v_n = \frac{1}{2^{n/2}}$ . Étudier l'appartenance de  $v$  à  $E$  et à  $F$ .

c) Construire, à partir de la suite  $v$  précédente, une suite  $w$  appartenant à  $F$ .

4. a) Montrer que, si  $u$  et  $v$  sont deux suites de  $E$ , alors la série de terme général  $n^2 u_n v_n$  est absolument convergente.

b) En déduire que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

5.  $F$  est-il un sous-espace vectoriel de  $E$  ?

6. Montrer que  $F$  est convexe, c'est-à-dire que si  $u, v \in F$  et  $\lambda \in [0, 1]$ , alors  $\lambda u + (1 - \lambda)v \in F$ .

### Solution

1. On a  $n^2 u_n^2 = \frac{1}{n^2}$ , ce qui prouve que  $(u_n)$  appartient à  $E$ . En revanche, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \dots > 1.$$

2. On a  $n^2 u_n^2 = \frac{1}{n(n+1)}$  et, pour tout entier naturel  $N$  supérieur ou égal à 1, on a aussi :

$$\sum_{n=1}^N n^2 u_n^2 = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$

Ceci prouve que la suite  $(u_n)$  appartient à  $E$  et à  $F$ .

3. a) D'après le cours, on a  $E(X) = V(X) = 2$ .

b) On a  $n^2 v_n^2 = \frac{n^2}{2^n}$ , ce qui permet de constater que la série de terme général  $n^2 v_n^2$  converge (c'est le moment d'ordre 2 de la variable  $X$ ) et sa somme vaut  $E(X^2) = 6$ . La suite  $v$  appartient à  $E$  et pas à  $F$ .

c) En posant  $w = \frac{v}{\sqrt{6}}$ , la suite  $w$  appartient à  $F$ .

4. a) Par identité remarquable, on a :  $|u_n v_n| \leq \frac{u_n^2 + v_n^2}{2}$  et on en déduit aisément que la série de terme général  $n^2 |u_n v_n|$  est convergente.

b)  $\star E$  est une partie non vide de l'espace des suites réelles.

$\star$  Soit  $u$  et  $v$  deux suites de  $E$  et  $\lambda$  réel. On a :

$$n^2 (u_n + \lambda v_n)^2 = n^2 u_n^2 + \lambda^2 n^2 v_n^2 + 2\lambda n^2 u_n v_n$$

On termine avec la question précédente.

Conclusion :  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

5. En reprenant la suite  $w$  de la question 3. c) qui est dans  $F$ , la suite  $2w$  n'appartient pas à  $F$ , donc  $F$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$ .

6. Soit  $\lambda \in [0, 1]$  et  $u$  et  $v$  deux suites de  $F$ . Il faut montrer que  $\lambda u + (1 - \lambda)v \in F$ .

Après avoir remarqué la convergence des séries en jeu, il vient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\lambda u + (1 - \lambda)v)^2 = \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 + (1 - \lambda)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 v_n^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n v_n$$

et :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\lambda u + (1 - \lambda)v)^2 \leq \lambda^2 + (1 - \lambda)^2 + 2\lambda(1 - \lambda) = 1$$

D'où la conclusion.

---

**Exercice 1.04.**

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle. On définit la suite  $(s_n)_{n \geq 0}$  en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

1. On suppose dans cette question que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et tend vers  $\ell \in \mathbb{R}$ .

a) Si  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $\lfloor x \rfloor$  la partie entière de  $x$ . Vérifier que la suite  $\left(\frac{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n+1}\right)_{n \geq 0}$  converge vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

b) Montrer que

$$\ell \leq s_n \leq \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1}{n+1} u_0 + \frac{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n+1} u_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}.$$

c) Montrer que la suite  $(s_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell$ .

d) Réciproquement, on suppose que la suite  $(s_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ . Montrer alors que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge aussi vers  $\ell$  (on pourra raisonner par l'absurde).

2. Dans cette question, on suppose que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0.

a) Vérifier que  $v_n = \sup \{|u_k|; k \geq n\}$  est bien défini.

b) Montrer que la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est décroissante de limite nulle.

c) En déduire que la suite  $(s_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0.

3. On suppose maintenant que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ . Montrer que la suite des moyennes  $(s_n)_{n \geq 0}$  converge aussi vers  $\ell$ . Donner un exemple simple prouvant que la réciproque est fautive.

4. On considère la suite  $(w_n)_{n \geq 0}$  définie par récurrence en posant :

$$w_0 = 1 \text{ et } w_{n+1} = w_n + e^{-w_n}.$$

a) Étudier la suite  $(w_n)_{n \geq 0}$ .

b) Prouver que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{w_{n+1}} - e^{w_n}) = 1$ .

c) En déduire un équivalent de  $w_n$ , lorsque  $n$  tend vers l'infini.

---

**Solution**

1. a) Comme  $\sqrt{n} \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor < \sqrt{n} + 1$ , il vient

$$\frac{n - \sqrt{n} - 1}{n+1} < \frac{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n+1} \leq \frac{n - \sqrt{n}}{n+1}$$

Les membres de gauche et de droite de cette inégalité tendant vers 1, on aboutit donc bien au résultat demandé.

b) En utilisant la décroissance vers  $\ell$  de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \ell \leq s_n &= \frac{u_0 + \dots + u_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n+1} + \frac{u_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1} + \dots + u_n}{n+1} \\ &\leq \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1}{n+1} u_0 + \frac{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n+1} u_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}. \end{aligned}$$

c) En revenant à la définition, on vérifie facilement que la suite  $(u_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor})_{n \geq 0}$  converge aussi vers  $\ell$ .

Il suffit alors de passer à la limite dans l'inégalité précédente en utilisant la question 1. a) pour voir que la suite  $(s_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell$ .

d) Réciproquement supposons que la suite  $(s_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ . Si la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  ne converge pas vers une limite finie, alors elle tend vers  $-\infty$  (puisque'elle est décroissante). Il en est de même de la suite  $(u_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor})_{n \geq 0}$ . L'inégalité de droite qui a été établie en 1. b) reste valable et le membre de droite tend vers  $-\infty$ . On en déduit alors que la suite  $(s_n)_{n \geq 0}$  tend nécessairement vers  $-\infty$  et on aboutit à une contradiction.

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge donc vers une limite finie  $\ell'$  et en appliquant 1. c) on trouve que  $\ell' = \ell$ .

2. a) Comme la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge, elle est bornée et par suite l'ensemble  $\{|u_k|; k \geq n\}$  est non vide et majoré. D'après le cours, il admet donc une borne supérieure et  $v_n$  est bien défini.

b) Comme  $\{|u_k|; k \geq n+1\} \subseteq \{|u_k|; k \geq n\}$ , on a bien  $v_{n+1} \leq v_n$ .

Si  $I = ]-a, a[$  est un intervalle ouvert contenant 0, il n'y a qu'un nombre fini de  $u_n$  qui ne sont pas contenus dans l'intervalle  $] -a/2, a/2[$ , car la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0, et par suite il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  en dehors de  $I$ . Avec la définition donnée en cours, on constate donc que  $v_n$  converge vers 0.

c) Par construction, on a de manière évidente  $|u_n| \leq v_n$ . Il suffit alors d'utiliser les inégalités :

$$|s_n| \leq \frac{|u_0| + \dots + |u_n|}{n+1} \leq \frac{v_0 + \dots + v_n}{n+1}$$

et les questions 2. b) et 1. c).

3. Il suffit d'appliquer 2. c) à la suite  $(u_n - \ell)_{n \geq 0}$ .

4. a) Comme  $w_{n+1} - w_n = e^{-w_n} > 0$ , on voit que la suite  $(w_n)_{n \geq 0}$  est croissante.

Si elle convergeait vers une limite finie  $\ell$ , on aurait  $\ell = \ell + e^\ell$ , ce qui est absurde, elle tend donc vers  $+\infty$ .

b) On a  $e^{w_{n+1}} - e^{w_n} = e^{w_n} e^{e^{-w_n}} - e^{w_n} = \frac{e^{e^{-w_n}} - 1}{e^{-w_n}}$ .



D'où :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{w_{n+1}} - e^{w_n}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

c) On utilise la question 3. en posant  $u_n = e^{w_{n+1}} - e^{w_n}$  et on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{w_n}}{n} = 1$$

Par suite,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n - \ln n) = 0$  et par conséquent  $w_n \underset{(\infty)}{\sim} \ln n$ .

### Exercice 1.05.

On considère une fonction  $f$  continue, décroissante et strictement positive sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ . On pose pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$u_n = \int_1^n f(t) dt \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^n f(k).$$

1. Montrer que la suite  $(w_n)_{n \geq 1}$ , définie par  $w_n = v_n - u_n$ , est décroissante et à termes positifs.

2. On suppose que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  est divergente. Justifier l'inégalité  $u_n > 0$  pour tout entier  $n \geq 2$ .

