

ANALYSE

Exercice 1.01.

Pour tout entier $p \geq 1$, on définit la fonction f_p sur $[1, +\infty[$, par

$$f_p(t) = \frac{1}{t(t+1)\cdots(t+p)}$$

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_p(t) dt$ converge. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose alors :

$$I_p = \int_1^{+\infty} f_p(t) dt$$

2. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, étudier la convergence de la suite $(f_p(t))_{p \geq 1}$.

3. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(I_p)_{p \geq 1}$.

4. Pour p fixé, on admet l'existence de nombres réels $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \llbracket -p, 0 \rrbracket, f_p(t) = \sum_{k=0}^p \frac{\alpha_k}{t+k}.$$

Montrer que pour tout $j \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on a : $\alpha_j = \frac{(-1)^j}{j!(p-j)!}$.

Pour tout $j \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on pourra multiplier la relation admise par $(t+j)$ et choisir une valeur particulière de t .

5. Calculer $\sum_{k=0}^p \alpha_k$ et en déduire une expression de I_p , sans intégrale, sous la forme d'une somme.

Solution :

1. La fonction f_p est continue sur $[1, +\infty[$, donc la convergence ne pose problème qu'en $+\infty$. En $+\infty$, on a : $0 \leq f_p(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{p+1}}$. D'où la convergence par comparaison avec l'intégrale convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{p+1}}$ (puisque $p+1 \geq 2 > 1$).

2. Pour tout $t \geq 1$ et tout $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on a $t+i \geq i+1$, donc $0 \leq f_p(t) \leq \frac{1}{(p+1)!}$. Donc, par théorème d'encadrement, on obtient : $\lim_{p \rightarrow +\infty} f_p(t) = 0$.

3. De même que précédemment, en mettant à part les deux premiers facteurs, on a :

$$0 \leq f_p(t) \leq \frac{1}{t(t+1) \times 3 \times \cdots \times (p+1)} = \frac{1}{t(t+1)} \times \frac{2}{(p+1)!} \leq \frac{1}{t^2} \times \frac{2}{(p+1)!}.$$

Par croissance de l'intégration, comme les deux intégrales convergent, on en déduit :

$$0 \leq I_p \leq \frac{2}{(p+1)!} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}.$$

Donc, par théorème d'encadrement, on obtient : $\lim_{p \rightarrow +\infty} I_p = 0$.

4. Pour tout $j \in \llbracket 0, p \rrbracket$, en multipliant la relation admise par $t+j$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \llbracket -p, 0 \rrbracket, \frac{1}{t(t+1) \cdots (t+j-1)(t+j+1) \cdots (t+p)} = \alpha_j + \sum_{k=0, k \neq j}^p \frac{\alpha_k(t+j)}{t+k}.$$

En faisant tendre t vers $-j$ (puisque les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t+k}$ sont continues sur $\mathbb{R} \setminus \llbracket -p, 0 \rrbracket$), on obtient :

$$\alpha_j = \frac{1}{(-j)(-j+1) \cdots (-1)(1) \cdots (p-j)} = \frac{(-1)^j}{j!(p-j)!}.$$

5. D'après la formule du binôme, on a :

$$\sum_{k=0}^p \alpha_k = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k = \frac{(1-1)^p}{p!} = 0$$

On peut également écrire $tf_p(t) = \sum_{k=0}^p \frac{t\alpha_k}{t+k}$, puis faire tendre t vers $+\infty$.

On ne peut pas écrire $I_p = \sum_{k=0}^p \alpha_k \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+k}$ car ces intégrales divergent toutes. Donc, plus prudemment, pour tout $X > 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_1^X f_p(t) dt &= \sum_{k=0}^p \alpha_k \int_1^X \frac{dt}{t+k} \\
&= \sum_{k=0}^p \alpha_k \ln \left(\frac{X+k}{1+k} \right) = \sum_{k=0}^p \alpha_k \left(\ln X + \ln \left(1 + \frac{k}{X} \right) - \ln(1+k) \right) \\
&= \ln X \underbrace{\left(\sum_{k=0}^p \alpha_k \right)}_{=0} + \sum_{k=0}^p \alpha_k \left(\ln \left(1 + \frac{k}{X} \right) - \ln(1+k) \right) \\
&\xrightarrow{X \rightarrow +\infty} - \sum_{k=0}^p \alpha_k \ln(1+k) = I_k.
\end{aligned}$$

Exercice 1.02.

Soit un entier $n \geq 2$. L'espace vectoriel \mathbb{R}^n est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ associée.

On dit qu'une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive (resp. définie positive) si son spectre $\text{Sp}(A)$ est contenu dans \mathbb{R}_+ (resp. \mathbb{R}_+^*).

On admet qu'une matrice A est positive (resp. définie positive) si et seulement si le produit scalaire $\langle Ax, x \rangle$ est positif pour tout x de \mathbb{R}^n (resp. strictement positif pour tout x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).

On admet également que si A est une matrice positive, alors $\langle Ax, x \rangle = 0$ si et seulement si $x \in \text{Ker}(A)$.

1. Soit $u = (u_1, u_2)$ un point de \mathbb{R}^2 . On définit la fonction f_u sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f_u(x_1, x_2) = \|x - u\| = \sqrt{(x_1 - u_1)^2 + (x_2 - u_2)^2}.$$

a) On note O_u l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{u\}$. Justifier que f_u est de classe C^2 sur O_u .

b) Déterminer le gradient de f_u en tout point $x = (x_1, x_2) \in O_u$.

c) Déterminer la matrice hessienne $\nabla^2(f_u)(x)$ en tout point x de O_u .

Montrer que $\nabla^2(f_u)(x)$ n'est pas inversible. Déterminer $\text{Sp}(\nabla^2(f_u)(x))$.

d) Soit $x \in O_u$. Montrer que $\nabla^2(f_u)(x)$ est positive et que $h = (h_1, h_2)$ appartient au noyau de $\nabla^2(f_u)(x)$ si et seulement si h appartient à la droite d'équation $(x_2 - u_2)y_1 = (x_1 - u_1)y_2$.

2. Soit a, b, c trois points non alignés de \mathbb{R}^2 . On note O l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b, c\}$.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x) = f_a(x) + f_b(x) + f_c(x)$.

On admet que f admet un minimum global et on suppose dans toute la suite que ce minimum global n'est pas atteint en l'un des points a, b et c .

a) Montrer que si $m = (m_1, m_2)$ est un point où ce minimum global est atteint, alors on a :

$$\frac{1}{f_a(m)}(m - a) + \frac{1}{f_b(m)}(m - b) + \frac{1}{f_c(m)}(m - c) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

b) Prouver que la hessienne $\nabla^2(f)(x)$ est définie positive en tout point x de O .

c) Supposons que x et y sont deux points distincts où le minimum global est atteint.

Pour $t \in [0, 1]$, on pose $g(t) = f((1-t)x + ty) = f(x + t(y-x))$. En utilisant l'inégalité triangulaire pour la norme, montrer que g est constante. Vérifier que le segment de droite $[x, y] = \{(1-t)x + ty; t \in [0, 1]\}$ est contenu dans O . Trouver alors une contradiction. Conclure.

Solution :

1. a) La fonction $t \rightarrow \sqrt{t}$ est C^∞ sur \mathbb{R}^{*+} et la fonction $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1 - u_1)^2 + (x_2 - u_2)^2$ est C^∞ sur \mathbb{R}^2 .

Par composition, on voit que la fonction f_u est de classe C^∞ sur O_u .

b) On trouve : $\nabla(f_u)(x) = \frac{1}{f_u(x)}(x_1 - u_1, x_2 - u_2)$.

c) On obtient :

$$\nabla^2(f_u)(x) = \frac{1}{f_u(x)^3} \begin{pmatrix} (x_2 - u_2)^2 & -(x_1 - u_1)(x_2 - u_2) \\ -(x_1 - u_1)(x_2 - u_2) & (x_1 - u_1)^2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de f_u est clairement nul, par conséquent la matrice $\nabla^2(f_u)(x)$ n'est pas inversible.

On vient de voir que $0 \in \text{Sp}(\nabla^2(f_u)(x))$; on trouve la deuxième valeur propre de cette matrice symétrique réelle en calculant sa trace. D'où :

$$\text{Sp}(\nabla^2(f_u)(x)) = \left(0, \frac{1}{f_u(x)}\right)$$

d) Soit $x \in O_u$. La matrice $\nabla^2(f_u)(x)$ est positive car son spectre est inclus dans \mathbb{R}_+ .

Le système $\nabla^2(f_u)(x)(h) = 0$ est clairement équivalent ($x \in O_u$) à $(x_2 - u_2)h_1 - (x_1 - u_1)h_2 = 0$, c'est-à-dire que h appartient à la droite d'équation $(x_2 - u_2)y_1 = (x_1 - u_1)y_2$.

2. Montrons l'existence du minimum global de f . On voit que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$. Il existe donc un boule fermée B centrée en 0 en dehors de laquelle $f(x) > f(0)$. La fonction f étant positive, on en déduit alors que :

$$0 \leq \inf \{f(x); x \in \mathbb{R}^2\} = \inf \{f(x); x \in B\}$$

qui est atteint en un point de B puisque f est continue.

a) Un point $m = (m_1, m_2)$ où le minimum global est atteint appartient nécessairement à O d'après l'hypothèse. Alors on doit avoir : $0 = \nabla(f)(m) = \nabla(f_a)(m) + \nabla(f_b)(m) + \nabla(f_c)(m)$, ce qui donne bien la relation voulue.

b) Comme

$$\langle \nabla^2(f)(m)h, h \rangle = \langle \nabla^2(f_a)(m)h, h \rangle + \langle \nabla^2(f_b)(m)h, h \rangle + \langle \nabla^2(f_c)(m)h, h \rangle,$$

on voit avec la question 1. c) et la première propriété admise au début de l'énoncé que la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x)$ est positive en tout point x de O .

c) Maintenant, comme la somme ci-dessus est une somme de termes positifs, elle est nulle si et seulement si chacun des termes est nul. Ce qui revient à dire, d'après la deuxième propriété admise au début de l'énoncé et la question 1. d), que h appartient au noyau de $\nabla^2(f)(m)$ si et seulement si :

$$(m_2 - a_2)h_1 = (m_1 - a_1)h_2, \quad (m_2 - b_2)h_1 = (m_1 - b_1)h_2 \quad \text{et} \quad (m_2 - c_2)h_1 = (m_1 - c_1)h_2$$

Si on suppose $h \neq 0$, alors, a , b et c appartiennent à la droite d'équation $(m_2 - y_2)h_1 = (m_1 - y_1)h_2$, ce qui est contradictoire. La hessienne $\nabla^2(f)(x)$ est donc définie positive. Avec l'inégalité triangulaire vérifiée par la norme, on voit que l'on doit avoir

$$f(x) = f(y) \leq g(t) \leq (1-t)f(x) + tf(y) = f(x)$$

La fonction g est donc constante sur $[0, 1]$.

