# 1

# ANALYSE

**Exercice 1.01.**

Soit $(T_p)$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}, T_0(x) = 1, T_1(x) = x \\ \forall\, p \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, T_{p+2}(x) = 2xT_{p+1}(x) - T_p(x) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, $T_p$ est une fonction polynôme de degré $p$ et de coefficient dominant $2^{p-1}$.

2. Montrer que pour tout $p \geqslant 0$, pour tout $\theta$ réel, $T_p(\cos\theta) = \cos(p\theta)$.

(on rappelle que $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$)

Désormais on suppose $p \geqslant 1$ et on étudie $T_p$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

3. Déterminer $\max\limits_{x\in[-1,1]} |T_p(x)|$ ainsi que les points où ce maximum est atteint.

On les note $a_0, a_1, \ldots, a_p$ avec $a_0 > a_1 > \cdots > a_p$.

4. On note $\mathcal{U}_p$ l'ensemble des fonctions polynômes unitaires de degré $p$ et $T_p^* = \dfrac{1}{2^{p-1}} T_p$.

Supposons qu'il existe $P \in \mathcal{U}_p$ tel que $\|P\| = \max\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| < \dfrac{1}{2^{p-1}}$.

a) Soit $\Delta = T_p^* - P$. Étudier le signe de $\Delta(a_i)\times\Delta(a_{i+1})$, pour $i \in [\![0, p-1]\!]$. En déduire une contradiction.

b) Déterminer $\min\limits_{P\in\mathcal{U}_p} ||P||$.

5. Supposons qu'il existe $P \in \mathcal{U}_p$ différent de $T_p^*$ pour lequel $\|P\| = \dfrac{1}{2^{p-1}}$ et soit $\lambda \in\, ]0, 1[$.

a) Montrer que la fonction polynôme $T_p^* - \lambda P$ s'annule en exactement $p$ points distincts du segment $[-1, 1]$.

b) En déduire que $\forall\, x \in [-1, 1]$, $|T_p^*(x) - \lambda P(x)| \leqslant (1-\lambda)2^p$.

c) En déduire que l'hypothèèse faite au début de cette question est absurde et conclure.

---

**Solution :**

1. Le résultat demandé est banal pour $p = 1$, aisé pour $p = 2$, et s'il est vrai jusqu'à un certain rang $p + 1$, alors le terme dominant de $T_{p+2}$ provient de $2xT_{p+1}(x)$ et on en déduit la propriété au rang $p + 2$. On conclut par le principe de récurrence.

2. De la même façon, par récurrence :

$\to$ $T_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0\times\theta)$ et $T_1(\cos\theta) = \cos\theta$.

$\to$ On suppose la propriété acquise jusqu'à un certain rang $p+1$ et au rang suivant :

$$\begin{aligned} T_{p+2}(\cos\theta) &= 2\cos(\theta)\cos((p+1)\theta) - \cos(p\theta) = \cos((p+2)\theta) + \cos(p\theta) - \cos(p\theta) \\ &= \cos((p+2)\theta) \end{aligned}$$

3. L'application $\theta \mapsto \cos(\theta)$ est une bijection continue de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Donc :

$$\max_{x\in[-1,1]} |T_p(x)| = \max_{\theta\in[0,\pi]} |T_p(\cos(\theta))| = \max_{\theta\in[0,\pi]} |\cos(p\theta)| = 1$$

De plus : $|\cos(p\theta)| = 1$ et $\theta \in [0, \pi]$, si et seulement si $\theta = \dfrac{k\pi}{p}$, avec $k \in [\![0, p]\!]$. Ainsi :

$$a_k = \cos\big(\frac{k\pi}{p}\big), k \in [\![0, p]\!]$$

4. a) On remarque que $\Delta$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(p - 1)$ et que $|P(a_i)| < \dfrac{1}{2^{p-1}}$. Ainsi :

$$\Delta(a_i)\Delta(a_{i+1}) = \big(\frac{(-1)^i}{2^{p-1}} - P(a_i)\big)\times\big(\frac{(-1)^{i+1}}{2^{p-1}} - P(a_{i+1})\big) < 0$$

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $\Delta$ sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ indique que cette fonction s'annule en au moins $p$ points distincts.

Or $\Delta$ est une fonction polynomiale de degré strictement inférieur à $p$. Donc $\Delta = 0$ et $P = T_p^*$ en contradiction avec $||P|| < \dfrac{1}{2^{p-1}}$.

b) Ainsi pour tout $P \in \mathcal{U}_p$, on a $||P|| \geqslant \dfrac{1}{2^{p-1}}$. Comme $||T_p^*|| = \dfrac{1}{2^{p-1}}$, on obtient

$$\inf_{P\in\mathcal{U}_p} ||P|| = \min_{P\in\mathcal{U}_p} ||P|| = \frac{1}{2^{p-1}}$$

5. a) Comme $\lambda \in ]0, 1[$, on a $\|\lambda P\| < \dfrac{1}{2^{p-1}}$ et le même raisonnement que celui fait pour la question 4. a) montre que $T_p^* - \lambda P$ s'annule en $p$ points de $[-1, 1]$.

**b)** Si on les note $c_0, \dots, c_{p-1}$ la factorisation de $T_p^* - \lambda P$ est donc :

$$T_p^* - \lambda P = (1 - \lambda)\prod_{k=0}^{p-1}(X - c_k)$$

Comme pour $x \in [-1, 1]$, on a $|x - c_k| \leqslant 2$, la conclusion en résulte.

**c)** On fait alors tendre $\lambda$ vers 1 et $\forall x \in [-1,1], |T_p^*(x) - P(x)| = 0$, ce qui montre que $T_p^* - P$ est le polynôme nul et contredit le fait que $P$ a été supposé différent de $T_p^*$.

On conclut ainsi à l'unicité souhaitée.

---

**Exercice 1.02.**

Soit $f$ la fonction de deux variables réelles définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x\,y - 1$$

1. a) Étudier les extremums locaux de $f$.

b) La fonction $f$ admet-elle des extremums globaux sur $\mathbb{R}^2$ ?

c) La restriction de $f$ à une droite passant par l'origine $O$ a-t-elle un extremum en $O$ ?

2. Montrer que, pour tout $x < 1/2$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x,y) = 0$.

On définit ainsi une fonction $\varphi : J = ]-\infty, 1/2[ \to \mathbb{R}$, qui à $x \in J$ associe l'unique $y$ solution de l'équation $f(x,y) = 0$. On admet que la fonction $\varphi$ est de classe $C^\infty$ sur $J$.

3. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\varphi$.

---

**Solution :**

1. a) Déterminons les points critiques de $f$. On a $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ ;

$$\partial_1(f)(x,y) = 3x^2 - 3y \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = 3y^2 - 3x$$

Les points critiques sont donc tels que $\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$, ce qui donne $x^4 = x$ et donc $x = 0$ ou $x = 1$.

On achève alors la résolution et les points critiques sont $O = (0,0)$ et $A = (1,1)$.

De même :

$$r = \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 6x\,,\ s = \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = -3\,,\ t = \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 6y,$$

d'où les matrices hessiennes :

• en $O$, $H_0 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres 3 et $-3$ : on a donc un point col, *i.e.* pas d'extremum ;

• en $A$, $H_1 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = 6I_2 + H_0$, de valeurs propres 9 et 3, donc strictement positives ; on a un minimum local, de valeur $f(1,1) = -2$.

b) On a $f(x,0) = x^3 - 1$ qui tend vers $\pm\infty$ lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$ ; donc il n'y a pas de maximum ni de minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

c) • $f(0,y) = y^3 - 1$, qui ne présente pas d'extremum en 0 ;

• $f(x,0)=x^3-1$, qui ne présente pas d'extremum en 0 ;

• $f(x,-x)=3x^2-1$, qui présente un minimum global en 0 ;

• pour $\lambda\notin\{-1,0\}$, on a $f(x,\lambda x)=(1+\lambda^3)\,x^3-3\lambda x^2-1=h_\lambda(x)$, avec $h'_\lambda(x)=3(1+\lambda^3)\,x^2-6\lambda x$. Cette dérivée s'annule et change de signe en 0, donc on a un extremum (local) en 0.

2. La fonction $g_x:y\mapsto f(x,y)$ vérifie $g'_x(y)=3\,(y^2-x)$ ;

• Si $x\leqslant 0$, on a : $\forall y\in\mathbb{R}^*,\ g'_x(y)>0$ ; on conclut par le théorème des valeurs intermédiaires strict et $g_x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

• Si $0<x<1/2$, On a alors :

| $y$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{x}$ | | $\sqrt{x}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'_x(y)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g_x$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $<0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

En effet $g_x\big(-\sqrt{x}\big)=2x^{3/2}+x^3-1<\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{8}-1<0$. Ainsi $g_x$ s'annule encore une fois et une seule (et pour une valeur supérieure à $\sqrt{x}$).