Déterminer la limite de la suite  $(\frac{v_n}{u_n})_{n \geq 2}$ .

3. Dans cette question, on suppose que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge.

a) Que peut-on dire de la série de terme général  $f(k)$  ?

b) Donner, à l'aide d'une intégrale, un équivalent du reste  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$

lorsque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t) dt} = 0.$$

4. Applications :

a) Donner un équivalent de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

b) Donner un équivalent de  $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

### Solution

1. Comme  $f$  est décroissante, on a pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k).$$

Soit  $n \geq 2$ , en sommant de 1 à  $n-1$ , on obtient :

$$v_n - f(1) \leq u_n = \int_1^n f(t) dt \leq v_n - f(n) \leq v_n$$

On a donc  $w_n \geq 0$ .

On en déduit également que :

$$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - v_n - (u_{n+1} - u_n) = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t) dt \leq 0$$

La suite  $(w_n)_{n \geq 1}$  est donc bien décroissante.

2. Soit  $n \geq 2$ , la continuité et la stricte positivité de  $f$  assurent que  $u_n > 0$ . Avec les inégalités trouvées en 1, on voit que

$1 \leq \frac{v_n}{u_n} \leq 1 + \frac{f(1)}{u_n}$ . Comme l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  est divergente, la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  et par suite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$$

3. a) La série de terme général  $f(k)$  est de même nature que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ , elle est donc convergente.

b) Le reste  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$  est bien défini puisque la série converge.

Comme  $f$  est positive et  $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$  pour  $x \in [k, k+1]$ , on en déduit que :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$$

Or  $\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$ , il s'ensuit que

$$\int_n^{+\infty} f(t) dt - f(n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$$

Il résulte alors de l'hypothèse que  $R_n \underset{(\infty)}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t) dt$ .

4. Comme l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  est divergente, en utilisant 2. on voit que dans ce cas

$$u_n \underset{(\infty)}{\sim} \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$$

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$  converge, on sait d'après 3. b) que le reste  $R_n$  est équivalent à

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan(n) = \arctan \frac{1}{n} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{n}$$

**Exercice 1.06.**

1. Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n$  une série à termes strictement positifs telle que la suite  $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_n$  converge vers un réel  $\ell$  tel que  $\ell < 1$ .  
Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  converge.

On considère la suite  $(f_n)$  définie par :  $f_0 = 1, f_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ .

2. Montrer que la suite  $(f_n)$  est à valeurs strictement positives.

3. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ .

a) Expliciter une fonction rationnelle  $\varphi$  telle que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ .

b) Déterminer le sens de variation de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

4. a) Montrer que  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones et convergentes. Déterminer leurs limites respectives.

b) En déduire que  $(u_n)$  converge vers  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

5. Pour tout réel  $x$ , pour lequel la série de terme général  $f_n x^n$  converge, on pose  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ . On pose  $R = \frac{1}{\Phi}$ .

a) Montrer que pour tout  $x$  de  $] -R, R[$ , la série définissant  $A(x)$  est absolument convergente.

b) On pose, pour tout  $x$  de  $] -R, R[$  :

$$A_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2}, A_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^{n+2}, A_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} x^{n+2}.$$

Exprimer  $A_0(x), A_1(x)$  et  $A_2(x)$  en fonction de  $A(x)$  pour tout  $x$  de  $] -R, R[$ .

c) En déduire  $A(x)$  en fonction de  $x$  pour tout  $x$  de  $] -R, R[$ .

**Solution**

1. Soit  $\delta > 0$  tel que  $\ell + \delta < 1$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ , il existe  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell + \delta = \alpha$ .

Soit  $n > n_0$ . On écrit :

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \cdots \times \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \times a_{n_0} \leq C \alpha^{n-n_0}$$

La série de terme général  $\alpha^k$  est géométrique de raison  $0 < \alpha < 1$  et donc convergente. On termine grâce au théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

2. La suite  $(f_n)_n$  est manifestement positive pour  $n \geq 1$  car croissante par récurrence.

3. a) On a  $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ . La fonction  $\varphi$  est définie par  $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x}$  décroissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$  car de dérivée négative.

b) La fonction  $\varphi$  est décroissante et  $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$  est croissante. Ainsi, par récurrence immédiate  $u_2 > u_4$  entraîne que la suite  $(u_{2n})$  est décroissante et  $u_3 < u_5$  entraîne que la suite  $(u_{2n+1})$  est croissante.

4. a) On montre ensuite par récurrence et par croissance de  $\varphi^2$ , que pour tout  $n$  :

$$0 < u_{2n-1} < u_{2n+1} < u_{2n+2} < u_{2n}$$

b) Ainsi la suite  $(u_{2n})$  est décroissante et minorée par  $u_1$ , alors que la suite  $(u_{2n+1})$  est croissante et majorée par  $u_2$ . Ces deux suites convergent vers un point fixe sur  $\mathbb{R}_+^*$  de  $\varphi^2$ , soit  $\varphi^2(x) = x$  ou  $x^2 + x - 1 = 0$  qui n'a que  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  comme racine positive.

Les deux sous-suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  étant convergentes vers la même limite, par exhaustion la suite  $(u_n)$  converge également vers cette limite  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

5. a) Soit  $x \neq 0$  :  $\left| \frac{f_{n+1}x^{n+1}}{f_n x^n} \right| = \frac{f_{n+1}}{f_n} |x| = u_n |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi |x|$ .

Par le préliminaire, la série  $\sum f_n x^n$  converge absolument pour tout  $x \in ]-R, R[$ .

b) Pour tout  $x \in ]-R, R[$ , les séries définissant  $A_0, A_1$  et  $A_2$  sont absolument convergentes. On a  $A_0(x) = x^2 A(x)$ ,  $A_1(x) = x A(x) - x$  et  $A_2(x) = A(x) - 1 - x$ .

c) Soit  $|x| < R$ . On a :

$$A_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + f_{n+1})x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^{n+2}. \text{ Ainsi :}$$

$$A(x) - 1 - x = A_0(x) + A_1(x) \text{ et } A(x) = -\frac{1}{x^2 + x - 1}$$

### Exercice 1.07.

On note  $E$  l'ensemble des applications  $u$  continues sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telles que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x) e^{-x^2} dx$  converge.

1. a) Montrer que pour  $a$  et  $b$  réels, on a  $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ .

b) Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que l'application  $\langle , \rangle$  définie sur  $E \times E$  par :

$$(u, v) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2} dx$$

est un produit scalaire sur  $E$ .

On notera  $\|\cdot\|$  la norme associée à ce produit scalaire.

On pose, pour tout réel  $a$  et tout réel  $x$ ,  $\varphi_a(x) = e^{ax}$ .

2. Montrer que  $\varphi_a \in E$  et calculer  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a^2(x)e^{-x^2} dx$ .

3. Montrer que  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}, \langle \varphi_a, \varphi_b \rangle = e^{\frac{(a+b)^2}{4}}$ .

4. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel  $\alpha$ , la nature de la série de terme général  $v_n = \|\varphi_{\sqrt{\ln(n)}}\|^\alpha$ , pour  $n \geq 1$ .

5. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel  $\beta$ , la nature de la série de terme général  $w_n = \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^\beta$ , pour  $n \geq 1$  et calculer sa somme  $S_\beta$  lorsqu'elle existe.

6. Dans le cas de la convergence de la série de la question précédente, on considère une variable aléatoire  $X_\beta$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  dont la loi est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_\beta = n) = \frac{w_n}{S_\beta}$$

a) Montrer que l'on définit ainsi une loi de probabilité.

b) Calculer l'espérance  $E_\beta$  et la variance  $V_\beta$  de  $X_\beta$ .

c) Déterminer les limites respectives de  $E_\beta$  et  $V_\beta$  lorsque  $\beta$  tend vers  $-\infty$ .

### Solution

1. L'application  $\varphi_a$  est continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  comme composée de telles fonctions, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi_a(x))^2 e^{-x^2} = e^{2ax-x^2} = e^{a^2} e^{-(x-a)^2}$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\pi}$$

Donc  $\varphi_a$  est bien un élément de  $E$ , et  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a^2(x)e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}e^{a^2}$ .