Comme le minimum global n'est pas atteint en l'un des points a , b et c , on a nécessairement $[x, y] \subseteq O$.

Le cours nous dit alors que $g''(t) = \langle \nabla^2(f)(x + t(y-x))(y-x), y-x \rangle > 0$ car $x \neq y$; on aboutit donc à une contradiction. Il y a donc un unique point où le minimum global est atteint.

Exercice 1.03.

Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 .

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_n^{n+1} f(t) dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t) dt$$

2. On suppose que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f'(t) dt$ converge absolument.

a) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n)$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t) dt \right)_{n \geq 1}$ converge.

3.a) À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$, établir l'égalité :

$$\int_1^n \frac{\cos(\sqrt{x})}{x} dx = 2 \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\cos(u)}{u} du$$

b) Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$.

4. Montrer l'existence d'un réel ℓ qui vérifie la relation : $\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1)$.

Solution :

1. Puisque f est de classe C^1 , sur $[1, +\infty[$, elle admet une primitive F qui est de classe C^2 . On peut ainsi appliquer à F la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1,

$$\int_n^{n+1} f(t) dt = F(n+1) - F(n) = F'(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)F''(t) dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t) dt$$

2. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n)$. En utilisant la question précédente, on a

$$|v_n| \leq \int_n^{n+1} |n+1-t||f'(t)| dt \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| dt$$

Ainsi, soit $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^N |v_k| \leq \int_1^{N+1} |f'(t)| dt \leq \int_1^{+\infty} |f'(t)| dt$. Par la convergence absolue de l'intégrale, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge absolument.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_1^{n+1} f(t) dt = \sum_{k=1}^n v_k + \sum_{k=1}^n f(k)$. De plus, puisque $\sum_{k \geq 1} v_k$ converge, on en déduit l'équivalence entre la convergence de $\sum_{n \geq 1} f(n)$ et celle de la suite $\left(\int_1^n f(t) dt \right)_{n \geq 1}$ converge.

3. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos(\sqrt{x})}{x}$. La fonction f est bien C^1 sur $[1, +\infty[$, de dérivée sur $[1, +\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}) - \frac{1}{x^2} \cos(\sqrt{x})$$

Or $\frac{1}{2x\sqrt{x}} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ et $\frac{1}{x^2} \cos(\sqrt{x}) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

On en déduit, en utilisant les règles de comparaison de Riemann, que $\int_1^{+\infty} |f'(t)| dt$ converge absolument.

En appliquant la question 2, on en déduit qu'il suffit de montrer la convergence de la suite $\left(\int_1^n f(t) dt \right)_{n \geq 1}$ pour conclure. Or à l'aide d'un changement de variable, $u(x) = \sqrt{x}$,

fonction de classe C^1 , bijective, strictement croissante, de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$, il vient

$$\int_1^n \frac{\cos(\sqrt{x})}{x} dx = 2 \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\cos(u)}{u} du.$$

Effectuons une intégration par parties aux fonctions $u \mapsto \sin(u)$ et $u \mapsto \frac{1}{u}$, toutes deux C^1 sur

$[1, +\infty[$. Ainsi, $\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\cos(u)}{u} du = \left[\frac{\sin(u)}{u} \right]_1^{\sqrt{n}} + \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\sin(u)}{u^2} du$.

Or $\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\sin(u)}{u^2} du$ converge, de même que le crochet, donc la suite $\left(\int_1^n f(t) dt\right)_{n \geq 1}$ converge.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ converge.

4. La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$, vérifie bien les hypothèses. En effet, elle est C^1 sur $[1, +\infty[$, de dérivée, $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}$. Comme précédemment, puisque $\frac{\ln(x)}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$, on en déduit par théorème de comparaison et par les intégrales de Riemann, que $\int_1^n |f'(t)| dt$ converge. Ainsi, en revenant à la démonstration du 2.b) et aux notations de la question 2.a), on a montré que la série $\sum_{k \geq 1} v_k$ converge, donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k \geq 1}^n v_k \underset{+\infty}{=} \ell + o(1)$. Finalement,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} = \int_1^{n+1} f(t) dt + \ell + o(1) = \frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1).$$

Exercice 1.04.

Soit A et λ deux réels strictement positifs. Soit $I = [0, A]$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et $(u_n(t))_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} e^{n\lambda t}$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ est convergente et calculer sa somme $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$.

2. On pose $R_n(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)$. Soit f une fonction continue sur I à valeurs réelles.

a) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $t \in I$, on a :

$$|f(t)R_n(t)| \leq \frac{M}{n!} e^{n\lambda A} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{e^{q\lambda A}}{q!}$$

b) En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^A e^{k\lambda t} f(t) dt = \int_0^A (1 - \exp(-e^{\lambda t})) f(t) dt$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (1 - \exp(-e^{\lambda t}))$.

4. En découpant l'intervalle $[0, A]$ en deux intervalles $[0, \delta]$ et $[\delta, A]$, avec $\delta > 0$ judicieusement choisi, montrer

que l'on a :

$$\int_0^A f(t)dt = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^A e^{k\lambda t} f(t)dt$$

Solution :

1. On reconnaît une série exponentielle. Ainsi :

$$S(t) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = 1 - \exp(-e^{\lambda t})$$

2. a) La fonction f est continue donc bornée par M sur le segment $[0, A]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} |f(t)R_n(t)| &\leq M \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{k\lambda t}}{k!} \\ &\leq \frac{M}{n!} e^{n\lambda A} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{e^{q\lambda A}}{q!} \\ &= C_\lambda \times \frac{M e^{n\lambda A}}{n!} \end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ indépendamment de t .

b) On écrit : (S_{n-1} représente la somme partielle d'ordre $n-1$ de la série S)

$$\int_0^A f(t)S(t)dt = \int_0^A f(t)S_{n-1}(t)dt + \int_0^A f(t)R_n(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^A u_k(t)f(t)dt + \int_0^A f(t)R_n(t)dt$$

et

$$\left| \int_0^A f(t)R_n(t)dt \right| \leq A \times C_\lambda \times \frac{M e^{n\lambda A}}{n!}$$

Il reste à faire tendre n vers $+\infty$.

3. On a

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 1 - \exp(-e^{\lambda t}) = \begin{cases} 1 - e^{-1} & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. Nous allons évaluer la différence

$$\int_0^A f(t)dt - \int_0^A (1 - \exp(-e^{\lambda t}))f(t)dt$$

Pour $\delta > 0$:

$$\left| \int_0^\delta (\exp(-e^{\lambda t}))f(t)dt \right| \leq M(e^{-1})\delta < M\delta$$

On choisit alors $0 < \delta < \varepsilon/(2M)$.

De plus

$$\left| \int_{\delta}^A (\exp(-e^{\lambda t})) f(t) dt \right| \leq (\exp(-e^{\lambda \delta})) AM$$

Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$. Il existe Λ tel que si $\lambda > \Lambda$, cette quantité est inférieure à $\varepsilon/2$.

Il reste à regrouper les deux sommes pour conclure.

Exercice 1.05.

On pose pour tout n entier naturel : $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$.

1.a) Montrer que la suite (a_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge.

b) À l'aide du changement de variable $t = \sin u$, calculer a_0 .

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(n+4)a_{n+2} = (n+1)a_n$.

b) Soit (w_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$.
Montrer que la suite (w_n) est constante et calculer cette constante.

c) Montrer que $a_n \underset{+\infty}{\sim} a_{n+1}$.

d) Établir l'existence d'un réel $K > 0$ que l'on calculera, tel que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n^{3/2}}$.

e) En déduire la nature de la série de terme général $b_n = (-1)^n a_n$.

3.a) Montrer que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n b_k = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$.

b) En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$, calculer l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$.

Quelle est la somme de la série $\sum_{n \geq 0} b_n$?

Solution :

1. On remarque que ces intégrales ne sont pas généralisées, mais intégrales de fonctions continues sur un segment.

La suite (a_n) est décroissante car pour $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq t^{n+1} \leq t^n$ (puis on utilise la positivité de l'intégrale) et $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (a_n) converge.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Effectuons une intégration par parties dans a_{n+2} . Les fonctions en jeu étant de classe C^1 sur $[0, 1]$, il vient :

$$a_{n+2} = \left[-t^{n+1} \frac{1}{3} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \frac{(n+1)}{3} \int_0^1 t^n (1-t^2) \sqrt{1-t^2} dt \Rightarrow a_{n+2} = \frac{n+1}{3} (a_n - a_{n+2})$$

soit : $(n+4)a_{n+2} = (n+1)a_n$.

b) Calculons $w_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3)a_{n+1}a_n = (n+2)(n+3)a_{n+1}(n+4)a_{n+2} = w_{n+2}$, d'après la question précédente et la définition de la suite w . Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_{n+2} = w_1 = 6a_1a_0$.

Or :

$$a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2u) + 1) du = \frac{\pi}{4}, \text{ en posant } t = \sin u$$

Et

$$a_1 = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2} dt = -\frac{1}{3} \left[(1-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{\pi}{2}$.

c) D'après les deux premières questions, on a pour tout entier naturel n :

$$0 < a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}a_n < a_{n+1} < a_n$$

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure que $a_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n$.

d) En combinant les résultats des deux dernières questions, on obtient $n^3 a_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$.