3. On a $f(0,y)=0\iff y^3=1$ et $\varphi(0)=1$.

Comme $\varphi$ est de classe $C^\infty$, la substitution du développement limité de $\varphi$ en 0, de la forme :

$$\varphi(x)=a+b\,x+\frac{c}{2}\,x^2+\frac{d}{6}\,x^3+o(x^3),$$

dans $f\big(x,\varphi(x)\big)=0$ donne

$$x^3+\Big[a+b\,x+\frac{c}{2}\,x^2+\frac{d}{6}\,x^3\Big]^3-3x\,\Big[a+b\,x+\frac{c}{2}\,x^2\Big]+o(x^3)-1=0$$

Ce qui donne le système :

$$\left\{\begin{array}{ll} a^3 & =1\\ 3a^2\,b-3a & =0\\ 3a\,b^2-\frac{3}{2}a^2\,c-3b & =0\\ 1+b^3+\frac{1}{2}a^2\,d-\frac{3}{2}c & =0\end{array}\right.,\ \text{d'où :}\left\{\begin{array}{lll} a & =1 & =\varphi(0)\\ b & =1 & =\varphi'(0)\\ c & =0 & =\varphi''(0)\\ d & =-4 & =\varphi^{(3)}(0)\end{array}\right.$$

---

**Exercice 1.03.**

1. Soit $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante convergente et de limite nulle.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\sum\limits_{p=0}^{n}(-1)^p b_p$.

a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie $\ell$ et que :

$$\forall\,k\in\mathbb{N},\ |\ell-S_k|\leqslant b_{k+1}$$

c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le réel $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p b_p$ est bien défini.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction positive, dérivable, décroissante, convexe et telle que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose : $a_p = f(p) - f(p+1)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $u_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p)$ est bien défini.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p a_p = 2u_n - (-1)^{n+1} f(n+1)$.

c) Montrer que la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Big|\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p a_p\Big| \leqslant f(n+1) - f(n+2)$.

b) En déduire que la série de terme général $u_n$ converge.

---

**Solution :**

1. a) La suite $(S_{2n})$ décroît car $S_{2(n+1)} - S_{2n} = b_{2n+2} - b_{2n+1} \leqslant 0$, car $(b_n)$ est décroissante.
La suite $(S_{2n+1})$ croît car $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -b_{2n+3} + b_{2n+2} \geqslant 0$.

b) On a $S_{2n+1} - S_{2n} = -b_{2n+1} \to 0$, car $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n) = 0$. D'après la question précédente, les suites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes ; donc elles convergent vers la même limite notée $\ell$ et on a l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n+1} \leqslant \ell \leqslant S_{2n}$$

Comme $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ convergent vers $\ell$, par exhaustion, il en est de même de la suite $(S_n)$.

⋆ Si $k$ est pair $(k = 2n)$ alors : $b_{k+1} = S_{2n+1} - S_{2n} \leqslant \ell - S_{2n} \leqslant 0$, d'où $|S_k - \ell| \leqslant b_{k+1}$.

⋆ Si $k$ est impair $(k = 2n+1)$ alors : $0 \leqslant \ell - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1} = b_{k+1}$, d'où $|S_k - \ell| \leqslant b_{k+1}$.

c) La série $\sum(-1)^n b_n$ converge car on vient de montrer que la suite $(S_n)$ de ses sommes partielles converge. *A fortiori* $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p b_p$ est bien défini.

2. a) La suite de terme général $b_n = f(n)$ vérifie les hypothèses de la question 1 car $f$ est décroissante et tend vers 0.

b) Comme $(-1)^p a_p = (-1)^p f(p) + (-1)^{p+1} f(p+1)$, la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente, comme somme de deux séries convergentes (voir question 1), et on a :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p a_p = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^{p+1} f(p+1)$$

$$= \sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p f(p) + \sum_{p=n+2}^{+\infty}(-1)^p f(p) \text{ (décalage d'indice)}$$
$$= \sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p f(p) + \Big(\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p f(p)\Big) - (-1)^{n+1}f(n+1)$$
$$= 2u_n - (-1)^{n+1}f(n+1)$$

c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, comme $f$ est continue sur $[p, p+1]$ et dérivable sur $]p, p+1[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_p \in ]p, p+1[$ tel que :

$$f(p+1) - f(p) = f'(c_p)\big((p+1) - p\big),$$

soit $a_p = -f'(c_p)$.
Comme $p < c_p < p+1 < c_{p+1} < p+2$ et que la fonction $-f'$ est décroissante (car $f$ convexe), on en déduit que :

$$a_p = -f'(c_p) > -f'(c_{p+1}) = a_{p+1}.$$

Donc la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

3. a) Comme $a_p = f(p) - f(p+1)$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, on en déduit $\lim(a_p) = 0$.

Par ailleurs, la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi, d'après la question 1.c. la somme de la série proposée existe et la question 1.b donne l'inégalité voulue.

b) D'après la question 2.b, on a : $u_n = \dfrac{1}{2}\underbrace{\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p a_p}_{=\beta_n} + \dfrac{1}{2}(-1)^{n+1}f(n+1)$.

Or la série $\sum(-1)^{n+1}f(n+1)$ converge (question 1), et, en ce qui concerne la série $\sum \beta_n$, on a : $0 \leqslant |\beta_n| \leqslant f(n+1) - f(n+2)$ ( question 3.a), et $\sum\big(f(n+1) - f(n+2)\big)$ converge (par télescopage)

Ainsi $\sum |\beta_n|$ converge par théorème de comparaison. Donc la série $\sum \beta_n$ converge absolument. Finalement, la série $\sum u_n$ converge, comme combinaison linéaire de deux séries convergentes.

---

**Exercice 1.04.**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $\gamma_n = H_n - \ln n$.

Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est convergente, on note $\gamma$ sa limite. (On pourra étudier la série de terme général $\gamma_{n+1} - \gamma_n$)

En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$, avec $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

2. a) Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites positives telles que $u_n \sim v_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente.

On pose $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$. Montrer que $R_n \underset{(\infty)}{\sim} R'_n$.

b) En déduire que $H_n = \ln n + \gamma - \dfrac{1}{2n} + o\big(\dfrac{1}{n}\big)$.

3. Soit $f$ la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction « partie entière »

Esquisser la représentation graphique de $f$ et déterminer l'ensemble de ses points de discontinuité.

4. Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$ existe et vaut $1 - \gamma$.

---

**Solution :**

1. On a $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{2(n+1)^2}\right)$.

La série de terme général $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ est convergente et par télescopage la suite $(\gamma_n)$ est convergente. Ainsi $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

2. a) On revient à la définition d'équivalent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon v_n$$

(car $v_n \geqslant 0$). On a alors, pour $n \geqslant N$ :

$$|R_n - R'_n| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k - v_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} v_k = \varepsilon R'_n$$

et on a bien $R_n \sim R'_n$.

b) la comparaison entre la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ montre que $\sum\limits_n^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$. Ainsi

$$H_n = \ln n + \gamma - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. La fonction $f$ est bornée sur $[0,1]$ par 0 et 1. La fonction $f$ possède des points de discontinuité qui sont les réels $\frac{1}{n}$, pour $n \geqslant 2$. La fonction est aussi discontinue en 0, car pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = n - n = 0,\ f\left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right) = n + \frac{1}{2} - \lfloor n + \frac{1}{2} \rfloor = \frac{1}{2}$$

et donc $f$ n'a même pas de limite en 0.

Pour représenter $f$, on représente $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,1]$, on hachure le plan par les verticales d'abscisses $\frac{1}{n}$ et on « translate » verticalement les morceaux de branche d'hyperbole pour les faire « entrer » dans la bande $0 \leqslant y < 1$.

4. Soit $N$ fixé.

$$\int_{1/(N+1)}^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} \int_{1/(n+1)}^{1/n} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} \left(\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \ln(N+1) - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = 1 - H_{N+1} + \ln(N+1)$$

Cette dernière quantité tend vers $1 - \gamma$ lorsque $N$ tend vers $+\infty$.

La fonction $f$ étant positive et bornée sur $[0,1]$, on en déduit que $\lim_{x\to 0}\int_x^1 f(t)\,dt = 1-\gamma$.
En effet en choisissant $n$ tel que $\frac{1}{n+1}\leqslant x<\frac{1}{n}$, il vient

$$\left|\int_x^1 f(t)dt-\int_{1/(n+1)}^1 f(t)dt\right|\leqslant\int_{1/(n+1)}^{1/n} f(t)dt=\ln\bigl(1+\frac{1}{n}\bigr)-\frac{1}{n+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

L'intégrale proposée a donc une limite qui vaut $1-\gamma$.

---

**Exercice 1.05.**

On dit qu'une suite d'entiers $(u_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vérifie la propriété $(\mathcal{C})$ si :

$$u_0>1 \text{ et } \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geqslant u_n^2-u_n+1.$$

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $(\mathcal{C})$.
  a) Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante puis qu'elle diverge vers $+\infty$.
  b) En déduire que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge.