2. On écrit  $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_a(x)\varphi_b(x) = e^{(a+b)(x)} = \left(e^{\frac{a+b}{2}x}\right)^2$ , d'où :

$$\langle \varphi_a, \varphi_b \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a+b}(x) e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_{\frac{a+b}{2}}(x))^2 e^{-x^2} dx = e^{(\frac{a+b}{2})^2}$$

d'après le résultat de la question précédente.

$$3. v_n = \langle \varphi_{\sqrt{\ln n}}, \varphi_{\sqrt{\ln n}} \rangle^{\frac{\alpha}{2}} = (e^{(\frac{a+b}{2})^2})^{\frac{\alpha}{2}}, \text{ pour } a = b = \sqrt{\ln n}, \text{ d'où :}$$

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{\ln n}$$

Soit finalement  $v_n = n^{\frac{\alpha}{2}}$ . La série de terme général  $v_n$  est une série de Riemann et converge si et seulement si  $\frac{\alpha}{2} < -1$  soit  $\alpha < -2$ .

$$4. \text{ De même, } w_n = \langle \varphi_{\sqrt{n}}, \varphi_{\sqrt{n}} \rangle^{\frac{\beta}{2}} = (e^{(\frac{a+b}{2})^2})^{\frac{\beta}{2}}.$$

pour  $a = b = \sqrt{n}$ , d'où  $\frac{a+b}{2} = \sqrt{n}$ . Soit finalement  $w_n = (e^n)^{\frac{\beta}{2}} = (e^{\frac{\beta}{2}})^n$ .

$(w_n)$  est une suite géométrique de raison  $e^{\frac{\beta}{2}}$  positive, donc la série de terme général  $w_n$  converge si et seulement si  $e^{\frac{\beta}{2}} < 1$ , *i.e.*  $\beta < 0$ .

Sa somme est alors  $S_\beta = \frac{e^{\frac{\beta}{2}}}{1 - e^{\frac{\beta}{2}}}$ .

5. Dans cette question, on suppose que la série de terme général  $w_n$  converge, donc on suppose  $\beta < 0$ .

$$a) \text{ Pour } n \geq 1, P(X = n) = \frac{e^{\frac{n\beta}{2}}}{e^{\frac{\beta}{2}}} (1 - e^{\frac{\beta}{2}}) = (e^{\frac{\beta}{2}})^{n-1} (1 - e^{\frac{\beta}{2}}).$$

b) On reconnaît une loi géométrique de paramètre  $p = e^{\frac{\beta}{2}} \in ]0, 1[$  et donc :

$$E_\beta = \frac{1}{p} = e^{-\frac{\beta}{2}}, V_\beta = \frac{1-p}{p^2} = (1 - e^{\frac{\beta}{2}}) e^{-\beta}$$

c) L'espérance  $E_\beta$  et la variance  $V_\beta$  tendent tous les deux vers  $+\infty$  lorsque  $\beta$  tend vers  $-\infty$ .

### Exercice 1.08.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux fonctions  $f$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{A}$  suivant :

$\mathcal{A}$  est l'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifient les conditions suivantes :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).f(y)$  (1)
- $f$  n'est pas la fonction nulle.
- $f$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$ .

1. a) Montrer que  $\mathcal{A}$  n'est pas vide et que toute fonction  $f$  de  $\mathcal{A}$  vérifie  $f(0) = 1$  et est paire.

2. On note  $B = \{x \geq 0, f(x) = 0\}$ .

a) Montrer que  $B$  admet une borne inférieure notée  $a$  vérifiant  $f(a) = 0$  et  $a > 0$ .

b) En déduire que :  $\forall x \in [0, a[, f(x) > 0$ .

3. Dans cette question, on pose pour  $r \in \mathbb{R}^+$ ,  $\lambda(r) = \int_0^r f(u) du$ .

a) Montrer successivement que :

i) il existe un réel  $r > 0$  tel que  $\lambda(r) > 0$

ii)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2\lambda(r)} \left[ \int_x^{x+r} f(u) du + \int_{x-r}^x f(v) dv \right]$ .

b) En déduire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Prouver l'existence d'une constante réelle  $c$  telle que :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f''(x) = cf(x)$ .

### Solution

1.  $\star$  L'ensemble  $\mathcal{A}$  n'est pas vide puisque la fonction  $\cos$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

$\star$  Pour  $x = y = 0$  on obtient  $f(0) \in \{0, 1\}$ . L'hypothèse  $f(0) = 0$  entraîne pour  $y = 0$  dans (1) :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $2f(x) = 2f(x).f(0) = 0$  soit  $f$  identiquement nulle, ce qui est exclu. Donc nécessairement  $f(0) = 1$ .

$\star$  Pour  $x = 0$  on obtient :  $\forall y \in \mathbb{R}$ ,  $f(y) + f(-y) = 2f(y)$  donc  $f$  est paire.

2. a) La fonction  $f$  s'annule sur  $\mathbb{R}^*$  et  $f$  est paire donc  $B$  est non vide. Ainsi  $B$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$  minorée par 0, elle admet donc une borne inférieure  $a \geq 0$ . Comme  $f(0) = 1$  on n'a pas  $a = 0$  et  $a > 0$ .

Par définition de la borne inférieure :  $\forall n > 0, \exists u_n \in B, a < u_n < a + \frac{1}{n}$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$  et  $f$  étant continue :  $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = 0$ .

b) Par l'absurde : s'il existe  $b$  dans  $]0; a[$  avec  $f(b) \leq 0$ , alors le théorème des valeurs intermédiaires ( $f$  est continue) nous dit qu'il existe  $c$  dans  $]0, a[$  avec  $f(c) = 0$ . Alors  $c$  serait un élément de  $B$  tel que  $c < a$ , en contradiction avec la définition de la borne inférieure.

3. a) Comme  $f$  est continue, et que  $f(0) = 1$ , il existe  $r > 0$  tel que, pour  $x \in [0, r]$ ,  $f(x) > \frac{1}{2}$ . Alors :

$$\int_0^r f(u) du > \frac{r}{2} > 0 \implies \lambda(r) > 0$$

Les fonctions étant continues sur  $\mathbb{R}$ , on peut intégrer (1) entre 0 et  $r$ , par rapport à la variable  $y$  :

$$2f(x) \int_0^r f(y) dy = \int_0^r f(x+y) dy + \int_0^r f(x-y) dy$$

avec les changements de variable :  $u = x + y$  et  $v = x - y$ , on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\lambda(r)} \left[ \int_x^{x+r} f(u) du + \int_{x-r}^x f(v) dv \right] \quad (2)$$

b) Les fonctions  $x \mapsto \int_x^{x+r} f(u) du$  et  $x \mapsto \int_{x-r}^x f(v) dv$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , il en est de même pour  $f$ .

Si on suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , la formule (2) montre alors que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , donc par récurrence :  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) On dérive (2) :  $f'(x) = \frac{1}{2\lambda(r)} (f(x+r) - f(x-r))$ .

On dérive à nouveau :  $f''(x) = \frac{1}{2\lambda(r)} (f'(x+r) + f'(x-r))$ , et on remplace :

$$\begin{cases} f'(x+r) = \frac{1}{2\lambda(r)} (f(x+2r) - f(x)) \\ f'(x-r) = \frac{1}{2\lambda(r)} (f(x) - f(x-2r)) \end{cases}$$

Donc :

$$f''(x) = \frac{1}{4\lambda^2(r)} [f(x+2r) + f(x-2r) - 2f(x)] = \frac{1}{4\lambda^2(r)} [2f(x)f(2r) - 2f(x)]$$

ce qui entraîne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{2f(2r) - 2}{\lambda^2(r)} f(x) = c.f(x)$$

### Exercice 1.09.

1. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$  converge pour tout  $x \in [-1, 1]$ . On note alors :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

2. a) Montrer que pour tout  $x \leq 1$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - x} du$  est convergente.

On note alors  $K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - x} du$ .

b) Montrer que pour  $|x| < 1$  et  $u \geq 0$ , on a :  $\frac{1}{e^u - x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k e^{-(k+1)u}$ .

c) En déduire que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a  $xK(x) = f(x)$ .

3. a) Montrer que la fonction  $K$  est continue en 0.

b) La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 ?



**Solution**

1. Pour  $|x| \leq 1$ , on a  $\frac{|x^n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ , ce qui donne la convergence de la série proposée.

2. a) Pour  $x \leq 1$ ,  $\varphi : u \rightarrow \frac{u}{e^u - x}$  est continue et positive sur  $]0, +\infty[$ .

• pour  $x < 1$ ,  $\lim_0 \varphi = 0$ .

• pour  $x = 1$ ,  $\lim_0 \varphi = 1$ . Ainsi  $\varphi$  admet un prolongement par continuité en 0.

