

ANALYSE

Exercice 1.01.

1. Montrer la convergence des intégrales suivantes et les calculer :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

(Pour I_1 et I_3 , on pourra utiliser le changement de variable $t = \sin u$.)

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'existence des intégrales suivantes :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad \text{et} \quad h(x) = \int_0^1 \frac{-t^2 \cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Dans toute la suite on admet que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et que $f' = g$ et $f'' = h$.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, x f''(x) + f'(x) + x f(x) = 0$.

4. Soit z la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par $z(x) = f(x)\sqrt{x}$.

a) Montrer que z est de classe \mathcal{C}^2 et trouver une fonction q telle que :

$$\forall x \in I, z''(x) + q(x)z(x) = 0$$

b) En étudiant la fonction $x \mapsto \varphi(x) = q(x)z^2(x) + (z'(x))^2$, montrer qu'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que : $\forall x \in I, |f(x)| \leq \frac{M}{\sqrt{x}}$.

Solution :

1. Les fonctions à intégrer sont continues sur $[0, 1[$; il y a un problème de convergence des intégrales en 1.

Pour tout $x \in]0, 1[$, on effectue le changement de variable $t = \sin u$ qui est de classe \mathcal{C}^1 ; on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ de même nature et de même valeur en cas de convergence que } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{|\cos u|} du$$

qui existe et vaut $\frac{\pi}{2}$. Donc $I_1 = \frac{\pi}{2}$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a : $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = [-\sqrt{1-t^2}]_0^x = 1 - \sqrt{1-x^2}$, qui a pour limite 1 quand x tend vers 1 donc $I_2 = 1$.

Par le même argument que pour I_1 , I_3 est de même nature (et a même valeur en cas de convergence) que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{|\cos u|} \cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos(2u)) du,$$

Cette dernière intégrale est faussement impropre en 1, donc convergente, et :

$$I_3 = \left[\frac{1}{2}(u - \frac{1}{2} \sin(2u)) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2. Comme $\frac{|\cos(xt)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, et que I_1 converge, par théorème de comparaison, on en déduit que l'intégrale qui définit f est absolument convergente, donc convergente. Idem pour g et h avec I_2 et I_3 .

3. Soit $a \in]0, 1[$. Intégrons par parties sur $[0, a]$, avec $u(t) = \sqrt{1-t^2}$, $u'(t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$, $v(t) = \sin(xt)$, $v'(t) = x \cos(xt)$ (u, v sont de classe \mathcal{C}^1) :

$$\int_0^a \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\sqrt{1-t^2} \sin(xt)]_0^a - \int_0^a \sqrt{1-t^2} \times x \cos(xt) dt$$

$$\text{d'où : } \int_0^a \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sqrt{1-a^2} \sin(xa) - x \int_0^a \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

En faisant tendre a vers 1 on obtient :

$$f'(x) = -x(f(x) + f''(x))$$

4. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur I . Ainsi la fonction z est de classe \mathcal{C}^2 comme produit de deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 . En dérivant deux fois on obtient :

$$z''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}f(x) + x^{-\frac{1}{2}}f'(x) + x^{\frac{1}{2}}f''(x).$$

D'après le résultat de la question 3, on en déduit :

$$z''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}f(x) - x^{\frac{1}{2}}f(x) = -(1 + \frac{1}{4x^2})\sqrt{x}f(x),$$

soit $z''(x) + q(x)z(x) = 0$, avec $q(x) = 1 + \frac{1}{4x^2}$.

5. On a : $\varphi'(x) = q'(x)z^2(x) + 2z'(x)(q(x)z(x) + z''(x)) = q'(x)z^2(x) \leq 0$ donc φ est décroissante sur I .

Donc, pour tout $x \in I$, on a : $q(x)z^2(x) + \underbrace{(z'(x))^2}_{\geq 0} = \varphi(x) \leq \varphi(1)$, donc : $q(x)z^2(x) \leq \varphi(1)$;

puisque $q(x) \geq 1 > 0$ on déduit $z^2(x) \leq \varphi(1)$, donc $|z(x)| \leq \sqrt{\varphi(1)} = M$ soit z est bornée sur I .

Donc $\forall x \in I, |f(x)| \leq \frac{M}{\sqrt{x}}$

Exercice 1.02.

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

1. Montrer que la fonction f est définie sur $] -1, +\infty[$.
2. Vérifier que pour tout $x > -1$, on a : $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$.
3. a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$
 b) En déduire que f est continue sur son domaine de définition.
4. a) Montrer que l'application f est décroissante sur \mathbb{R}^+ .
 b) En déduire que $f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2x}$. Donner de même un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de -1 .

Solution :

1. L'application $t \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ est continue et positive sur $]0, 1]$.

$\frac{t^x}{1+t} \underset{(t \rightarrow 0)}{\sim} \frac{1}{t^{-x}}$, donc par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$ converge si et seulement si $-x < 1$, i.e. $x > -1$.

2. Pour tout $x > -1$, $f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$ (linéarité pour les intégrales convergentes)

3. a) Soit $g : x \rightarrow t^x = e^{x \ln t}$. L'inégalité des accroissements finis donne :

$$|t^x - t^y| \leq \sup_{u \in [x, y]} |(\ln t) e^{u \ln t}| \times |x - y|$$

Or pour $0 < t < 1$, on a $\ln t < 0$ et pour x et y positifs ou nuls $u \ln t < 0$ sur le segment $[x, y]$, donc $|t^x - t^y| \ln t \times |x - y|$, et on peut écrire :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \int_0^1 \frac{|\ln t|}{1+t} dt = C|x - y|$$

car l'intégrale $\int_0^1 \frac{|\ln t|}{1+t} dt$ est convergente.

b) \rightarrow Par la question précédente, la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ car lipchitzienne.

\rightarrow De plus $x > -1 \implies f(x) = \frac{1}{x+1} - f(x+1)$ et $x+10$, donc f est continue sur $] -1, +\infty[$, par composition.

4. a) Soient a et b deux réels tels que $-1 < a < b$. En multipliant par $\ln t$ négatif sur $]0, 1]$

$a \ln t b \ln t$, puis $t^a t^b$, puis $\frac{t^a}{1+t} \frac{t^b}{1+t}$ et en intégrant $f(a)f(b)$.

La fonction f est décroissante.

b) Par décroissance de f , pour $x > 0$:

$$\frac{1}{x+1} = f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \text{ et } \frac{1}{x} = f(x) + f(x-1) \geq 2f(x),$$

donc $\frac{x}{x+1} \leq 2xf(x) \leq 1$, et par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xf(x) = 1$, d'où $f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Enfin $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$ donne $f(x) \underset{(-1+)}{\sim} \frac{1}{x+1}$.

Exercice 1.03.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On notera (S_n) la suite des sommes partielles, *i.e.* la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

1. Exemples.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \frac{1}{n}$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un entier } m \text{ tel que } n = 2^m - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Déterminer la nature de $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$.

2. On suppose dans cette question que la suite (a_n) est à valeurs strictement positives.

Montrer que la série $\sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ converge.

3. a) Montrer que si $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge, alors la suite (a_n) converge vers 0.

b) Montrer que si la suite (a_n) converge vers 0, alors $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ diverge.

c) En déduire que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ diverge.

4. a) Soit (u_n) une suite de réels positifs et (T_n) la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n . Montrer que si la suite (T_n) converge, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, et tout $p \geq 0$, $|T_{n+p} - T_n| \leq \varepsilon$.

b) Soient $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que $\sum_{j=1}^k \frac{a_{n+j}}{S_{n+j}} \geq 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}$.

c) En déduire que la série $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge.

Solution :

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $a_n = \frac{1}{n}$, alors $\frac{a_n}{1+na_n} = \frac{1}{n+n}$ et $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$ diverge.

b) Pour tout entier naturel n , notons $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{1+ka_k}$.

Comme la suite (a_k) est à valeurs positives, alors $(S_n)_n$ est croissante.

De plus, $S_{2^m-1} = \sum_{k=0}^{2^m-1} \frac{a_n}{1+na_n} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{1+(2^k-1)} = \sum_{k=1}^m 2^{-k}$.

Ainsi, $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$ converge.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $1+n^2a_n \geq n^2a_n$ et $a_n > 0$, alors $0 \leq \frac{a_n}{1+n^2a_n} \leq \frac{1}{n^2}$.

Ainsi, $\sum \frac{a_n}{1+n^2a_n}$ est une série dont le terme général est positif et majoré par le terme d'une série convergente, donc $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

2. a) Supposons que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge. Alors, $r_n = \frac{a_n}{1+a_n}$ converge vers 0, donc $(r_n \neq 1)!$
 $a_n = \frac{r_n}{1-r_n}$ converge également vers 0, soit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) Supposons que $(a_n)_n$ converge vers 0. Alors, $\frac{a_n}{1+a_n} \sim a_n$. Or, ces suites sont positives, donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

c) Finalement, $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ est une série à termes positifs, donc soit elle converge, soit ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge. D'après les questions précédentes, (a_n) tend vers 0 et la série diverge. On obtient ainsi une contradiction, et $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ diverge.