Rappelons aussi que $a_n > 0$. Ainsi : $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}} n^{-3/2}$.

e) Par le critère des séries de Riemann, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont donc absolument convergentes.

3. a) Il vient :

$$\sum_{k=0}^n b_k = \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t} \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt + (-1)^n \int_0^1 t^{n+1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$$

La fonction $t \rightarrow \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$ est continue sur $[0, 1]$ donc majorée par une constante M . Ainsi :

$$0 \leq \int_0^1 t^{n+1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt \leq \frac{M}{n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

b) Effectuons le changement de variable C^1 (et bijectif) sur $[0, x]$ pour $0 < x < 1$, $u = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$,

$u^2 = \frac{1-t}{1+t}$, $t(u^2 + 1) = 1 - u^2$ donc $t = \frac{1-u^2}{1+u^2} = -1 + \frac{2}{1+u^2}$ et $dt = \frac{-4u}{(1+u^2)^2} du$. Ainsi :

$$B_x = \int_0^x \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt = \int_1^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{-4u^2}{(1+u^2)^2} du$$

Effectuons une intégration par parties. On a :

$$B_x = \left[2u \frac{1}{1+u^2} \right]_1^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} - 2 [\arctan(u)]_1^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -1 + \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Exercice 1.06.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Soit D l'ouvert de \mathbb{R}^2 défini par $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

1. Justifier que f est une fonction continue sur \mathbb{R}^2 .
2. a) Justifier que f est de classe C^2 sur D et déterminer son gradient en tout point de D .
b) Expliciter le développement limité à l'ordre 1 de f au point $a = (1, 1)$.
3. Déterminer les extrema locaux et globaux de f sur D , s'il y en a.
4. Déterminer les extrema de f sur l'ensemble $C = \{(x, y) \in D, x^2 + y^2 = 2\}$.
5. La fonction f admet-elle des extrema sur l'ensemble $B = \{(x, y) \in D, x^2 + y^2 \leq 2\}$?
6. Vérifier à l'aide du développement limité de f à l'ordre 1 que le point $a = (1, 1)$ n'est pas un maximum local de f sur D .

Solution :

1. On a $0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} \right) \rightarrow 0$ lorsque $\|(x, y)\| \rightarrow 0$. Donc f est bien continue en $(0, 0)$.

2.a) La fonction $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ comme fraction rationnelle, et

$$\forall (x, y) \in D, \quad \nabla(f)(x, y) = \left(\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2yx^4}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

b) Le DL₁ en a est :

$$f(1 + u, 1 + v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + o(\|(u, v)\|)$$

3. Les points critiques de f sont obtenus pour $(0, y)$ ou $(x, 0)$; comme f est positive sur D , ce sont des minima globaux.

D'autre part, $f(x, x) = \frac{x^2}{2} \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$; donc f n'est pas majorée.

4. On a :

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \Rightarrow \nabla(g)(x, y) = (2x, 2y) \neq 0 \text{ sur } D$$

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2yx^4}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(y^4 - 4\lambda) = 0 \\ y(x^4 - 4\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right.$$

D'où les points critiques :

- $x = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$ et $\lambda = 0$, d'où $A : (0, -\sqrt{2})$ et $A' : (0, \sqrt{2})$;
- $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ et $\lambda = 0$, d'où $B : (-\sqrt{2}, 0)$ et $B' : (\sqrt{2}, 0)$;
- $xy \neq 0 \Rightarrow x^4 = 4\lambda = y^4 \Rightarrow x = \pm y$ puis $x^2 = 1$ et $\lambda = 1/4$ d'où $F : (1, 1)$, $F' : (-1, -1)$ et $G : (1, -1)$, $G' : (-1, 1)$.

La fonction f est continue sur \mathcal{C} fermé borné, donc admet des extrema globaux atteints sur \mathcal{C} , qui sont :

$$f(A) = f(A') = f(B) = f(B') = 0 \quad \text{et} \quad f(F) = f(F') = f(G) = f(G') = \frac{1}{2}$$

5. Sur l'ouvert $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \mathcal{C} = \{(x, y) \in D, x^2 + y^2 < 2\}$, f n'a pas de maximum local mais des minima globaux (nuls) aux points tels que $x = 0$ ou $y = 0$.

Donc f a des maxima globaux sur \mathcal{B} en F, F', G, G' de valeur $\frac{1}{2}$ et des minima globaux nuls aux points tels que $x = 0$ ou $y = 0$.

6. On a :

$$f(1 + u, 1 + 0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}u + o(\|(u, v)\|)$$

qui change de signe comme u au voisinage de 0.

Exercice 1.07.

Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes pour lesquelles il existe un entier naturel N tel que :

$$\forall k \geq N, u_k \neq \lim u_n$$

À toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , de limite égale à ℓ , on associe la suite $(u_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang par :

$$u_n^* = \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right|$$

On note E^* l'ensemble des éléments $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E pour lesquels la suite (u_n^*) est convergente. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E^* et ℓ^* la limite de $(u_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$. On admet que $\ell^* \in [0, 1]$.

- si $\ell^* = 1$, on dit que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est lente ;
- si $\ell^* \in]0, 1[$, on dit que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de rapport ℓ^* ;
- si $\ell^* = 0$, on dit que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est rapide.

1. a) Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n!}\right) \in E^*$ et donner sa vitesse de convergence.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.

i) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $v_n = e - \frac{e}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

ii) Montrer que la suite $(v_n) \in E^*$ et donner sa vitesse de convergence.

2. Soit $\alpha > 1$. La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge et a pour somme le réel ℓ .

On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

a) Montrer que pour $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \ell - S_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

b) En déduire que $(S_n) \in E^*$ et donner sa vitesse de convergence.

3. Soit X une variable aléatoire discrète définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) et α un réel strictement positif.

On dit que X admet un *moment exponentiel d'ordre α* si la variable aléatoire $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie.

a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Déterminer les réels $\alpha > 0$ pour lesquels X admet un moment exponentiel d'ordre α et calculer ce moment

dans ce cas.

b) On suppose que $X(\Omega) = \{(x_p)_{p \in \mathbb{N}}\}$. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X . Pour tout entier $n > 0$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Soit $\alpha > 0$. On suppose que X admet un moment exponentiel d'ordre α .

i) Montrer que pour tout réel u , on a : $e^u \geq 1 + u \geq u$.

ii) Montrer que X admet une espérance finie notée m et une variance notée σ^2 .

iii) Soit un réel $\varepsilon > 0$. Montrer que $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right)$ est majorée par une suite à convergence lente.

Solution :

1. a) La suite (u_n) a pour limite 0 et $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$. Donc $\ell^* = 0$. On a convergence rapide.

b) i) On écrit $v_n = \exp\left(2^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\right)$. Un DL2 du logarithme donne le résultat.

ii) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e$ et pour n assez grand $v_n \neq e$. De plus :

$$\left| \frac{v_{n+1} - e}{v_n - e} \right| = \left| \frac{\frac{-e}{2^{n+2}} + o\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\frac{-e}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)} \right| = \left| \frac{1}{2} \times \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} \right| \rightarrow \frac{1}{2}$$

Donc (v_n) a une vitesse de convergence géométrique de rapport $\frac{1}{2}$.

2. a) Soit $\alpha > 1$. $\ell - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha} \text{ et } \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

soit $\ell - S_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq \ell - S_{n-1}$, et $\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \ell - S_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

b) Donc par le théorème d'encadrement des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ell$. D'après ce qui précède :

$$(\alpha-1)n^{\alpha-1} \leq \frac{1}{\ell - S_n} \leq (\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}$$

et

$$\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n+2)^{\alpha-1}} \leq \ell - S_{n+1} \leq \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

En multipliant membre à membre ces inégalités, on obtient : $\frac{n^{\alpha-1}}{(n+2)^{\alpha-1}} \leq \frac{\ell - S_{n+1}}{\ell - S_n} \leq 1$.

Donc $\ell^* = 1$ et la convergence est lente.

3. a) On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Et $e^{\alpha|X|}$ admet une espérance si et seulement si $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{\alpha k} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ converge absolument.

Ce qui est le cas pour tout α réel et on trouve $E(e^{\alpha|X|}) = e^{\lambda(e^\alpha - 1)}$.

b)i) La fonction exponentielle est convexe.

ii) On a $\alpha |x_k| \leq e^{\alpha|x_k|} \implies 0 \leq |x_k| P(X = x_k) \leq e^{\alpha|x_k|} P(X = x_k)$. Et $\sum_{k \in \mathbb{N}} e^{\alpha|x_k|} P(X = x_k)$ converge.

iii) On sait que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\alpha|x|} = 0$. Il existe donc $a > 0$ tel que $\forall x, |x| \geq a \implies x^2 \leq e^{\alpha|x|}$.

D'autre part $|x| \leq a \Rightarrow x^2 \leq a^2$. Donc pour tout x réel, $x^2 \leq a^2 + e^{\alpha|x|}$. Ainsi,

$$0 \leq x_p^2 P(X = x_p) \leq (a^2 + e^{\alpha|x_p|}) P(X = x_p) \leq a^2 P(X = x_p) + e^{\alpha|x_p|} P(X = x_p)$$

Or $\sum_{p \in \mathbb{N}} a^2 P(X = x_p) = a^2$ et $\sum_{p \in \mathbb{N}} e^{\alpha|x_p|} P(X = x_p) = E(e^{\alpha X}) \Rightarrow$ la série $\sum_p x_p^2 P(X = x_p)$ converge.

Les variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont de même loi, possèdent toutes un moment d'ordre 2 et sont mutuellement indépendantes ; donc $\frac{S_n}{n}$ admet une espérance et une variance. De plus

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = m \text{ et } V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff, $\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. En posant $u_n = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$, la suite (u_n) convient.

Exercice 1.08.

1. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, comparer $\ln(1+x)$ et x .