• au voisinage de  $+\infty$ ,  $\varphi(u) \sim ue^{-u}$  et  $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 \varphi(u) = 0$ , ce qui montre l'existence de l'intégrale proposée.

b) On écrit, pour  $u > 0$  :  $\frac{1}{e^u - x} = \frac{e^{-u}}{1 - xe^{-u}} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k e^{-(k+1)u}$ .

car  $|xe^{-u}| < 1$  pour tout  $u > 0$ .

c) En écrivant plutôt une somme partielle :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{e^u - x} = \frac{e^{-u}}{1 - xe^{-u}} = \sum_{k=0}^{N-1} x^k e^{-(k+1)u} + \frac{x^N e^{-(N+1)u}}{1 - xe^{-u}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - x} du \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{N-1} x^k u e^{-(k+1)u} \right) du + \int_0^{+\infty} \frac{x^N u e^{-(N+1)u}}{1 - xe^{-u}} du \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x^k \int_0^{+\infty} u e^{-(k+1)u} du + \int_0^{+\infty} R_N(u) du \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^k}{(k+1)^2} + \int_0^{+\infty} R_N(u) du, \text{ avec } R_N(u) = \frac{x^N u e^{-(N+1)u}}{1 - xe^{-u}} \end{aligned}$$

$$\text{Or : } |R_N(u)| = |x|^N e^{-Nu} \left| \frac{u}{e^u - x} \right| \leq e^{-Nu} \left| \frac{u}{e^u - x} \right|$$

et comme la fonction  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , de limite nulle en  $+\infty$  elle est bornée et il existe  $C$  tel que :

$$\left| \int_0^{+\infty} R_N(u) du \right| \leq \int_0^{+\infty} |R_N(u)| du \leq C \int_0^{+\infty} e^{-Nu} du = \frac{C}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

En passant à la limite lorsque  $N$  tend vers l'infini, il vient :

$$xK(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)^2} = f(x)$$

3. a) Pour  $x \neq 0$ ,  $K(x) = \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}$ .

Si  $|x| \leq 1$ , alors  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2} \right| \leq |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

Ce qui montre que  $\lim_{x \rightarrow 0} K(x) = 1$ . Comme un calcul banal donne  $K(0) = 1$ , la fonction  $K$  est bien continue en 0.

b) Ainsi :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$  et  $f$  est dérivable en 0 avec  $f'(0) = 1$ .

### Exercice 1.10.

Soit  $a$  un réel strictement supérieur à 1.

1. Pour tout réel  $x \geq 0$ , établir la convergence de l'intégrale :  $\int_x^{+\infty} t^a e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

On note  $f_a(x)$  sa valeur, et on pose  $\varphi(a) = f_a(0)$  et  $g_a(x) = \int_0^x t^a e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

2. a) Démontrer que  $\varphi(a+2) = (a+1)\varphi(a)$ .

b) Pour tout nombre entier naturel  $n$ , exprimer  $\varphi(a+2n)$  en fonction de  $\varphi(a)$ . Calculer  $\varphi(0)$  et  $\varphi(1)$ . En déduire la valeur de  $\varphi(n)$  pour tout nombre entier naturel  $n$ .

3. Pour tout nombre entier naturel  $n$  et pour tout réel  $t \geq 0$ , on pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k+a}}{2^k k!}$$

a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction  $u \mapsto e^{-u}$  sur l'intervalle  $[0, \frac{t^2}{2}]$  à l'ordre  $n \in \mathbb{N}$ .

En déduire le signe de  $t^a e^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t)$  selon les valeurs de  $n$ .

En déduire que, pour tout réel  $t > 0$  et tout couple  $(p, q)$  de nombres entiers naturels :

$$S_{2p+1}(t) \leq t^a e^{-\frac{t^2}{2}} \leq S_{2q}(t).$$

b) Montrer alors que, pour tout nombre entier naturel non nul  $n$  :

$$\left| t^a e^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t) \right| \leq \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}.$$

c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x > 0$  :

$$\left| g_a(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k! (2k+a+1)} \right| \leq \frac{x^{2n+a+1}}{2^n n! (2n+a+1)}.$$

Justifier l'écriture :  $g_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k! (2k+a+1)}$ .

### Solution

1. La fonction à intégrer est continue sur  $[0, +\infty[$ .

De plus pour tout  $a > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{a+2} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$ , ce qui assure la convergence des intégrales considérées.

2. a) On a  $\varphi(a+2) = \left[ -t^{a+1} e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^{+\infty} + (a+1) \int_0^{+\infty} t^a e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ . D'où :

$$\varphi(a+2) = (a+1)\varphi(a)$$

b) On en déduit que  $\varphi(a+2n) = \left[ \prod_{i=1}^n (a+2i-1) \right] \varphi(a)$ .

De plus  $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  et  $\varphi(1) = \left[ -e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^{+\infty} = 1$ .

D'où :

$$\varphi(2n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{i=1}^n (2i-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\varphi(2n+1) = \prod_{i=1}^n (2i) = 2^n n!$$

3. a) Pour tout nombre entier  $n$  et pour tout réel  $t \geq 0$ , on pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k+a}}{2^k k!}$$

On a, par Taylor :

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k}}{2^k k!} + \int_0^{\frac{t^2}{2}} \frac{(t^2/2 - u)^n}{n!} (-1)^{n+1} e^{-u} du$$

Le signe de  $t^a e^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t)$  est positif si  $n$  est impair et négatif si  $n$  est pair, d'où l'on déduit que, pour tout réel  $t > 0$  et tout couple  $(p, q)$  de nombres entiers naturels :

$$S_{2p+1}(t) \leq t^a e^{-\frac{t^2}{2}} \leq S_{2q}(t)$$

b) On a, pour tout nombre entier naturel non nul  $n$  :

$$\left| t^a e^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t) \right| = t^a \left| \int_0^{\frac{t^2}{2}} \frac{(t^2/2 - u)^n}{n!} (-1)^{n+1} e^{-u} du \right|$$

Donc :

$$\left| t^a e^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t) \right| \leq \frac{t^{2n+a}}{2^n n!} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}$$

c) En intégrant entre 0 et  $x$ , on obtient que pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x > 0$  :

$$\left| g_a(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k! (2k+a+1)} \right| \leq \frac{x^{2n+a+1}}{2^n n! (2n+a+1)}$$

Le terme de droite a pour limite 0 quand  $n$  tend vers l'infini et ce pour toute valeur de  $x > 0$ , on en déduit que :

$$g_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k! (2k+a+1)}$$

**Exercice 1.11.**

Pour tout réel  $x$ , on pose  $\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

1. a) Étudier les variations de la fonction  $\varphi$ .

b) En déduire que  $\varphi$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle à préciser.

Pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on note  $u_n(t) = \varphi(t+n) - \varphi(n)$ .

Pour tout réel  $t$ , on note  $s_n(t) = \sum_{k=0}^n u_k(t)$ .

2. a) Montrer que  $u_n(t) \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} 2e^{-t-2n}(e^t - e^{-t})$ , en déduire que la suite

$(s_n(t))_n$  converge. On note sa limite  $s(t)$ .

b) Montrer que la fonction  $s$  ainsi définie est croissante.

3. a) Montrer que la série de terme général  $(1 - \varphi(n))$  converge.

b) Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \varphi(n))$ .

c) Montrer que pour tout réel  $t$ , on a  $s(t+1) = s(t) + 1 - \varphi(t)$ .

**Solution**

1. a) La fonction  $\varphi$  est bien définie et impaire. De plus, pour tout réel  $x$ , la fonction  $\varphi$  est dérivable en  $x$  et après calculs :

$$\varphi'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \geq 0$$

b) D'après la question précédente, la fonction  $\varphi$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(-x) = 1$ .

Ainsi,  $\varphi$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1[$ .

2. a) Soit  $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \varphi(t+n) - \varphi(n) = \frac{e^{t+n} - e^{-t-n}}{e^{t+n} + e^{-t-n}} - \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \\ u_n(t) &= \frac{(e^{t+n} - e^{-t-n})(e^n + e^{-n}) - (e^{t+n} + e^{-t-n})(e^n - e^{-n})}{(e^{t+n} + e^{-t-n})(e^n + e^{-n})} \\ &= \frac{e^{t+2n} + e^t - e^{-t} - e^{-t-2n} - e^{t+2n} - e^{-t} + e^t + e^{-t-2n}}{(e^{t+n} + e^{-t-n})(e^n + e^{-n})} \\ &= \frac{2(e^t - e^{-t})}{(e^{t+n} + e^{-t-n})(e^n + e^{-n})} \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{2(e^t - e^{-t})}{e^{t+n} e^n} \end{aligned}$$

$$u_n(t) \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} 2e^{-t-2n}(e^t - e^{-t})$$

Ainsi, la suite  $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  est de signe constant à partir d'un certain rang et, d'après les théorèmes de comparaison des séries, la série de terme général  $u_n(t)$  converge, donc  $(s_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

b) D'après la question 1, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $u_n$  est croissante. Ainsi, la fonction  $s_n$  est croissante et, par passage à la limite dans les inégalités, la fonction  $s$  est croissante.

$$3. \text{ a) Pour } n \in \mathbb{N} : 1 - \varphi(n) = 1 - \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \frac{2e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \underset{(\infty)}{\sim} 2e^{-2n}.$$

Ainsi,  $\sum(1 - \varphi(n))$  converge.

b) La fonction  $s$  étant croissante, elle admet une limite (finie ou infinie) en  $+\infty$ .