3. a) Supposons que la suite $(T_n)_n$ converge vers un réel ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la limite, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|T_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soient $n \geq n_0$ et $p \geq 0$. Alors, $n+p \geq n_0$ et

$$|T_{n+p} - T_n| \leq |T_{n+p} - \ell| + |T_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, p \geq 0, |T_{n+p} - T_n| \leq \varepsilon$.

b) Comme la série $\sum a_n$ est à termes positifs, la suite (S_n) est croissante.

Ainsi,

$$\sum_{j=1}^k \frac{a_{n+j}}{S_{n+j}} \geq \sum_{j=1}^k \frac{a_{n+j}}{S_{n+k}} \geq \frac{1}{S_{n+k}} \sum_{j=n+1}^{n+k} a_j \geq \frac{S_{n+k} - S_n}{S_{n+k}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}$$

Finalement, $\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \sum_{j=1}^k \frac{a_{n+j}}{S_{n+j}} \geq 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}$.

c) Pour tout entier naturel n non nul, notons $T_n = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{S_j}$. D'après la question précédente, pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$T_{n+k} - T_n = \sum_{j=1}^{n+k} \frac{a_j}{S_j} - \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{S_j} = \sum_{j=1}^{n+k} \frac{a_{n+j}}{S_{n+j}} \geq 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}}$$

Or, comme $\sum a_n$ diverge, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} 1 - \frac{S_n}{S_{n+k}} = 1$.

Ainsi, (T_n) ne satisfait pas le critère de convergence de la question 3. a), et $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge.

Exercice 1.04.

1. Déterminer les valeurs de x réel pour lesquelles $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge. On note D l'ensemble de ces valeurs.

On pose alors pour tout $x \in D$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

2. Montrer que pour tout $x \in D$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (\star). En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a) Montrer que $\ln(\Gamma(x))$ existe pour $x \in D$.

b) On admet que la fonction Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur D et que pour tout $x \in D$

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$$

i) Soit f et g deux fonctions continues sur \mathbb{R}_+^* , à valeurs réelles, telles que les intégrales $\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} [g(t)]^2 dt$ convergent. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} [f(t) + \lambda g(t)]^2 dt$ est convergente et que sa valeur, notée $\varphi(\lambda)$, est toujours positive ou nulle.

En déduire une inégalité liant $\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 dt$, $\int_0^{+\infty} [g(t)]^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$

ii) Montrer que la fonction $\ln \circ \Gamma$ est convexe sur D .

4. a) En utilisant la relation (\star), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \Gamma'(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

b) Montrer qu'il existe $a_n \in [n, n+1]$ tel que $\ln n = \frac{\Gamma'(a_n)}{\Gamma(a_n)}$.

c) En utilisant la convexité de la fonction $\ln \circ \Gamma$, montrer que $\Gamma'(1) = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler définie par $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$.

Solution :

1. Ce sont des questions vues en cours. La fonction Γ est définie sur $D = \mathbb{R}^{+*}$

2. Une intégration par parties donne $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et par récurrence $\Gamma(1) = 1$, puis $\Gamma(n) = (n-1)!$

3. $(\ln \circ \Gamma)(x)$ existe pour $x > 0$, car pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$, puisque $t \rightarrow t^{x-1} e^{-t}$ est continue et strictement positive. On admet que l'on peut dériver et

$$\ln(\Gamma)'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \text{ et } \ln(\Gamma)''(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - \Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)}$$

Cette dernière expression est positive, car le dénominateur l'est, tout comme le numérateur par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

4. On dérive (\star). Il vient : $\Gamma'(x+1) = x\Gamma'(x) + \Gamma(x)$ et donc

$$\Gamma'(2) = \Gamma'(1) + \Gamma(1) \implies \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} = \Gamma'(1) + 1$$

Supposons que $\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \Gamma'(1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On a :

$$\Gamma'(n+1) = n\Gamma'(n) + \Gamma(n) \implies \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{n\Gamma'(n)}{n\Gamma(n)} + \frac{1}{n}$$

ce qui termine la récurrence.

5. a) La formule des accroissements finis appliquée à la fonction $\ln \Gamma$ sur l'intervalle $[n, n+1]$ donne l'existence de $a_n \in [n, n+1]$ tel que

$$\ln n = \frac{\ln \Gamma(n+1) - \ln \Gamma(n)}{(n+1) - n} = \frac{\Gamma'(a_n)}{\Gamma(a_n)}$$

b) La croissance de la fonction $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ (convexité de $\ln \Gamma$) permet d'écrire

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} \leq \frac{\Gamma'(a_n)}{\Gamma(a_n)} = \ln n \leq \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}$$

et par la question 4. a) :

$$\Gamma'(1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \Gamma'(1) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Il reste à montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n)$ existe (on la note alors sa limite γ).

Pour cela il suffit de remarquer que $\frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$, ce qui permet de montrer que la suite précédente est monotone et bornée.

Exercice 1.05.

1. Soit f la fonction définie par $f : t \mapsto \frac{\ln t}{1-t}$.

a) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$f(t) = \sum_{k=0}^n t^k \ln t + \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t}$$

c) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \frac{t \ln t}{1-t}$ définie sur $]0, 1[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0, 1]$.

d) En déduire une expression de $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$ sous la forme d'une série de Riemann.

2. Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, on pose : $L(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.
- a) Montrer que la fonction L est bien définie sur $]-\infty, 1]$.
- b) Exprimer $L(1)$ à l'aide d'un résultat précédent.
3. a) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $L(x) = -\ln(1-x)\ln(x) + L(1) - L(1-x)$.
- b) Déterminer la valeur de $L\left(\frac{1}{2}\right)$.
4. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$.

Solution :

1. a) La fonction f est définie, continue et négative sur $]0, 1[$. Au voisinage de 0, $f(t) \sim \ln t$ et on sait que $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge. Au voisinage de 1, $f(t) \sim -1$: f est ainsi prolongeable par continuité en $t = 1$ et l'intégrale est faussement impropre.
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\sum_{k=0}^n t^k \ln t + \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t} = \ln(t) \left(\sum_{k=0}^n t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t} \right) = \ln(t) \left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t} + \frac{t^{n+1}}{1-t} \right) = f(t)$$

- c) La fonction g est définie et continue sur $]0, 1[$. Par croissance comparée, $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$ et, au voisinage de 1, $g(t) \sim -1$: donc g est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$. On confond par la suite g et son prolongement.
- d) Par linéarité de l'intégrale et convergence de chacune des intégrales,

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 t^k \ln t dt + \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t} dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 t^k \ln t dt + \int_0^1 t^n g(t) dt$$

Par intégration par parties (à faire sur $]\varepsilon, 1], \dots$), on trouve $\int_0^1 t^k \ln t dt = \frac{-1}{(k+1)^2}$. De plus, g (ou du moins son prolongement) est continue sur $[0, 1]$ donc bornée (en valeur absolue) par un réel M . D'où,

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t} dt \right| \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1}$$

Finalement, en faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{(k+1)^2} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad (= -\frac{\pi^2}{6})$$

2. a) Posons $\ell : t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$. La fonction ℓ est définie et continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$. Au voisinage de 0, $\ell(t) \sim -1$: ainsi, ℓ est prolongeable par continuité en $t = 0$. Au voisinage de 1, $\ell(t) \sim \ln(1-t)$. Or $\int_{1/2}^{1-\varepsilon} \ln(1-t) dt = \int_{\varepsilon}^{1/2} \ln(u) du$ a une limite finie lorsque ε tend vers 0 (voir ci-dessus).

On conclut que la fonction L est bien définie sur $]-\infty, 1]$.

b) Le changement de variable affine $u = 1 - t$ donne :

$$L(1) = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} du = -\int_0^1 f(u) du \quad (= \frac{\pi^2}{6})$$

3. a) Soit $x \in]0, 1[$. Le même changement de variable donne $L(x) = \int_1^{1-x} \frac{\ln u}{1-u} du$. Soit α tel que $0 < 1-x < 1-\alpha < 1$.

Une intégration par parties donne :

$$\int_{1-\alpha}^{1-x} \frac{\ln u}{1-u} du = [-\ln(u) \ln(1-u)]_{1-\alpha}^{1-x} - \int_{1-\alpha}^{1-x} \frac{\ln(1-u)}{u} du$$

On fait alors tendre α vers 0 sachant que $\ln(1-\alpha) \ln(\alpha) \sim -\alpha \ln(\alpha) \rightarrow 0$.

