Chapitre 1

Analyse

Exercice 1.1

1. a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Montrer que la fonction $\theta \mapsto \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right)$ est continue sur $[0, \pi]$.
On note alors F la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, F(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right) d\theta$$

b) Justifier que F est paire.

c) Montrer que $\ln(1 - \cos\theta)$ est équivalent à $2\ln\theta$ quand θ tend vers 0. En déduire que l'on peut définir $F(1)$ et $F(-1)$.
On admet que la fonction F ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} = 1$.

b) En déduire l'égalité de polynômes suivante :

$$X^{2n} - 1 = \prod_{k=-(n-1)}^{n} \left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = \left(X^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

c) En faisant intervenir des sommes de Riemann, établir que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a :

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}\right)$$

d) En déduire l'expression de $F(x)$ si $x \in]-1, 1[$ et si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

e) Donner alors la valeur de $F(1)$ et $F(-1)$.

3. On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, dt$. Calculer I.

Solution de l'exercice 1.1

1. a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $x \cos\theta \geqslant -|x|$ donc :

$$x^2 - 2x\cos\theta + 1 \geqslant x^2 - 2|x| + 1 = (|x| - 1)^2 > 0.$$

donc la fonction $\theta \mapsto \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right)$ est définie et continue sur $[0, \pi]$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, le changement de variable $\theta = \pi - t$ donne la parité de F.

c) L'équivalence provient de :

$$\frac{\ln(1-\cos\theta)}{2\ln\theta} - 1 = \frac{1}{2\ln\theta}\ln\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right) \to 0 \times \ln\frac{1}{2}.$$

L'intégrale $F(1)$ est impropre en 0. Or :

$$\ln(2 - 2\cos\theta) = \ln 2 + \ln(1 - \cos\theta) \Rightarrow |\ln(2 - 2\cos\theta)| \sim -2\ln\theta$$

Par ailleurs la fonction $\theta \to \ln\theta$ admet une intégrale absolument convergente sur $]0, \pi]$. Donc $F(1)$ converge ; $F(-1)$ aussi par changement de variable comme en 1b.

2. a) Les solutions de cette équation sont les $2n$ complexes : $e^{\frac{ik\pi}{n}}$, $k \in [\![-(n-1), n]\!]$.

b) Le polynôme $X^{2n} - 1$ est de degré $2n$, unitaire et ses $2n$ racines sont les $e^{\frac{ik\pi}{n}}$, $k \in [\![-(n-1), n]\!]$, d'où la première égalité. Pour la seconde, on sort du produit les facteurs correspondant à $k = n$ et $k = 0$ et on regroupe les autres par conjugués.

c) De ce qui précède, on déduit que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right) &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) \\ &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) - \frac{\pi}{n}\ln\left((x+1)^2\right) \end{aligned}$$

La fonction $\theta \mapsto \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right)$ est continue sur $[0, \pi]$. On reconnaît dans le premier terme à droite une somme de Riemann qui lui est associée. L'autre terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right) = \int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos t + 1\right)dt = F(x)$$

d) Si $x \in]-1, 1[$, $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right) = 0.$

Si $|x| > 1$, $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right) = 2\pi\ln|x|.$

e) Par continuité de F, on a $F(1) = \lim\limits_{x\to1} F(x) = 0$ et donc, par parité, $F(-1) = 0$.

3. On a $F(1) = 0$ et

$$F(1) = \int_0^\pi \ln(2(1-\cos\theta))\,d\theta = \int_0^\pi \ln\left(4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)d\theta = \pi\ln 4 + 2\int_0^\pi \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)d\theta$$

On pose $t = \dfrac{\theta}{2}$. Il vient :

$$\int_0^\pi \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt = 2I$$

Donc $I = -\dfrac{\pi\ln 2}{2}$.

Exercice 1.2

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles positives.
Pour tout $f \in E$, on définit la fonction $\varphi(f)$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ \varphi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\ \mathrm{d}t.$$

1. a) L'ensemble E est-il un espace vectoriel ? L'application φ est-elle linéaire ?

b) Pour tout $f \in E$, montrer que $\varphi(f)$ est de classe C^1 et exprimer sa dérivée en fonction de f.

c) L'application φ est-elle injective ?

d) L'application φ est-elle surjective de E sur E ?

On note f_0 la fonction constante égale à 1, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_{n+1} = \varphi(f_n)$.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de la forme $x \mapsto \alpha_n x^{\beta_n}$, avec α_n et β_n réels.

b) Donner des relations de récurrence vérifiées par les suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\beta_n = 2 - 2^{1-n}$.

3.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comparer $\dfrac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}}$ et $\sqrt{\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}}$.

b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $M_n = \max\limits_{x\in[0,1]} \left| f_n(x) - \dfrac{1}{4}x^2 \right|$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$.

Solution de l'exercice 1.2

1. a) L'ensemble E n'est pas stable par multiplication par -1, donc n'est pas un espace vectoriel. Comme φ n'est pas définie sur un espace vectoriel, elle ne peut être linéaire.

b) Comme $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est continue, le théorème fondamental du calcul intégral indique que $\varphi(f)$ est de classe C^1, de dérivée donnée par : $\big(\varphi(f)\big)'(x) = \sqrt{f(x)}$.

c) Si $\varphi(f) = \varphi(g)$, en dérivant on obtient $\sqrt{f} = \sqrt{g}$, donc $f = g$. Ainsi φ est bien injective.

d) Comme $\varphi(f)$ est de classe C^1 et à dérivée positive, l'application φ n'atteint pas les fonctions continues non C^1, ni les fonctions non croissantes. Ainsi φ n'est pas surjective sur E.

2. a)b) Montrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ la relation : $\exists \alpha_n, \beta_n \geqslant 0, \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$:

- C'est vrai pour $n = 0$ en prenant $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 0$.
- Si c'est vrai pour n, alors :

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{\alpha_n t^{\beta_n}}\ \mathrm{d}t = \left[\sqrt{\alpha_n} \frac{t^{\frac{\beta_n}{2}+1}}{\frac{\beta_n}{2}+1} \right]_0^x = \frac{\sqrt{\alpha_n}}{\frac{\beta_n}{2}+1} x^{\frac{\beta_n}{2}+1}.$$

Donc, la relation est vraie à l'ordre $n+1$ en prenant $\alpha_{n+1} = \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{\frac{\beta_n}{2}+1}$ et $\beta_{n+1} = \dfrac{\beta_n}{2} + 1$.

c) La suite (β_n) est arithmético-géométrique ; le calcul habituel donne alors bien $\beta_n = 2 - 2^{1-n}$ (on peut aussi le montrer par récurrence).

3. a) D'après la question précédente, on a : $\alpha_{n+1} = \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{2 - 2^{-n}}$ $(*)$, donc :

$$\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} = \sqrt{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}} \times \frac{2 - 2^{-n}}{2 - 2^{-n-1}} \leqslant \sqrt{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}}$$

puisque $0 < 2 - 2^{-n} \leqslant 2 - 2^{-n-1}$.

b) Comme $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = \dfrac{1}{2}$, par récurrence évidente, on en déduit que $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leqslant 1$. Donc la suite (α_n) est décroissante ; or, par définition, elle est minorée par 0 ; d'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 0$. En passant à la limite dans la relation $(*)$, on en déduit que $\ell = \dfrac{\sqrt{\ell}}{2}$, soit $\ell = 0$ ou $\ell = \dfrac{1}{4}$. Comme la suite (α_n) est décroissante, la limite est $\dfrac{1}{4}$ si et seulement si cette suite est minorée par $\dfrac{1}{4}$; ceci se vérifie facilement par récurrence

(pour l'hérédité, $\alpha_{n+1} = \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{2 - 2^{-n}} \geqslant \dfrac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{2} = \dfrac{1}{4}$). Donc $\lim(\alpha_n) = \dfrac{1}{4}$.