D'une part, comme  $u_n$  est croissante, pour tout réel  $t$ ,

$$u_n(t) \leq 1 - \varphi(n) \implies s(t) \leq \sum(1 - \varphi(n)) \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) \leq \sum(1 - \varphi(n))$$

D'autre part, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et  $n \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , le réel  $u_n(t)$  étant positif pour tout réel positif  $t$ ,

$$\begin{aligned} s(t) &\geq \sum_{n=0}^N u_n(t) \geq \sum_{n=0}^N (\varphi(t+n) - \varphi(n)) \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) \geq \sum_{n=0}^N (1 - \varphi(n)) \\ &\implies \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) \geq \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \varphi(n)) \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \varphi(n)).$$

4. Soit  $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} s_n(t+1) &= \sum_{k=0}^n (\varphi(t+k+1) - \varphi(k)) = \sum_{k=1}^{n+1} \varphi(t+k) - \sum_{k=0}^n \varphi(k) \\ &= \sum_{k=0}^n (\varphi(t+k) - \varphi(k)) + \varphi(t+n+1) - \varphi(t) \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque  $n$  tend vers l'infini :

$$s(t+1) = s(t) + 1 - \varphi(t)$$

### Exercice 1.12.

Soit  $k$  un réel fixé. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(kx)$$

1. a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et qu'il existe  $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{(n)}(x) = k^{a_n} f(k^{b_n} x)$ .

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , exprimer  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .

c) Calculer  $f^{(n)}(0)$ .

2. Soit  $(u_n)$  une suite de réels tels que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ , et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \ell \in \mathbb{R}$ .

Montrer que :

a) si  $\ell < 1$ , la série de terme général  $u_n$  converge absolument.

b) si  $\ell > 1$ , la série de terme général  $u_n$  diverge.

3. Soit  $g_k$  la fonction définie par :  $g_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} k^{a_n} \times \frac{x^n}{n!}$ .

a) Déterminer le domaine de définition de  $g_1$ .

b) Déterminer, selon les valeurs de  $k$ , le domaine de définition de  $g_k$ .

4. On suppose désormais que  $|k| \leq 1$ . Soit  $a > 0$  un réel fixé.

a) Montrer qu'il existe un réel  $M \geq 0$  tel que :

$$\forall x \in [-a, a], \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq M$$

b) Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \in [-a, a]$ , on pose  $R_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} k^{a_n} \times \frac{x^n}{n!}$ .

Déterminer  $\lim_{N \rightarrow \infty} |R_N(x)|$ .

c) Montrer que  $g_k$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$g'_k(x) = g_k(kx)$$

### Solution

1. a) On démontre la propriété par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , on pose  $a_1 = 0$  et  $b_1 = 1$ . Reste à établir l'hérédité. On suppose que  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et qu'il existe  $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{(n)}(x) = k^{a_n} f(k^{b_n} x)$ .

Par dérivation d'une fonction composée, il s'ensuit que  $f^{(n)}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f^{(n+1)}(x) = k^{a_n + b_n} f(k^{b_n + 1} x).$$

On pose donc  $a_{n+1} = a_n + b_n$  et  $b_{n+1} = b_n + 1$ .

b) La suite  $(b_n)$  est arithmétique de raison 1 et de premier terme  $b_1 = 1$ . Il s'ensuit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n = n$ .

En étudiant la suite télescopique  $(u_n)$  définie par  $u_n = a_{n+1} - a_n = n$ , on trouve que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$ .

c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $f^{(n)}(0) = k^{a_n} f(0) = k^{a_n} = k^{n(n-1)/2}$ , formule qui reste valable lorsque  $n = 0$ .

2. a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = |u_n|$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\frac{a_n}{a_{n-1}} < \ell + \varepsilon$ , d'où  $a_n < (\ell + \varepsilon)a_{n-1}$ .

On choisit  $\varepsilon > 0$  tel que  $K = (\ell + \varepsilon) \in ]0, 1[$ .

Il s'ensuit que pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $0 < a_n < K^{n-n_0} a_{n_0}$ . On conclut grâce au théorème de comparaison des séries à termes positifs.

b) De même qu'à la question précédente, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \ell - \varepsilon > 1$ . La série diverge grossièrement puisque son terme général ne tend pas vers 0.

3. a) On reconnaît que  $g_1$  est la fonction exponentielle laquelle est définie sur  $\mathbb{R}$ .

b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $u_n(x) = \frac{k^{a_n} x^n}{n!}$ .

Si  $x = 0$ ,  $u_n(0) = 0$  si  $n \geq 1$ , et  $u_0(0) = 0$ . Ainsi,  $g_k$  est bien définie en 0 pour toutes les valeurs de  $k$ .

Si  $x \neq 0$ ,  $(u_n(x))$  est une suite de réels tous non nuls à laquelle on applique le résultat de la question 2.

• Si  $|k| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|k|^n |x|}{n+1} = 0$ . Donc, la série  $\sum u_n(x)$  converge et  $g_k$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

• Si  $|k| > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|k|^n |x|}{n+1} = +\infty$ . Donc, la série  $\sum u_n(x)$  diverge et  $g_k$  est seulement définie en  $x = 0$ .

4. a) Par hypothèse,  $f$  est continue sur  $[-a, a]$  donc bornée sur ce segment. Soit  $M > 0$  un réel tel que pour tout  $x \in [-a, a]$ ,  $|f(x)| \leq M$ . Ainsi, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout réel  $x$  :

$$|f^{(n)}(x)| = |k^{a_n} f(k^{b_n} x)| \leq |k^{a_n}| M \leq M$$

b) Pour tout  $x \in [-a, a]$ , on réécrit  $R_N(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ .

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction  $f$  à l'ordre  $N - 1$  entre les points 0 et  $x$ , on trouve

$$|R_N(x)| \leq \frac{|x|^N}{N!} M \leq \frac{|a|^N}{N!} M$$

On en déduit le résultat demandé par encadrement.

c) On déduit des questions précédentes que si  $f$  est solution du problème, pour tout  $a > 0$  et pour tout  $x \in [-a, a]$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k^{a_n} \frac{x^n}{n!} = g_k(x).$$

Ainsi,  $f = g_k$ . Par suite, en reprenant les hypothèses faites sur  $f$ , on déduit que  $g_k$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$g'_k(x) = f'(x) = f(kx) = g_k(kx)$$

**Exercice 1.13.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ .

1. a) Montrer que pour tout réel  $x \geq 0$ , la série  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  est convergente.

On note alors  $F(x)$  sa somme.

b) Calculer  $F(0)$  et  $F(1)$ .

c) On note  $f'_n$  la dérivée de la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Montrer que pour tout réel  $x \geq 0$ , la série  $\sum_{n \geq 1} f'_n(x)$  est convergente. On note alors  $G(x)$  sa somme.

2. Soit  $\varphi$  la fonction définie par  $\forall t > 0, \varphi(t) = \frac{1}{t}$ .

a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :

$$\forall (a, b) \in [n, +\infty[^2, |\varphi(b) - \varphi(a) - (b-a)\varphi'(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{n^3}$$

b) Soit  $x \in \mathbb{R}^+$  un réel fixé. Soit  $h \in \mathbb{R}^*$  tel que  $x+h \in \mathbb{R}^+$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = |f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)|$ .

Prouver la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$ .

3. a) Montrer qu'il existe un réel  $K$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  et tout  $h \in \mathbb{R}^*$  vérifiant  $x+h \in \mathbb{R}^+$  on a :

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|$$

b) En déduire que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  avec  $F' = G$ .

4. a) Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ . Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq f_k(x)$$

b) Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \int_1^{n+1} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt$$

c) En déduire que  $\forall x \geq 0, \ln(x+1) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$ .

d) Déterminer un équivalent simple de  $F$  au voisinage de  $+\infty$ .



**Solution**

1. a) Pour tout réel  $x \geq 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $f_n(x) = \frac{x}{n(n+x)}$ .

Si  $x = 0$ ,  $f_n(0) = 0$  et la série converge.

Si  $x > 0$ ,  $f_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{x}{n^2}$  et la série  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  converge.

b)  $F(0) = 0$ .

Par télescopage  $F(1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$ .

c) Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout  $x \geq 0$ ,  $f'_n(x) = \frac{1}{(x+n)^2} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{n^2}$  et la série  $\sum_{n \geq 1} f'_n(x)$  est convergente.