On trouve donc :

$$L(x) = -\ln(1-x) \ln(x) - \int_1^{1-x} \frac{\ln(1-u)}{u} du = -\ln(1-x) \ln(x) + L(1) - L(1-x)$$

c) En prenant $x = 1/2$ dans la formule précédente, on obtient $L(1/2) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

4. Soit $x \in]0, 1[$. On a

$$\begin{aligned} -L(x) - L(-x) &= \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt + \int_0^{-x} \frac{\ln(1-t)}{t} dt \\ &= \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt + \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt \\ &= \int_0^x \frac{\ln(1-t^2)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{\ln(1-u)}{u} du = -\frac{L(x^2)}{2} \end{aligned}$$

On a ainsi $L(x) + L(-x) = \frac{L(x^2)}{2}$.

Exercice 1.06.

Soit f une fonction définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} et de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge, puis déterminer sa limite.
2. On suppose que $f(1) \neq 0$. Trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini. En déduire la nature de la série de terme général u_n .
3. On suppose que $f(1) = 0$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n .
4. Soit h une fonction continue sur $[0, 1]$.

a) En utilisant la continuité de h au point 1, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \int_0^1 x^n (h(x) - h(1)) dx \right] = 0.$$

b) En déduire que la suite $(n \int_0^1 x^n h(x) dx)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et exprimer sa limite à l'aide de la fonction h .

Solution :

1. La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc bornée et on peut poser $M = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \in \mathbb{R}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n| = |\int_0^1 x^n f(x) dx| \leq \int_0^1 x^n M dx = \frac{M}{n+1}$.

Par encadrement : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une intégration par parties donne

$$u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} f(x) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx$$

Comme f' est continue sur $[0, 1]$, on pose $N = \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\frac{1}{n+1} \left| \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \right| \leq \frac{N}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{N}{(n+1)(n+2)}$$

On en déduit que $\frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx$ est négligeable devant $\frac{f(1)}{n+1}$. Par conséquent $u_n \sim \frac{f(1)}{n}$.

Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes de signe fixe, la série $\sum u_n$ diverge.

3. Si $f(1) = 0$, l'intégration précédente montre que $|u_n|$ est majoré par une expression en $1/n^2$.

Ainsi, par critère de majoration des séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ converge, il en est donc de même de la série $\sum u_n$.

4. a) Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé.

Par continuité de h au point $x = 1$, $\exists \delta > 0, |1 - x| < \delta \implies |h(x) - h(1)| < \varepsilon$.

Par la relation de Chasles,

$$n \int_0^1 x^n (h(x) - h(1)) dx = n \int_0^{1-\delta} x^n (h(x) - h(1)) dx + n \int_{1-\delta}^1 x^n (h(x) - h(1)) dx$$

On pose : $I_{1,n} = n \int_0^{1-\delta} x^n (h(x) - h(1)) dx$; $I_{2,n} = n \int_{1-\delta}^1 x^n (h(x) - h(1)) dx$.

- D'une part, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|I_{2,n}| \leq n\varepsilon \int_{1-\delta}^1 x^n dx \leq n\varepsilon \int_0^1 x^n dx = \frac{n\varepsilon}{n+1} < \varepsilon$.
- D'autre part, en posant $M = \sup_{x \in [0, 1]} |h(x)| \in \mathbb{R}$, on trouve :

$$|I_{1,n}| \leq 2Mn \int_0^{1-\delta} x^n dx = \frac{2Mn}{n+1} (1-\delta)^{n+1},$$

quantité qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Il existe donc un rang n_1 tel que pour tout entier $n \geq n_1$, on a $|I_{1,n}| < \varepsilon$.

Ainsi, il existe un rang n_1 tel que pour tout entier $n \geq n_1$ on a :

$$\left| n \int_0^1 x^n (h(x) - h(1)) dx \right| < |I_{1,n}| + |I_{2,n}| < 2\varepsilon.$$

Ceci signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \int_0^1 x^n (h(x) - h(1)) dx \right] = 0$.

b) On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \int_0^1 x^n h(x) dx \right] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \int_0^1 x^n h(1) dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) h(1) = h(1) \end{aligned}$$

On conclut que $\lambda = h(1)$.

Exercice 1.07.

Soit λ un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{nx} dx$$

1. a) Montrer que $1 - P_n(\lambda) = \frac{1}{n!} \int_0^\lambda x^n e^{-x} dx$.

b) Déterminer une relation entre $P_n(n)$ et I_n .

2. Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $\psi(x) = -\frac{x + \ln(1-x)}{x^2}$.

Montrer que ψ admet un prolongement de classe C^1 sur $[0, 1[$, prolongement que l'on note encore ψ .

Montrer que ψ réalise une bijection de $[0, 1[$ sur un intervalle à préciser.

3. Pour $\sigma \in]0, 1[$, on pose $\delta = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $((1-x)e^x)^n = e^{-nx^2\psi(x)}$.

b) Montrer que : $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-x^2/2} dx \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

c) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini.

d) Montrer que $1 - P_n(n)$ est équivalent à $\frac{n^n}{n!} e^{-n} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ lorsque n tend vers l'infini.

4. En utilisant le théorème limite central, déterminer un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. a) On prouve la formule par récurrence sur n .

• Pour $n = 0$, la formule donne $1 - P_0(\lambda) = 1 - e^{-\lambda} = \int_0^\lambda e^{-x} dx$

• Hérédité. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} \int_0^\lambda x^{n+1} e^{-x} dx &= \frac{-\lambda^{n+1} e^{-\lambda}}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \int_0^\lambda x^n e^{-x} dx \\ &= \frac{-\lambda^{n+1} e^{-\lambda}}{(n+1)!} + 1 - P_n(\lambda) = 1 - P_{n+1}(\lambda) \end{aligned}$$

On conclut.

b) Les changements de variable successifs $u = 1 - x$, puis $v = nu$ de classe C^1 donnent

$$I_n = \int_0^1 u^n e^{n(1-u)} du = \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^n v^n e^{-v} dv$$

Donc : $I_n = \frac{e^n}{n^{n+1}} \times n!(1 - P_n(n))$, d'après la question 1.

2. On prolonge ψ par continuité en 0 en posant $\psi(0) = 1/2$. La fonction ψ est dérivable sur $]0, 1[$ avec

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^3} (x + 2 \ln(1-x) + \frac{x}{1-x}) = \frac{1}{x^3} \times h(x)$$

On a alors $h'(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$ et comme $h(0) = 0$, h qui est strictement croissante, est strictement positive sur $]0, 1[$. Il en est de même de ψ' et ψ réalise une bijection strictement croissante de $[0, 1[$ sur $[1/2, +\infty[$.

3. a) On commence par remarquer que pour tout $x \in]0, 1[$, $((1-x)e^x)^n = e^{-nx^2\psi(x)}$.

b) Ainsi $I_n = \int_0^1 e^{-nx^2\psi(x)} dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2/2} du \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Puis $I_n = \int_0^1 e^{-nx^2\psi(x)} dx \geq \int_0^\delta e^{-nx^2\psi(x)} dx \geq \int_0^\delta e^{-nx^2\psi(\delta)} dx$.

Le changement de variable linéaire $x = \sqrt{2n\psi(\delta)}u$ donne :

$$I_n \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-x^2/2} dx$$

À δ fixé, lorsque n tend vers $+\infty$, il vient $\sigma \int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-x^2/2} dx \rightarrow \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, puis, on fait tendre σ vers 1, ce qui donne $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

En regroupant les questions, il vient $1 - P_n(n) \sim \frac{n^n}{n!} e^{-n} \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$.

4. On sait que $P_n(n)$ représente la probabilité que la variable aléatoire S_n somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1. Le théorème limite central nous assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(n) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, on démontre la formule de Stirling, soit :

$$n! \underset{(\infty)}{\sim} \sqrt{2\pi n} \times n^n e^{-n}$$

Exercice 1.08.

Partie A

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante convergente de limite ℓ . On pose pour tout entier n non nul :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

1. Prouver que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante majorée, donc convergente.
2. Démontrer que pour tout entier n non nul : $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.
3. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ .

Partie B

On admet que, si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le réel ℓ , alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j = \ell \quad (*).$$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in [0, 1[$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
2. Pour tout entier naturel n , on pose, $v_n = 1 - u_n$.
 - a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right)$.
 - b) Etudier la convergence de la suite $(nv_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - c) En déduire que $u_n = 1 - \frac{2}{n} + o(n)$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

Partie A

1. Pour tout entier non nul n , on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n+1} nu_k + nu_{n+1} - \sum_{k=1}^n (n+1)u_k \right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \left(- \sum_{k=1}^n u_k + nu_{n+1} \right) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n (u_{n+1} - u_k) \end{aligned}$$

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_{n+1} \geq u_k$, d'où $v_{n+1} - v_n \geq 0$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. La suite $(u_n)_n$ est majorée par ℓ . Il en est donc de même de la suite $(v_n)_n$ et cette suite converge de limite ℓ' telle que $\ell' \ell$.