2. Soit $a_0 > 0$. Soit (a_n) la suite de premier terme a_0 et définie par récurrence par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \ln(1 + a_n).$$

a) Montrer que la suite (a_n) est bien définie et à termes positifs.

b) Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.

c) Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$.

3. On admet que si (x_n) est une suite réelle qui converge vers ℓ , alors la suite de terme général $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k$ converge aussi vers ℓ .

Déterminer un équivalent de a_n de la forme $\frac{\lambda}{n}$, quand n tend vers $+\infty$, où λ est un réel à préciser.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction g définie par $g(t) = -\ln(1-t)$ entre les points 0 et $x > 0$. En déduire que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = g(x).$$

5. Pour tout $x \in]0, 1[$, établir la convergence de la série $\sum a_n x^n$.

6. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, montrer l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in]0, 1[, \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n - \frac{2}{n}\right) x^n \right| \leq \sum_{n=1}^N \left| a_n - \frac{2}{n} \right| - \frac{\varepsilon}{2} \ln(1-x).$$

En déduire un équivalent de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Solution :

1. Par concavité stricte de $x \mapsto \ln(1+x)$, on a : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

2. a) On montre par récurrence évidente sur $n \in \mathbb{N}$ la relation « a_n est défini et strictement positif ».

b) D'après la première question, $a_{n+1} = \ln(1+a_n) \leq a_n$. Ainsi la suite (a_n) est décroissante et minorée, donc elle converge vers une limite ℓ telle que $\ln(1+\ell) = \ell$ (par continuité), soit $\ell = 0$ (d'après la question 1).

c) Comme (a_n) tend vers 0, on a $\ln(1+a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n$ et $a_n - \ln(1+a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a_n^2}{2}$ (avec un DL d'ordre 2).

Donc : $u_n = \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n \ln(1+a_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{a_n^2}{2}}{a_n^2} = \frac{1}{2}$. Ainsi $\lim(u_n) = \frac{1}{2}$.

3. On a : $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_0} = (n+1) \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \right)}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$, d'où $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

4. Comme $g(0) = 0$ et $g^{(k)}(t) = \frac{(k-1)!}{(1-t)^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (par récurrence évidente), la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{n!}{(1-t)^{n+1}} dt.$$

L'étude de la fonction $t \mapsto \frac{x-t}{1-t}$ montre qu'elle est décroissante sur $[0, x] \subset [0, 1[$ donc majorée par sa valeur x en $t = 0$, d'où la preuve du résultat pour tout $x \in [0, 1[$. En effet

$$\int_0^x \left| \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \right| dt \leq x^n \int_0^x \frac{dt}{1-t} = x^n |\ln(1-x)|$$

5. Par théorème de comparaison pour les séries, on a :

$$0 \leq a_n x^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n} x^n \text{ et la série } \sum \frac{2}{n} x^n \text{ converge si } x \in]0, 1[.$$

6. Comme $a_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n >$

$$N, \left| a_n - \frac{2}{n} \right| \leq \frac{\epsilon}{2n}.$$

Par théorème de comparaison avec la série de la question 5, on déduit la convergence de la série $\sum \left| a_n - \frac{2}{n} \right| x^n$. On peut donc écrire l'inégalité triangulaire suivante :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n - \frac{2}{n} \right) x^n \right| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| a_n - \frac{2}{n} \right| x^n = \sum_{n=1}^N \left| a_n - \frac{2}{n} \right| x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left| a_n - \frac{2}{n} \right| x^n \\ &\leq \sum_{n=1}^N \left| a_n - \frac{2}{n} \right| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2n} x^n \leq \sum_{n=1}^N \left| a_n - \frac{2}{n} \right| + \frac{\epsilon}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^N \left| a_n - \frac{2}{n} \right| - \frac{\epsilon}{2} \ln(1-x). \end{aligned}$$

Par suite, $|f(x) - 2g(x)| \leq \sum_{n=1}^N \left| a_n - \frac{2}{n} \right| + \frac{\epsilon}{2} g(x)$. Soit : $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 2 \right| \leq \frac{1}{g(x)} \sum_{n=1}^N \left| a_n - \frac{2}{n} \right| + \frac{\epsilon}{2}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{g(x)} = 0$ et $\sum_{n=1}^N \left| a_n - \frac{2}{n} \right|$ constant, on a : $\exists N', \forall n > N', \frac{1}{g(x)} \sum_{n=1}^N \left| a_n - \frac{2}{n} \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Exercice 1.09.

Soit f une fonction continue et positive sur $I = [0, 1]$ telle que $\gamma = \int_0^1 f(t) dt < 1$.

On considère une fonction u_0 continue sur I qui vérifie :

$$\forall x \in I, u_0(x) \leq 1 + \int_0^x u_0(t) f(t) dt$$

On définit par récurrence la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 0}$ en posant pour tout n entier naturel :

$$\forall x \in I, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t) f(t) dt$$

1. Soit $x \in I$. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante.

2. a) Justifier pour tout $n \geq 0$, que la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est continue sur I .

En déduire, que pour tout entier naturel n , le nombre réel $M_n = \max \{ |u_n(x)|; x \in I \}$ est bien défini.

b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $M_{n+1} \leq 1 + \gamma M_n$.

Pour $n \geq 1$, majorer M_n en fonction de M_0 et de γ . En déduire que la suite (M_n) est bornée.

c) Justifier que pour tout $x \in I$, la suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est convergente. On note $u(x)$ sa limite.

3. a) Soit x et y deux éléments de I tels que $x < y$. Montrer qu'il existe une constante M telle que :

$$\forall n \geq 1, |u_n(y) - u_n(x)| \leq M \int_x^y f(t) dt$$

En déduire que la fonction u est continue sur I .

b) Pour $n \geq 1$, montrer que la fonction $x \rightarrow v_n(x) = u_{n+1}(x) - u_n(x)$ est dérivable et croissante sur I .

c) Soit $n \geq 1$. Montrer que pour tout $x \in I$, on a :

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \gamma (u_n(x) - u_{n-1}(x))$$

En déduire pour tout $x \in I$ et tout entier $p \geq 1$, l'encadrement suivant :

$$0 \leq u_{n+p}(x) - u_n(x) \leq \gamma^n (1 - \gamma)^{-1} (u_1(x) - u_0(x))$$

d) Soit $x \in I$. Montrer que $\int_0^x u_n(t) f(t) dt$ converge vers $\int_0^x u(t) f(t) dt$.

En déduire que la fonction u est de classe C^1 sur I .

Solution :

1. Soit \mathcal{P}_n l'hypothèse de récurrence : « $u_n(s) \leq u_{n+1}(s)$ pour tout $s \in [0, 1]$ ». On voit que \mathcal{P}_0 est vraie par hypothèse. Supposons que \mathcal{P}_n soit vraie. Alors, on a pour tout $x \in [0, 1]$:

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x [u_{n+1}(t) - u_n(t)] f(t) dt \geq 0$$

puisque l'intégrande est positive.

Donc, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante pour tout $x \in [0, 1]$.

2. a) La fonction u_0 est continue sur I et par une récurrence immédiate, on voit que la fonction u_{n+1} est continue comme primitive de la fonction continue u_n . Le réel M_n est bien défini puisque la fonction u_n est continue sur le segment I , elle donc bornée et atteint ses bornes.

b) On voit que

$$|u_{n+1}(x)| \leq 1 + \int_0^x |u_n(t)| f(t) dt \leq 1 + \int_0^1 |u_n(t)| f(t) dt \leq 1 + M_n \int_0^1 f(t) dt = 1 + \gamma M_n$$

D'où $M_n \leq (1 + \gamma + \dots + \gamma^{n-1}) + \gamma^n M_0 \leq \frac{1}{1 - \gamma} + M_0 = C$. La suite (M_n) est donc bornée.

c) La suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante d'après a) et bornée d'après b), elle est donc convergente.

3. a) Il vient :

$$|u_n(y) - u_n(x)| \leq \int_x^y |u_{n-1}(t)| f(t) dt \leq C \int_x^y f(t) dt.$$

En prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$, il vient

$$|u(y) - u(x)| \leq C \int_x^y f(t) dt.$$

Il reste à faire tendre y vers x puis à échanger les rôles de y et x pour obtenir que la fonction u est donc continue sur I .

b) Pour $n \geq 1$, on a :
$$v_n(x) = \int_0^x [u_n(t) - u_{n-1}(t)] f(t) dt.$$

L'intégrande est une fonction continue. Par suite, v_n est dérivable et, d'après la question 1 :

$$v'_n(x) = [u_n(x) - u_{n-1}(x)] f(x) \geq 0$$

La fonction v_n est donc croissante sur I .

c) Soit $n \geq 1$. L'inégalité de gauche est évidente d'après 1. De plus, avec la croissance de la fonction v_n , il vient

pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) - u_n(x) &= \int_0^x [u_n(t) - u_{n-1}(t)] f(t) dt \leq [u_n(x) - u_{n-1}(x)] \int_0^x f(t) dt \\ &= \gamma (u_n(x) - u_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

En utilisant ce qui précède et en écrivant $u_{n+p}(x) - u_n(x) = \sum_{k=0}^{p-1} [u_{n+k+1}(x) - u_{n+k}(x)]$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_{n+p}(x) - u_n(x) \leq (1 + \dots + \gamma^{p-1}) (u_{n+1}(x) - u_n(x)) \\ &\leq (1 - \gamma)^{-1} \gamma^n (u_1(x) - u_0(x)). \end{aligned}$$

d) En faisant tendre p vers l'infini, il vient :

$$0 \leq u(x) - u_n(x) \leq (1 - \gamma)^{-1} \gamma^n (u_1(x) - u_0(x))$$

D'où $\left| \int_0^x u(t) f(t) dt - \int_0^x u_n(t) f(t) dt \right| \leq (1 - \gamma)^{-1} \gamma^{n+1} (M_0 + M_1) \rightarrow 0$ (quand n tend vers $+\infty$).