4. La fonction $x \mapsto \left| f_n(x) - \dfrac{1}{4}x^2 \right|$ est continue sur le segment $[0,1]$ (comme composée de fonctions continues), donc elle est bornée et atteint ses bornes ; en particulier, elle admet un maximum M_n.
Pour tout $x \in [0,1]$, par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{4}x^2 \right| \leqslant \left| \alpha_n - \frac{1}{4} \right| \times \underbrace{\left| x^{\beta_n} \right|}_{\leqslant 1} + \left| \frac{1}{4}x^{\beta_n} - \frac{1}{4}x^2 \right| \leqslant \underbrace{\left| \alpha_n - \frac{1}{4} \right|}_{\longrightarrow 0} + \frac{1}{4} \max_{x \in [0,1]} \left| x^{\beta_n} - x^2 \right|.$$

Il suffit donc de montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \max\limits_{x \in [0,1]} |g_n(x)| = 0$, où l'on a posé $g_n(x) = x^{\beta_n} - x^2$. On étudie les variations de g_n.
Le maximum de g_n est atteint en $\left(\dfrac{\beta_n}{2} \right)^{1/(2-\beta_n)}$.
D'où :

$$\max_{x \in [0,1]} \left| x^{\beta_n} - x^2 \right| = g_n\left(\left(\frac{\beta_n}{2} \right)^{\frac{1}{2-\beta_n}} \right) = \exp\left(\frac{\beta_n}{2 - \beta_n} \ln \frac{\beta_n}{2} \right) - \exp\left(\frac{2}{2 - \beta_n} \ln \frac{\beta_n}{2} \right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} = 0,$$

puisque $\dfrac{\beta_n}{2} \longrightarrow 1$ entraîne : $\ln \dfrac{\beta_n}{2} \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{\beta_n}{2} - 1 = \dfrac{\beta_n - 2}{2}$.

Exercice 1.3

Pour tout $x > 0$, on pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n}(x))_n$ et $(S_{2n+1}(x))_n$ sont adjacentes. On note $f(x)$ leur limite commune.

2. a) Soit a un réel strictement positif. Montrer que :

$$\forall (x, x_0) \in [a, +\infty[^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S_n(x) - S_n(x_0)| \leqslant |x - x_0| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(a+k)^2}.$$

b) En déduire que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

4. Montrer que : $\forall x > 0,\ f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, \mathrm{d}t$.

Solution de l'exercice 1.3

1. Posons $b_n = \dfrac{1}{x+n}$.
La suite $(S_{2n}(x))$ décroît car $S_{2(n+1)}(x) - S_{2n}(x) = b_{2n+2} - b_{2n+1} \leqslant 0$ car (b_n) décroissante.
La suite $(S_{2n+1}(x))$ croît car $S_{2(n+1)+1}(x) - S_{2n+1}(x) = -b_{2n+3} + b_{2n+2} \geqslant 0$ car (b_n) décroissante.
On a : $S_{2n+1}(x) - S_{2n}(x) = -b_{2n+1}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Les suites $(S_{2n}(x))$ et $(S_{2n+1}(x))$ sont adjacentes ; donc elles convergent vers la même limite $f(x)$. Et donc la suite $(S_n(x))$ aussi.

2. a) Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x_0+k} \right| = |x-x_0| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)(x_0+k)} \leqslant |x-x_0| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(a+k)^2}.$$

b) Par comparaison avec une série de Riemann convergente, la série $\sum \dfrac{1}{(a+n)^2}$ converge, donc on peut passer à la limite dans l'inégalité large précédente, quand n tend vers $+\infty$, ce qui donne :

$$|f(x_0) - f(x)| \leqslant |x-x_0| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+n)^2}.$$

Si on prend $x_0 \geqslant a$, le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *i.e.* f continue en x_0.
Comme f est continue en tout point $x_0 \geqslant a$ ceci pour tout $a > 0$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque la continuité est une notion locale.

3. Par décalage d'indice, on a $f(x+1) = \dfrac{1}{x} - f(x)$, soit $f(x) = \dfrac{1}{x} - f(x+1)$. Comme f est continue en 1, $f(x+1)$ converge vers $f(1)$ quand x tend vers 0^+.
Donc $f(x+1)$ (qui converge) est négligeable devant $\dfrac{1}{x}$ (qui tend vers $+\infty$). Ainsi $f(x) \sim \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0^+.

4. Pour tout $t \in [0,1[$, on a $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{x-1+n}$. Comme $x-1+n > -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut intégrer :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{x-1+k} = \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^k \frac{t^{x+k}}{x+k} \right]_0^1 = S_n(x).$$

Donc :

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t - S_n(x) \right| = \left| \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{x-1+k} \right| = \int_0^1 \frac{t^{x+n}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{x+n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+n+1}.$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a donc bien $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$.

Exercice 1.4

1. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$; en donner une expression à l'aide de la fonction Γ.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente. On la note u_n.
Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $t \in]0,1]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k(t) = \dfrac{(-n)^k t^k}{\sqrt{t} \times k!}$.

a) Établir la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k(t)$ et préciser sa somme.

b) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)\ \mathrm{d}t$. On la note Z_N.

c) Trouver une série convergente $\sum_{k\geqslant 1} A_k$ telle que : $\forall k \geqslant 1,\ \forall t \in]0,1],\ |a_k(t)| \leqslant A_k$.

d) En déduire que la suite $(Z_N)_N$ converge et déterminer sa limite.

e) En déduire que $u_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)}$.

Solution de l'exercice 1.4

1. On reconnaît que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, qui converge bien d'après le cours.

2. Pour $n = 0$ l'intégrale u_0 (usuelle) converge.
Si $n \geqslant 1$, par changement de variable $u = nt$ (C^1 strictement croissant), on a :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u.$$

D'après la question 1, cette intégrale converge et, de plus, on a :

$$u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, par théorème de comparaison (tout est positif), la série $\sum u_n$ diverge.

3. a) On reconnaît une série exponentielle, donc elle converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t) = \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}$.

b) D'après la question précédente, la série converge, et l'on a :

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t)\right) - a_0(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k(t) = \frac{\mathrm{e}^{-nt} - 1}{\sqrt{t}} - \sum_{k=1}^{N} \frac{(-n)^k t^{k-\frac{1}{2}}}{k!}$$

Donc la fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 (par 0 puisque $\mathrm{e}^{-nt} - 1 \underset{t\to 0}{\sim} -nt$).
Ceci prouve l'existence de son intégrale.

c) Comme $|t^{k-\frac{1}{2}}| \leqslant 1$ pour tout $k \geqslant 1$ et tout $t \in]0,1]$, on voit que $A_k = \dfrac{n^k}{k!}$ convient (série exponentielle).

d) Par l'inégalité triangulaire on a : $\forall t \in]0,1]$, $\displaystyle\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)\right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} A_k$.
Par l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégration, on en déduit que :

$$\left|\int_0^1 \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)\right|\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} A_k.$$

Le majorant tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, car c'est le reste d'une série convergente, donc, par le théorème d'encadrement, on a : $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)\ \mathrm{d}t \to 0$.

e) Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t)\ \mathrm{d}t \text{ (question 3.a)} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{N} a_k(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)\ \mathrm{d}t \\ &= 2\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)} + \int_0^1 \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k(t)\ \mathrm{d}t \longrightarrow 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k n^k}{k!(2k+1)} \text{ (question 3.d).} \end{aligned}$$

Exercice 1.5

Soit f une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ dont l'intégrale est divergente sur $[0, +\infty[$. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Justifier que F est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe un unique réel y tel que $y > x$ et tel que :

$$\int_x^y f(t)dt = 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on pose $h(x) = y$.