2. Pour tout entier non nul n , on a :

$$2v_{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = v_n + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \quad (1)$$

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, $\forall k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, $u_n \leq u_k$ d'où $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq nu_n$ et de (1) on tire

$$2v_{2n} \geq v_n + \frac{nu_n}{n} \implies v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}. \quad (2)$$

3. Le passage à la limite dans (2) donne : $\ell' \geq \frac{\ell + \ell'}{2}$, soit $\ell' \ell$, d'où $\ell = \ell'$.

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite ℓ .

Partie B

1. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0; 1[$ (récurrence immédiate) et $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{2} > 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante majorée par 1, donc convergente vers $\ell \in]0, 1[$.

• $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2}$ est continue sur \mathbb{R} et $f(x) = x \iff x = 1$ et d'autre part $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On a donc $\ell = 1$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} &= \frac{v_n - v_{n+1}}{v_{n+1}v_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{(1 - u_{n+1})(1 - u_n)} = \frac{(u_n - 1)^2}{2(1 - \frac{u_n^2 + 1}{2})(1 - u_n)} \\ &= \frac{(u_n - 1)^2}{(1 - u_n^2)(1 - u_n)} = \frac{1}{1 + u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) On déduit de ce qui précède : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k-1}} \right) = \frac{1}{2}$, ce qui donne après réduction :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} \right) = \frac{1}{2}. \text{ D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} nv_n = 2.$$

c) Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - u_n) = 2$, d'où $u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 1.09.

Dans tout l'exercice, K est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} donnée par :

$$K(x) = P(x)e^{-x/2},$$

où P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

L'objet de l'exercice est la recherche de fonctions continues f de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} telles que pour tout réel positif x :

$$f(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} K(x+t)f(t) dt \quad (1)$$

1. On considère pour tout entier naturel n l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
Démontrer que cette intégrale converge et préciser sa valeur J_n en fonction de n .
2. Dans cette question, on suppose que P est la fonction polynôme constante égale à 1.
- a) Soit f une solution de (1). Montrer qu'il existe un réel C tel que $f = CK$.
- b) On considère réciproquement une fonction $f = CK$, où C est un nombre réel donné.
À quelle condition sur C cette fonction est-elle solution de (1) ? En déduire que (1) n'a pas de solution.
3. Dans cette question, on désigne par λ un nombre réel et l'on suppose que P est la fonction polynôme $P : x \mapsto \lambda + x$.
- a) Soit E l'espace vectoriel engendré par les 2 applications de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} :

$$\Phi_0 : x \mapsto e^{-x/2}; \quad \Phi_1 : x \mapsto x e^{-x/2}$$

- i) Montrer que (Φ_0, Φ_1) est une base de E .
- ii) Soit Φ un élément de E et Ψ la fonction définie pour $x \geq 0$ par :

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\Phi(t) dt$$

Prouver que Ψ est ainsi bien définie et montrer que Ψ est un élément de E .

- iii) Montrer que l'application $u : \Phi \in E \mapsto u(\Phi) = \Psi \in E$ est un endomorphisme de E . Déterminer la matrice M de u dans la base (Φ_0, Φ_1) . L'endomorphisme u est-il un automorphisme de E ?
- b) Soit f une solution de (1). Montrer qu'elle appartient à E .
- c) On considère réciproquement une fonction $f = \alpha_0 \Phi_0 + \alpha_1 \Phi_1$ de E , où α_0 et α_1 sont des nombres réels.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α_0, α_1) pour que cette fonction f soit solution de (1). À quelle condition (1) admet-elle une seule solution ?

Solution :

1. On reconnaît dans l'intégrale demandée $\Gamma(n+1) = n!$.
2. a) Soit f une solution de (1). La convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t/2} f(t) dt$ est acquise et un calcul immédiat donne pour tout $x \geq 0$ $f(x) = e^{-x/2} (1 + \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t/2} dt) = CK$, avec $C = 1 + \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t/2} dt$.
- b) Réciproquement, soit $C \in \mathbb{R}$ et $f = CK$; la fonction f est solution de (1) si et seulement si pour tout $x \geq 0$: $Ce^{-x/2} = e^{-x/2} + \int_0^{+\infty} e^{-(x+t)/2} Ce^{-t/2} dt$.
- Soit après simplification : $C = 1 + C \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 + C$. Il n'y a donc pas de solution.

3. a) i) Les deux fonctions Φ_0 et Φ_1 ne peuvent être liées vu leur allure au voisinage de $+\infty$ par exemple. Ainsi (Φ_0, Φ_1) est une famille libre de E et génératrice de E par définition : c'est une base de E .

ii) Posons, pour tout réel x positif

$$\Psi_0(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\Phi_0(t)dt \text{ et } \Psi_1(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\Phi_1(t)dt$$

Un calcul élémentaire donne :

$$\Psi_0(x) = \int_0^{+\infty} (\lambda + x + t)e^{-\frac{x+t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} dt = (\lambda + 1)\Phi_0(x) + \Phi_1(x).$$

De même : $\Psi_1(x) = (\lambda + 2)\Phi_0(x) + \Phi_1(x)$.

Enfin, pour toute fonction Φ un élément de E , il existe un couple unique (α_0, α_1) tel que $\Phi = \alpha_0\Phi_0 + \alpha_1\Phi_1$. Par linéarité de l'intégration, $\Psi(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\Phi(t)dt$ est convergente pour tout réel positif x et $\Psi = \alpha_0\Psi_0 + \alpha_1\Psi_1 \in E$.

iii) D'après ce qui précède l'application $u : \Phi \in E \mapsto u(\Phi) = \Psi \in E$ est un endomorphisme de E , dont la matrice dans la base (Φ_0, Φ_1) est : $M = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & \lambda + 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi u est un automorphisme car M est clairement inversible.

b) Soit f une solution de (1), l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\lambda a + x + t)e^{-\frac{x+t}{2}} f(t)dt$ est donc convergente pour tout x positif et on a $f(x) = (\lambda + x)e^{-\frac{x}{2}} + \int_0^{+\infty} (\lambda + x + t)e^{-\frac{x+t}{2}} f(t)dt$.

D'où $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\lambda + \int_0^{+\infty} (\lambda + t)e^{-\frac{t}{2}} f(t)dt + x \left[1 + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} f(t)dt \right] \right)$.

Que l'on écrit : $f(x) = \alpha e^{-\frac{x}{2}} + \beta x e^{-\frac{x}{2}} = \alpha\Phi_0(x) + \beta a\Phi_1(x)$, avec α et β bien choisis, donc $f \in E$.

c) Soit $f = \alpha_0\Phi_0 + \alpha_1\Phi_1$ un élément de E . f est une solution de (1) si et seulement si :

$$f(x) = (\lambda + x)e^{-\frac{x}{2}} + \alpha_0\Psi_0(x) + \alpha_1\Psi_1(x) \quad (*)$$

$$(*) \iff \alpha_0\Phi_0 + \alpha_1\Phi_1 = \lambda\Phi_0 + \Phi_1 + \alpha_0((\lambda + 1)\Phi_0 + \Phi_1) + \alpha_1((\lambda + 2)\Phi_0 + \Phi_1)$$

Comme (Φ_0, Φ_1) est une base de E , on déduit par identification des coefficients que f est une solution de (1) si et seulement si :

$$\begin{cases} ((\lambda + 1) - 1)\alpha_0 + (\lambda + 2)\alpha_1 = -\lambda \\ \alpha_0 + \alpha_1 = -1 \end{cases}$$

f est définie de façon unique si et seulement si ce système admet une solution unique, c'est-à-dire si la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda + 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

On conclut que (1) admet une seule solution si et seulement si $\lambda \neq -2$.

Exercice 1.10.

Dans tout l'exercice, a est un réel fixé supérieur ou égal à 1. On note, sous réserve d'existence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} e^{-at} t^n dt \text{ et } I = \int_0^{+\infty} e^{-at} \frac{\sin t}{t} dt$$

1. a) Prouver que pour tout entier n , l'intégrale définissant I_n converge.

b) Établir, pour tout $n \geq 1$, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} . En déduire I_n en fonction de n et de a .

2. Démontrer que l'intégrale définissant I est absolument convergente.

3. a) Soit x un réel positif. Montrer que pour tout entier naturel n

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

b) En déduire qu'il existe un réel K_n dépendant de n tel que :

$$\left| I - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{I_{2k}}{(2k+1)!} \right| \leq K_n I_{2n+1}$$

c) En déduire que la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)a^{2k+1}}$ est convergente de somme I .

4. a) Prouver que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x) \right| \leq \frac{1}{2n+3}$.

c) En déduire une expression de I en fonction de a .