On peut alors passer à la limite dans l'égalité définissant u_{n+1} et on obtient

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t) f(t) dt$$

On en déduit facilement que u est de classe C^1 sur I . En dérivant l'égalité précédente, il vient $u'(x) = f(x)u(x)$.

En posant $N'' = \max(N, N')$, on a prouvé que : $\forall \epsilon > 0, \exists N'', \forall n > N'', \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 2 \right| \leq \epsilon$, soit $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} 2g(x)$.

Exercice 1.10.

On considère une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}$.

On suppose que $u_0 > 0$.

On pose $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est bien définie.

2.a) Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ converge. On pose $\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ converge. Exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ .

3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$. Étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

4. On suppose dans cette question que $u_0 = e^{-\sigma}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Solution :

1. On montre par récurrence, que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 0$.

2.a) À l'aide des croissances comparées, on remarque que $\frac{\ln(k)}{2^k} = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$. On conclut en utilisant les théorèmes de comparaisons des séries à termes positifs, et la convergence de la série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$.

b) La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ vérifie la relation de récurrence, pour tout $k \geq 1$, $v_k - v_{k-1} = -\frac{\ln(k)}{2^k}$. On en déduit par télescopage que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n (v_k - v_{k-1}) = -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} = v_n - v_0 = v_n - \ln(u_0)$$

Ainsi, $v_n = \ln(u_0) - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k}$.

Comme somme de suites qui convergent, on en déduit à l'aide des précédentes notations, que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ converge, vers $\ell = \ln(u_0) + \sigma$.

3. • Supposons que $u_0 > e^{-\sigma}$. On a alors $\ell > 0$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n v_n = +\infty$.

Ainsi, par composition des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

• Supposons que $u_0 < e^{-\sigma}$. On a alors $\ell < 0$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n v_n = -\infty$. Ainsi, par composition des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. a) On reprend l'expression donnée, en 3., en remplaçant $\ln(u_0) = -\sigma$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_n = \ln(u_0) - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} = -\sigma - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}.$$

b) Puisque $\sum_{k=n+2}^{+\infty} 2^{n-k} \ln(k) > 0$, on en déduit de la question précédente que $2^n v_n > \frac{\ln(n+1)}{2}$, ce qui permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n v_n = +\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 1.11.

1. Montrer que pour tout x réel, les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ convergent.

On pose alors pour tout x réel : $C(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2} dt$ et $S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$.

2. a) Montrer que les deux fonctions C et S sont continues sur \mathbb{R} .

b) Montrer que pour tous réels u et h , on a :

$$|\sin(u+h) - \sin(u) - h \cos(u)| \leq \frac{h^2}{2}$$

c) En déduire que S est dérivable sur \mathbb{R} et calculer pour tout x réel, $S'(x)$.

3. Déterminer pour tout x réel, une relation entre $S'(x)$ et $S(x)$.

4. a) Soit f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} . Calculer la dérivée de $g : x \rightarrow e^{x^2/4} f(x)$.

En déduire les solutions de l'équation différentielle $2f'(x) + xf(x) = 0$.

b) On suppose qu'on peut écrire pour tout x réel, $S(x) = A(x)e^{-x^2/4}$ avec A de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Établir la relation : $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{2} \int_0^x e^{t^2/4} dt$.

5. Déterminer un équivalent de $S(x)$ au voisinage de $\pm\infty$.

Solution :

1. Pour tout x réel, $t \rightarrow \sin(xt)e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et $|\sin(xt)e^{-t^2}| \leq e^{-t^2}$ dont l'intégrale converge.

La démonstration est identique pour $t \rightarrow \cos(xt)e^{-t^2}$.

2. a) L'inégalité des accroissements finis donne, pour tout réels x et x' :

$$|\sin(x) - \sin(x')| \leq |x - x'|$$

Ainsi :

$$|S(x) - S(x')| \leq \int_0^{+\infty} |\sin(xt) - \sin(x't)| e^{-t^2} dt \leq |x - x'| \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{2} |x - x'|$$

La fonction f est lipchitzienne donc continue sur \mathbb{R} .

b) On utilise une inégalité de Taylor. On a :

$$|\sin(u+h) - \sin(u) - h \cos(u)| \leq \frac{h^2}{2} \sup_{t \in [u, u+h]} |\sin(t)| \leq \frac{h^2}{2}$$

c) On étudie la limite du candidat proposé à être la dérivée de $S(x)$ avec u remplacé par xt et h par ht . Il vient :

$$\left| \int_0^{+\infty} (\sin((x+h)t) - \sin(xt) - ht \cos(xt)) e^{-t^2} dt \right| \leq \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{Ch^2}{2}$$

Ainsi :

$$S'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \cos(xt) t e^{-t^2} dt$$

3. On utilise une intégration par parties, les fonctions en jeu étant de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ . Soit $A > 0$. On a :

$$\int_0^A \cos(xt) t e^{-t^2} dt = \left[-\cos(xt) \frac{e^{-t^2}}{2} \right]_0^A - \frac{x}{2} \int_0^A \sin(xt) e^{-t^2} dt$$

En prenant la limite lorsque A tend vers $+\infty$, il vient :

$$S'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x)$$

4. a) La dérivée se calcule aisément. On obtient $g'(x) = e^{x^2/4} (f'(x) + \frac{x}{2} f(x))$.

Si la fonction f vérifie $2f'(x) + xf(x) = 0$, alors $g'(x) = 0$ et $g(x) = C$. Donc, on a :

$$f(x) = C e^{-x^2/4}$$

On peut écrire $S(x) = A(x) e^{-x^2/4}$ avec S vérifiant l'équation $S'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x)$. En dérivant, il vient :

$$A'(x) e^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow A(x) = \frac{1}{2} \int_0^x e^{t^2/4} dt + C$$

Comme $S(0) = 0$, on obtient :

$$S(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{t^2/4} dt$$

5. La fonction S est impaire : on étudie la limite en $+\infty$.

On fait deux intégrations par parties sur le segment $[1, x]$. L'intégrale $\int_0^1 e^{t^2/4} dt$ est une constante :

$$\begin{aligned} \int_1^x e^{t^2/4} dt &= \int_1^x \frac{t/2 e^{t^2/4}}{t/2} dt = \frac{2e^{x^2/4}}{x} - C + 2 \int_1^x \frac{e^{t^2/4}}{t^2} dt \\ &= \frac{2e^{x^2/4}}{x} - C + 4 \int_1^x \frac{t/2 e^{t^2/4}}{t^3} dt = \frac{2e^{x^2/4}}{x} + 4 \frac{e^{x^2/4}}{x^3} + K - 12 \int_1^x \frac{e^{t^2/4}}{t^4} dt \end{aligned}$$

Donc

$$S(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^3} + M e^{-x^2/4} + 12 e^{-x^2/4} \int_1^x \frac{e^{t^2/4}}{t^4} dt = \frac{2}{x} + o\left(\frac{2}{x}\right)$$

Exercice 1.12.

1. Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$. Soit f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$.

On suppose de plus que pour tout $x \geq 0$, on a $g(x) \geq 0$.

a) Justifier l'existence de deux réels α et β appartenant à l'intervalle $[a, b]$ tels que $m = f(\alpha)$, $M = f(\beta)$ et pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$.

b) En déduire qu'il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt$.

2. Soit un entier $n \geq 2$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire et de classe C^n sur \mathbb{R} .

a) On suppose que f' est strictement monotone. Montrer qu'il existe une fonction $\theta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ telle que pour tout réel x , on a $f(x) = x f'(x\theta(x))$.

b) Soit $x > 0$. Prouver qu'il existe un réel $d_x \in [0, x]$ tel que $f(x) = x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(d_x)$.

c) Soit $x > 0$. Prouver qu'il existe un réel $h_x \in]0, x[$ tel que $f(x) = x f'(0) + x^2 \theta(x) f''(h_x)$.

d) On suppose que $f''(0) \neq 0$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$

3. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \text{Arctan}(x)$.

a) Expliciter la fonction θ sur \mathbb{R}^* .

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$. Obtient-on une contradiction du résultat de la question 2 ?

Solution :

1. a) Comme la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, elle est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

b) Par positivité de la fonction g , croissance de l'intégrale et en posant $A = \int_a^b f(x)g(x)dx$ et $B = \int_a^b g(x)dx$:

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow mB \leq A \leq MB.$$

Si $B = 0$, l'inégalité précédente implique $A = 0$ et tout choix de c convient.

Sinon, en divisant par $B > 0$, on obtient : $f(\alpha) = m \leq \frac{A}{B} \leq M = f(\beta)$.

Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'existence d'un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{A}{B}$.

2. a) Comme f est impaire, $f(0) = 0$. Considérons $x \geq 0$. On applique la question précédente avec les fonctions f' et $t \rightarrow 1$ continues sur $[0, x]$. Il existe alors un réel $c_x \in [0, x]$ tel que :

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x 1 \times f'(t)dt = f'(c_x) \int_0^x 1dt = f'(c_x)x.$$

Comme $c_x \in [0, x]$, il existe $\theta(x) \in [0, 1]$ tel que $c_x = x\theta(x)$. On a alors $f(x) = xf'(x\theta(x))$.

b) Soit $x > 0$. Une intégration par parties donne :

$$\int_0^x (x-t)f''(t)dt = \left[(x-t)f'(t) \right]_0^x + \int_0^x f'(t)dt = -xf'(0) + f(x)$$

Ainsi, $f(x) = xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(t)dt$.

Par la question 1 appliquée aux fonctions f'' et $t \rightarrow x-t$ sur $[0, x]$, il existe un réel $d_x \in [0, x]$ tel que :

$$\int_0^x (x-t)f''(t)dt = f''(d_x) \int_0^x (x-t)dt = \frac{x^2}{2}f''(d_x).$$

Ainsi, il existe un réel $d_x \in [0, x]$ tel que $f(x) = xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(d_x)$.

c) On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f' entre les points $x\theta(x)$ et 0. Il existe alors $h_x \in]0, x\theta(x)[\subset]0, x[$ tel que :

$$f'(x\theta(x)) = f'(0) + x\theta(x)f''(h_x), \text{ d'où } f(x) = xf'(x\theta(x)) = xf'(0) + x^2\theta(x)f''(h_x).$$

d) Par suite, $\forall x > 0$, $xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(d_x) = xf'(0) + x^2\theta(x)f''(h_x)$, d'où, $\frac{1}{2}f''(d_x) = \theta(x)f''(h_x)$.