3. Dans cette question, on prend pour f la restriction à $\mathbb{R}_+$ de la fonction exponentielle $u \longmapsto e^u$. Déterminer dans ce cas la fonction h.

4. On note G la fonction réciproque de F.
a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, exprimer $h(x)$ à l'aide des fonctions F et G.
b) En déduire que h est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
c) Étudier les variations de h.
d) On suppose de plus que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est convexe. Montrer alors que h est convexe.

Solution de l'exercice 1.5

1. Comme F est une primitive d'une fonction continue, elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f étant strictement positive, on en déduit que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ puisque l'intégrale de f est divergente sur $\mathbb{R}_+$. Il s'ensuit que F réalise bien une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Il suffit de considérer la fonction φ donnée par $\varphi(t) = F(t) - F(x)$ qui est continue, strictement croissante, telle que $\varphi(x) = 0$ et telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$. Il en résulte qu'il existe un unique point $y > x$ tel que $\varphi(y) = 1$.

3. Les hypothèses de l'énoncé sont bien vérifiée dans ce cas, et on a $e^{h(x)} - e^x = 1$, d'où $h(x) = \ln(1 + e^x)$.

4. a) Comme $F(h(x)) = 1 + F(x) \in \mathbb{R}_+$, on peut composer par G et on obtient $h(x) = G(1 + F(x))$.

b) On remarque que G est C^1 car $F' = f \neq 0$ est continue. La formule précédente et les règles de dérivation des fonctions composées nous assurent que la fonction h est dérivable. En utilisant l'égalité $F(h(x)) = 1 + F(x)$, on trouve $h'(x) = \dfrac{f(x)}{f(h(x))}$ ce qui entraîne la continuité de h'.

c) Avec la formule précédente, on constate que h' est strictement positive. La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

d) La formule donnant la dérivée de h montre que h est deux fois dérivable et que l'on a après simplifications :

$$h\text{"}(x) = \frac{f'(x)f(h(x))^2 - f'(h(x))f(x)^2}{f(h(x))^3}.$$

La convexité de la fonction $\dfrac{1}{f}$ nous dit que la fonction $\dfrac{f'}{f^2}$ est décroissante. Comme $x < h(x)$, il vient $\dfrac{f'(x)}{f(x)^2} \geqslant \dfrac{f'(h(x))}{f(h(x))^2}$, ce qui implique la positivité de h" et par suite la convexité de h.

Exercice 1.6

On rappelle que l'application $(g, h) \to \displaystyle\int_a^b g(t)h(t)dt$ définit un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ à valeurs réelles (auquel g et h appartiennent).

On note E l'ensemble des fonctions f définies sur $[\,0, 1]$, à valeurs réelles, de classe C^2 et telles que $f(0) = 0$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que pour tout $x \in [\,0, 1]$:

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(y)dy \right|.$$

2. Soit $f \in E$.
a) Montrer que pour tout $x \in [\,0, 1]$:

$$\big(f(x)\big)^2 \leqslant x \left(\int_0^1 \big(f'(y)\big)^2 dy \right).$$

b) En déduire que :

$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^2\, dx \leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 \big(f'(y)\big)^2\, dy.$$

3. Montrer que l'inégalité précédente peut être fausse si l'on retire l'hypothèse $f(0) = 0$.

4. Soit λ un réel tel que $\lambda < 2$. À l'aide des questions précédentes, montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in E$ non nulle telle que :

$$\forall\, x \in [\,0, 1], \; -f''(x) = \lambda\, f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0.$$

Solution de l'exercice 1.6

1. C'est le théorème fondamental du calcul intégral, en ajoutant que $f(0) = 0$.

2. a) D'après la question 1, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ \big(f(x)\big)^2 = \left(\int_0^x f'(y)\,dy\right)^2$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au terme de droite, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\int_0^x f'(y)\,dy\right)^2 &\leqslant \left(\int_0^x 1\,dy\right)\left(\int_0^x \big(f'(y)\big)^2\,dy\right)\\ &\leqslant x\left(\int_0^1 \big(f'(y)\big)^2\,dy\right).\end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que pour tout $x \in [0,1]$:

$$\big(f(x)\big)^2 \leqslant x\left(\int_0^1 \big(f'(y)\big)^2\,dy\right)$$

b) En intégrant en x l'inégalité obtenue à la question 2.a), on conclut que :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,dx &\leqslant \left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 \big(f'(y)\big)^2 dy\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \big(f'(y)\big)^2\,dy.\end{aligned}$$

3. Pour $f(0) \neq 0$, la fonction constante $f = 1$ sur $[0,1]$ est un contre-exemple immédiat de l'inégalité précédente.

4. Supposons que le couple $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times C^2([0,1])$, avec f non nulle, satisfait l'équation donnée. Alors en multipliant la première équation par $f(x)$ et en intégrant sur $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 -f(x)f''(x)dx = \lambda\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx.$$

En intégrant par parties le membre de gauche et en utilisant $f(0) = f(1) = 0$, il vient :

$$\int_0^1 \big(f'(x)\big)^2\,dx = \lambda\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx.$$

En utilisant l'inégalité de la question 2.b), on déduit donc :

$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx \leqslant \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx.$$

Comme f est non nulle et $C^2([0,1])$, f^2 est positive, non nulle et continue dans $[0,1]$. Par conséquent, il vient : $\int_0^1 f(x)^2 dx > 0$ et donc $\lambda/2 \geqslant 1$. Le problème n'admet donc pas de solution pour $\lambda < 2$.

Exercice 1.7

Soit f une fonction définie et continue sur le segment $[0,1]$ à valeurs réelles.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $B_n(f)$ par :

$$B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$$

1. Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, ..., X_n$, suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre x, et on pose :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

a) Exprimer $E(\overline{X}_n)$, $V(\overline{X}_n)$ et $E(f(\overline{X}_n))$ en fonction de x, n et du polynôme $B_n(f)$.

b) En déduire l'encadrement :

$$\sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sqrt{V(\overline{X}_n)} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2. Soit α un réel vérifiant $0 < \alpha \leqslant 1$.

a) Montrer que pour tout réel $\lambda \geqslant 0$, on a : $\lambda^\alpha \leqslant 1 + \lambda$.

b) Pour tous $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$, établir l'inégalité :

$$\left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \leqslant n^{-\frac{\alpha}{2}} \left(1 + \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \right)$$

3. On suppose que la fonction f vérifie la propriété suivante : il existe $\alpha \in]0,1]$ et $K > 0$ tel que

$$\forall (y,z) \in [0,1]^2,\ |f(y) - f(z)| \leqslant K|y - z|^\alpha$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \frac{3K}{2} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Solution de l'exercice 1.7

1. a) Par le cours et indépendance, $E(\overline{X}_n) = x$ et $V(\overline{X}_n) = \dfrac{x(1-x)}{n} \leqslant \dfrac{1}{4n}$.

Par le théorème de transfert et puisque les valeurs prises par les $\overline{X}_n$ sont les $\dfrac{k}{n}$ avec $k \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$E(f(\overline{X}_n)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P(n\overline{X}_n = k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = B_n(f)(x)$$

b) Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, on a :

$$0 \leqslant V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \Rightarrow \big(E(X)\big)^2 \leqslant E(X^2)$$

En appliquant à $X = |\overline{X}_n - x|$, il vient : $\big(E(|\overline{X}_n - x|)\big)^2 \leqslant E((\overline{X}_n - x)^2) = V(\overline{X}_n)$. On utilise la question précédente pour obtenir :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)^2 \leqslant V(\overline{X}_n)$$

L'autre inégalité à été démontrée lors de la première question.

2. a) On distingue deux cas :
- si $\lambda \in [0,1]$, alors comme $\alpha > 0$, $\lambda^\alpha \leqslant 1 \leqslant 1 + \lambda$;
- sinon $\lambda > 1$ et donc $\lambda^\alpha \leqslant \lambda$ (car $\alpha \leqslant 1$) et $\lambda^\alpha \leqslant 1 + \lambda$.