2. a) La fonction  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$  avec  $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}$  et  $\varphi''(t) = \frac{2}{t^3}$ . En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction  $\varphi$  entre  $a$  et  $b$ , on obtient :

$$|\varphi(b) - \varphi(a) - (b-a)\varphi'(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{t \in [a,b]} \left| \frac{2}{t^3} \right|$$

Comme  $t \in [a, b] \subset [n, +\infty[$ , on a :  $\max_{t \in [a,b]} \left| \frac{2}{t^3} \right| \leq \frac{2}{n^3}$ .

On en déduit l'inégalité demandée.

b) On a :

$$\begin{aligned} f_n(x+h) - f_n(x) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} \\ &= \varphi(n+x) - \varphi(x+h+n). \end{aligned}$$

D'autre part,  $f'_n(x) = \frac{1}{(x+n)^2} = -\varphi'(x+n)$ .

On en déduit que :

$$u_n = |\varphi(x+n) - \varphi(x+h+n) + h\varphi'(x+n)| = |\varphi(x+n+h) - \varphi(x+n) - h\varphi'(x+n)|.$$

On applique alors l'inégalité de la question 2. a) avec  $a = x+n$ ,  $b = x+h+n \geq n$ .

On obtient

$$u_n = |\varphi(x+n+h) - \varphi(x+n) - h\varphi'(x+n)| \leq \frac{h^2}{n^3} : \sum u_n \text{ converge}$$

3. a) On écrit :

$$|F(x+h) - F(x) - hG(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Comme  $u_n \leq \frac{h^2}{n^3}$ , on en déduit que :

$$|F(x+h) - F(x) - hG(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

En divisant par  $|h| > 0$  et en posant  $K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ , on obtient l'inégalité demandée.

b) Par comparaison, on trouve que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = G(x)$ .  
Ainsi,  $F$  est dérivable en  $x$  avec  $F'(x) = G(x)$ .

4. a) Soit  $x \geq 0$  un réel fixé. La fonction  $g_x : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et sa dérivée est  $g'_x(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+x)^2} \leq 0$ .

Ainsi,  $g_x$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ . D'où, pour tout  $t \in [k, k+1]$ ,

$$g_x(k+1) \leq g_x(t) \leq g_x(k)$$

*i.e.*

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1+x} \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x},$$

ce qui donne  $f_{k+1}(x) \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \leq f_k(x)$ .

On intègre cette relation avec  $t$  variant de  $k$  à  $k+1$ . On trouve alors l'inégalité demandée.

b) En sommant, pour  $k$  variant de 1 à  $n$ , l'inégalité de droite, on trouve :

$$\int_1^{n+1} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

En sommant, pour  $k$  variant de 1 à  $n-1$ , l'inégalité de gauche, on obtient :

$$\sum_{k=2}^n f_k(x) \leq \int_1^n \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt$$

d'où :

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \int_1^n \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt + f_1(x) = \int_1^n \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt + \frac{x}{1+x}$$

En mettant bout à bout, on en déduit l'inégalité demandée.

c) Les inégalités de la question précédente donnent en calculant les intégrales :

$$\ln \left( \frac{n+1}{x+n+1} \right) + \ln(x+1) \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln \left( \frac{n}{x+n} \right) + \ln(x+1).$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on conclut.

d) On déduit de ce qui précède que, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  :

$$F(x) \sim \ln(x+1) \sim \ln(x)$$

### Exercice 1.14.

1. a) Déterminer l'ensemble  $D$  des réels  $x$  tels que la série de terme général  $e^{-nx}$  converge. Pour  $x \in D$  on note  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ .

b) Déterminer un équivalent de  $F(x)$  quand  $x$  tend vers la borne inférieure  $a$  de  $D$ . Déterminer la limite de  $F(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

c) Étudier la convergence de l'intégrale  $I = \int_a^{+\infty} F(x)dx$ .

Soit  $\alpha$  un réel strictement positif fixé.

2. a) Déterminer l'ensemble  $D'$  des réels  $x$  tels que la série de terme général  $\exp[-n^\alpha x]$  converge.

Pour  $x \in D'$  on note  $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-n^\alpha x]$ . On admet que  $G$  est continue sur  $D'$ .

b) Étudier le sens de variation de  $G$ .

3. a) Montrer que, pour tout  $x \in D'$ , on a :

$$\int_0^{+\infty} \exp[-t^\alpha x]dt \leq G(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} \exp[-t^\alpha x]dt.$$

b) En déduire un équivalent de  $G(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures, qu'on exprimera à l'aide de la fonction  $G$ .

On pourra justifier et utiliser le changement de variable  $t \mapsto x t^\alpha = u$ .

c) Étudier la convergence de l'intégrale  $J = \int_0^1 G(x)dx$ .

4. a) Déterminer la limite de  $G(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

b) Quelle est l'allure de la courbe représentative de  $G$  ?

### **Solution**

1. a) C'est une série géométrique convergente si et seulement si  $x > 0$ , et :

$$\forall x \in D = \mathbb{R}_+^*, F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

b) On a  $F(x) \underset{0+}{\sim} \frac{1}{x}$  et  $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$ .

c) Ainsi  $I$  diverge.

2. a) Si  $x \leq 0$ ,  $\exp[-n^\alpha x]$  ne tend pas vers 0 et la série diverge ;

si  $x > 0$ ,  $n^2 \exp[-n^\alpha x] = \exp[-n^\alpha x + 2 \ln n] \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$ , par croissances comparées, donc la série converge (absolument). D'où :

$$D' = \mathbb{R}_+^*$$

b)  $x < x' \implies \forall n, \exp[-n^\alpha x] > \exp[-n^\alpha x']$ , d'où la décroissance de  $G$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. a) Par décroissance de  $t \mapsto \exp[-t^\alpha x]$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_n^{n+1} \exp[-t^\alpha x] dt \leq \exp[-n^\alpha x] \text{ et}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exp[-n^\alpha x] \leq \int_{n-1}^n \exp[-t^\alpha x] dt$$

et en sommant :

$$\int_0^{+\infty} \exp[-t^\alpha x] dt \leq G(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} \exp[-t^\alpha x] dt$$

b) Pour  $x > 0$ ,  $t \mapsto xt^\alpha = u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  bijectif de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc :

$$\int_0^{+\infty} \exp[-t^\alpha x] dt = \frac{1}{\alpha x^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{1/\alpha-1} du = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha x^{1/\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

D'où

$$G(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha x^{1/\alpha}}$$

c) Donc, par la règle de Riemann,  $J$  converge si et seulement si  $1/\alpha < 1$ , *i.e.*  $\alpha > 1$  (car  $\alpha > 0$ ).

4. a) On a :  $1 = e^{0^\alpha x} \leq G(x) \leq 1 + \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha x^{1/\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ .

b) On en déduit aisément l'allure de la courbe de  $G$ .

### Exercice 1.15.

On considère l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

1. a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'intégrale  $\int_0^1 [f(t)]^n dt$  converge. On

pose alors  $J_n = \int_0^1 [f(t)]^n dt$ .

b) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $J_n \geq \frac{1}{n+1}$

2. Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} [f(t)]^n dt$  converge.

On pose  $I_n = \int_0^{+\infty} [f(t)]^n dt$  et  $K_n = \int_1^{+\infty} [f(t)]^n dt$ .

3. Montrer que l'intégrale  $I_1$  n'est pas absolument convergente.

4. a) Montrer que pour tout entier  $p \geq 1$ ,  $K_{2p} + K_{2p+1} \geq 0$ .

b) Montrer que la série de terme général  $I_n$  est divergente.

**Solution**

1. a) Un développement limité de la fonction sinus montre que la fonction  $f$  est continue en 0.

b) Montrons que  $\sin t \geq t - t^2$  sur  $]0, 1]$ . Pour cela on étudie  $\varphi : t \mapsto \sin t - t + t^2$  sur cet intervalle.

Comme  $\varphi'(t) = \cos t - 1 + 2t$ ,  $\varphi''(t) = 2 - \sin t > 0$ ,  $\varphi'$  croît et est telle que  $\varphi'(0) = 0$ , donc  $\varphi$  est bien positive, et :

$$J_n \geq \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$$

2. ★ Pour  $n \geq 2$ , l'intégrale proposée est absolument convergente puisque :

$$\left| \frac{\sin t}{t} \right|^n \leq \frac{1}{t^n} \text{ sur } [1, +\infty[.$$

★ Pour  $n = 1$ , la fonction  $f$  est continue sur  $[1, +\infty[$  et une intégration par parties donne :  $\int_1^A \frac{\sin t}{t} dt = \left[ -\frac{\cos t}{t} \right]_1^A + \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt$ .