On fait tendre x vers 0^+ . Les réels h_x et d_x tendent alors vers 0. Comme la fonction f'' est continue, il vient $\frac{1}{2}f''(0) = \theta(0)f''(0)$. Comme $f''(0) \neq 0$, on conclut que $\theta(0) = \frac{1}{2}$.

3. a) Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x) = xf'(x\theta(x)) \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) = \frac{x}{1+x^2\theta^2(x)} \Rightarrow \theta^2(x) = \frac{1}{x \text{Arctan}(x)} - \frac{1}{x^2}.$$

Comme $\theta(x) \geq 0$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\theta(x) = \sqrt{\frac{1}{x \operatorname{Arctan}(x)} - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2 \operatorname{Arctan}(x)}}$.

b) Le DL3 de la fonction Arctan au voisinage de 0 est $\operatorname{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Par suite,

$$\frac{x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2 \operatorname{Arctan}(x)} = \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \underset{0}{\sim} \frac{x^3/3}{x^3} = \frac{1}{3}$$

ce qui entraîne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2 \operatorname{Arctan}(x)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Il n'y a pas de contradiction avec la question 3 car nous ne sommes plus sous les mêmes hypothèses. Ici, $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, d'où $f''(0) = 0$.

Exercice 1.13.

Soit un réel $x_0 > 0$. On définit la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

On admet que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Montrer que la suite (x_n) est monotone et préciser sa monotonie.
2. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite (x_n) admet une limite et la déterminer.
3. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{x_n}$.
4. Montrer que la suite $(x_{n+1}^2 - x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
5. Soit (a_n) et (b_n) des suites de réels strictement positifs tels que $a_n \sim b_n$ et $\sum_n a_n$ diverge.

On admet le résultat suivant : $\sum_{k=0}^n a_k \sim \sum_{k=0}^n b_k$ lorsque n tend vers $+\infty$.

a) Montrer que la suite $\left(\frac{x_n^2}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et en déduire un équivalent de (x_n) .

b) Déterminer un équivalent de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2}$.

c) En déduire que $x_n = \sqrt{2n} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$.

Solution :

1. Comme $x_0 > 0$, on montre que (x_n) est à valeurs strictement positives et que $x_{n+1} > x_n$. Ainsi, la suite (x_n) est strictement croissante.

2. D'après le théorème de la limite monotone, (x_n) tend vers un réel $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si ℓ est fini, alors $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$, ce qui est impossible. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

3. Comme $\sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k} = x_{k+1} - x_0$, alors la série $\sum \frac{1}{x_n}$ diverge.

4. D'après la définition, $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + \frac{1}{x_n^2}$. Ainsi, comme (x_n) tend vers $+\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1}^2 - x_n^2) = 2$.

5.a) Comme $x_{n+1}^2 - x_n^2 \sim 2$ et $\sum 2$ diverge, d'après la question précédente, $x_n^2 - x_0^2 \sim 2n$. Ainsi, $x_n^2 \sim 2n$ et $x_n \sim \sqrt{2n}$.

b) D'après la question précédente, $\frac{1}{x_n^2} \sim \frac{1}{2n}$. Or, $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc, d'après la question précédente, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2} \sim \frac{1}{2} H_n \sim \frac{\ln(n)}{2}$.

c) Comme $x_{n+1}^2 = x_0^2 + 2(n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2}$, d'après la question précédente,

$$x_n^2 = 2n + \frac{1}{2} \ln(n) + o(\ln(n)).$$

En utilisant le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ en 0,

$$x_n = \sqrt{2n} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right).$$

Exercice 1.14.

1. Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ ($a < b$). On considère la fonction h définie sur $[a, b]$ par :

$$h(x) = f(b)g(x) - f(x)g(b) - f(a)g(x) + g(a)f(x).$$

a) Calculer $h(a)$ et $h(b)$. Que remarque-t-on ?

b) En déduire qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ pour lequel on a :

$$(f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a))$$

2. Soit u et v deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que v ne s'annule pas sur $]a, b[$. On considère les fonctions f et g définies sur $[a, b]$ par :

$$\forall x \in [a, b], f(x) = \int_a^x u(t)v(t)dt \text{ et } g(x) = \int_a^x v(t)dt.$$

a) Justifier la continuité de f et g sur $[a, b]$ et leur dérivabilité sur $]a, b[$.

b) En déduire l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ qui vérifie la relation :

$$\int_a^b u(t)v(t)dt = u(c) \int_a^b v(t)dt.$$

c) Soit φ et ψ deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $\varphi + \psi$ ne s'annule pas sur $]0, 1[$ et telles que :

$$\int_0^1 (\varphi(t))^2 dt = \int_0^1 (\psi(t))^2 dt$$

En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe un réel $s \in]0, 1[$ tel que $\varphi(s) = \psi(s)$.

Quel résultat obtient-on dans le cas où $\psi(x) = x$?

Solution :

1. a) On trouve $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$.

b) Les règles usuelles impliquent que h est continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

De plus, on a $h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - f'(x)(g(b) - g(a))$. Comme $h(a) = h(b)$, le théorème de Rolle nous assure l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ pour lequel on a :

$$(f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

2. a) Les fonctions f et g sont deux primitives de fonctions continues, elles sont donc continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

b) Comme $f'(x) = u(x)v(x)$ et $g'(x) = v(x)$ et en utilisant 1. b), il existe un réel $c \in]a, b[$ qui vérifie :

$$v(c) \int_a^b u(t)v(t)dt = u(c)v(c) \int_a^b v(t)dt.$$

Or la fonction v ne s'annulant pas sur $]a, b[$, on peut simplifier par $v(c)$.

c) On prend pour u et v les deux fonctions définies par $u = \varphi - \psi$ et $v = \varphi + \psi$. Elles vérifient les hypothèses de la question précédente. Il existe donc $s \in]0, 1[$ tel que : $0 = [\varphi(s) - \psi(s)] \int_0^1 v(t)dt$.

Puisque v est une fonction continue sur $[0, 1]$ qui ne s'annule pas sur $]0, 1[$, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que v est soit strictement positive sur $]0, 1[$ soit strictement négative. Un raisonnement classique sur les primitives nous assure que $\int_0^1 v(t)dt \neq 0$ et par conséquent on a $\varphi(s) = \psi(s)$.

Lorsque l'on prend pour ψ la fonction identité et si φ est une fonction continue sur $[0, 1]$ vérifiant $\varphi(x) + x \neq 0$ pour tout x de $]0, 1[$ et $\int_0^1 \varphi(t)^2 dt = \frac{1}{3}$, alors la fonction φ admet un point fixe appartenant à $]0, 1[$.

Exercice 1.15.

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$$

b) Trouver pour tout $n \geq 2$, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer I_{2n} et I_{2n+1} .

2. Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x^{n+1} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) dx.$$

3. a) Établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n^{-\frac{n+2}{2}} I_{n+1} - n^{-\frac{n+1}{2}} I_n = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^n \left(x + \frac{1}{x} - 2\right) \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) dx.$$

b) En déduire l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < \sqrt{n} I_n < I_{n+1}.$$

4. Établir les inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} < 4^{-n} \binom{2n}{n} \sqrt{\pi n} < 1.$$

En déduire un équivalent de $\binom{2n}{n}$.

Solution :

1. a) La fonction $x \rightarrow x^n e^{-x^2/2}$ est définie, continue et positive sur \mathbb{R}^+ . Cette fonction est négligeable devant $1/x^2$ en $+\infty$, on en déduit que l'intégrale I_n est convergente.

b) Pour $n \geq 2$, on effectue une intégration par parties en posant $u(x) = x^{n-1}$ et $v(x) = -e^{-x^2/2}$ d'où

$$\int_0^A x^n e^{-x^2/2} dx = [uv(x)]_0^A + \int_0^A (n-1)x^{n-2} e^{-x^2/2} dx.$$

On fait tendre A vers $+\infty$ donc

$$I_n = (n-1)I_{n-2}.$$

On a $I_0 = \sqrt{2\pi}/2$ et $I_1 = 1$. On montre par récurrence que

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sqrt{\pi/2},$$

et

$$I_{2n+1} = 2^n (n!).$$

2. a) On utilise une intégration par parties en posant $u(x) = x^n$ et $v(x) = -1/ne^{-nx^2/2}$, on en déduit l'égalité pour tout entier $n \geq 1$

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-nx^2/2} dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-nx^2/2} dx.$$

3.a) On remarque que

$$\int_0^{+\infty} x^n \left(x + \frac{1}{x} - 2\right) \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1} (x^2 - 2x + 1) \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) dx$$

On effectue le changement de variable affine $u = \sqrt{nx}$, et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^n e^{-nx^2/2} \left(x + \frac{1}{x} - 2\right) dx &= 2 \left(\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-nx^2/2} dx - \int_0^{+\infty} x^n e^{-nx^2/2} dx \right) \\ &= 2 \left(n \frac{n+2}{2} I_{n+1} - n \frac{n+1}{2} I_n \right) \end{aligned}$$

Par conséquent, on a pour tout entier n :

$$n \frac{n+2}{2} I_{n+1} - n \frac{n+1}{2} I_n = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^n e^{-nx^2/2} \left(x + \frac{1}{x} - 2\right) dx.$$

b) Le membre de droite est positif d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \sqrt{n} I_n < I_{n+1}$.

4. On a pour tout entier $n > 0$: $\sqrt{2n} I_{2n} < I_{2n+1}$. Soit

$$\sqrt{2n} \frac{(2n)!}{2^n n!} \sqrt{\pi/2} < 2^n n!$$

On en déduit $4^{-n} \binom{2n}{n} \sqrt{\pi n} < 1$, puis $\sqrt{2n-1} I_{2n-1} < \frac{(2n)!}{2^n n!} \sqrt{\pi/2}$. Donc

$$\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} < 4^{-n} \binom{2n}{n} \sqrt{\pi n}.$$

Par conséquent, un équivalent de $\binom{2n}{n}$ est $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

Exercice 1.16.