On a ainsi, pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\lambda^\alpha \leqslant 1 + \lambda$.

b) On utilise la relation précédente, avec $\lambda = \sqrt{n}\left|x - \dfrac{k}{n}\right|$. Il vient :

$$\left(\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\right)^{\alpha} \leqslant 1+\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|$$

Ainsi,

$$\forall x \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0,n]\!], \left|x-\frac{k}{n}\right|^{\alpha} \leqslant n^{-\frac{\alpha}{2}}\left(1+\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\right)$$

3. En utilisant la formule du binôme avec $(x+(1-x))^n$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

On en déduit que :

$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Par l'inégalité triangulaire puis avec l'hypothèse faite sur f, on a :

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_n(f)(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant K\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|^{\alpha}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leqslant \frac{K}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\sum_{k=0}^{n}\left(1+\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \frac{K}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(1+\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant la question 1.b, on peut majorer la somme et obtenir ainsi, $|f(x)-B_n(f)(x)| \leqslant \dfrac{3K}{2}\dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$.
Il suffit de passer à la borne supérieure sur $x \in]0,1[$ (qui est la même que celle sur $[0,1]$ par continuité des fonctions) pour conclure que :

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-B_n(f)(x)| = \|f-B_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{3K}{2}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Exercice 1.8

1. a) Montrer que pour tout réel t et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

b) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$(\star) \qquad \arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$.

2. a) Soit $x \in [0,1]$. En utilisant le changement de variable $t = x\cos\theta$, que l'on justifiera, montrer que :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{x}{1+x^2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta}{1-\frac{x^2}{1+x^2}\sin^2\theta}d\theta$$

b) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\arctan x = \frac{x}{1+x^2}\Big(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^k \int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1}\theta\, d\theta\Big) + R_n(x)$$

avec $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta)d\theta$.

a) Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de I_{2n+1} en fonction de n.

4. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$(\star\star)\quad \arctan x = \frac{x}{1+x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n$$

5. a) Laquelle des relations $(\star)$ et $(\star\star)$ paraît la plus efficace pour calculer une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{4}$?

b) La fonction *factorial* de Scilab permet de calculer les factorielles des entiers naturels. Écrire un script Scilab qui donne une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{4}$ à 10^{-5} près. On donne : $\dfrac{5\ln 10}{\ln 2} \approx 16,60$.

Solution de l'exercice 1.8

1. a) Il s'agit de l'écriture de la somme partielle d'ordre n d'une série géométrique de raison $-t^2$.

b) On intègre l'égalité précédente entre 0 et x ; il vient, la somme étant finie,

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

Or $\left|\displaystyle\int_0^x (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right| \leqslant \displaystyle\int_0^x t^{2n+2}dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3}$. Il reste à faire tendre n vers $+\infty$.

c) On prend $x=1$ pour obtenir l'égalité demandée. L'inégalité demandée a été démontrée ci-dessus.

2. a) Le changement de variable proposé est de classe C^1 de $[0,x]$ sur $[0,\pi/2]$. On obtient :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\pi/2}\frac{x\sin\theta}{1+x^2\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{x\sin\theta}{1+x^2-x^2\sin^2\theta}d\theta = \frac{x}{1+x^2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta}{1-\frac{x^2}{1+x^2}\sin^2\theta}d\theta$$

b) On écrit, pour $n \geqslant 0$

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{1+x^2}\sin^2\theta} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^k\sin^{2k}\theta + \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{n+1}\frac{\sin^{2n+2}\theta}{1-\frac{x^2}{1+x^2}\sin^2\theta}$$

puis, en intégrant

$$\arctan x = \frac{x}{1+x^2}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2k+1}\theta\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^k d\theta + R_n(x)$$

avec

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \frac{x}{1+x^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{n+1}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2n+3}\theta}{1-\frac{x^2}{1+x^2}\sin^2\theta}d\theta \\ &\leqslant \frac{x}{1+x^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{n+1}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-\frac{x^2}{1+x^2}}d\theta = \frac{x}{1+x^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{n+1}(1+x^2)\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Lorsque x varie sur $[0,1]$, on a $0 < \dfrac{x^2}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ ce qui donne $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2^{n+2}} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

3. Il s'agit des intégrales de Wallis classiques. Il vient $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$. Comme $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta = 1$, on obtient :

$$I_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

4. En faisant tendre n vers $+\infty$, les questions précédentes démontrent que :

$$\arctan x = \frac{x}{1+x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n$$

5. a) Au vu des majorations obtenues dans les questions 2 et 4, mieux vaut utiliser la relation $(\star\star)$.

b) On résout l'inéquation $\dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-5}$ soit $n \geqslant \dfrac{5\ln 10}{\ln 2} \approx 16.60$. On prend donc $n = 17$ et on calcule $\frac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{17}\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Voici une proposition :

```
s=1 // accumulateur
for n=1:17 // boucle
  s=s+(2^(n)*factorial(n)^2)/factorial(2*n+1) // définition
end
disp (s/2) // affichage du résultat
```

Exercice 1.9

On admet que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}\frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$ converge. Déterminer sa somme.

2. a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, pour tout entier $p \geqslant 1$, on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{p+1}\int_0^x\frac{t^{p+1}}{1+t}dt$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\ln(1+x^n) = \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}\frac{x^{nk}}{k} + R_p(x) \quad \text{avec } |R_p(x)| \leqslant \frac{1}{p+2}$$

3. a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1\ln(1+x^n)dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)}$.

b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| \leqslant \frac{C}{n}$$

c) En déduire un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.
Déduire de la question précédente que

$$u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Solution de l'exercice 1.9

1. La série $\displaystyle\sum_{p \geqslant 1} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$ est absolument convergente, donc convergente. Soit n fixé.

$$S'_{2n+1} = \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2}, \quad S_{2n+1} = \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{1}{p^2} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2}$$

En soustrayant les deux équations puis en prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$, il vient :

$$-S + \frac{\pi^2}{6} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2} \Rightarrow S = \frac{\pi^2}{12}$$

2. a) On utilise simplement :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{p+1} t^{p+1}}{1+t}$$

puis on intègre cette égalité entre 0 et x.
b) On remplace x par x^n. Ainsi :

$$\ln(1+x^n) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{n(k+1)}}{k+1} + (-1)^{p+1} \int_0^{x^n} \frac{t^{p+1}}{1+t} dt.$$

Comme $0 \leqslant \left| \displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{p+1} t^{p+1}}{1+t} dt \right| \leqslant \int_0^1 t^{p+1} dt = \frac{1}{p+2}$, l'égalité demandée vient immédiatement, puisque $0 \leqslant x^n \leqslant 1$.

3. a) On reprend la question 2.b). On a $\ln(1+x^n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{x^{nk}}{k} + R_p(x^n)$, avec $|R_p(x^n)| \leqslant \dfrac{1}{p+2}$.
En intégrant, il vient :

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k(nk+1)} + \int_0^1 R_p(x^n)dx, \text{ avec } \left| \int_0^1 R_p(x^n)dx \right| \leqslant \frac{1}{p+2}$$

Il reste à faire tendre p vers $+\infty$.
b) Chacune des séries étant convergente, il vient :

$$\left| n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2(nk+1)} \right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{C}{n}$$

c) Ainsi, $\left|nI_n - \dfrac{\pi^2}{12}\right| \leqslant \dfrac{C}{n}$, ce qui entraîne que $I_n \sim \dfrac{\pi^2}{12n}$.