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $(\mathcal{C})$. On suppose ici que $S=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ appartient à $\mathbb{Q}$ et on considère $(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que $S=\frac{x}{y}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $Y_n=\prod\limits_{i=0}^{n}a_i, X_n=\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{Y_n}{a_j}$ et $\omega_n=\frac{X_{n+1}-X_n}{Y_{n+1}-Y_n}$
  a) Montrer que la suite $(\omega_n)_{n\geq 0}$ est bien définie.
  b) Etablir que $\bigl(\frac{X_n}{Y_n}\bigr)_{n\geq 0}$ converge en croissant vers $\frac{x}{y}$.
  c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_{n+1}=a_{n+1}X_n+Y_n$.
  d) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{1}{a_{n+2}-1}-\frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1}-1)}$.
  e) Montrer que $(\omega_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\frac{x}{y}$ en décroissant.

3. On suppose dans cette question que la suite $(a_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du 2., et que, de plus :

$$\exists\, n_0\in\mathbb{N},\forall\, n\geqslant n_0, a_{n+1}>a_n^2-a_n+1$$

  a) Prouver que la suite $(xY_n-yX_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.
  b) En déduire une contradiction.

4. Soit $(a_n)_{n\geq 0}\in(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$, tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $a_{n+1}>a_n^2-a_n+1$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{a_n}$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a_n}\notin\mathbb{Q}$.

---

**Solution :**

1. a) Par récurrence, on montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n>1$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n \geqslant (a_n - 1)^2 > 0$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante, puis étant à valeurs entières elle diverge vers l'infini.

b) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant a_n - 1 + \dfrac{1}{a_n} > a_n - 1$, d'où $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, à partir d'un certain rang $n_1 \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 2$ et $a_n \geqslant 2^{n-n_1} a_{n_1}$. On en déduit que $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{a_n}$ converge.

2. a) On sait donc que $(a_n)$ est strictement croissante et à valeurs dans $]1, +\infty[$. On en déduit que $(Y_n)$ est strictement croissante et $(\omega_n)$ est bien définie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\dfrac{X_n}{Y_n} = \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{1}{a_j}$. Ainsi, $\dfrac{X_n}{Y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x}{y}$ et $\big(\dfrac{X_n}{Y_n}\big)_{n\geq 0}$ est croissante.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$X_{n+1} = Y_{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{a_j} = a_{n+1} Y_n \Big( \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{a_j} \Big) + \frac{a_{n+1} Y_n}{a_{n+1}} = a_{n+1} X_n + Y_n.$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\omega_n = \dfrac{X_{n+1} - X_n}{Y_{n+1} - Y_n} = \dfrac{(a_{n+1} - 1) X_n + Y_n}{(a_{n+1} - 1) Y_n} = \dfrac{X_n}{Y_n} + \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$.

De plus, on a $\dfrac{X_{n+1}}{Y_{n+1}} - \dfrac{X_n}{Y_n} = \dfrac{X_{n+1} - a_{n+1} X_n}{Y_n a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_{n+1}}$.

Ainsi $\omega_{n+1} - \omega_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} + \dfrac{1}{a_{n+2} - 1} - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{a_{n+2} - 1} - \dfrac{1}{a_{n+1}(a_{n+1} - 1)}$.

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la propriété $(\mathcal{C})$ et la question 1. a), on a :

$$a_{n+2} - 1 \geqslant a_{n+1}^2 - a_{n+1} = a_{n+1}(a_{n+1} - 1) > 0,$$

et donc $\omega_{n+1} - \omega_n \leqslant 0$ par la question précédente.

De plus, on a $\omega_n = \dfrac{X_n}{Y_n} + \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$. Comme $(a_n)$ diverge vers $+\infty$, on a $\omega_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x}{y}$

3. a) D'après les calculs effectués à la question précédente, la suite $(\omega_n)$ décroît strictement à partir du rang $n_0$ vers $\frac{x}{y}$, *i.e.* $\forall\, n \in \mathbb{N}, x(Y_{n+1} - Y_n) < y(X_{n+1} - X_n)$, d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $xY_{n+1} - yX_{n+1} < xY_n - yX_n$. Ainsi $(xY_n - yX_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.

b) On remarque tout d'abord que $(xY_n - yX_n)_n$ est une suite d'entiers relatifs. De plus, comme $\big(\dfrac{X_n}{Y_n}\big)_n$ est croissante de limite $\dfrac{x}{y}$ (cf. la question 2. b)), on a $\dfrac{X_n}{Y_n} \leqslant \dfrac{x}{y}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* $xY_n - yX_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci est absurde car il n'existe aucune suite d'entiers naturels strictement décroissante.

4. Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $n_0$, pour lequel :

$$n \geqslant n_0 \implies a_{n+1} > a_n^2 - a_n + 1$$

Comme $a_{n_0}^2 - a_{n_0} = a_{n_0}(a_{n_0} - 1) \geqslant 0$, on a $a_{n_0+1} > 1$ et la suite $(a_n)_{n\geq n_0+1}$ vérifie la propriété $(\mathcal{C})$. On déduit alors de la question précédente que $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n} \notin \mathbb{Q}$, et comme $\sum\limits_{n=0}^{n_0} \dfrac{1}{a_n} \in \mathbb{Q}$, on en déduit que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n} \notin \mathbb{Q}$.

---

**Exercice 1.06.**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $\gamma_n = H_n - \ln n$.

Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On note $\gamma$ sa limite (on pourra étudier la série de terme général $\gamma_{n+1} - \gamma_n$).

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{k} = H_n - H_{2n}$.

En déduire que la série $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{(-1)^k}{k}$ converge et déterminer sa somme.

3. Dans cette question, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{3n+1} = a_{3n+2} = 1$ et $a_{3n+3} = -1$.

Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{a_k}{k}$ ?

Désormais, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{4n+1} = a_{4n+2} = 1$ et $a_{4n+3} = a_{4n+4} = -1$.

4.a) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a : $\sum\limits_{n=0}^{N} \big(\dfrac{1}{4n+1} - \dfrac{1}{4n+3}\big) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1 - x^{4N+4}}{1 + x^2} dx$.

b) En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(\dfrac{1}{4n+1} - \dfrac{1}{4n+3}\big) = \dfrac{\pi}{4}$.

c) Calculer de même $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(\dfrac{1}{4n+2} - \dfrac{1}{4n+4}\big)$.

5. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2$.

---

**Solution :**

1. On a $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\big(1 - \dfrac{1}{n+1}\big) = -\dfrac{1}{2(n+1)^2} + o\Big(\dfrac{1}{2(n+1)^2}\Big)$.

La série de terme général $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ est convergente et par télescopage la suite $(\gamma_n)$ est convergente. Ainsi : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

2. On calcule $\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{k} + H_{2n} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k} = H_n$.

Alors $\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{k} = \ln n - \ln(2n) + o(1) = -\ln 2 + o(1)$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$.

Egalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n+1} \dfrac{(-1)^k}{k} = -\ln 2 - \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+1} = -\ln 2$.

3. On écrit $\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}-\dfrac{1}{3n+3}=\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}+\dfrac{1}{3n+3}-\dfrac{2}{3n+3}$.
et $H_{3n+3}-\frac{2}{3}H_{n+1}=\ln 3+\ln(n+1)+\gamma-\frac{2}{3}\left(\ln(n+1)+\gamma\right)+o(1))$
Cette expression tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. La suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{a_n}{n}$ admet une sous-suite divergente : elle ne peut converger.

4.a) On remarque que $\displaystyle\int_0^1 t^k dt=\frac{1}{k+1}$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\Big)=\sum_{k=0}^{N}\int_0^1(t^{4k}-t^{4k+2})dt=\int_0^1\Big(\sum_{k=0}^{N}t^{4k}-\sum_{k=0}^{N}t^{4k+2}\Big)dt$$
$$=\int_0^1(1-t^2)\sum_{k=0}^{N}t^{4k}\,dt=\int_0^1(1-t^2)\times\frac{1-t^{4N+4}}{1-t^4}dt=\int_0^1\frac{1-t^{4N+4}}{1+t^2}dt$$

Or $\displaystyle\int_0^1\frac{1-t^{4N+4}}{1+t^2}\,dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^1\frac{t^{4N+4}}{1+t^2}dt$, et :

$\displaystyle\Big|\int_0^1\frac{t^{4N+4}}{1+t^2}dt\Big|\leqslant\int_0^1 t^{4N+4}dt=\frac{1}{4N+5}$.

b) Il reste à faire tendre $N$ vers $+\infty$ pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\Big)=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$$

c) De la même façon :

$$\sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}\Big)=\int_0^1 t(1-t^2)\sum_{k=0}^{N}t^{4k}dt=\int_0^1 t(1-t^2)\times\frac{1-t^{4N+4}}{1-t^4}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2t}{1+t^2}dt-\int_0^1\frac{t^{4N+5}}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln 2-\int_0^1\frac{t^{4N+5}}{1+t^2}dt$$

La dernière intégrale tendant vers 0 lorsque $N$ tend vers $+\infty$.