La seconde intégrale est absolument convergente et  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$ , d'où la convergence de l'intégrale de  $f$ .

3. La fonction  $f$  n'est pas d'intégrale absolument convergente. En effet :

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{|\sin(t+k\pi)|}{t+k\pi} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t+k\pi} dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \end{aligned}$$

qui est la somme partielle d'une série divergente.

*Seconde solution :* On remarque que  $|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$ . Donc

$$f(t) \geq \frac{1}{2t} - \frac{\cos 2t}{2t}$$

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$  diverge, alors que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t} dt$  converge (par intégration par parties). On conclut alors.

4. a) Pour tout  $n \geq 1$ ,  $K_n$  existe puisque  $I_n$  et  $J_n$  existent. On a :

$$K_{2p} + K_{2p+1} = \int_1^{+\infty} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^{2p} \left( 1 + \frac{\sin t}{t} \right) dt \geq 0$$

puisque  $1 + f(t) \geq 0$  pour tout  $t \geq 0$ .

b) Par les questions précédentes :

$$S_{2N+1} = \sum_{p=1}^N (I_{2p} + I_{2p+1}) \geq \sum_{p=3}^{N+2} \frac{1}{p}$$

ce qui montre que la série  $\sum I_n$  diverge.

### Exercice 1.16.

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction deux fois dérivable et  $\alpha$  un réel strictement positif. On suppose que  $f$  est majorée et que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $f''(t) \geq \alpha^2 f(t)$ .

1. Montrer que  $f$  est convexe.
2. Montrer que  $f'$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_-$ .
3. a) Montrer que  $f$  admet une limite finie en  $+\infty$ .  
 b) Montrer que  $f$  tend vers 0 en  $+\infty$ .  
 c) Montrer que  $f'$  tend vers 0 en  $+\infty$ .
4. a) Montrer que la fonction  $\alpha^2 f^2 - f'^2$  est croissante.  
 b) En déduire le signe de  $\alpha f + f'$ .
5. Montrer que pour tout réel positif  $t$ , on a :  $f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}$ .

### Solution

1. Comme  $f$  est à valeurs positives et  $\alpha$  est réel, pour tout réel  $t$ ,  $f''(t) \geq 0$ . Ainsi,  $f'$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Supposons qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f'(x_0) > 0$ . Alors, comme  $f'' \geq 0$ ,  $f$  est convexe donc la représentation graphique est au-dessus de ses tangentes et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  :

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Comme nous avons supposé que  $f$  est majorée, on obtient une contradiction. Finalement, pour tout  $x \geq 0$ ,  $f'(x) \leq 0$ .

3. a) D'après la question précédente,  $f$  est une fonction décroissante. Ainsi, comme  $f$  est minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone,  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $+\infty$ .

b) Comme  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ ,  $\ell \geq 0$ . Supposons par l'absurde que  $\ell > 0$ . Alors, d'après le théorème des accroissements finis appliqués à  $f'$  sur  $[0, x]$ , il existe  $\xi \in ]0, x[$  tel que :

$$f'(x) - f'(0) = x f''(\xi) \geq x \alpha^2 f(\xi) \geq x \alpha^2 \ell$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ . Or, comme  $f'$  est majorée par 0, on obtient une contradiction et  $\ell = 0$ .

c) Comme  $f'$  est croissante et majorée par 0, elle admet une limite finie  $\tilde{\ell}$  en 0. Supposons que  $\tilde{\ell} \neq 0$ . Alors, en appliquant le théorème des accroissements finis à  $f$  sur  $[0, x]$ , il existe  $\xi \in ]0, x[$  tel que :

$$f(x) - f(0) = xf'(\xi) \leq x\tilde{\ell}$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , ce qui est impossible et donc  $\tilde{\ell} = 0$ .

4. a) On remarque que  $\alpha^2 f^2 - f'^2$  est dérivable et sa dérivée vaut  $2f'(\alpha^2 f - f'')$ . Ainsi, ce produit étant positif, la fonction  $\alpha^2 f^2 - f'^2$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

b) D'après les questions précédentes,  $\lim_{+\infty}(\alpha^2 f^2 - f'^2) = 0$ . Ainsi cette fonction est négative, et :

$$\alpha^2 f^2 \leq f'^2 \implies \alpha|f| \leq |f'| \implies \alpha f \leq -f' \implies \alpha f + f' \leq 0.$$

5. Soit  $g : t \mapsto f(t)e^{\alpha t}$ . D'après la question précédente,  $g'$  est à valeurs négatives. Ainsi,  $g$  est décroissante et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}$ .

### Exercice 1.17.

A tout couple  $(a, b)$  de réels positifs ou nuls, on associe les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :

$$a_0 = a, b_0 = b, \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

1. a) Montrer que ces suites sont ainsi bien définies et telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq a_n \leq b_n$ .

b) Étudier la monotonie des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

c) Montrer que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers une limite commune que l'on ne cherchera pas à expliciter mais que l'on notera  $\mathcal{L}(a, b)$ .

2. Montrer les propriétés suivantes :

a) Pour tout  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$ ,  $\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(b, a)$ .

b) Pour tout  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  et  $\lambda \geq 0$ ,  $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a, b)$ .

c) Pour tout  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$ ,  $\sqrt{ab} \leq \mathcal{L}(a, b) \leq \frac{1}{2}(a + b)$ .

3. Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $\forall x \geq 0, F(x) = \mathcal{L}(1, x)$ .

a) Calculer  $F(0)$  et  $F(1)$ .

b) Montrer que  $F$  est une fonction positive et croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

c) Montrer les propriétés suivantes :

i) Pour tout  $x \geq 0$ ,  $\sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}(1 + x)$ .

ii) Pour tout  $x > 0$ ,  $F(x) = xF\left(\frac{1}{x}\right)$ .

iii) Pour tout  $x > 0$ ,  $F(x) = \sqrt{x} F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$ .

4. a) Déterminer la limite de  $F(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de  $F$  en 1.

### **Solution**

1. a) On commence par montrer par récurrence la propriété : «  $a_n$  et  $b_n$  existent avec  $a_n \geq 0$  et  $b_n \geq 0$  ».

Puis en remarquant que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$b_n - a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} = \frac{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2}{2} \geq 0$$

on obtient les inégalités demandées.

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \geq 0 \text{ et } b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$$

Ainsi, la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.

c) \* La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et majorée par  $b_1$ . Donc, la suite  $(a_n)$  converge. Notons  $\ell_a$  sa limite

\* De même, la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et minorée par  $a_1$ . Donc, la suite  $(b_n)$  converge. Notons  $\ell_b$  sa limite.

\* En passant à la limite dans les égalités définissant  $(a_n)$  et  $(b_n)$ , on trouve :

$$\ell_b = \frac{1}{2}(\ell_a + \ell_b)$$

d'où  $\ell_a = \ell_b$ .

2. a) Considérons les deux nouvelles suites  $(a'_n)$  et  $(b'_n)$  définies par  $a'_0 = b$ ,  $b'_0 = a$  et les mêmes relations de récurrence (\*\*). D'après ce qui précède, les suites  $(a'_n)$  et  $(b'_n)$  convergent vers une même limite appelée  $\mathcal{L}(b, a)$ .

Or, on montre par récurrence que pour tout  $n \geq 1$ ,  $a'_n = a_n$  et  $b'_n = b_n$ . Donc,  $(a'_n)$  et  $(b'_n)$  convergent aussi vers  $\mathcal{L}(a, b)$ .

Par unicité de la limite, on en déduit que  $\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(b, a)$ .

b) On considère de même les deux nouvelles suites  $(a''_n)$  et  $(b''_n)$  définies par  $a''_0 = \lambda a$ ,  $b''_0 = \lambda b$  et les relations de récurrence (\*\*). D'après ce qui précède, les suites  $(a''_n)$  et  $(b''_n)$  convergent vers une même limite appelée  $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b)$ .

Or, on montre par récurrence que pour tout  $n \geq 0$ ,  $a''_n = \lambda a_n$  et  $b''_n = \lambda b_n$ . Donc,  $(a''_n)$  et  $(b''_n)$  convergent aussi vers  $\lambda \mathcal{L}(a, b)$ .

Par unicité de la limite, on en déduit que  $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a, b)$ .

c) Pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_1 \leq a_n \leq \mathcal{L}(a, b) \leq b_n \leq b_1$ .

Or,  $a_1 = \sqrt{ab}$  et  $b_1 = \frac{1}{2}(a + b)$ . On obtient ainsi les inégalités souhaitées.



3. a)  $\star F(0)$  est la limite commune  $\mathcal{L}(1, 0)$  aux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  lorsque  $a = 1$  et  $b = 0$ . On montre dans ce cas que pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n = 0$  et  $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$ . Comme  $b_1 = \frac{1}{2}$ , on en déduit que pour tout  $n \geq 1$ ,  $b_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$ . Les deux suites convergent donc vers 0 et  $F(0) = 0$ .