4. La suite (u_n) est bien définie. Une intégration par parties donne :

$$I_n = [x\ln(1+x^n)]_0^1 - n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = \ln 2 - n(1-u_n)$$

Ainsi, $u_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + \dfrac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 1.10

On rappelle que :

- la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall\, x > 0,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$;
- pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

On admet sans démonstration que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on a :

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, k \in \mathbf{N}^*,\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \Gamma^{(0)} = \Gamma\,.$$

1.a) Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x) > 0$.

c) Étudier la convexité de la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.a) Établir l'existence d'un réel $\theta \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\theta) = 0$.

b) Quel est le sens de variation de la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$?

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

d) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. La fonction $\Psi = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ est représentée en *Scilab* par `dlgamma`. Le programme suivant renvoie la valeur 1.4616699.

```
function y=Psi(x); y=dlgamma(x); endfunction
a=1; b=2;
while (b-a)> 0.001 do
    if Psi((a+b)/2)> 0 then b=(a+b)/2; end
    if Psi((a+b)/2)< 0 then a=(a+b)/2; end
    if Psi((a+b)/2)==0 then b=(a+b)/2; a=(a+b)/2; end
end
disp ((a+b)/2)
```

Le réel renvoyé par le programme est une valeur approchée d'une certaine quantité. Laquelle ? Expliquer.

Solution de l'exercice 1.10

1.a) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$. On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to+\infty} F(B) - F(0) = 0$.

Or, pour tout réel $\geqslant 0$, $F'(x) = f(x) \geqslant 0$, donc la fonction F est croissante et puisque $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} F(B) = F(0)$,

la fonction F est constante sur $\mathbb{R}_+$ et par suite sa dérivée f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $x > 0$. La fonction $h_x : t \longmapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par suite, $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_x(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. D'après la question précédente, on ne peut avoir $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_x(t)\,\mathrm{d}t = 0$ que si h_x est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui n'est pas le cas. Finalement, pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x) > 0$.

c) Soit $x > 0$. La fonction $t \longmapsto (\ln t)^2\, t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc : $\forall\, x > 0,\ \Gamma''(x) > 0$ et la fonction Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.a) On a $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. La fonction Γ est continue sur $[1,2]$ et dérivable sur $]1,2[$; le théorème de Rolle assure alors l'existence d'un réel $\theta \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\theta) = 0$.

b) On sait que la fonction Γ'' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction Γ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et puisqu'il existe un réel θ tel que $\Gamma'(\theta) = 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que θ est l'unique réel qui annule Γ'. Par suite, $\begin{cases} \Gamma'(x) < 0 & \text{si } 0 < x < \theta \\ \Gamma'(x) > 0 & \text{si } x > \theta \end{cases}$. Il en résulte que la fonction Γ est strictement décroissante sur $]\,0,\theta\,[$ et strictement croissante sur $]\,\theta,+\infty[$ et

admet donc un minimum global en θ.

c) Au voisinage de 0, on a $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\Gamma(1)}{x} = \dfrac{1}{x}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, la fonction Γ est croissante donc admet une limite, finie ou infinie.

Or, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ a pour limite $+\infty$, donc on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

d) La représentation graphique de la fonction Γ se déduit aisément des questions précédentes.

3. La fonction Ψ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($\Gamma(x) > 0$). En particulier, la fonction Ψ est continue sur $[1,2]$ et d'après la question 2b), la fonction Ψ change de signe sur $[1,2]$ et s'annule (une et une seule fois) en $\theta \in]1,2[$. Par suite, le programme *Scilab* proposé permet par un raisonnement dichotomique de renvoyer une valeur approchée de θ.

Exercice 1.11

On note E l'ensemble des fonctions réelles f définies et de classe C^1 sur $[0,1]$ telles que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Donner un équivalent de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sin(\pi t)}$ en $t_0 = 0$ et en $t_0 = 1$.

2. Soit f une fonction de E.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t)\, f'(t)\, dt$ converge. On note alors $I(f)$ la valeur de cette intégrale.

b) Montrer que :

$$I(f) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{\big(f(t)\big)^2}{\sin^2(\pi t)} dt$$

3. Établir l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 \big(f'(t)\big)^2 dt \geqslant \pi^2 \int_0^1 \big(f(t)\big)^2 dt \qquad (*)$$

On pourra considérer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\pi \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) - f'(t)\right)^2 dt.$

4. a) Montrer que le cas d'égalité dans l'inégalité précédente est obtenu si et seulement si :

$$\forall t \in [0,1], \pi \cos(\pi t) f(t) = f'(t) \sin(\pi t)$$

b) En considérant la fonction λ définie sur $]0,1[$ par :

$$\forall\, t \in]0,1[,\ \lambda(t) = \frac{f(t)}{\sin(\pi t)}$$

déterminer l'ensemble des fonctions de E qui réalisent le cas d'égalité dans l'inégalité $(*)$.

Solution de l'exercice 1.11

1. Au voisinage de 0, $\sin t \sim t$. Donc, $\dfrac{1}{\sin(\pi t)} \sim \dfrac{1}{\pi t}$.
Pour étudier la fonction au voisinage de 1, on effectue le changement de variable $u = 1 - t$ qui nous ramène au voisinage de 0. Ainsi, $\dfrac{1}{\sin(\pi t)} \sim \dfrac{1}{\pi(1-t)}$ au voisinage de 1.

2. a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t)$ est continue sur $]0,1[$. Au voisinage de 0, elle est équivalente à

$$\frac{f'(t)}{\pi} \times \frac{f(t)}{t}$$

Or, f est dérivable en 0 et $f(0) = 0$, donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t} = f'(0)$. En outre, f est de classe C^1 en 0, donc :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t) = \frac{(f'(0))^2}{\pi}$$

De même, $\dfrac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t) \sim -\dfrac{f'(t)}{\pi} \times \dfrac{f(t)}{t-1}$. Donc : $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t) = -\dfrac{(f'(1))^2}{\pi}$.
L'intégrale proposée est donc faussement impropre.

b) On intègre par parties sur $[a, 1-a]$, $a \in]0, \frac{1}{2}[$, puis on fait tendre a vers 0. Cela donne le résultat demandé (limite du crochet en faisant apparaître des taux de variation).

$$\int_a^{1-a} \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t)\, dt = \frac{\cos(\pi(1-a))}{2\sin(\pi(1-a))} f^2(1-a) - \frac{\cos(\pi a)}{2\sin(\pi a)} f^2(a) + \frac{\pi}{2} \int_a^{1-a} \frac{f^2(t)}{\sin^2(\pi t)} dt$$

Or,

$$\lim_{a\to 0} \left(\frac{\cos(\pi(1-a))}{2\sin(\pi(1-a))} f^2(1-a) - \frac{\cos(\pi a)}{2\sin(\pi a)} f^2(a)\right) = -\frac{f'(1) f(1)}{2\pi} + \frac{f'(0) f(0)}{2\pi} = 0$$

3. On développe l'intégrale proposée. La positivité de l'intégrale assure la positivité du tout et l'un des termes est $I(f)$, soit :

$$\int_0^1 \left(\pi \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) - f'(t)\right)^2 dt = \pi^2 \int_0^1 \frac{\cos^2(\pi t)}{\sin^2(\pi t)} f^2(t)\, dt - 2\pi \int_0^1 \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) f'(t)\, dt + \int_0^1 \left(f'\right)^2(t)\, dt$$

$$\int_0^1 \left(f'(t)\right)^2(t)\, dt \geqslant \pi^2 \int_0^1 \frac{f^2(t)}{\sin^2(\pi t)} dt - \pi^2 \int_0^1 \frac{\cos^2(\pi t)}{\sin^2(\pi t)} f^2(t)\, dt = \pi^2 \int_0^1 \left(f(t)\right)^2 dt.$$

4. a) Le cas d'égalité est obtenu si et seulement si l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle donc si et seulement si c'est la fonction nulle, soit $\forall t \in]0,1[$, $\pi \cos(\pi t) f(t) = f'(t) \sin(\pi t)$. Par continuité, cette égalité peut être étendue à $[0,1]$.

b) Si $f \in E$ vérifie le cas d'égalité, alors la fonction λ est dérivable sur $]0,1[$ et on a :

$$\forall t \in]0,1[, \lambda'(t) = \frac{-\pi\cos(\pi t) f(t) + \sin(\pi t) f'(t)}{\sin^2(\pi t)} = 0.$$

On en déduit alors que λ est constante sur $]0,1[$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in]0,1[,\ f(t) = c\sin(\pi t)$. Cette égalité est encore vraie en 0 et en 1 car $f(0) = f(1) = 0$.
On vérifie aisément la réciproque. En effet, s'il existe $c \in\ R$ tel que : $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = c\sin(\pi t)$, alors on a :

$$\int_0^1 \left(\pi \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) - f^{'}(t)\right)^2 dt = \int_0^1 (\pi\cos(\pi t) - \pi\cos(\pi t))^2\, dt = 0$$

Finalement, les fonctions de E qui réalisent le cas d'égalité dans l'inégalité $(\star)$ sont celles qui sont proportionnelles à $t \mapsto \sin(\pi t)$.