5. Les deux questions précédentes montrent que $\displaystyle\lim_{N\to\infty}S_{4N}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{4N}\frac{a_n}{n}=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$. Les sommes partielles $S_{4N+1},S_{4N+2},S_{4N+3}$ diffèrent de la somme $S_{4N}$ par 1, ou 2 ou 3 termes tendant vers 0. Ainsi par exhaustion :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\pi+\ln 4}{4}$$

---

**Exercice 1.07.**

Si $f$ est une fonction à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle, on lui associe la fonction g définie sur l'ouvert $O=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par :

$$g(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

1. On considère la fonction $u$ définie sur $O$ par $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
   a) Montrer que $u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $O$.

b) Justifier le fait que $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $O$.

c) Soit $(x,y) \in O$, déterminer le gradient $\nabla(g)(x,y)$ de la fonction $g$ en fonction de $f$.

Si $h$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage d'un point $(a,b)$ de $\mathbb{R}^2$, on définit le laplacien $\Delta(h)$ de $h$ au point $(a,b)$ par :

$$\Delta(h)(a,b) = \partial^2_{1,1}(h)(a,b) + \partial^2_{2,2}(h)(a,b)$$

2. On s'intéresse au laplacien de $g$ dans l'ouvert $O$.

a) Calculer $\Delta(g)$ en fonction de $f$.

b) Montrer que $\Delta(g)(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in O$ si et seulement si la fonction $f$ vérifie la condition suivante :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, f''(t) + \frac{f'(t)}{t} = 0$$

3. On considère la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t) = tf'(t)$.

a) Calculer la dérivée de $\varphi$.

b) Déterminer la forme des solutions $g$ définies sur $O$ comme dans le préambule et vérifiant $\Delta(g)(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in O$.

c) Trouver la solution $g$ de l'équation $\Delta(g) = 0$ qui s'annule sur le cercle unité $C$ :

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

et qui vaut 1 au point $(1,1)$.

---

**Solution :**

1.a) La fonction $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale, elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $O$. L'image de $O$ est $\mathbb{R}_+^*$ et sur cet intervalle la fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{t}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ (avec : $\varphi'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ et $\varphi''(t) = -\dfrac{1}{4}t^{-3/2}$). Donc la fonction composée $u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $O$.

b) Comme $u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $O$, arrive dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle, la fonction composée $g$ est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $O$.

c) En utilisant les règles usuelles de dérivation des fonctions composées, on trouve :

$$\nabla(g)(x,y) = f'(\sqrt{x^2+y^2})\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big).$$

2. a) Il vient

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,1}(g)(x,y) &= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} f'(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{x^2}{x^2+y^2} f''(\sqrt{x^2+y^2})\\ &= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} f'(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{x^2}{x^2+y^2} f''(\sqrt{x^2+y^2}).\end{aligned}$$

Comme $g(x,y) = g(y,x)$, on en déduit que $\partial^2_{2,2}(g)(x,y) = \partial^2_{1,1}(g)(y,x)$, et par suite

$$\partial^2_{2,2}(g)(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} f'(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{y^2}{x^2+y^2} f''(\sqrt{x^2+y^2}).$$

En sommant, on obtient :

$$\Delta(g)(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} f'(\sqrt{x^2+y^2}) + f''(\sqrt{x^2+y^2}).$$

b) Comme l'image de $O$ par $u$ est exactement $\mathbb{R}_+^*$, l'assertion « $\Delta(g)(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in O$ » est équivalente au fait que la fonction $f$ vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$f''(t) + \frac{f'(t)}{t} = 0.$$

3. a) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\varphi'(t) = f'(t) + tf''(t) = t(f''(t) + \dfrac{f'(t)}{t})$.

b) La question précédente nous dit que si $g$ convient, alors il existe une constante réelle $A$ telle que $f'(t) = \dfrac{A}{t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $f$ est donc une primitive de $t \mapsto \dfrac{A}{t}$ et par suite $f(t) = A\ln(t) + B$ avec $B \in \mathbb{R}$. Il en résulte que $g$ est de la forme $g(x,y) = A\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + B$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ ($g$ est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $O$).

c) Avec la question précédente, on voit que si $g$ s'annule sur le cercle unité, on doit avoir $B = 0$. La deuxième condition nous donne $1 = A\ln(\sqrt{2})$. Finalement, on trouve :

$$g(x,y) = \frac{2\ln(\sqrt{x^2+y^2})}{\ln 2}$$

---

**Exercice 1.08.**

1. Soit $\varepsilon > 0$. On considère une fonction convexe $f$ qui est définie sur l'intervalle $I = ]-\varepsilon, +\infty[$ et qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in ]0,x]$. Montrer que $f(t) \leqslant \big(1 - \dfrac{t}{x}\big) f(0) + \dfrac{t}{x} f(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$x\Big[\frac{f(0)+f(x)}{2}\Big] \geqslant \int_0^x f(t)dt.$$

2. On considère une fonction convexe $h$ définie sur $I$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle. On suppose que $h(0) = h'(0) = 0$.

a) Montrer que $h$ est positive sur $I$.

b) Soit $H$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $H(x) = 2h'(x)\displaystyle\int_0^x h(t)dt - (h(x))^2$.

Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier ses variations sur $\mathbb{R}_+$.

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\frac{xh'(x)h(x)}{2} - h'(x)\int_0^x h(t)\,dt \leqslant \frac{h(x)}{2}\big(xh'(x) - h(x)\big)$$

d) Montrer que $h'(1)=0$ implique que $h$ est nulle sur $[0,1]$. En utilisant ce qui précède, établir que :

$$\frac{h(1)}{2}-\int_0^1 h(t)\,dt \leqslant \frac{h'(1)}{8}$$

3. Soit $g$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$. On pose $h(x)=g(x)-g(0)-xg'(0)$.
En utilisant la question 2., montrer que :

$$\frac{g(1)+g(0)}{2}-\int_0^1 g(t)\,dt \leqslant \frac{g'(1)-g'(0)}{8}$$

4. Soit $f$ une fonction convexe et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$. En considérant les fonctions $g_k$ $(k\geqslant 1)$ définies par $g_k(x)=f(x+k)$, prouver que :

$$0\leqslant \frac{f(0)}{2}+\sum_{k=1}^{n} f(k)-\frac{f(n)}{2}-\int_0^n f(t)\,dt \leqslant \frac{f'(n)-f'(0)}{8}.$$

5. Déduire de ce qui précède un équivalent simple de $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(1+3k)^{\frac{3}{2}}$, lorsque $n$ tend vers l'infini.

---

**Solution :**

1. a) Cette inégalité fait penser à la définition de la convexité, c'est bien le cas puisqu(il suffit d'écrire : $t=(1-\frac{t}{x})\times 0+\frac{t}{x}\times x$.

b) C'est évident pour $x=0$, et pour $x>0$, il suffit d'intégrer l'inégalité donnée dans la question 1. a).

2. a) Comme $h(0)=h'(0)=0$, la tangente en 0 est l'axe des abscisses. La fonction $h$ étant convexe, son graphe se situe au-dessus de ses tangentes et elle est donc positive sur $I$.

b) Les primitives de $h$ étant de classe $\mathcal{C}^3$, une application directe du cours nous dit que $H$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Par ailleurs, les règles de dérivation nous conduisent à :

$$H'(x)=2h''(x)\int_0^x h(t)dt.$$

La fonction $h$ étant convexe, sa dérivée seconde est positive.
Avec le résultat a), on voit que $\displaystyle\int_0^x h(t)\,dt\geqslant 0$ pour $x\geqslant 0$. La dérivée de $H$ est donc positive et $H$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) Comme $H$ est croissante et que $H(0)=0$, avec des simplification évidentes on voit que l'inégalité souhaitée provient de la positivité de $H$ sur $\mathbb{R}_+$.

d) La fonction $h'$ est croissante et $h'(0)=0$, on voit donc que si $h'(1)=0$, on a nécessairement $h'=0$ sur $[0,1]$. Par suite, la fonction $h$ est constante sur $[0,1]$ et donc nulle puisque $h(0)=0$.

L'inégalité est triviale si $h'(1) = 0$ d'après ce qui précède. On peut donc supposer que $h'(1) > 0$. En utilisant c) et en divisant par $h'(1)$, on remarque qu'il suffit alors de montrer que l'on a $\dfrac{h(1)}{2h'(1)}[h'(1) - h(1)] \leqslant \dfrac{h'(1)}{8}$.

Or cette dernière inégalité est équivalente à $\big(h'(1) - 2h(1)\big)^2 \geqslant 0$, elle est donc vraie.

3. Il est clair que la fonction $h$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$. De plus, $h''(x) = g''(x) \geqslant 0$, la fonction $h$ est donc convexe. Avec a) on voit que $h$ vérifie l'inégalité établie en 2. d) et des calculs simples nous ramènent à l'inégalité souhaitée.