Solution :

1. a) Pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto e^{-at} t^n$ est continue sur \mathbb{R}^+ , négligeable au voisinage de $+\infty$ devant t^{-1525} , on en déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-at} t^n dt$ converge.

b) En intégrant par parties, d'abord sur un segment, puis en passant à la limite, on obtient $I_n = \frac{n}{a} I_{n-1}$.

Par récurrence, il vient pour tout entier naturel n , $I_n = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

2. a) On a $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, ce qui règle le problème en 0 et $e^{-at} \frac{|\sin t|}{t}$ est négligeable devant t^{-1515} au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve la convergence absolue de l'intégrale définissant I .

3. a) Le résultat demandé est banal par toute formule de Taylor.

b) Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\left| \frac{\sin t}{t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k} \right| \leq \frac{t^{2n+1}}{(2n+2)!}$.

En multipliant par $e^{-at} > 0$ et en intégrant (toutes les intégrales convergent) :

$|I - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{I_{2k}}{(2k+1)!}| \leq \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$ et on peut prendre $K_n = \frac{1}{(2n+2)!}$.

c) On a : $\frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+2)a^{2n+2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

En passant à la limite dans l'expression précédente, il vient :

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{I_{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)a^{2k+1}}$$

4. a) Il s'agit simplement de l'identité géométrique.

b) En intégrant sur le segment $[0, x]$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

$$\text{Or : } 0 \leq \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^x t^{2n+2} dt \leq \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3}.$$

D'où le résultat demandé.

c) Par passage à la limite (légitime) : pour tout $x \in [0, 1]$: $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$

$$\text{Donc } I = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1/a)^{2k+1}}{(2k+1)} = \arctan\left(\frac{1}{a}\right).$$

On peut aussi écrire : $I = \frac{\pi}{2} - \arctan(a)$.

Exercice 1.11.

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $a \in \mathbb{R}$.

a) Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ converge pour tout réel x . On note alors sa somme $\varphi(x)$.

b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x} \varphi(x) - a] = 0$.

(On pourra écrire e^x sous la forme d'une série et « couper la somme en deux ».)

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^n u_k, \text{ et } U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

a) Justifier que les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{U_n}{n!} x^n$ convergent pour tout x réel. On note leurs sommes respectives :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n}{n!} x^n.$$

On admet que f et g sont dérivables et qu'on peut dériver terme à terme les séries ci-dessus pour tout x réel.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x) + g(x)$.

c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t) e^{-t} dt = e^{-x} [g(x) - f(x)]$.

d) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-t} dt$.

3. Dans cette question, on prend : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$.

Calculer $f(x)$ et $g(x)$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} [g(x) - f(x)]$.

Que dire de $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-t} dt$?

Solution :

1. a) On écrit $\frac{a_n}{n!} x^n = O\left(\frac{|x|^n}{n!}\right)$ qui est le terme général d'une série exponentielle convergente.

b) On a $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - a| < \varepsilon$
d'où, pour $x > 0$,

$$|e^{-x} \varphi(x) - a| \leq e^{-x} \sum_{k=0}^N |a_k - a| \frac{x^k}{k!} + e^{-x} \varepsilon \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leq e^{-x} \sum_{k=0}^N |a_k - a| \frac{x^k}{k!} + \varepsilon$$

$$\leq 2\varepsilon$$

pour tout x assez grand par croissances comparées.

2. a) On utilise la question 1.a, puisque $u_n \rightarrow 0$ et $U_n \rightarrow U$.

b) Par dérivation terme à terme et séparation en deux séries convergentes on a, pour tout x ,

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} [u_n + U_{n-1}] \frac{n x^{n-1}}{n!} = f'(x) + g(x)$$

c) Immédiat par dérivation et égalité en $t = 0$ car $g(0) = U_0 = u_0 = f(0)$.

On peut également multiplier par e^{-x} , puis utiliser une intégration.

d) D'après la question 1. b

$$\int_0^{+\infty} [f(t) e^{-t}] dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x} [g(x) - f(x)]] = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = U$$

3. On remarque que les résultats précédents ne s'appliquent pas car la série $\sum u_n$ diverge.

Cependant,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x} \text{ et } g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} U_{2p} \frac{x^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(partie paire de la fonction exponentielle), puis

$$e^{-x} [g(x) - f(x)] = \frac{1 - e^{-2x}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

et

$$\int_0^{+\infty} [f(t) e^{-t}] dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$$

Exercice 1.12.

Soit α un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$$

0. Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$. On notera $f(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$

1. Montrer que pour tout réel x , la série de terme général $u_n(x)$ est convergente. On note alors :

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

2. a) Montrer que la fonction S est impaire.

b) Pour n entier supérieur ou égal à 1, étudier les variations de u_n sur \mathbb{R} .

c) En déduire les variations de S sur $[1, +\infty[$ puis sur $]-\infty, -1]$

3. a) Montrer que pour $x \geq 1$, et $n \geq 1$:

$$\frac{x}{(1+x)^2} f(\alpha) \leq S(x) \leq \frac{1}{x} f(\alpha)$$

(On pourra utiliser l'encadrement : $nx^2 < 1 + nx^2 < n(1+x)^2$.)

b) En déduire un équivalent de $S(x)$ et sa limite en $+\infty$.

4. On suppose $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

a) En minorant pour $x \geq 0$, après justification, la somme $S(x)$ par $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x)$, montrer que :

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \frac{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}$$

b) En déduire que S n'est pas continue en 0.

c) Déterminer la limite de S en 0.

Solution :

0. Si $x \neq 0$, $u_n(x) \sim \frac{1}{n^{\alpha+1}x}$ et il suffit d'appliquer le critère de Riemann, puisque $\alpha + 1 > 1$. Si $x = 0$, le résultat demandé est banal.

1. Pour $x = 0$, le terme général $u_n(0) = 0$ et la série converge vers 0. Pour $x > 0$, $u_n(x) \sim \frac{1}{x} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$

Ce dernier est le terme général d'une série de Riemann convergente, car $\alpha + 1 > 1$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente pour $x > 0$.

On remarque que les fonctions u_n sont impaires, il suffit de tout multiplier par -1 et ainsi on a aussi la convergence pour $x < 0$.

On a établi ainsi la convergence pour tout x réel de la série de terme général

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} \text{ pour } n > 0$$

2. a) Les fonctions u_n étant impaires, les sommes partielles le sont aussi et en passant à la limite, S est aussi impaire.

b) La fonction u_n est de type fraction rationnelle à dénominateur strictement positif pour $x \in \mathbb{R}$.

Cette fonction est donc dérivable sur \mathbb{R} et :

$$u'_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} \frac{(1+nx^2) - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{(1-nx^2)}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$$

Ainsi, u_n est strictement croissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}]$, et strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n}}]$ et $[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty[$, car

$$u'_n(x) > 0 \iff -\frac{1}{\sqrt{n}} < x < \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } u'_n(x) < 0 \iff x > \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ou } x < -\frac{1}{\sqrt{n}}$$

c) Comme $[-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}] \subset [-1, 1]$, u_n est strictement décroissante sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Par somme finie, les S_n sont aussi décroissantes sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

d) Les sommes partielles S_n sont strictement décroissantes sur $[1, +\infty[$. En passant à la limite, lorsque n tend vers l'infini, il vient :

$\forall x, y, 1 \leq x \leq y \implies S(x) \leq S(y)$. La fonction S est aussi décroissante sur $[1, +\infty[$. Par symétrie, S étant impaire, elle est aussi décroissante sur $]-\infty, -1]$.

3. a) Pour $x \geq 1$, et $n \geq 1$, en utilisant la majoration $1+nx^2 \leq n(1+x)^2$ équivalente à $1+nx^2 \leq n+2nx+nx^2$ ou encore à $1 \leq n+2nx$ qui est vraie,

on obtient finalement :

$$\forall n > 0, \forall x \geq 1, \frac{x}{(1+x)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \leq S(x) \leq \frac{x}{x^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

$$\frac{x}{(1+x)^2} f(\alpha+1) \leq S(x) \leq \frac{1}{x} f(\alpha+1)$$

b) Ainsi, $\frac{x^2}{(1+x)^2} \leq \frac{S(x)}{\frac{1}{x} f(\alpha+1)} \leq 1$. Comme $\frac{x^2}{(1+x)^2}$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$,

on a par le théorème d'encadrement que $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} f(\alpha+1) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$

Et la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est 0.

c) Par imparité, on obtient le même résultat en $-\infty$

4. a) Pour $x \geq 0$, la série étant à termes positifs, et $\alpha > 0$, on minore sa somme par la somme des termes d'indices compris entre $n+1$ et $2n$, et le terme général dans cette somme par $\frac{x}{(2n)^\alpha(1+2nx^2)}$. On obtient :

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{(2n)^\alpha (1 + 2n \frac{1}{2n})} \geq \frac{n}{2^{\alpha+\frac{3}{2}} \times n^{\alpha+\frac{1}{2}}} = \frac{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}$$

b) Le minorant obtenu tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Si S était continue en 0^+ , la limite de la suite $S(\frac{1}{\sqrt{2n}})$ devrait être $S(0) = 0$, or par minoration cette limite est $+\infty$ Donc on a bien prouvé que S n'est pas continue en 0^+ .

c) D'après la question précédente, la seule limite possible pour $S(x)$ en 0^+ est $+\infty$.