Exercice 1.12

On définit la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$C_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

1. Proposer une fonction Scilab d'en-tête `function y=C(n)` renvoyant la valeur de C_n. On pourra éventuellement utiliser un vecteur u contenant les réels $C_0, \ldots, C_k$.

Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\gamma_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \gamma_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}\gamma_n$$

Pour tout entier naturel n , on note P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \gamma_{n-k} x^{k+1}$$

2. Pour tout entier naturel n et tout réel x non nul, montrer que $x^{n+2} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) = P_n(x)$.

3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $P_n'(1) = \dfrac{n+2}{2} P_n(1)$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel x , on a : $P_{n+1}'(x) = \gamma_{n+1} + 4xP_n'(x) - 2P_n(x)$.

5. Montrer alors par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $P_n(1) = \gamma_{n+1}$.

6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \gamma_n$.

7. En déduire enfin que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Solution de l'exercice 1.12

1. Une proposition :

```
function y=C(n)
u(1)=1
for k=1:n
  s=0
  for i=0:k
    s=s+u(i)* u(k-i)
  end
u(k+1)=s
end
y=u(n+1) //Cn est la (n+1)-ème composante du vecteur u
endfunction
```

2. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$x^{n+2}P_n\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n+2}\sum_{k=0}^{n}\gamma_k\gamma_{n-k}x^{-k-1} = \sum_{k=0}^{n}\gamma_k\gamma_{n-k}x^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n}\gamma_{n-k}\gamma_k x^{k+1} = P_n(x)$$

3. On dérive membre à membre puis on évalue en $x = 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, (n+2)\,x^{n+1}P_n\left(\frac{1}{x}\right) - x^n P_n'\left(\frac{1}{x}\right) = P_n'(x)$$

Donc, $(n+2)\,P_n(1) - P_n'(1) = P_n'(1)$.

4. Par définition de $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a pour tout $k \geqslant 1$, $(k+1)\,\gamma_k = (4k-2)\,\gamma_{k-1}$, donc pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} P_{n+1}'(x) &= \sum_{k=0}^{n+1}(k+1)\,\gamma_k\gamma_{n+1-k}x^k = \gamma_0\gamma_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1}(4k-2)\,\gamma_{k-1}\gamma_{n+1-k}x^k \\ &= \gamma_{n+1} + 4x\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,\gamma_k\gamma_{n-k}x^k - 2\sum_{k=0}^{n}\gamma_k\gamma_{n-k}x^{k+1} = \gamma_{n+1} + 4xP_n'(x) - 2P_n(x) \end{aligned}$$

5. Par récurrence. pour tout x réel, $P_0(x) = \gamma_0^2 x = x$, donc $P_0(1) = 1$. Or, $\gamma_1 = \gamma_0 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. L'égalité précédente évaluée en 1 donne $P_{n+1}'(1) = \gamma_{n+1} + 4P_n'(1) - 2P_n(1)$ soit, en tenant compte de $\mathcal{P}(n)$: $P_{n+1}'(1) = 4P_n'(1) - \gamma_{n+1}$. Or, on sait que :

$$P_{n+1}'(1) = \frac{n+3}{2}P_{n+1}(1) \text{ et } P_n'(1) = \frac{n+2}{2}P_n(1) = \frac{n+2}{2}\gamma_{n+1}$$

Ainsi, $\dfrac{n+3}{2}P_{n+1}(1) = 4\dfrac{n+2}{2}\gamma_{n+1} - \gamma_{n+1} = (2n+3)\,\gamma_{n+1}$, d'où : $P_{n+1}(1) = \dfrac{2\,(2n+3)}{n+3}\gamma_{n+1} = \gamma_{n+2}$.

6. La formule établie à la question précédente s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\gamma_k\gamma_{n-k} = \gamma_{n+1}$. On a en outre $\gamma_0 = 1$.

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ C_n = \gamma_n$.

7. Notons provisoirement $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$. On a $\alpha_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{4n+2}{n+2}\alpha_n = \frac{4n+2}{n+2}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} = \alpha_{n+1}$$

Les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont donc le même premier terme et vérifient la même relation de récurrence : elles sont donc égales. Et puisque $(\gamma_n)_{n\in N} = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \gamma_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Exercice 1.13

On considère l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

1. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$.
b) Montrer que cette intégrale est convergente pour $x = 0$.

On pose alors, pour tout $x \geqslant 0, f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

2. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du.$$

3. a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
b) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et calculer $f''(x)$ pour tout $x > 0$.
c) En déduire une relation entre $x, f(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x > 0$.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Solution de l'exercice 1.13

1.a) Soit $x > 0$. L'application $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{x+t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. On effectue une intégration par parties, d'où pour $A > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{\sin(t)}{x+t} dt &= \left[\frac{-\cos(t)}{x+t}\right]_0^A + \int_0^A \frac{\cos(t)}{(x+t)^2} dt \\
&= \frac{-\cos(A)}{A+x} + \frac{1}{x} + \int_0^A \frac{\cos(t)}{(x+t)^2} dt
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x+t)^2} dt$ est absolument convergente donc convergente puisque

$$\forall t \geqslant 0, \frac{|\cos(t)|}{(x+t)^2} \leqslant \frac{1}{(x+t)^2}.$$

De plus, la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\dfrac{-\cos(A)}{A+x}$ est nulle. On en déduit que f est définie pour $x > 0$.

b) La fonction $t \to \dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge continuement sur $[0, +\infty[$. Pour montrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet, on effectue une intégration par parties sur $[1, A]$ en dérivant $t \to 1/t$ et en intégrant $t \to \sin t$.

2. On applique le changement de variable affine $u = x + t$; on obtient :

$$\forall x > 0, \; f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u} du = \int_x^{+\infty} \left(\frac{\sin(u)\cos(x)}{u} - \frac{\cos(u)\sin(x)}{u}\right) du$$

Les intégrales étant convergentes, on peut appliquer la linéarité d'où :

$$f(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du.$$

3. a) Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Enfin $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ représente une primitive de $-\dfrac{\sin(u)}{u}$.
On en déduit que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x > 0, \; f'(x) = -\sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \cos(x)\frac{\sin(x)}{x} - \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du + \sin(x)\frac{\cos(x)}{x}.$$

D'où :

$$\forall x > 0,\ \ f'(x) = -\sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du - \cos(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du.$$

b) Pour les mêmes raisons, on peut encore dériver d'où :

$$\forall x > 0,\ \ f''(x) = -\cos(x)\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du + \frac{\sin^2(x)}{x} + \sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du + \frac{\cos^2(x)}{x}.$$

c) Soit $f''(x) = -f(x) + \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

4. Les fonctions sinus et cosinus sont bornées, et les deux intégrales sont convergentes donc de limite nulle en $+\infty$, tout comme f.