4. Comme le suggère l'énoncé, on considère les fonctions $g_k$ et on leur applique les résultats des questions 1. b) et 2. Cela nous conduit aux inégalités :

$$0 \leqslant \frac{f(k+1) + f(k)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8}.$$

Il suffit alors de sommer ces inégalités, pour $k$ variant de 0 à $n-1$, pour aboutir au résultat.

5. La fonction $f$ définie sur $I = ]-\frac{1}{3}, +\infty[$ par $f(x) = \big(1 + 3x\big)^{3/2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$. De plus, $f'(x) = \frac{9}{2}\big(1 + 3x\big)^{1/2}$ est clairement croissante, la fonction $f$ est donc convexe. On applique alors le résultat de la question 4. et il vient :

$$\frac{2}{15}[(1+3n)^{5/2} - 1] \leqslant S_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1+3n)^{3/2}$$
$$\leqslant \frac{2}{15}[(1+3n)^{5/2} - 1] + \frac{9}{16}[(1+3n)^{1/2} - 1].$$

On en déduit en isolant $S_n$ et en considérant les termes dominants que :

$$S_n \sim \frac{2}{15}[(1+3n)^{5/2} - 1] \sim \frac{6\sqrt{3}}{5}\, n^{5/2}$$

---

**Exercice 1.09.**

*On admet la propriété $\mathcal{C}$ suivante :*
*Pour toute suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big[a_1 + \cdots + a_n\big] = \ell$$

*Autrement dit, si une suite converge vers une limite $\ell$, alors la suite de ses moyennes converge aussi vers $\ell$.*

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant 2,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n\sqrt{u_n u_{n-1}}}$$

a) Vérifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est correctement définie.

b) Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

d) Prouver que la suite $n \mapsto \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ converge vers 2. En déduire un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

2. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = 1$ si $n$ est pair et $u_n = 0$ si $n$ est impair.

a) Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall\, n \geqslant 1, v_n = \frac{1}{n}\big[u_1 + \cdots + u_n\big]$$

b) Que pensez-vous de la réciproque de la propriété $\mathcal{C}$ ?

3. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ et on pose $w_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

a) On définit la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall\, n \geqslant 1, v_n = \dfrac{1}{n}\big[u_1 + \cdots + u_n\big]$.

Soit $n \geqslant 2$. Prouver l'égalité : $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} kw_k$.

b) On suppose que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge et on note $\ell$ sa limite. On suppose également que $\lim\limits_{n\to+\infty} nw_n = 0$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge alors vers $\ell$.

---

**Solution :**

1. a) Une récurrence immédiate montre que $u_n > 0$ pour tout entier $n$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc correctement définie.

b) On a $0 < u_2 \leqslant u_1$ et pour $n \geqslant 2$, le terme $u_{n+1}$ est obtenu en divisant $u_n > 0$ par un nombre réel plus grand que 1. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc positive décroissante.

c) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite $\ell$ positive. Les propriétés sur le calcul des limites et la relation de récurrence nous conduisent à l'équation : $\ell = \dfrac{\ell}{1+\ell^2}$. Il en résulte que $\ell = 0$.

d) En utilisant la relation de récurrence définissant $u_n$, il vient :

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \sqrt{u_n u_{n-1}}.$$

Et par suite : $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} = \dfrac{1}{u_n^2} + u_n u_{n-1} + 2\sqrt{\dfrac{u_{n-1}}{u_n}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, on déduit de la relation de récurrence que $\dfrac{u_{n-1}}{u_n} \longrightarrow 1$, et par suite que $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ converge vers 2.

Avec la propriété $\mathcal{C}$ appliquée à la suite $(a_n) = \big(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\big)$, on obtient :

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\big(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{4}\big) = 2$ et on en déduit que : $u_n \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

2. a) On a $v_{2n} = \dfrac{1}{2}$ et $v_{2n+1} = \dfrac{n}{2n+1}$. On voit donc que la suite $(v_n)$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

b) Comme la suite $(u_n)$ est clairement divergente et que la suite $(v_n)$ converge vers $1/2$, la réciproque de la propriété $\mathcal{C}$ est fausse en général.

3. a) On a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kw_k = \sum_{k=1}^{n-1} k(u_{k+1} - u_k) = \sum_{\ell=1}^{n} (\ell - 1)u_\ell - \sum_{k=1}^{n-1} ku_k = (n-1)u_n - \sum_{\ell=1}^{n-1} u_\ell$$
$$= nu_n - \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

L'égalité souhaitée en découle aisément.

b) Il suffit d'utiliser l'égalité précédente et d'appliquer la propriété $\mathcal{C}$ à la suite $(a_n) = (nw_n)$ compte tenu du fait que $\lim\limits_{n\to\infty} nw_n = 0$.

On a donc obtenu une réciproque partielle de la propriété $\mathcal{C}$.

---

**Exercice 1.10.**

Pour $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$R(k,\ell) = \ln\left(\frac{\sup\limits_{x\in[0,1]} x^k(1-x)^\ell}{\displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^\ell dx}\right)$$

1. Montrer que $R(k,\ell)$ est bien défini pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$.

2. Montrer que $\sup\limits_{x\in[0,1]} x^k(1-x)^\ell$ existe et est atteint.
Calculer sa valeur en fonction de $k$ et $\ell$.

3. On pose $g(k,\ell) = \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^\ell dx$. Calculer $g(k,\ell)$, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$.

4. a) Montrer que $R(k,\ell) \leqslant \ln(k+\ell+1)$.

b) Ce majorant est-il atteint ? Dans l'affirmative, en quels couples ?

---

**Solution :**

1. La fonction $f : x \to x^k(1-x)^\ell$ est continue sur le segment $[0,1]$. Elle est donc bornée et son sup est atteint. Clairement $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx > 0$. Ainsi le dénominateur définissant $R(k,\ell)$ ne s'annule pas.
Enfin par positivité du numérateur et du dénominateur, le logarithme est bien défini.

2. On sait que le polynôme $f$ est borné sur $[0,1]$. Son maximum est atteint en un point où la dérivée $f'(x)$ s'annule. Or $f'(x) = x^{k-1}(1-x)^{\ell-1}(k-(k+\ell)x)$ ceci si $k \neq 0$ et $\ell \neq 0$.
Comme $f(0) = f(1) = 0$ et $f \geqslant 0$, on obtient, si $k \neq 0$ et $\ell \neq 0$

$$\sup_{x\in[0,1]} x^k(1-x)^\ell = f\big(\frac{k}{k+\ell}\big) = \big(\frac{k}{k+\ell}\big)^k\big(\frac{\ell}{k+\ell}\big)^\ell$$

Si $k=0$ ou $\ell=0$, $\sup\limits_{x\in[0,1]} x^k(1-x)^\ell = 1$.

3. On suppose $k$ et $\ell$ non nuls. Une intégration par parties donne :

$$g(k,\ell) = \int_0^1 x^k(1-x)^\ell dx = \Big[\frac{x^{k+1}(1-x)^\ell}{k+1}\Big]_0^1 + \frac{\ell}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{\ell-1}dx$$
$$= \frac{\ell}{k+1} g(k+1,\ell-1)$$

Par une récurrence immédiate :

$$g(k,\ell) = \frac{\ell!}{(k+1)(k+2)\dots(k+\ell)} g(k+\ell,0) = \frac{\ell!k!}{(k+\ell+1)!}$$

4. a) Supposons $k$ et $\ell$ non nuls. En utilisant les résultats précédents :

$$R(k,\ell) = \ln\Big((k+\ell+1)\binom{k+\ell}{k}\big(\frac{k}{k+\ell}\big)^k\big(\frac{\ell}{k+\ell}\big)^\ell\Big)$$
$$= \ln(k+\ell+1) + \ln\Big(\binom{k+\ell}{k}\big(\frac{k}{k+\ell}\big)^k\big(\frac{\ell}{k+\ell}\big)^\ell\Big)$$

Si $X$ est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(k+\ell, \frac{k}{k+\ell})$, la seconde partie de la dernière expression représente $\ln(P(X=k)) < 0$. Ainsi $R(k,\ell) \leqslant \ln(k+\ell+1)$.

- si $k=\ell=0$, $R(k,\ell) = \ln 1 = 0$ ;
- si $k=0, \ell\neq 0$, $R(k,\ell) = \ln(\ell+1)$ ;
- si $k\neq 0, \ell=0$, $R(k,\ell) = \ln(k+1)$.

Finalement, pour tout $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2, R(k,\ell) \leqslant \ln(k+\ell+1)$.

b) On a égalité si $k=0$ ou $\ell=0$. Par contre, si $k\neq 0$ et $\ell\neq 0$, le second logarithme de la question a) n'est jamais nul.

On a donc égalité si et seulement si $k=0$ ou $\ell=0$.

---

**Exercice 1.11.**

Pour $\alpha\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose, sous réserve d'existence :

$$J_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \big(\sin t\big)^\alpha \big(\cos t\big)^n\, dt$$

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de $\alpha$ l'intégrale précédente est-elle définie ?