Par imparité, on obtient comme seule limite possible pour $S(x)$ en 0^- la limite $-\infty$.

Exercice 1.13.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout x réel :

$$g_n(x) = x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right) \dots \left(1+\frac{x}{n}\right)n^{-x}$$

et

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \dots, -(n-1)\}, f_n(x) = \frac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)}$$

1. Soit $x \in E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$.

a) Montrer que la série de terme général $v_n(x) = x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ est convergente.

On note $L(x) = \sum_{n=2}^{\infty} v_n(x)$.

b) En déduire que la suite $(\ln(p_N(x)))_N$ définie par $p_N(x) = \prod_{n=2}^N f_n(x)$ converge et préciser sa limite en fonction de $L(x)$.

c) Déterminer la limite de la suite $N \mapsto w_N(x) = \prod_{n=2}^N \frac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)}$, en fonction de $L(x)$.

d) En déduire que $\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g_1(x)e^{L(x)}$.

Dans la suite, nous noterons pour tout x de E : $g(x) = g_1(x)e^{L(x)}$.

2. Montrer que $\forall x \in E, g(x) = xg(x+1)$.

On pose $\forall x \in E, \Gamma(x) = \frac{1}{g(x)}$.

3. Justifier que la fonction Γ est bien définie sur E .

4. a) Montrer que : $\forall x \in E, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.

Solution :

1. a) La série de terme général $v_n(x) = x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ est convergente. En effet, un développement limité à l'ordre 2 donne :

$$v_n(x) = x\left(\frac{-1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{x^2}{n^2}\right) \sim -\frac{x^2 + x}{2n^2}$$

(car $x(x+1)$ est non nul par hypothèse). On conclut grâce au critère de comparaison avec une série de Riemann,

On a bien la convergence simple (à x fixé dans E) de la série de terme général $v_n(x)$ sur E .

On note $L(x)$ la somme de cette série : $L(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} v_n(x)$

b) On a :

$$\ln(p_N(x)) = \sum_{n=2}^N \ln(f_n(x)) = \sum_{n=2}^N \left(x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right) = \sum_{n=2}^N v_n(x).$$

En effet, On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) &= x(1+x)\left(1 + \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{n}\right) n^{-x} \\ &= \frac{x(x+1) \dots (x+n)}{n!} n^{-x} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \dots, -(n-1)\}, f_n(x) = \frac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^x$$

c) Par continuité de l'exponentielle, on a donc :

$$\forall x \in E, \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\prod_{n=2}^N f_n(x)\right) = L(x), \text{ d'où :}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} w_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=2}^N \frac{g_n(x)}{g_{n-1}(x)} = e^{L(x)}$$

d) On en déduit que $\forall x \in E, g_n(x) = g_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g_1(x) e^{L(x)}$.

Dans la suite, nous noterons pour x dans E , $g(x) = g_1(x) e^{L(x)}$

2. On remarque que pour x non entier négatif :

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{g(x+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n(x)}{g_n(x+1)} = \frac{x(x+1) \dots (x+n)}{(x+1)(x+2) \dots (x+n+1)} \frac{n^{-x}}{n^{-x-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{n+x+1} = x \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $\forall x \in E, g(x) = xg(x+1)$, $\forall x \in -\mathbb{N}$, $g(x) = 0$.

En effet, dans le cas où $x = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \geq p$, $g_n(x) = 0$

3. La fonction Γ est bien définie sur E , car $g(x) = x(x+1)e^{L(x)}$ sur E et n'est pas nulle sur E , tandis que g s'annule sur les opposés des entiers, d'après ce qu'on vient de voir :

$$\forall x \in E, \Gamma(x) = \frac{1}{g(x)}$$

4. a) On a $\forall x \in E, \Gamma(x+1) = \frac{1}{g(x+1)} = \frac{x}{g(x)} = x\Gamma(x)$. Soit :

$$\forall x \in E, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

$$b) \Gamma(1) = \frac{1}{g(1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{g_n(1)} = 1$$

$$\text{En effet, } g_n(1) = \frac{(n+1)!}{n!} n^{-1} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par récurrence, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$$

Exercice 1.14.

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on note $(\Delta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\Delta^2 u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Delta u_n = u_n - u_{n+1}, \Delta^2 u_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n.$$

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *convexe* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n \geq 0$.

1. a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n$ en fonction de Δu_n et de Δu_{n+1} .

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la suite réelle $(\Delta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convexe.

On suppose pour toute la suite de l'exercice que la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convexe et bornée.

2. a) Démontrer que la suite réelle $(\Delta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite (on pourra raisonner par l'absurde).

b) Démontrer que la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On notera ℓ sa limite, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

c) Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq 2p$. Démontrer que l'on a : $0 \leq n\Delta u_n \leq 2(u_p - u_n)$.

En déduire les limites des suites $(n\Delta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n\Delta u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

d) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k\Delta^2 u_k = \sum_{k=1}^n \Delta u_k - n\Delta u_{n+1}$.

e) En déduire que $\sum_{k=1}^{\infty} k\Delta^2 u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta u_k$.

Solution :

1. a) D'après la définition de $\Delta^2 u_n$ et de Δu_n , on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_n &= u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) \\ &= \Delta u_n - \Delta u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n+1}$.

b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convexe si et seulement si $\Delta^2 u_n \geq 0$, par définition. Or on a vu, en a., que $\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n+1}$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convexe si et seulement si la suite $(\Delta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Dans tout le reste de l'exercice, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est supposée convexe et bornée.

a) On sait que $(\Delta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convexe. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire,

$$|\Delta u_n| \leq |u_n - u_{n+1}| \leq |u_n| + |u_{n+1}| \leq 2M.$$

La suite $(\Delta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée et monotone. On a ainsi, montré que $(\Delta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

Montrons par l'absurde que $\ell = 0$. On suppose tout d'abord que $\ell > 0$. Il existe alors N_0 tel que $\Delta u_n \geq \frac{\ell}{2}$ pour tout $n \geq N_0$.

$$\text{Ainsi, pour tout } n \geq N_0, u_{N_0} - u_{n+1} = \sum_{k=N_0}^n \Delta u_k \geq \frac{\ell(n - N_0 + 1)}{2}.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$, ce qui est absurde puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On aboutirait de même à $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$, en supposant $\ell < 0$. Donc on a montré par l'absurde que la limite de $(\Delta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle.

b) Comme la suite $(\Delta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît vers 0, elle est positive. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et bornée. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

c) Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq 2p$. En utilisant la décroissance de $(\Delta u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient,

$$u_p - u_n = \sum_{k=p}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=p}^{n-1} \Delta u_k \geq (n-p)\Delta u_n$$

Comme $n-p \geq \frac{n}{2}$, on en déduit que $0 \leq n\Delta u_n \leq 2(u_p - u_n)$.

En particulier, pour $p = \lfloor n/2 \rfloor$, $0 \leq n\Delta u_n \leq 2(u_{\lfloor n/2 \rfloor} - u_n)$.

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor n/2 \rfloor = \infty$, on en déduit que $(u_{\lfloor n/2 \rfloor})_{n \in \mathbb{N}}$ est de même limite que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par composition des limites. Ainsi, par encadrement $\lim_{n \rightarrow \infty} n\Delta u_n = 0$.

Comme $n\Delta u_{n+1} = (n+1)\Delta u_{n+1} - \Delta u_{n+1}$, on obtient $\lim_{n \rightarrow \infty} n\Delta u_{n+1} = 0$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k\Delta^2 u_k &= \sum_{k=1}^n k(\Delta u_k - \Delta u_{k+1}) = \sum_{k=1}^n k\Delta u_k - \sum_{k=1}^n k\Delta u_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n k\Delta u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)\Delta u_k = \Delta_1 + \sum_{k=2}^n \Delta u_k - n\Delta u_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \Delta u_k - n\Delta u_{n+1} \end{aligned}$$

e) De la relation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \Delta u_k = u_1 - u_{n+1}$, et de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on en déduit que les deux sommes infinies de l'énoncé existent et sont égales :

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\Delta^2 u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta u_k.$$

Exercice 1.15.

Soit λ un réel fixé *strictement négatif*.

On note E l'ensemble des fonctions de classe C^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant l'équation $f'' + \lambda f = 0$.