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A .

- Déterminer l'espace propre de φ associé à la valeur propre 3.
- En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de φ .

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^n à valeurs réelles telle que :

$$\forall u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n, f(u) = \sum_{i=1}^n u_i^2$$

Soit S une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Q la forme quadratique associée à S définie pour tout X

de \mathbb{R}^n par : $Q(X) = {}^tX S X$.

On suppose que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $Q(X) \geq 0$ et que $Q(X) = 0$ si et seulement si $X = 0$.

- Justifier que toutes les valeurs propres de S sont strictement positives.
- Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Déterminer les extrema de f sous la contrainte $Q(u) = 1$.
- Appliquer à la forme quadratique sur \mathbb{R}^3 :

$$Q(x, y, z) = 7x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 4xz - 2yz$$

Solution :

1. a) On résoud le système $AX = 3X = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + y - z = 0$, équation du plan

$E_3 = \ker(\varphi - 3Id)$.

Ainsi le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est de dimension 2.

b) La matrice A est symétrique réelle. Elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

La trace donne l'autre valeur propre, soit 9, d'où :

$$\ker(\varphi - 9Id) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. a) Si $SX = \lambda X$, alors $0 < {}^tX S X = \lambda \|X\|_2^2 \Rightarrow \lambda > 0$ car $X \neq 0$.

b) Soit $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (endomorphisme symétrique) associé à S . Alors :

$$g(u) = Q(u) - 1 = \langle \psi(u), u \rangle - 1$$

$$g(u+h) = \langle \psi(u+h), u+h \rangle - 1 = g(u) + 2 \langle \psi(u), h \rangle + \langle \psi(h), h \rangle$$

avec, par inégalité de Cauchy-Schwarz et linéarité de ψ : $|\langle \psi(h), h \rangle| \leq \|\psi(h)\| \|h\|_2 = o(\|h\|_2)$.

Par unicité du développement limité à l'ordre 1, $\nabla(g)(u) = 2\psi(u)$. De même, $\nabla(f)(u) = 2u$.

Remarque : On peut aussi calculer les dérivées partielles de $g(u) = {}^t X S X - 1$ et $f(u) = {}^t X X$.

Par le cours, les conditions nécessaires d'extremum sous contrainte sont : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \psi(u) = \lambda u$.

En u_0 vecteur propre de ψ pour $\lambda_0 > 0$ tel que $g(u_0) = g(u_0+h) = 0$, on a :

$$g(u_0+h) = g(u_0) + 2 \langle \psi(u_0), h \rangle + Q(h) \Rightarrow \langle u_0, h \rangle = -\frac{Q(h)}{2\lambda_0}$$

$$f(u_0+h) = f(u_0) + 2 \langle u_0, h \rangle + \|h\|_2^2 = f(u_0) + \|h\|_2^2 - \frac{Q(h)}{\lambda_0}$$

Mais on sait que :

$$\mu \|h\|_2^2 \leq Q(h) \leq \mu' \|h\|_2^2 \quad \text{où} \quad \mu = \min(\text{Sp}(S)) \quad \text{et} \quad \mu' = \max(\text{Sp}(S))$$

D'où $f(u_0+h) \leq f(u_0)$ si $\lambda_0 = \mu$, et on a un minimum en u_0 associé à la plus petite valeur propre ; c'est analogue pour le maximum et μ' .

c) Applications.

- Pour $\mu = 3$,

$$1 = Q(x, y, 2x+y) = 15x^2 + 6y^2 + 12xy \Rightarrow f(x, y, 2x+y) = \sqrt{5x^2 + 2y^2 + 4xy} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- Pour $\mu = 9$,

$$1 = Q(2t, t, -t) = 54t^2 \Rightarrow f(2t, t, -t) = \sqrt{4t^2 + t^2 + t^2} = \frac{1}{3}$$

Exercice 1.17.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $a_n = H_n - \ln n$ et $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

2. Montrer que la série de terme général $(a_{n+1} - a_n)$ converge, puis en déduire que la suite (a_n) converge.

3. Pour tout réel $\lambda > 0$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^\lambda}$.

a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont monotones.

b) En déduire que la suite (S_n) converge.

4. Montrer que $\ln(u_n \sqrt{n}) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2} a_n + \sum_{k=1}^n w_k$, où w_k est le terme général d'une série convergente. En déduire la nature de la suite (u_n) .

5. Pour tout réel $\lambda > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)$.

Montrer que la suite (v_n) converge. Montrer que sa limite est nulle si et seulement si $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

Solution :

1. On voit que u_n est le produit de facteurs strictement positifs car $1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ reste positif pour tout $k \geq 1$.

2. On a : $a_{n+1} - a_n = (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Un simple développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 donne

$$\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, on a : $a_{n+1} - a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum a_n - a_{n+1}$ converge. Par télescopage, la suite (a_n) admet une limite.

3. Posons $b_n = \frac{1}{n^\lambda}$.

a) La suite (S_{2n}) décroît car $S_{2(n+1)} - S_{2n} = b_{2n+2} - b_{2n+1} \leq 0$ car (b_n) décroissante.

La suite (S_{2n+1}) croît car $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -b_{2n+3} + b_{2n+2} \geq 0$ car (b_n) décroissante.

b) On a $S_{2n+1} - S_{2n} = -b_{2n+1} \rightarrow 0$, car $\lim(b_n) = 0$.

D'après la question précédente les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes ; donc elles convergent vers la même limite ℓ .

Comme (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers ℓ , il en est de même de (S_n) .

4. On peut écrire

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{n}u_n) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2}a_n &= \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k} \right)}_{=w_k}. \end{aligned}$$

D'après le développement limité $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, on a $w_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3k^{3/2}}$.

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum w_n$ converge.

Ainsi, d'après les deux questions précédentes, la suite de terme général $\ln(\sqrt{n}u_n)$ converge, donc, par continuité de l'exponentielle, la suite $(\sqrt{n}u_n)$ converge, donc, en la multipliant par $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui tend vers 0, on a $\lim(u_n) = 0$.

5. En s'inspirant du cas $\lambda = \frac{1}{2}$ traité précédemment, on a $v_n > 0$ et :

$$\ln(v_n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda} + \sum_{k=1}^n w'_k \text{ avec } w'_k = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^{2\lambda}}.$$

Comme la somme $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}$ converge pour toute valeur de λ , par comparaison de $\sum w'_k$ avec une série de Riemann, la suite de terme général $\ln(v_n)$ converge si et seulement si $2\lambda > 1$, et sinon sa somme partielle tend vers $-\infty$. Dans le premier cas, la suite (v_n) converge vers une limite strictement positive ; dans le second cas elle tend vers 0.

Exercice 1.18.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien usuel de \mathbb{R}^n , $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée et $E = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On définit une application F sur E par :

$$\forall x \in E, \quad F(x) = \frac{\langle \varphi(x), x \rangle}{\|x\|^2}$$

1. a) Justifier que F est de classe C^2 sur E et montrer que son gradient en tout point $x \in E$ s'écrit :

$$\nabla(F)(x) = \frac{2\varphi(x)}{\|x\|^2} - \langle \varphi(x), x \rangle \frac{2x}{\|x\|^4}.$$

b) Déterminer l'ensemble des points critiques de F .

2. Justifier l'existence de $m = \inf_{x \in E} F(x)$ et $M = \sup_{x \in E} F(x)$, puis les déterminer.

On remarquera que $F(x) = \left\langle \frac{\varphi(x)}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle$.

3. a) Soit u un point critique de F , soit h un vecteur non nul de \mathbb{R}^n et soit g l'application définie sur \mathbb{R} à valeurs réelles telle que :

$$g : t \mapsto F(u + th)$$

Expliciter le développement limité à l'ordre 2 de g en 0, et en déduire que la matrice hessienne de F au point u est :

$$\nabla^2(F)(u) = \frac{2}{\|u\|^2} \left(A - F(u) I_n \right)$$

où I_n représente la matrice identité d'ordre n .

b) En déduire la nature de tous les points critiques de F .

Solution :

1. a) On a $F(x) = \frac{{}^t X A X}{{}^t X X}$, donc $F \in C^2(E, \mathbb{R})$ comme quotient de fonctions polynomiales de dénominateur ne s'annulant pas sur E .

Par DL₁ de $g : x \mapsto \langle \varphi(x), x \rangle$, de $h : x \mapsto \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ et identification, on obtient :

$$\nabla(g)(x) = 2\varphi(x) \quad \text{et} \quad \nabla(h)(x) = 2x$$

d'où :

$$\nabla(F)(x) = \frac{2\varphi(x)}{\|x\|^2} - \langle \varphi(x), x \rangle \frac{2x}{\|x\|^4}$$

b) Donc $\nabla(F)(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = F(x)x$. D'où $x \neq 0$ est un vecteur propre de φ .

Or A est symétrique réelle, donc diagonalisable, et x vecteur propre associé à λ vérifie $\varphi(x) = \lambda x$, donc $F(x) = \lambda$.

2. Si S est la sphère unité de \mathbb{R}^n , on a :

$$F(x) = \left\langle \frac{\varphi(x)}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \quad \text{donc} \quad m = \inf_{y \in S} \langle \varphi(y), y \rangle \quad \text{et} \quad M = \sup_{y \in S} \langle \varphi(y), y \rangle$$

existent car $y \mapsto \langle \varphi(y), y \rangle$ est continue sur S fermée bornée.

Les extrema de F sur E ouvert sont parmi les points critiques, c'est-à-dire les vecteurs propres de φ , pour lesquels $F(x) = \lambda$ valeur propre associée ; d'où le min (resp. max) est atteint aux vecteurs propres associés à la valeur propre λ_1 minimale (resp. λ_n maximale.)