2. a) Déterminer la nature de la série de terme général $J_n(1)$.

b) En déduire la nature de la série de terme général $J_n(\alpha)$ pour $\alpha\leqslant 1$.

3. a) Soit $n$ un entier naturel tel que $n\geqslant 2$ ; déterminer la limite de $u_n = \big[\cos\big(\frac{1}{\ln n}\big)\big]^n$, quand $n$ tend vers l'infini.

b) En déduire la limite, quand $n$ tend vers l'infini, de l'intégrale $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt$.

4. On suppose $\alpha \geqslant 2$.

a) Soit $g$ la fonction d'une variable réelle définie sur $]0, \pi/2]$ par $g(t) = \dfrac{(\sin t)^\alpha}{1-\cos t}$.

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g(t)\, dt$.

b) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ :

$$\int_0^{\pi/2} g(t)\, dt - \sum_{n=0}^{N} J_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} g(t)\,(\cos t)^{N+1}\, dt$$

c) En déduire la nature de la série de terme général $J_n(\alpha)$.

d) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} J_n(2)$.

---

**Solution :**

1. On a $t \mapsto \sin^\alpha t\, \cos^n t \in C^0\big(]0, \pi/2]\big)$ et au voisinage de 0 est équivalente à $t^\alpha$. Ainsi l'intégrale converge si et seulement si $\alpha > -1$.

Donc $J_n(\alpha)$ est bien défini si et seulement si $\alpha > -1$.

2. a) On a $t \mapsto \sin t\, \cos^n t \in C^0([0, \pi/2])$ donc $J_n(1)$ définie, et :

$$J_n(1) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)\, \cos^n t dt = \Big[-\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}$$

donc la série $\sum J_n(1)$ diverge.

b) $-1 < \alpha \leqslant 1 \implies \forall t \in\, ]0, \pi/2], (\sin t)^\alpha \geqslant \sin t$ donc $J_n(\alpha) \geqslant J_n(1)$, d'où la divergence de la série $\sum J_n(\alpha)$.

3. a) Par développement limité :

$$u_n = \exp\Big[n \ln\Big(1 - \frac{1}{2\ln^2 n} + o\Big(\frac{1}{\ln^2 n}\Big)\Big)\Big] = \exp\Big[-\frac{n}{2\ln^2 n} + o\Big(\frac{n}{\ln^2 n}\Big)\Big] \to 0$$

b) Par la relation de Chasles et décroissance de la fonction cosinus sur $[0, \pi/2]$ :

$$0 \leqslant W_n \leqslant \int_0^{1/\ln^2 n} dt + \int_{1/\ln^2 n}^{\pi/2} u_n dt \leqslant \frac{1}{\ln^2 n} + \frac{\pi}{2}\, u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

4. a) On a $g \in C^0(]0, \pi/2])$ et $g(t) \underset{(0)}{\sim} 2\, t^{\alpha-2}$, donc $g$ est prolongeable par continuité pour $\alpha \geqslant 2$. Donc l'intégrale est faussement impropre et converge.

b) Il suffit d'invoquer la linéarité de l'intégration, et l'identité géométrique habituelle.

c) Soit $M$ un majorant de $|g|$ sur $]0, \pi/2]$ (possible d'après la question 4.a). Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\Big|\int_0^{\pi/2} g(t)\, dt - \sum_{n=0}^{N} J_n(\alpha)\Big| \leqslant M \times W_{N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\sum_{n\geq 0} J_n(\alpha)$ converge vers $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g(t)dt$.

d) $S(2) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1-\cos t} dt = \int_0^{\pi/2} (1+\cos t)dt = \frac{\pi}{2} + 1.$

---

**Exercice 1.12.**

Pour toute fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note :

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

(La valeur de cette intégrale est la longueur de la courbe représentative de $f$.)

1. Calculer $L(f)$ pour $f$ définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$.

2. a) Calculer la dérivée sur $[0; 1]$ de $h : t \mapsto \dfrac{1}{2} \ln(2t + \sqrt{1 + 4t^2})$.

b) Soit $f$ définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t^2$. Calculer $L(f)$.

3. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente.

c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est convergente.

d) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt$ est divergente.

En déduire la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$.

4. On désigne par $g$ la fonction définie sur $]0, 1]$ par $g(t) = \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ et par $f$ la fonction définie sur le même intervalle par $f(x) = \displaystyle\int_x^1 g(t)\, dt$.

a) Montrer que $f$ se prolonge par continuité en 0. On notera encore $f$ ce prolongement.

b) Montrer que $f$ est continue sur $[0, 1]$ et indéfiniment dérivable sur $]0, 1]$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \int_x^1 |g(t)|\, dt = +\infty$.

d) Pour tout réel $x \in\ ]0, 1]$, on désigne par $\lambda(x)$ la longueur de la courbe représentative de la restriction de $f$ au segment $[x, 1]$.

Donner une expression intégrale de $\lambda(x)$, pour tout $x \in ]0, 1]$, puis montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \lambda(x) = +\infty$.

---

**Solution :**

1. On a : $1+[f'(t)]^2 = 1+\dfrac{\mathrm{e}^{2t}-2+\mathrm{e}^{-2t}}{4} = \dfrac{\mathrm{e}^{2t}+2+\mathrm{e}^{-2t}}{4} = [f(t)]^2$. Donc

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{f(t)^2}dt = \int_0^1 f(t)\,dt = \Big[\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}\Big]_0^1 = \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2} = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}}$$

2. a) Il vient :

$$h'(t) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2t+\sqrt{1+4t^2}}\times\Big(2+\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}\Big) = \frac{1}{2t+\sqrt{1+4t^2}}\times\frac{\sqrt{1+4t^2}+2t}{\sqrt{1+4t^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$$

b) Par intégration par parties suggérée par la question a) :

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}dt = \big[t\times\sqrt{1+4t^2}\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{4t^2}{\sqrt{1+4t^2}}dt$$
$$= \sqrt{5} - \int_0^1 \frac{4t^2+1-1}{\sqrt{1+4t^2}}dt = \sqrt{5} - L(f) + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}dt.$$

Donc :

$$2L(f) = \sqrt{5}+\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}dt = \sqrt{5}+\Big[\frac{1}{2}\ln(2t+\sqrt{1+4t^2})\Big]_0^1 = \sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}),$$

et :

$$L(f) = \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$$

3. a) La fonction à intégrer se prolonge par continuité en $0$ ; l'intégrale est faussement impropre en 0.

b) On a pour $A>1$ : $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \Big[-\frac{\cos t}{t}\Big]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,dt.$

Avec $\Big|\dfrac{\cos t}{t^2}\Big| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, la règle de Riemann montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt$ est absolument convergente, donc convergente. On peut passer à la limite lorsque $A$ tend vers $+\infty$ et $\dfrac{\cos A}{A}$ est de limite nulle.

Donc l'intégrale proposée converge.

c) On procède comme en b) par intégration par parties pour augmenter la puissance au dénominateur.

d) On a : $\dfrac{\sin^2(t)}{t} = \dfrac{1-\cos(2t)}{2t}$, donc :

$$\int_1^x \frac{\sin^2(t)}{t}dt = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t}dt$$

Quand $x$ tend vers $+\infty$, la dernière intégrale converge et $\dfrac{1}{2}\ln x$ tend vers l'infini. D'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\sin^2 t}{t}dt = +\infty$. Enfin, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\sin^2 t}{t} \leqslant \dfrac{|\sin t|}{t}$. Donc par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}dt$ diverge.

4. a) Soit $x \in ]0,1]$. Par le changement de variable $u = 1/t$,

$$f(x) = \int_x^1 g(t)dt = \int_1^{1/x} \frac{\sin u}{u} du.$$

Et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge, on peut prolonger $f$ par continuité en 0.

b) Sur $]0,1]$, $f$ est l'unique primitive de $-g$ nulle en 1, donc $f$ qui est continue en 0 est clairement de classe $C^\infty$ sur $]0,1]$.

c) Comme en a), on a : $\displaystyle\int_x^1 |g(t)|dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{|\sin u|}{u} du$ : la divergence de l'intégrale à l'infini et la positivité de la fonction à intégrer donnent le résultat.

d) On a $f'(t) = -g(t)$. Donc :

$$\forall\, x \in \,]0,1], \lambda(x) = \int_x^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}\sin^2(\frac{1}{t})}dt \geqslant \int_x^1 \big|\frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t})\big|dt \geqslant \int_x^1 |g(t)|dt$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0+} \lambda(x) = +\infty$. On a ainsi un exemple de courbe image d'une fonction continue sur un segment et de longueur infinie ...

---

**Exercice 1.13.**

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle vérifiant pour tous $n, m$ entiers naturels non nuls :

$$u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $v_n = \min\limits_{k \in [\![1,n]\!]} \dfrac{u_k}{k}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ admet une limite $\ell$ dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tous $n, m$ entiers naturels non nuls, on a $u_{nm} \leqslant m u_n$.