On note φ l'application de E dans \mathbb{R}^2 qui à toute fonction $f \in E$ associe $(f(0), f'(0))$.

1. Montrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Montrer que l'application φ est linéaire.

2. On note f_λ et g_λ les deux applications définies sur \mathbb{R} par :

$$f_\lambda(x) = e^{x\sqrt{-\lambda}}, g_\lambda(x) = e^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

a) Montrer que (f_λ, g_λ) est une famille libre de E .

b) Soit f un élément de E non nul et non multiple de f_λ . Soit

$$h : x \rightarrow f'(x)f_\lambda(x) - f(x)f'_\lambda(x)$$

Montrer que h est constante. En déduire que φ est injective, puis donner la dimension de E .

3. On se propose dans cette question de déterminer toutes les fonctions f continues sur \mathbb{R} telles que pour tout x réel :

$$1 + f(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt \quad (\star)$$

a) Soit f une solution de l'équation précédente. Montrer que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

b) En déduire toutes les solutions de l'équation (\star) .

Solution :

1. Il suffit de revenir aux définitions d'espace vectoriel et de linéarité.

2. a) On vérifie facilement que f_λ et g_λ sont deux éléments de E .

Supposons que pour tout réel x , $af_\lambda(x) + bg_\lambda(x) = 0$. En évaluant en 0, il vient $a + b = 0$.

En dérivant puis en évaluant en 0, il vient $a - b = 0$; ceci entraîne que $a = b = 0$, donc que la famille (f_λ, g_λ) est libre.

Ainsi $\dim E \geq 2$.

b) La fonction h est de classe C^1 . En dérivant, il vient

$$h' = f''f_\lambda - ff''_\lambda = -\lambda ff_\lambda + \lambda ff_\lambda = 0$$

Ainsi la fonction h est-elle constante sur \mathbb{R} , soit pour tout x réel :

$$f'(x)f_\lambda(x) - f(x)f'_\lambda(x) = K$$

Si $f \in \text{Ker } \varphi$, alors $f(0) = f'(0) = 0$ et en remplaçant dans l'équation précédente, on obtient $K = 0$. Donc

$$0 = f'(x)f_\lambda(x) - f(x)f'_\lambda(x) = e^{x\sqrt{-\lambda}}(f'(x) - \sqrt{-\lambda}f(x)) \Rightarrow f'(x) - \sqrt{-\lambda}f(x) = 0$$

Ainsi

$$0 = (f'(x) - \sqrt{-\lambda}f(x))e^{-x\sqrt{-\lambda}} \Rightarrow (f(x)e^{-x\sqrt{-\lambda}})' = 0 \Rightarrow f(x)e^{-x\sqrt{-\lambda}} = C \text{ et}$$

$$f(x) = Ce^{x\sqrt{-\lambda}} = Cf_\lambda(x)$$

Ceci est en contradiction avec l'énoncé, donc $C = 0$, et $f = 0$ ce qui montre que φ est injective.

Ainsi $\dim E = \dim \text{Im } \varphi \leq 2$.

Finalement E est de dimension 2.

3. a) L'équation (\star) se réécrit

$$f(x) = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt - 1$$

Ceci montre que f est de classe C^1 . En dérivant, il vient $f'(x) = \int_0^x f(t) dt$, ce qui montre que f est de classe C^2 , puis $f''(x) = f(x)$.

On est ainsi ramené à la question précédente avec $\lambda = -1$.

Ainsi si f est solution, il existe a et b tels que : $f(x) = ae^x + be^{-x}$.

Il reste à regarder la réciproque. En réintroduisant f dans l'équation (\star) , on obtient

$$1 + ae^x + be^{-x} = -x(a - b) + ae^x + be^{-x} - (a + b)$$

Ainsi f est solution si et seulement si $\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = -1 \end{cases}$, soit $a = b = -1/2$.

Exercice 1.16.

Pour tout entier naturel n et tout réel x , on pose :

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

1. Calculer explicitement $L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$ pour tout réel x .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , L_n est une fonction polynomiale.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $h_n^{(n)}(x)$ et $h_n^{(n+1)}(x)$ en fonction de $L_n(x)$, $L'_n(x)$ et e^{-x} .
 - b) En partant d'une relation entre h_n et h_{n+1} , établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, L_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} L'_n(x) + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $L'_{n+1} = L'_n - L_n$ en partant de la relation $(h_{n+1}^{(n+1)})' = (h'_{n+1})^{(n+1)}$.
5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et x réel. Établir que $xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$.
6. Démontrer que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, (n+1)L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

Solution :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a clairement $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1$.

2. La fonction h_n est de classe C^∞ en tant que produit de fonctions de classe C^∞ , et, par la formule de Leibniz, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k} e^{-x}$$

Ainsi $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} (-1)^{n-k}$ et L_n est polynomiale.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $h_n^{(n)}(x) = n!e^{-x}L_n(x)$ et $h_n^{(n+1)}(x) = n!e^{-x}(L'_n(x) - L_n(x))$.

b) Pour tout réel x , $h_{n+1}(x) = xh_n(x)$.

En appliquant la formule de Leibniz à ce produit de fonctions de classe C^∞ , on obtient

$$\begin{aligned} h_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \binom{n+1}{0} x h_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1} h_n^{(n)}(x) \\ &= x h_n^{(n+1)}(x) + (n+1) h_n^{(n)}(x) \\ &= n!e^{-x}(xL'_n(x) - xL_n(x) + (n+1)L_n(x)) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} L_{n+1}(x) &= \frac{e^x h_{n+1}^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} = \frac{xL'_n(x) - xL_n(x) + (n+1)L_n(x)}{n+1} \\ &= \frac{xL'_n(x)}{n+1} + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x). \end{aligned}$$

4. Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. On a :

$$h'_{n+1}(x) = e^{-x}((n+1)x^n - x^{n+1}) = (n+1)h_n(x) - h_{n+1}(x). \text{ Ainsi,}$$

$$h_{n+1}^{(n+2)} = (h'_{n+1})^{(n+1)}(x) = (n+1)h_n^{(n+1)}(x) - h_{n+1}^{(n+1)}(x).$$

Comme $h_{n+1}^{(n+2)}(x) = \left(h_{n+1}^{(n+1)}\right)'$ et $h_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!e^{-x}L_{n+1}(x)$, on en déduit que :

$$(n+1)h_n^{(n+1)}(x) - h_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!e^{-x}(L'_{n+1}(x) - L_{n+1}(x)).$$

D'où

$$(n+1)n!e^{-x}(L'_n(x) - L_n(x)) - (n+1)!e^{-x}L_{n+1}(x) = (n+1)!e^{-x}(L'_{n+1}(x) - L_{n+1}(x)).$$

Ainsi, $L'_{n+1} = L'_n - L_n$.

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$L'_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1}(L''_n(x) - L'_n(x)) + \frac{L'_n(x) - L_n(x)}{n+1} + L'_n(x)$$

puis que :

$$L'_n(x) - L_n(x) = \frac{x}{n+1}(L''_n(x) - L'_n(x)) + \frac{L'_n(x) - L_n(x)}{n+1} + L'_n(x).$$

Ainsi, $xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$.

6. Soient $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$ et $\delta(x) = (n+1)L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x)$. Ainsi, $\delta(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x)$

$$= xL'_n(x) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x)$$

$$= x(L'_{n-1}(x) - L_{n-1}(x)) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x) = nL_{n-1}(x) - nL_{n-1}(x).$$

Ainsi :

$$(n+1)L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

Exercice 1.17.

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k^x}$, où $k^x = \exp(x \ln(k))$.

1. On s'intéresse à la convergence des suites $(S_n(x))_{n \geq 1}$.

a) Soit $x > 0$. Etablir pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités

$$S_{2n+1}(x) \leq S_{2n+3}(x) \leq S_{2n+2}(x) \leq S_{2n}(x).$$

b) En déduire que les suites $(S_{2n+1}(x))_{n \geq 0}$ et $(S_{2n}(x))_{n \geq 1}$ convergent pour tout réel strictement positif x et admettent la même limite.

c) Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^x}$ converge pour $x > 0$. On notera désormais $f(x)$ la somme de cette série.

2. On va maintenant s'intéresser à une autre expression de la fonction f .

a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x)$ est la somme de la série de terme général $(\frac{1}{(2p)^x} - \frac{1}{(2p-1)^x})_{p \geq 1}$, c'est-à-dire que l'on a $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (\frac{1}{(2p)^x} - \frac{1}{(2p-1)^x})$.

b) Soient $p \geq 1$ et $x > 0$. Prouver que l'on a : $|\frac{1}{(2p)^x} - \frac{1}{(2p-1)^x}| \leq \frac{x}{(2p-1)^{x+1}}$.