$\star F(1)$  est la limite  $\mathcal{L}(1, 1)$  commune aux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  lorsque  $a = 1$  et  $b = 1$ . L'encadrement  $\sqrt{ab} \leq \mathcal{L}(a, b) \leq \frac{1}{2}(a + b)$  donne alors directement  $F(1) = \mathcal{L}(1, 1) = 1$ .

b)  $F(x)$  est la limite  $\mathcal{L}(1, x)$  commune aux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  lorsque  $a = 1$  et  $b = x$ .

L'encadrement  $\sqrt{ab} \leq \mathcal{L}(a, b) \leq \frac{1}{2}(a + b)$  donne  $F(x) = \mathcal{L}(1, x) \geq \sqrt{x} \geq 0$ . Donc,  $F$  est positive sur  $\mathbb{R}^+$ .

Reste à prouver sa croissance.

Soit  $0 \leq y \leq x$  deux réels.

Soient, d'une part,  $(a_n)$  et  $(b_n)$  les deux suites définies par  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = x$  et les relations de récurrence (\*\*).

Soient, d'autre part,  $(c_n)$  et  $(d_n)$  les deux suites définies par  $c_0 = 1$ ,  $d_0 = y$  et les relations de récurrence (\*\*).

On montre par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n \leq a_n$  et  $d_n \leq b_n$ .

En passant à la limite, on trouve que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , d'où  $F(y) = \mathcal{L}(1, y) \leq \mathcal{L}(1, x) = F(x)$ .

c) i) On utilise la relation «  $\sqrt{ab} \leq \mathcal{L}(a, b) \leq \frac{1}{2}(a + b)$  » avec  $a = 1$  et  $b = x$ . Cela donne exactement la série d'inégalités souhaitée.

ii) On utilise cette fois la relation «  $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a, b)$  » avec  $a = 1$ ,  $b = x$  et  $\lambda = \sqrt{x}$ .

On obtient  $F(x) = \mathcal{L}(1, x) = x \mathcal{L}(\frac{1}{x}, 1) = x \mathcal{L}(1, \frac{1}{x}) = x F(\frac{1}{x})$ .

iii) On utilise encore la relation «  $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a, b)$  » avec  $a = 1$ ,  $b = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}$  et  $\lambda = \sqrt{x}$ .

On trouve :  $\sqrt{x} F(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}) = \sqrt{x} \mathcal{L}(1, \frac{1+x}{2\sqrt{x}}) = \mathcal{L}(\sqrt{x}, \frac{1+x}{2})$

On considère alors, d'une part, les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = x$  et la relation de récurrence (\*\*), et, d'autre part, les suites  $(a'_n)$  et  $(b'_n)$  définies par  $a'_0 = \sqrt{x}$ ,  $b'_0 = \frac{1+x}{2}$  et la relation de récurrence (\*\*).

Une récurrence montre que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = a'_n$  et  $b_{n+1} = b'_n$ . Par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$ .

D'où  $\mathcal{L}(\sqrt{x}, \frac{1+x}{2}) = \mathcal{L}(1, x) = F(x)$ .

On en déduit la relation demandée.

4. a) Comme  $F(x) \geq \sqrt{x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , par minoration  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ .

b) Soit  $T_1(x) = \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$ .

Avec les relations obtenues ci-dessus, on trouve :

$$\sqrt{x} - 1 \leq F(x) - 1 \leq \frac{x-1}{2}$$

• Si  $x > 1$ , on obtient en divisant par  $x - 1 > 0$  :  $\frac{1}{\sqrt{x} + 1} \leq T_1(x) \leq \frac{1}{2}$ .

• Si  $x < 1$ , on obtient en divisant par  $x - 1 < 0$  :  $\frac{1}{\sqrt{x} + 1} \geq T_1(x) \geq \frac{1}{2}$ .

Ainsi, par encadrement,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} T_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} T_1(x) = \frac{1}{2}$ . La fonction  $F$  est donc dérivable (et par suite continue) en 1 avec  $F'(1) = \frac{1}{2}$ .

### Exercice 1.18.

1. Déterminer les valeurs de  $x$  réel pour lesquelles l'intégrale

$$\int_{1/x}^x \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} dt$$

est convergente.

On note alors  $G(x) = \int_{1/x}^x \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} dt$ .

2. Montrer que  $G$  admet un prolongement par continuité en 1.

3. Montrer que  $G$ , ainsi prolongée, est continue sur  $\mathbb{R}^*$ . Montrer que  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  et calculer  $G'(x)$ .

4. La fonction  $G$ , prolongée par continuité en 1, est-elle dérivable en 1 ?

5. a) Étudier les variations de  $G$ .

b) Étudier les limites de  $G$  aux bornes de son domaine de définition.

c) Montrer qu'au voisinage de  $+\infty$ , la représentation graphique de  $G$  admet une asymptote d'équation de la forme  $y = x + \beta$  et exprimer  $\beta$ .

d) Montrer qu'au voisinage de  $-\infty$ , la représentation graphique de  $G$  admet une asymptote d'équation de la forme  $y = x + \alpha$  et exprimer  $\alpha$ .

### Solution

1.  $G$  n'est pas définie en 0.

L'application  $\varphi : t \mapsto \frac{t}{(t^3 - 1)^{1/3}}$  est continue sur l'intervalle  $]1/x, x[$  à condition que  $x \neq 0$  et  $1 \notin ]1/x, x[$ . Ainsi  $G$  est-elle déjà définie sur  $D = ]-\infty, 0[$ .

Pour  $x > 0$  et  $x \neq 1$ , le réel 1 appartient toujours à l'intervalle (ouvert) d'intégration  $]1/x, x[$  mais, au voisinage de 1,  $\varphi(t) \sim \psi(t) = \frac{C}{(t-1)^{1/3}}$ , dont l'intégrale est convergente sur  $]1, 3/2]$  et sur  $[1/2, 1[$ . L'intégrale définissant  $G(x)$  est donc deux fois convergente et  $G(x)$  existe

Ainsi  $f$  est-elle définie sur  $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ .

2. On vient d'expliquer que  $\int_1^a \frac{1}{(t-1)^{1/3}} dt$  est convergente, tant pour  $a > 1$  que pour  $a < 1$  (Riemann). Donc  $\lim_{a \rightarrow 1} \int_1^a \frac{1}{\sqrt[3]{t-1}} dt = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} G(x) = 0$ .

3. Notons  $H$  une primitive de  $\varphi$  sur chaque intervalle  $I$  de  $D$ .

Pour tout  $x \in I$ ,  $G(x) = H(x) - H(1/x)$ . Ainsi la fonction  $G$  est continue sur  $I$ . On vient de la prolonger par continuité en  $x = 1$  : donc  $G$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

On a également, pour  $x \neq 0, 1$ ,  $G'(x) = \varphi(x) + \frac{1}{x^2} \varphi(1/x) = \frac{(x^3 - 1)^{2/3}}{x^2}$

4. Pour  $x = 1$ , il suffit d'utiliser le théorème des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  : ici  $G$  est continue en 1 et  $\lim_{x \rightarrow 1} G'(x) = 0$ . Donc  $G$  est dérivable en  $x = 1$  et  $G'(1) = 0$ .

5. a) Au vu de l'expression de  $G'(x)$ , on a  $G'(x) \geq 0$ .

b) L'intégrale  $\int_a^{+\infty} \varphi(t) dt$  diverge en  $+\infty$ , car  $\varphi(t) \sim 1$  au voisinage de  $+\infty$ .

Par croissance de  $G$ , il vient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$ . De même  $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = -\infty$ .

De même, lorsque  $x$  tend vers 0,  $1/x$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  et les limites sont  $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = -\infty$ .

c) On remarque que  $x - \frac{1}{x} = \int_{1/x}^x dt$ . Donc

$$G(x) - x = \frac{1}{x} + \int_{1/x}^x \left( \frac{t}{(t^3 - 1)^{1/3}} - 1 \right) dt$$

La fonction à intégrer est sans problème pour la borne 0 et au voisinage de  $+\infty$ , on écrit :

$\frac{t}{(t^3 - 1)^{1/3}} - 1 = (1 - \frac{1}{t^3})^{-1/3} - 1 \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{3t^3}$ , ce qui donne la convergence de l'intégrale associée pour la borne infinie.

En notant  $\beta = \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{(t^3 - 1)^{1/3}} - 1 \right) dt$ , on a donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) - x = \beta$ .

d) On procède de la même manière en  $-\infty$ , en remarquant que l'on a encore  $\sqrt[3]{t^3} = t$ .