Exercice 1.14

1. Soit n et m deux entiers naturels.
a) Établir la formule :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \sin(nt) - \sin(mt) = 2\sin\left(\frac{n-m}{2}t\right)\cos\left(\frac{n+m}{2}t\right)$$

b) Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}dt$. On la note J_n.

c) Calculer J_n pour $n = 0, 1, 2$.

2. Pour tout réel $\lambda > 0$, on pose :

$$u(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\lambda t)}{\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)}dt$$

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} u(\lambda) = 0$.

b) En déduire la convergence de la suite $(J_n - J_{n-1})_{n\geqslant 1}$.

3. a) Exprimer $J_n - J_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.

b) En déduire la convergence de la suite $(J_n)_{n\geqslant 0}$ et déterminer sa limite.

4. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{2p+1}$ et calculer sa somme.

Solution de l'exercice 1.14

1.a) En passant en exponentielle complexe, il vient :

$$\sin(nt) - \sin(mt) = \operatorname{Im}\left[e^{i\frac{(n+m)}{2}t}\left(e^{i\frac{(n-m)}{2}t} - e^{-i\frac{(n-m)}{2}t}\right)\right] = 2\sin\left(\frac{n-m}{2}t\right)\cos\left(\frac{n+m}{2}t\right)$$

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ se prolonge par continuité en 0 car $\dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)} \sim \dfrac{nt}{t} \sim n$.

c) Calculs élémentaires : $J_0 = 0$, $J_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et $J_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(t)dt = 2$.

2. a) On intègre par parties :

$$u(\lambda)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\lambda t)}{\cos(\frac{t}{2})}dt=\Big[\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda\cos(\frac{t}{2})}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}.\frac{\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})}{\cos^2(\frac{t}{2})}dt$$

d'où :

$$|u(\lambda)|=\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\lambda t)}{\cos(\frac{t}{2})}dt\right|\leqslant\frac{C}{\lambda}\to 0$$

car sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, les fonctions en jeu sont continues.

b) Donc,

$$J_n-J_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin(\frac{t}{2})\cos((n-\frac{1}{2})t)}{\sin(t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((n-\frac{1}{2})t)}{\cos(\frac{t}{2})}dt$$

tend vers 0 grâce à la question précédente.

3. a) On a :

$$\begin{aligned}J_n-J_{n-2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin(t)\cos((n-1)t)}{\sin(t)}dt=\Big[\frac{2\sin((n-1)t)}{n-1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\sin((n-1)\frac{\pi}{2})}{n-1}\\&=\begin{cases}0 & \text{si } n=2p+1\\ \dfrac{-2(-1)^p}{2p-1} & \text{si } n=2p\end{cases}\end{aligned}$$

b) Ainsi, $J_{2p+1}=\dfrac{\pi}{2}$ et $J_{2p}=J_{2p-1}+(J_{2p}-J_{2p-1})\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$.

4. D'après la question précédente, $J_{2n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(J_{2k}-J_{2k-2})=2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$$

Exercice 1.15

Pour tout réel a tel que $|a|\neq 1$, on considère la fonction f_a définie sur $[0,\pi]$ par $f_a(x)=1-2a\cos x+a^2$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\big(f_a(x)\big)\mathrm{d}x$ est convergente. On pose alors, pour tout $a\in\mathbb{R}, a\neq\pm 1$:

$$g(a)=\int_0^{\pi}\ln\big(f_a(x)\big)\mathrm{d}x$$

2. Montrer que $\pi\ln((1-|a|)^2)\leqslant g(a)\leqslant\pi\ln((1+|a|)^2)$. En déduire $\lim\limits_{a\to 0}g(a)$.

3. Montrer que la fonction g est paire.

4. a) Montrer que $g(a)+g(-a)=\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2a^2\cos(2x)+a^4)\mathrm{d}x$.

b) On pose :

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln(1-2a^2\cos(2x)+a^4)\mathrm{d}x \text{ et } J=\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(1-2a^2\cos(2x)+a^4)\mathrm{d}x$$

À l'aide d'un changement de variable dans chaque intégrale, montrer que $g(a)+g(-a)=g(a^2)$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g(a)=\dfrac{1}{2^n}g(a^{2^n})$. En déduire la valeur de $g(a)$ lorsque $|a|<1$.

d) Pour $a\neq 0$, exprimer $g(1/a)$ en fonction de $g(a)$. En déduire l'expression de $g(a)$ pour $|a|>1$.

Solution de l'exercice 1.15

1. Le trinôme du second degré $1-2a\cos x+a^2$ a pour discriminant $\Delta=4(\cos^2 x-1)=-4\sin^2 x$. Ainsi, si $x\in]0,\pi[$, $f_a(x)>0$ et continue et l'intégrale est bien définie.
Au voisinage de 0, $f_a(x)\sim(1-a)^2$ et, comme $a\neq 1$, la fonction $\ln(f_a(x))$ admet un prolongement par continuité en 0.
Au voisinage de π, $f_a(x)\sim(1+a)^2$ et, comme $a\neq -1$, la fonction $\ln(f_a(x))$ admet un prolongement par continuité en π.

2. On a $-2|a|\leqslant 2a\cos x\leqslant 2|a|$ ce qui entraîne que $(1-|a|)^2\leqslant f_a(x)\leqslant(1+|a|)^2$.
Par encadrement et croissance de l'intégrale, on obtient : $\pi\ln(1-|a|)^2\leqslant g(a)\leqslant\pi\ln(1+|a|)^2$ et $\lim\limits_{a\to 0}g(a)=0$.

3. Le changement de variable affine $t=\pi-x$ montre que g est une fonction paire.

4. a) On écrit :

$$\begin{aligned}
g(2a) &= g(a)+g(-a)=\int_0^\pi \ln\left((1-2a\cos x+a^2)(1+2a\cos x+a^2)\right)dx\\
&=\int_0^\pi \ln(1+2a^2+a^4-4a^2\cos^2(x))dx=\int_0^\pi \ln(1+2a^2(1-2\cos^2 x)+a^4)dx\\
&=\int_0^\pi \ln(1-2a^2\cos(2x)+a^4)dx
\end{aligned}$$

b) On pose $t=2x$ dans l'intégrale I et $t=2\pi-2x$ dans l'intégrale J. Il vient :

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(1-2a^2\cos(t)+a^4)\mathrm{d}t \text{ et } I=\frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(1-2a^2\cos(t)+a^4)\mathrm{d}t$$

Donc :

$$2g(a)=g(a)+g(-a)=I+J=\int_0^\pi \ln(1-2a^2\cos(t)+a^4)\mathrm{d}t=g(a^2)$$

c) On montre que $g(a)=\dfrac{1}{2^n}g(a^{2^n})$ en utilisant la relation $g(a)=\dfrac{1}{2}g(a^2)$ et par récurrence sur n. Comme $|a|<1$, et par la question 2, $g(a)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}g(a^{2^n})=0$.

d) On remarque que :

$$g\left(\frac{1}{a}\right)=\int_0^\pi \ln\left(1-\frac{2}{a}\cos x+\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{d}x=g(a)-\int_0^\pi \ln(a^2)\mathrm{d}x=g(a)-\pi\ln(a^2)$$

Donc si $|a|>1$, $g(a)=g(1/a)+\pi\ln(a^2)=2\pi\ln(|a|)$, puisque $g\big(\dfrac{1}{a}\big)=0$ (question précédente).

Exercice 1.16

1. a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(1-x)}{1+x}dx$. On note J cette intégrale.

b) Pour $n\in\mathbb{N}$, établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n\ln(1-x)dx$. On note I_n cette intégrale.