3. On considère une série convergente de terme général r_p , ($p \geq 1$), positif ou nul et une suite $(u_p)_{p \geq 1}$ de fonctions continues sur un intervalle $I =]a, b[\subset \mathbb{R}_+^*$ qui vérifient $|u_p(x)| \leq r_p$ pour tout $p \geq 1$ et tout $x \in I$.

a) Pour tout $x \in I$, justifier la convergence de la série $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$. On notera $g(x)$ la somme de cette série.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un plus petit entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{p=N+1}^{\infty} r_p < \frac{\varepsilon}{4}$.

On notera $N(\varepsilon)$ cet entier.

Pour tout couple $(t, x) \in I^2$, prouver que l'on a :

$$|g(t) - g(x)| \leq \left| \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(t) - \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(x) \right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) En déduire que la fonction g est continue sur I .

4. Prouver que la fonction f définie dans la première question est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Solution :

1. a) Soit $x > 0$, on a $S_{2n+3}(x) - S_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)^x} - \frac{1}{(2n+3)^x} \geq 0$.

De la même manière, on vérifie que

$$S_{2n}(x) - S_{2n+2}(x) \geq 0 \text{ et que } S_{2n+2}(x) - S_{2n+3}(x) \geq 0.$$

b) D'après 1) a), les deux suites $(S_{2n+1}(x))_{n \geq 0}$ et $(S_{2n}(x))_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

La suite $(S_{2n+1}(x))_{n \geq 0}$ est croissante et majorée par $S_2(x)$, elle converge donc vers une limite l_1 . La suite $(S_{2n}(x))_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par $S_1(x)$, elle converge donc vers une limite l_2 . Comme $S_{2n+1}(x) - S_{2n}(x) = -1/(2n+1)^x \rightarrow 0$, lorsque n tend vers $+\infty$, on voit que $l_1 = l_2 = f(x)$.

c) Les suites $(S_{2n+1}(x))_{n \geq 0}$ et $(S_{2n}(x))_{n \geq 1}$ convergent toutes les deux vers $f(x)$.

Donc, dès que l'on se donne un intervalle ouvert I contenant $f(x)$, il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite $(S_{2n+1}(x))_{n \geq 0}$ en dehors de I et un nombre fini de termes de la suite $(S_{2n}(x))_{n \geq 1}$ en dehors de I .

Il n'y a donc qu'un nombre fini de termes de la suite $(S_n(x))_{n \geq 1}$ qui ne sont pas dans I , ce qui prouve bien que la série converge vers $f(x)$.

2. a) Il suffit de remarquer que $\sum_{p=1}^m \left(\frac{1}{(2p)^x} - \frac{1}{(2p-1)^x} \right) = S_{2m}(x)$ et de dire que $S_{2m}(x)$ converge vers $f(x)$ d'après 2) b).

b) Soient $p \geq 1$ et $x > 0$, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\left| \frac{1}{(2p)^x} - \frac{1}{(2p-1)^x} \right| \leq \sup \left\{ \left| -\frac{x}{t^{x+1}} \right| ; t \in [2p-1, 2p] \right\} \leq \frac{x}{(2p-1)^{x+1}}.$$

3. a) Si $x \in I$, le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs et l'inégalité $|u_p(x)| \leq r_p$ nous assurent que la série $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

b) Comme la série à termes positifs $\sum_{p \geq 1} r_p$ est convergente, ses restes décroissent vers 0. Il n'y a qu'un nombre fini M de restes $\sum_{p=m+1}^{+\infty} r_p$ qui sont en dehors de l'intervalle $[0, \varepsilon/4[$,

il existe donc un plus petit entier $N(\varepsilon) = M + 1$ tel que $\sum_{p=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} r_p < \frac{\varepsilon}{4}$.

Pour tout couple $(t, x) \in I^2$, on a

$$|g(t) - g(x)| \leq \left| \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(t) - \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(x) \right| + 2 \sum_{p=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} r_p < \left| \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(t) - \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(x) \right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) Une somme finie de fonctions continues sur I est encore continue, si $x \in I$ il existe un intervalle ouvert J contenant x tel que $\left| \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(t) - \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} u_p(x) \right| < \varepsilon/2$ pour tout $t \in J$.

Par suite, si $x \in J$ on a $|g(t) - g(x)| < \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, la fonction g est bien continue au point x .

4. Si $x \in I$, on pose $a = x/2$, $b = 3x/2$ et $u_p(x) = \frac{1}{(2p)^x} - \frac{1}{(2p-1)^x}$. La question 2. b) nous assure que

$$|u_p(t)| \leq \frac{t}{(2p-1)^{t+1}} \leq \frac{3x}{2} \times \frac{1}{(2p-1)^{\frac{x}{2}+1}} = r_p$$

Le critère de Riemann et le théorème sur les équivalents donnent facilement la convergence de la série de terme général r_p .

Les hypothèses de la question 3) sont vérifiées et par suite f est continue sur $]a, b[$, donc au point x .

Exercice 1.18.

Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $a_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2} du$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note sous réserve d'existence :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n x^n \text{ et } F(x) = \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)(1-xu)^2} du$$

1. a) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel a_n existe et vérifie :

$$\frac{1}{2} \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$$

b) En déduire que la fonction S est définie sur l'intervalle $] -1, 1[$.

2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F .

3. Soit x un réel de $[0, 1[$, on note : $\forall u \in [0, 1], \forall p \in \mathbb{N}, A(u, p) = \frac{u^p x^p [p - pux + 1]}{(1+u^2)(1-xu)^2}$.

a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall u \in [0, 1], A(u, p) \leq (p+1) \frac{x^p}{(1-x)^2}$.

En déduire que : $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^1 A(u, p) du = 0$.

4. Montrer que : $\forall v \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \sum_{n=0}^{p-1} (n+1)v^n = \frac{1}{(1-v)^2} - \frac{v^p}{(1-v)^2} [p - pv + 1]$.

5. En déduire que : $\forall x \in [0, 1[, F(x) = S(x)$.

Solution :

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$; l'intégrale a_n existe car $\varphi : u \rightarrow \frac{u^n}{1+u^2}$ est définie continue sur $[0, 1]$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u \leq 1 \implies \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+u^2} \leq 1 \implies \frac{1}{2} \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$$

b) On a $0 \leq |(n+1)a_n x^n| \leq |x^n|$. Donc si $|x| < 1$ la série converge absolument et S est bien définie sur $] -1, 1[$.

2. Soit la fonction $f_x(u) = \frac{1}{(1+u^2)(1-xu)^2}$.

• Si $x < 1$: la fonction f_x est définie (le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$) et continue sur le segment $[0, 1]$, l'intégrale $F(x)$ est bien définie.

• Si $x \geq 1$: on a $0 < \frac{1}{x} \leq 1$, branche infinie au voisinage de $\frac{1}{x}$. Or au voisinage de $\frac{1}{x}$: $f_x(u) \sim \frac{1}{x^2+1} \frac{1}{(u-\frac{1}{x})^2}$. La fonction n'est pas intégrable (critère de comparaison aux intégrales de Riemann). Ainsi la fonction F est définie sur $] -\infty, 1[$

a) $u \in [0, 1] \implies u^p \leq 1$; $u \in [0, 1] \implies 1+u^2 \geq 1 \implies \frac{1}{1+u^2} \leq 1$;

$u \in [0, 1] \implies 1-x \leq 1-ux \implies \frac{1}{1-ux} \leq \frac{1}{1-x}$; $u \in [0, 1] \implies p-pux+1 \leq p+1$.

Ce qui donne la majoration souhaitée.

b) Par positivité de l'intégrale, on obtient : $0 \leq \int_0^1 A(u, p) du \leq (p+1) \frac{x^p}{(1-x)^2}$.

Comme $0 \leq x < 1$, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} (p+1) \frac{x^p}{(1-x)^2} = 0$, et le théorème d'encadrement entraîne que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^1 A(u, p) du = 0$$

4. On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\forall v \neq 1, \sum_{n=0}^{p-1} v^{n+1} = v \frac{v^p - 1}{v - 1}.$$

On obtient le résultat souhaité en dérivant par rapport à la variable v :

$$\forall v \neq 1, \sum_{n=0}^{p-1} (n+1)v^n = \frac{1}{(1-v)^2} - \frac{v^p}{(1-v)^2} [p - pv + 1]$$

5. On a

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{p-1} (n+1)a_n x^n = \sum_{n=0}^{p-1} (n+1) \left[\int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2} du \right] \cdot x^n \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{p-1} (n+1)(ux)^n \right] \frac{du}{1+u^2} \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{(1-xu)^2} + \frac{u^{p+1}x^{p+1}}{(1-xu)^2} - (p+1) \frac{u^p x^p}{(1-xu)^2} \right] \frac{du}{1+u^2} \\ &= F(x) - \int_0^1 A(u, p) du \end{aligned}$$

d'où en passant à la limite quand $p \rightarrow +\infty$: $\forall x \in [0, 1[, F(x) = S(x)$.