3. a) On a :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{\langle \varphi(u), u \rangle + 2t \langle \varphi(u), v \rangle + t^2 \langle \varphi(v), v \rangle}{\|u\|^2 \left[1 + \frac{2t}{\|u\|^2} \langle u, v \rangle + \frac{t^2}{\|u\|^2} \|v\|^2 \right]} \\
&= \frac{\langle \varphi(u), u \rangle + 2t \langle \varphi(u), v \rangle + t^2 \langle \varphi(v), v \rangle}{\|u\|^2} \left[1 - \frac{2t}{\|u\|^2} \langle u, v \rangle - \frac{t^2}{\|u\|^2} \|v\|^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{4t^2}{\|u\|^4} (\langle u, v \rangle)^2 + o(t^2) \right] \\
&= F(u) + 2t \left[\frac{\langle \varphi(u), v \rangle}{\|u\|^2} - \frac{F(u)}{\|u\|^2} \langle u, v \rangle \right] + \\
&\quad + t^2 \left[F(u) \frac{4(\langle u, v \rangle)^2}{\|u\|^4} - F(u) \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} - \frac{4 \langle \varphi(u), v \rangle \langle u, v \rangle}{\|u\|^4} + \frac{\langle \varphi(v), v \rangle}{\|u\|^2} \right] + o(t^2)
\end{aligned}$$

d'où par unicité du DL₂,

$$\langle \nabla^2(F)(u)(v), v \rangle = 2 \left[F(u) \frac{4(\langle u, v \rangle)^2}{\|u\|^4} - F(u) \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} - \frac{4 \langle \varphi(u), v \rangle \langle u, v \rangle}{\|u\|^4} + \frac{\langle \varphi(v), v \rangle}{\|u\|^2} \right]$$

avec $F(u) = \lambda$ si u est un vecteur propre associé à λ , donc :

$$\langle \nabla^2(F)(u)(v), v \rangle = 2 \left[-\frac{F(u)}{\|u\|^2} \langle v, v \rangle + \frac{\langle \varphi(v), v \rangle}{\|u\|^2} \right] \quad \text{d'où} \quad \nabla^2(F)(u) = \frac{2}{\|u\|^2} (A - F(u) I_n)$$

b) Pour u (resp. v) vecteur propre normé associé à λ (resp. λ'), on a :

$$\langle \nabla^2(F)(u)(v), v \rangle = 2(\lambda' - \lambda)$$

qui change de signe (en choisissant λ' de part et d'autre de λ) si λ n'est pas l'une des valeurs extrêmes λ_1 ou λ_n .

Exercice 1.19.

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1. a) Étudier les variations et le comportement aux bornes du domaine de définition de la fonction f .

b) Représenter le graphe de la fonction f .

2. a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est convergente.

b) En utilisant les changements de variable $u \mapsto \frac{1}{u}$ puis $u \mapsto \cos(u)$ que l'on justifiera, établir la relation :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2}$$

3. Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2 - n^2}}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , le réel S_n est bien défini.

b) Établir pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement suivant :

$$nS_n - \frac{1}{n}f((n+1)/n) \leq \int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt \leq nS_n$$

c) En déduire un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. a) La fonction f est décroissante (comme produit de fonctions positives décroissantes), à valeurs positives.

On a $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. De plus, f est continue et dérivable.

b) Laissez au lecteur possédant un outil graphique sous la main.

2. a) La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$ et à valeurs positives. De plus $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ dont l'intégrale est convergente sur $[2, +\infty[$ d'après les intégrales de Riemann.

Également, $f(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$ dont l'intégrale converge qui sur $]1, 2]$ d'après les intégrales de Riemann.

b) Comme $u \mapsto \frac{1}{u}$ est C^1 et strictement décroissante sur $]0, 1[$ et $u \mapsto \cos(u)$ est C^1 et strictement décroissante sur $]0, \pi/2[$, l'intégrabilité précédente est préservée et on a :

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\frac{1}{k\sqrt{k^2 - n^2}} \sim \frac{1}{k^2}$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, alors $\sum \frac{1}{k\sqrt{k^2 - n^2}}$ converge et S_n est bien défini.

b) D'après la définition de f , on a :

$$S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k/n).$$

Comme f est décroissante, pour tout $t \in [k/n, (k+1)/n]$, on a :

$$f((k+1)/n) \leq f(t) \leq f(k/n)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n+2}^{N+1} f(k/n) \leq \int_{1+1/n}^{N/n+1/n} f(t)dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^N f(k/n).$$

Comme $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, la suite $(S_{n,N})_N$ est croissante et majorée par $\int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt$ qui est convergente.

Ainsi, en passant à la limite dans l'inégalité, on obtient :

$$nS_n - \frac{1}{n}f((n+1)/n) \leq \int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt \leq nS_n$$

$$\frac{1}{n} \int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt \leq S_n \leq \frac{1}{n} \int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt + \frac{1}{n^2}f((n+1)/n).$$

c) Comme f admet une intégrale convergente sur $]1, +\infty[$ et $f((n+1)/n) \sim \sqrt{\frac{n}{2}}$, alors (S_n) converge vers 0 et $S_n \sim \frac{\pi}{2n}$.

Exercice 1.20.

Soit une fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de classe C^2 et telle que :

$$f' \geq 0, \quad f'' \geq 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) < 1, \quad f''(1) > 0$$

On note m le réel $f'(1)$ et on note $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Donner un exemple de fonction f satisfaisant aux diverses contraintes.
2. a) Montrer que 1 est l'unique antécédent de 1 par f .
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \neq 1$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et converge vers un réel noté ℓ .
4. Montrer que l'ensemble $J = \{x \in [0, 1], f(x) = x\}$ admet une borne inférieure α puis que $f(\alpha) = \alpha$.
5. Montrer que $\ell = \alpha$.

On suppose désormais que $0 < m < 1$.

6. Montrer que $\alpha = 1$
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

On suppose établie la convergence absolue de la série de terme général v_n .

a) Établir la convergence de la série :

$$\sum_{n \geq 0} \ln \left(\frac{m^{-(n+1)}v_{n+1}}{m^{-n}v_n} \right)$$

b) En déduire l'existence d'une constante $K > 0$ telle que $v_n \sim K \times m^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Par exemple : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{e^x - 1}{e - 1}$.

2. a) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\beta \in [0, 1[$ tel que $f(\beta) = 1$. La croissance de f ($f' \geq 0$) entraîne que f est constante sur $[\beta, 1]$ d'où $f' = f'' = 0$ sur $[\beta, 1]$ ce qui est en contradiction avec la donnée $f''(1) > 0$. Donc $f^{-1}(1) = \{1\}$.

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: on a $u_0 = 0 \neq 1$, si on suppose $u_n \neq 1$ alors $u_{n+1} = f(u_n) = 1$ est absurde car $u_n \neq 1$ serait un antécédent de 1.

3. On établit par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

On a $u_0 = 0 \Rightarrow 0 = u_0 \leq u_1 = f(u_0) \leq 1$ car f est croissante et à valeurs dans $[0, 1]$. De même : si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ alors $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ et $[f(u_n), f(u_{n+1})] \subset [0, 1]$.

La suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée, elle converge donc vers un réel $\ell \in [0, 1]$

4. L'ensemble J est non vide ($f(1) = 1$) et minoré (par 0, car $J \subset [0, 1]$) donc il admet une borne inférieure α .

Soit $(\alpha_n) \in J^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha$. Alors, par continuité de f , $f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha$.

5. On a bien $u_0 = 0 \leq \alpha$ et si $u_n \leq \alpha$ alors la croissance de f entraîne que $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(\alpha) = \alpha$. On a donc montré par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha$, d'où, par passage à la limite : $\ell \leq \alpha$. Par ailleurs, $f(\ell) = \ell$ (car f est continue) donc nécessairement : $\ell = \alpha$ (unique point fixe de $J \cap [0, \alpha]$).

6. Ici $m < 1$. On pose $g = f - Id$, alors : $g'(x) = f'(x) - 1$ et $g''(x) = f''(x) \geq 0$. Donc g' est croissante et majorée par $g'(1) = m - 1 < 0$ donc $g' < 0$ sur $[0, 1]$.

On a $g(\alpha) = g(1) = 0$, si $\alpha < 1$, on peut appliquer le théorème de Rolle à g sur $[\alpha, 1]$: il existe $\beta \in [0, 1], g'(\beta) = 0$ incompatible avec $g' < 0$ sur $[0, 1]$. Donc $\alpha = 1$.

7. a) Il vient $u_{n+1} = f(u_n) = f(1 - v_n) = f(1) - v_n f'(1) + \frac{v_n^2}{2} f''(1) + o(v_n^2)$ par application de la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point 1.

D'où $1 - v_{n+1} = 1 - mv_n + \frac{v_n^2}{2} f''(1) + o(v_n^2)$, et $\frac{v_{n+1}}{mv_n} = 1 - \frac{v_n}{2m} f''(1) + o(v_n)$ entraîne

$$\ln \left(\frac{m^{-(n+1)} v_{n+1}}{m^{-n} v_n} \right) = \ln \left(\frac{v_{n+1}}{mv_n} \right) \sim \frac{f''(1)}{2m} v_n$$

qui est le terme général d'une série convergente, d'où la convergence de la série

$$\sum \ln \left(\frac{m^{-(n+1)} v_{n+1}}{m^{-n} v_n} \right) \text{ vers un réel } S$$

b) On a

$$\sum_{k=0}^{N-1} \ln \left(\frac{m^{-(n+1)} v_{n+1}}{m^{-n} v_n} \right) = \ln \prod_{k=0}^{N-1} \frac{m^{-(n+1)} v_{n+1}}{m^{-n} v_n} = \ln(v_N) - \ln(v_0) - N \ln(m) = \ln \left(\frac{v_N}{v_0 \cdot m^N} \right)$$

$$\text{On a } \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{v_N}{v_0 \cdot m^N} \right) = S \Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{v_N}{v_0 \cdot m^N} = e^S \Rightarrow v_N \sim e^S m^N.$$