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\quad\text{et}\quad u_n=\frac{S_n}{n}.$$

a) Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

3. a) Exprimer I_n à l'aide de u_{n+1}.

b) En déduire la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de l'intégrale R_n définie par :

$$R_n = \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}\, \ln(1-x)}{1+x} dx.$$

c) Montrer alors que la série de terme général $(-1)^n\, u_{n+1}$ converge et que :

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, u_{n+1}$$

Solution de l'exercice 1.16

1. a) La fonction $x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{1+x}$ est continue sur $[0,1[$ et au voisinage de 1, $f(x) \sim -\ln(1-x)/2$, d'intégrale de même nature que celle de $\ln(u)$ au voisinage de 0^+. Ainsi J converge.

b) De même, $x \mapsto x^n \ln(1-x)$ est continue sur $[0,1[$ et équivalente à $\ln(1-x)$ en 1^-, donc I_n converge.

2. a) Par comparaison série-intégrale et décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$, on a :

$$S_n \sim \ln n \quad \text{et} \quad u_n \sim \frac{\ln n}{n}$$

b) Pour $n \geqslant 3$, on a $u_n > 1/n$ et donc la série $\sum\limits_n u_n$ diverge.

3. a) Par intégration par parties sur $[0,a] \subset [0,1[$, en choisissant une primitive de x^n donnant une limite finie au crochet en 1, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^a x^n \ln(1-x)dx &= \left[\frac{x^{n+1}-1}{n+1} \ln(1-x)\right]_0^a + \int_0^a \frac{x^{n+1}-1}{(n+1)\,(1-x)} dx \\
&= \frac{a^{n+1}-1}{n+1} \ln(1-a) - \frac{1}{n+1} \int_0^a \frac{1-x^{n+1}}{1-x} dx \\
&= \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{n} a^k\right] (a-1) \ln(1-a) - \frac{1}{n+1} \int_0^a \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) dx
\end{aligned}$$

d'où, pour $a \to 1^-$ (permutation justifiée car les sommes sont finies) :

$$I_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) dx = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left[\int_0^1 x^k dx\right] = -u_{n+1}$$

b) L'intégrale R_n converge (démonstration identique à celle de la question 1). On majore :

$$|R_n| = \left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}\, \ln(1-x)}{1+x} dx\right| \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\, |\ln(1-x)| dx = -I_{n+1} = u_{n+2}$$

car $\ln(1-x)$ est de signe constant négatif sur $[0,1[$.
Comme $u_n \sim (\ln n)/n$ qui tend vers 0 en $+\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

c) On utilise la série géométrique :

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1 -\frac{\ln(1-x)}{1+x} dx = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^k \ln(1-x) dx - \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}\, \ln(1-x)}{1+x} dx \\
&= -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, I_k - R_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, u_{k+1} - R_n
\end{aligned}$$

Comme R_n tend vers 0, la série $\sum\limits_n (-1)^n\, u_{n+1}$ converge vers J. Donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, u_{n+1} = J$.

Chapitre 2

Algèbre

Exercice 2.1

Soit un entier $n \geqslant 3$. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent *à elles deux* n boules indiscernables. À chaque étape, on choisit de manière équiprobable un nombre de $[\![1, n]\!]$.

• Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans U_1, on prend une boule de U_1 que l'on met dans U_2.

• Si ce nombre est strictement supérieur au nombre de boules contenues dans U_1, on prend une boule de U_2 que l'on met dans U_1.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note Z_p la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 à l'étape p. Ainsi Z_0 est la variable égale au nombre de boules initialement contenues dans U_1, Z_1 est la variable égale au nombre de boules contenues dans U_1 après une étape, etc.
Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. a) On pose : $Y_p = \begin{pmatrix} P(Z_p = 0) \\ \vdots \\ P(Z_p = n) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Y_{p+1} = AY_p$.

b) Écrire un script Scilab qui simule le contenu obtenu dans U_1 au bout de 100 étapes en partant de l'état initial où U_1 contient 0 boule (on supposera que la matrice A a été rentrée).

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{2}{n} & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que 1 est valeur propre de A.

Dans les questions suivantes, on pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on note T l'endomorphisme de E dont A est la matrice dans la base canonique de E.

3. Déterminer, pour tout $P \in E$, une expression de $T(P)$ comme combinaison linéaire de XP, X^2P' et P'.

4. Soit λ réel et $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \neq \pm 1$, on a :

$$\frac{n(\lambda - x)}{1 - x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

b) Soit $P \in E$ tel que $T(P) = \lambda P$. On suppose que P ne s'annule pas sur $]-1,1[$.
Montrer que : $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{P'(x)}{P(x)} = \dfrac{n(\lambda - x)}{1-x^2}$. En déduire l'expression de $P(x)$ pour $x \in]-1,1[$.
c) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de T. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Solution de l'exercice 2.1

1. a) Supposons qu'à l'étape p, U_1 contienne m boules. Alors $P_{[Z_p=m]}(Z_{p+1} = m-1) = \dfrac{m}{n}$ et $P_{[Z_p=m]}(Z_{p+1} = m+1) = \dfrac{n-m}{n}$, les autres probabilités conditionnelles étant nulles.
On utilise le système complet d'événements $(P(Z_p = m))_{0 \leqslant m \leqslant n}$ pour obtenir, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$P(Z_{p+1} = k) = \sum_{m=0}^{n} P_{[Z_p=m]}(Z_{p+1} = k) P(Z_p = m) = \frac{n-k+1}{n} P(Z_p = k-1) + \frac{k+1}{n} P(Z_p = k+1)$$

Ceci correspond à la matrice A de la question suivante. *Remarque :* il s'agit ici d'une chaîne de Markov avec deux barrières réfléchissantes.
b) Une proposition (c'est du cours).

```
1. X=grand(100,'markov',A,1)
2. disp(X)
```

2. Soit on dit que cette matrice est la matrice du processus de la première question, donc que la somme de chaque colonne vaut 1, soit on s'aperçoit que la somme de chaque colonne vaut 1... Ainsi 1 est valeur propre de ${}^tA$ donc de A.

3. On a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $T(X^k) = \dfrac{k}{n} X^{k-1} + \left(1 - \dfrac{k}{n}\right) X^{k+1}$ (on le vérifie également pour $k = 0$ et $k = n$).
Donc, $T(X^k) = \dfrac{1}{n}\Big(k(X^{k-1} - X^{k+1})\Big) + X^{k+1}$, d'où :

$$T(P) = \frac{1}{n}\left(1 - X^2\right) P' + XP$$

4. a) Après calculs : $\dfrac{n(\lambda - x)}{1-x^2} = \dfrac{n(\lambda - 1)}{2} \times \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{n(\lambda+1)}{2} \times \dfrac{1}{1+x}$.
b) On a $T(P) = \lambda P$ si et seulement si $(1-x^2)P'(x) = n(\lambda - x)P(x)$. On sépare les variables

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{n(\lambda - x)}{1-x^2} = \frac{n(\lambda-1)}{2} \times \frac{1}{1-x} + \frac{n(\lambda+1)}{2} \times \frac{1}{1+x}$$

puis on intègre. Ce qui donne $P(x) = A(1+x)^{\frac{n(1+\lambda)}{2}}(1-x)^{\frac{n(1-\lambda)}{2}}$.

c) Les vecteurs propres sont des polynômes. On remarque que $\dfrac{n(1+\lambda_k)}{2} + \dfrac{n(1-\lambda_k)}{2} = n$. Posons $\dfrac{n(1+\lambda_k)}{2} = k \in [\![0,n]\!]$ soit $\lambda_k = \dfrac{2k}{n} - 1$. On obtient ainsi un polynôme propre $(1+x)^k(1-x)^{n-k}$ associé à la valeur propre $\lambda_k = \dfrac{2k}{n} - 1$, ceci pour $k \in [\![0,n]\!]$.
La matrice A possède $(n+1)$ valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.