3. On suppose dans cette question que $\ell$ ne vaut pas $-\infty$. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{u_m}{m} \leqslant \ell + \varepsilon$.

b) En utilisant la division euclidienne de $n$ par $m$, montrer que la suite $\big(\frac{u_n}{n}\big)_{n \geq 1}$ converge vers $\ell$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

Dans la suite, on appelle *chemin sans croisement de longueur* $n$ toute suite $M_0, \dots, M_n$ de points du plan à coordonnées entières vérifiant :

i) $M_0 = O$ (origine du plan) ;

ii) pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la distance entre $M_i$ et $M_{i+1}$ est égale à 1 ;

iii) pour tout $i \neq j$, on a $M_i \neq M_j$.

On note $N_n$ le nombre de chemins sans croisement de longueur $n$.

a) Montrer que $N_n \leqslant 4^n$.

b) Montrer que pour tous $n, m$ entiers naturels non nuls, $N_{n+m} \leqslant N_n N_m$.

c) Quelle relation vérifie $u_n = \ln N_n$ ?

d) En déduire que la suite $(N_n^{1/n})_n$ converge.

**Solution :**

1. La suite $(v_n)$ est décroissante (à cause du min...) Soit elle est minorée, auquel cas elle converge vers sa borne inférieure, soit elle tend vers $-\infty$.

2. On montre cette relation par récurrence.

- pour $m = n$, $u_{2n} \leqslant 2u_n$ ;
- supposons que $u_{mn} \leqslant mu_n$. Alors
$$u_{(m+1)n} = u_{mn+n} \leqslant u_{mn} + u_n \leqslant mu_n + u_n = (m+1)u_n$$

3. a) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, il existe $n \geqslant 1$ tel que $\min\limits_{k\in[\![1,n]\!]} \dfrac{u_k}{k} \leqslant \ell + \varepsilon$ et comme c'est un minimum, il existe $m \geqslant 1$ tel que $\dfrac{u_m}{m} \leqslant \ell + \varepsilon$.

b) Soit $m$ fixé et $n$ grand. Il existe un unique couple $(q, r)$ avec $0 \leqslant r < m$ tel que $n = mq + r$. Ainsi :
$$\frac{u_n}{n} = \frac{u_{mq+r}}{n} \leqslant \frac{u_{mq}}{n} + \frac{u_r}{n} \leqslant q\,\frac{u_m}{n} + \frac{u_r}{n} = \frac{n-r}{n} \times \frac{u_m}{m} + \frac{u_r}{n} \leqslant \frac{u_m}{m} + \frac{u_r}{n}$$
Comme $r \in [\![0, m-1]\!]$, on a $u_r \leqslant \max(u_1, \ldots, u_{m-1}) \leqslant C_m$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_r}{n} = 0$, et il existe $N_1$ tel que pour $n \geqslant N_1$, $\dfrac{u_n}{n} \leqslant \ell + 2\varepsilon$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, par décroissance, il existe $N_2$ tel que si $n \geqslant N_2$, $\dfrac{u_n}{n} \geqslant \ell - 2\varepsilon$. Ainsi pour $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, $\left|\dfrac{u_n}{n} - \ell\right| < 2\varepsilon$.

4. a) On part de $M_0 = (0,0)$. Il y a 4 choix possibles pour $M_1$ qui sont $(1,0), (-1,0), (0,1)$ et $(0,-1)$. Si $M_k$ est placé, il y a alors 4 positions possibles pour $M_{k+1}$. Par récurrence immédiate $N_n \leqslant 4^n$.

b) Il y a $N_n$ chemins sans croisement de $M_0$ à $M_n$ et au plus $N_m$ chemins sans croisement et ne croisant par $M_0, \ldots, M_n$ de $M_n$ à $M_{n+m}$. Donc :
$$N_{n+m} \leqslant N_n N_m$$

c) La suite $(u_n)$ vérifie $u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$.

d) La suite $(v_n)$ correspondante ne peut tendre vers $-\infty$ puisque $u_n = \ln(N_n) \geqslant 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \ell \in \mathbb{R}$ et
$$\lim_{n\to+\infty} \ln[(N_n)^{1/n}] = \ell \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} N_n^{1/n} = e^{\ell} \in \mathbb{R}_+^*$$

---

**Exercice 1.14.**

1. Déterminer les réels $x$ pour lesquels $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x}$ converge.

On note alors $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x}$.

2. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En évaluant $F(n) - F(n+1)$, déterminer à l'aide d'une intégration par parties, une relation de récurrence entre $F(n)$ et $F(n+1)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F(-n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}$.

5. Étudier les variations de la fonction $F$ sur son domaine de définition.

6. a) Pour $x < 0$ fixé, étudier les variations de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^x}$ sur $[0,1]$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.

7. a) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\, dt$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

---

**Solution :**

1. Pour un réel $x$ fixé, la fonction $f_x : t \mapsto e^{-x\ln(1+t^2)}$ est continue sur $[0,1]$ donc la fonction $F$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. On a $F(0) = \displaystyle\int_0^1 dt = 1$ et $F(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \big[\arctan t\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ . Par linéarité,

$$F(n) - F(n+1) = \int_0^1 \Big(\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\Big) dt = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\, dt$$
$$= \int_0^1 \frac{t}{2} \times \frac{2t}{(1+t^2)^{n+1}}\, dt$$

Posons $u(t) = \dfrac{t}{2}$ et $v(t) = \dfrac{-1}{n(1+t^2)^n}$ Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[0,1]$, donc en intégrant par parties :

$$F(n) - F(n+1) = \Big[\frac{t}{2} \times \frac{-1}{n(1+t^2)^n}\Big]_0^1 + \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{-1}{n2^{n+1}} + \frac{1}{2n}F(n).$$

Finalement :

$$F(n+1) = \frac{2n-1}{2n}F(n) + \frac{1}{n2^{n+1}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $F(-n) = \displaystyle\int_0^1 (1+t^2)^n\, dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{2k} dt$, donc par linéarité :

$$F(-n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}$$

5. Pour un réel $t \in [0,1]$ fixé, la fonction $x \mapsto f_x(t)$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc, $\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2, x \leqslant x' \implies f_x(t) \geqslant f_{x'}(t)$, puis par croissance de l'intégrale avec $0 < 1$, il vient $F(x) \geqslant F(x')$ donc $F$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

6. a) Pour $x < 0$ fixé, la fonction $f_x$ est dérivable sur $[0,1]$ et :

$$\forall t \in [0,1], f_x'(t) = \mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)} \times \frac{-2xt}{1+t^2}.$$

Ainsi $f_x$ est croissante sur $[0,1]$ et $f_x(\frac{1}{2}) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$.

b) Soit $x < 0$. D'après la question précédente, $\forall\, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], f_x(t) \geqslant f_x\left(\frac{1}{2}\right)$, donc par croissance de l'intégrale avec $\frac{1}{2} < 1$, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_x(t)dt \geqslant \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_x\left(\frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{2} f_x\left(\frac{1}{2}\right)$.

D'autre part, la fonction $f_x$ étant positive sur $[0,1], F(x) \geqslant \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_x(t)dt$ donc

$$F(x) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^x$$

Par comparaison $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$

7. a) En étudiant la fonction $t \mapsto \ln(1+t) - \dfrac{t}{2}$ sur $[0,1]$, on montre facilement que $\forall\, t \in [0,1]\ ,\ \ln(1+t) \geqslant \dfrac{t}{2}$. Or si $t \in [0,1]$, alors $t^2 \in [0,1]$, donc $\ln(1+t^2) \geqslant \dfrac{t^2}{2}$, donc $f_x(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}$.

En intégrant, il vient : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\, dt$.

b) En effectuant le changement de variable affine $u = \sqrt{x}\times t$, d'où $du = \sqrt{x}\, dt$, il vient :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ (densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$), alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\, dt = 0$$

Or clairement, $F(x) \geqslant 0$, donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

---

**Exercice 1.15.**

Soit $a > 0$, $I = [0,a]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que :

- $0 < f(x) < x$ pour tout $x \in \,]0,a]$ ;
- il existe $\alpha > 0, c > 0$ tels que pour tout $x$ dans un voisinage de 0,

$$f(x) = x - c\, x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})$$

Soit $(u_n)$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I, u_0 \neq 0 \\ \forall\, n \geqslant 0, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

2. a) Soit $\gamma$ un réel non nul. Montrer que

$$u_{n+1}^{\gamma} = u_n^{\gamma} - c\gamma u_n^{\alpha+\gamma} + o(u_n^{\alpha+\gamma})$$

b) Montrer qu'il existe $\gamma$ tel que la suite de terme général $u_{n+1}^{\gamma} - u_n^{\gamma}$ converge dans $\mathbb{R}^*$.

3. a) Montrer que si $(v_n)$ est une suite réelle admettant une limite $\lambda$, alors la suite $(w_n)$ définie par $w_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n} v_i$ converge également vers $\lambda$.

b) En déduire un équivalent de $u_n$.

4. *Applications*

a) Soit $u$ la suite définie par $u_0 > 0$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n$.

b) Soit $u$ définie par $u_0 \in\, ]0,\pi[$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Trouver un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

---

**Solution :**

1. La suite $(u_n)$ est strictement décroissante, minorée par 0. Elle converge vers une limite $\ell$ vérifiant $\ell = f(\ell)$. Comme $f(x) < x$ pour $x \neq 0$, alors $\ell = 0$.

2. a) On utilise un développement limité de $(1+u)^\gamma$ pour $u$ au voisinage de 0.
$u_{n+1}^\gamma = u_n^\gamma(1 - cu_n^\alpha + o(u_n^\alpha))^\gamma = u_n^\gamma(1 - c\gamma u_n^\alpha + o(u_n^\alpha)) = u_n^\gamma - c\gamma u_n^{\alpha+\gamma} + o(u_n^{\alpha+\gamma})$
b) En choisissant $\gamma = -\alpha$, il vient :=
$$u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} = c\alpha + o(1)$$

3. a) On revient à la définition de la limite :
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0, n \geqslant n_0 \implies |v_n - \lambda| < \varepsilon$$
Alors pour $n$ plus grand que $n_0$ :
$$|w_n - \lambda| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0} |u_n - \lambda| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_n - \lambda| \leqslant \frac{C_{n_0}}{n} + \varepsilon\frac{n-n_0}{n} < \frac{C_{n_0}}{n} + \varepsilon$$
En choisissant $n_1$ tel que pour $n > n_1$, $\dfrac{C_{n_0}}{n} < \varepsilon$, pour $n > \max(n_0, n_1)$, on a $|w_n - \lambda| < 2\varepsilon$.
b) La question précédente montre que $\dfrac{1}{n}\big(u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}\big) = c\alpha$, donc $u_n \sim \dfrac{1}{(c\alpha)^{1/\alpha}} \times \dfrac{1}{n^{1/\alpha}}$.

4. a) La fonction proposée vérifie les hypothèses de l'exercice avec $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
Ici $c = 1/2$ et $\alpha = 1$. La question précédente montre que $u_n \sim \dfrac{2}{n}$ et la série $\sum u_n$ diverge.
b) Cette fois $f(x) = \sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, donc ici $c = \dfrac{1}{6}$ et $\alpha = 2$, on en déduit :
$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

**Exercice 1.16.**

On note $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ les applications définies par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,du \text{ et } G(x) = \int_1^x \frac{\cos u}{u}\,du$$

1. Montrer que $F$ (respectivement $G$) admet une limite finie, notée $\alpha$ (respectivement $\beta$) en $+\infty$.

2. Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$ converge et exprimer sa valeur, notée $A(x)$, en fonction de $F$ et $G$.

3. Montrer que $A$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $A''(x) + A(x)$ pour tout $x > 0$.

4. Déterminer les limites de $A$, $A'$ et $A''$ en $+\infty$. Peut-on généraliser ?

5. a) Montrer que $\displaystyle\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge et qu'elle est la limite de $A(x)$ lorsque $x$ tend vers 0.

---

**Solution :**

1. En intégrant par parties :

$$F(x) = \Big[ -\cos u \times \frac{1}{u} \Big]_1^x - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,du = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,du$$

Cette intégration par parties avait pour but d'augmenter la puissance au dénominateur et la règle de Riemann montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,du$ est absolument convergente, donc convergente et par conséquent $F$ a une limite en $+\infty$.

On procède de la même façon pour $G$.

2. Comme $x > 0$, le seul problème est en $+\infty$ et le changement de variable affine $u = t + x$ est autorisé avec la borne infinie.

Sous réserve de convergence, on a donc : $\displaystyle A(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\,du$

et en développant $\sin(u-x)$, les résultats de la question 1. donnent la convergence voulue et permettent de scinder l'intégrale :

$$A(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$$

Avec, dans le cas de la converegence : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \ldots = \int_1^{+\infty} \ldots - \int_1^x \ldots$, on a donc :

$$A(x) = (\cos x)(\alpha - F(x)) - (\sin x)(\beta - G(x))$$

3. Les fonctions à intégrer définissant $F$ et $G$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $F$ et $G$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $A$ aussi et une première dérivation donne :

$$\begin{aligned}A'(x) &= -(\sin x)(\alpha - F(x)) - (\cos x)(\beta - G(x)) - \cos x \times \frac{\sin x}{x} + \sin x \times \frac{\cos x}{x}\\ &= -(\sin x)(\alpha - F(x)) - (\cos x)(\beta - G(x))\end{aligned}$$

On peut donc recommencer et $A$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec :

$$A''(x) = -(\cos x)(\alpha - F(x)) + (\sin x)(\beta - G(x)) + \sin x \times \frac{\sin x}{x} + \cos x \times \frac{\cos x}{x}$$

Ainsi :

$$A(x) + A''(x) = \frac{1}{x} \quad (*)$$

4. Avec $\lim\limits_{+\infty} F = \alpha$ et $\lim\limits_{+\infty} G = \beta$ et le fait que les fonctions sin et cos sont bornées, les résultats précédents donnent : $\lim\limits_{+\infty} A = \lim\limits_{+\infty} A' = 0$ et donc également $\lim\limits_{+\infty} A'' = 0$.
On pourrait continuer par la technique dite « de l'âne qui trotte » à partir de $(*)$ : $A$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et toutes les dérivées tendent vers 0 en $+\infty$.

5. a) Déjà l'expression donnée a un sens et on écrit :

$$\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du = \sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\, du + \sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du$$

et

$$\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\, du = \int_x^1 \frac{\cos u - 1 + 1}{u}\, du = -\ln x + \int_x^1 \frac{\cos u - 1}{u}\, du$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin x \ln x = 0$ (par équivalent du sinus) et $\lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{\cos u - 1}{u} = 0$, l'intégrale précédente est faussement impropre en 0 et le passage à la limite est licite et donne :

$$\lim_{x \to 0} \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du = 0$$

b) La convergence demandée est banale car on a déjà réglé le problème pour la borne infinie et l'intégrale est faussement impropre en 0.

Comme $A(x) = \cos x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du$ et $\lim\limits_0 \cos = 1$, le résultat demandé est une conséquence du résultat a).

---

**Exercice 1.17.**

A toute suite réelle $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on associe la suite $a^*$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

1. **Un exemple : Suite géométrique.**

Soit $z \in \mathbb{R}$. On suppose que la suite $a$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = z^n$.

a) Exprimer $a_n^*$ en fonction de $z$ et $n$.

b) On suppose que $|z| < 1$.

i) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

ii) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

c) On suppose que $|z| \geqslant 1$.

i) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ ?

ii) Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$ si $z = -2$ ?

2. **Comparaison des convergences des deux suites.**

a) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

b) Soit $a$ une suite réelle et $q$ un entier naturel **fixé**.
On considère pour $n > q$, la somme $S_q(n, a) = \sum\limits_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n, a)$ lorsque l'entier $n$ tend vers $+\infty$ ?

c) On suppose que $(a_n)$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^* = 0$.

d) On suppose que $(a_n)$ converge vers un réel $\ell$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de $(a_n^*)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

e) La convergence de la suite $(a_n)$ est-elle équivalente à la convergence de la suite $(a_n^*)$ ?

---

**Solution :**

1 a) D'après la formule du binôme : $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n^* = \frac{1}{2^n}(z+1)^n$.

b) i) D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique, comme $z \neq 1$ : $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.
Comme $|z| < 1$, cette suite admet une limite. Ainsi, $\sum a_n$ converge et

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

ii) D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{z+1}{2}\right| \leqslant \frac{1+|z|}{2} < 1$$

Ainsi, $\sum a_n^*$ est une série géométrique convergente et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^* = \frac{2}{1-z} = 2A(z)$.

c) i) Comme $|z| \geqslant 1$, la série $\sum a_n$ est grossièrement divergente.

ii) Si $z = -2$, alors $a_n^* = (-\frac{1}{2})^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

2. a) L'entier $k$ étant fixé, $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$

et d'après les théorèmes de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0$.

b) L'entier $q$ étant fixé, $(S_q(n,a))_n$ est une somme finie de suites de limite nulle. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$.

c) Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle, il existe un entier naturel $q$ tel que

$$\forall\, n \geqslant q, |a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

La suite $(S_q(n,a))_n$ étant de limite nulle, il existe $n_0$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, |S_q(n,a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

D'après les questions précédentes, pour tout $n \geqslant \max\{n_0, q\}$ :

$$|a_n^*| = \Big|S_q(n,a) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}a_k\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, par définition de la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^* = 0$.

d) D'après la définition et la formule du binôme qui donne $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, on peut écrire : $a_n^* - \ell = \dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - \ell)$.

Ainsi, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - \ell) = 0$, on se ramène au cas précédent et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^* = \ell$.

e) Si $a = ((-2)^n)_n$, alors, d'après la question 2. c), $(a_n^*)$ est une suite convergente de limite nulle alors que $(a_n)$ est une suite divergente. Ainsi, il n'y a pas équivalence entre les convergences de $(a_n)$ et de $(a_n^*)$.