Chapitre 2

Analyse

Exercice 2.1

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^2(nt)dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{2\pi} \sin^2(nt)dt.$$

Soit f une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F_n : \ (a, b) \longmapsto \int_0^{2\pi} \Big(f(t) - a \cos(nt) - b \sin(nt) \Big)^2 dt \ .$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n = J_n = \pi$.
2. Montrer qu'il existe un réel C indépendant de n, de a et de b, et des réels u_n et v_n indépendants de a et de b que l'on explicitera à l'aide d'intégrales, tels que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$F_n(a, b) = \pi a^2 + \pi b^2 - 2au_n - 2bv_n + \mathrm{C}.$$

3. On suppose dans cette question que n est un entier supérieur ou égal à 1 fixé.
   (a) Montrer que F_n n'admet pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer deux réels a_n, b_n tels que F_n présente un minimum local en (a_n, b_n).
   (c) Montrer que ce minimum de F_n en (a_n, b_n) est un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que lorsque f est de classe C^1, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.
5. On définit les fonctions φ_n et ψ_n par : $\forall t \in [0, 2\pi]$, $\varphi_n(t) = \cos(nt)$ et $\psi_n(t) = \sin(nt)$.
   Soit E_n l'espace vectoriel engendré par les fonctions f, φ_n et ψ_n. On munit E_n du produit scalaire défini par :

$$\forall \, (g, h) \in E_n^2, \ \langle g, h \rangle = \int_0^{2\pi} g(t)h(t)dt$$

   Interpréter F_n dans ce cadre et retrouver le résultat de la question 3b.

Solution de l'exercice 2.1

1. Plusieurs méthodes sont possibles ; par exemple :
   - Formules trigonométriques : $\cos^2(nt) = \dfrac{1+\cos(2nt)}{2}$ et $\sin^2(nt) = \dfrac{1-\cos(2nt)}{2}$, dont l'intégrale vaut π.
   - Une intégration par parties donne $I_n = J_n$ et $I_n + J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos^2(nt)+\sin^2(nt))dt = 2\pi$.

   Ainsi, $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = J_n = \pi.}$
2. On a :

$$\begin{aligned}&(f(t) - a\cos(nt) - b\sin(nt))^2\\ =&f^2(t) + a^2\cos^2(nt) + b^2\sin^2(nt) - 2af(t)\cos(nt) - 2bf(t)\sin(nt) + 2ab\sin(nt)\cos(nt)\end{aligned}$$

   Par linéarité de l'intégration, en posant $u_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$, $v_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$ et $\mathrm{C} = \displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)dt$, et puisque $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(nt)\cos(nt)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(2nt)\ dt = 0$, on a bien :

$$F_n(a,b) = a^2 I_n + b^2 J_n - 2au_n - 2bv_n + \mathrm{C}$$

3. (a) $F_n(a,0) = \pi a^2 - 2au_n + \mathrm{C} \to +\infty$ quand $a \to +\infty$, donc la fonction F_n n'est pas majorée.

   (b) La fonction F_n est de classe C^2 et : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_1(F_n)(a,b) = 2a\pi - 2u_n$ et $\partial_2(F_n)(a,b) = 2b\pi - 2v_n$.
   Donc, F_n présente un unique point critique $\boxed{\text{en } \left(\frac{u_n}{\pi}, \frac{v_n}{\pi}\right).}$
   Et : $\partial^2_{1,1}(F_n)(a,b) = \partial^2_{2,2}(F_n)(a,b) = 2\pi$, $\partial^2_{1,2}(F_n)(a,b) = 0$. La Hessienne vaut donc $2\pi I$, où I est la matrice identité d'ordre 2 : elle n'a que des valeurs propres strictement positives, donc on a bien un minimum local.

   (c) Comme $u_n = \pi a_n$ et $v_n = \pi b_n$, on a :

$$\begin{aligned}F_n(a,b) - F_n(a_n,b_n) &= (\pi a^2 + \pi b^2 - 2au_n - 2bv_n + \mathrm{C}) - (\pi a_n^2 + \pi b_n^2 - 2a_nu_n - 2b_nv_n + \mathrm{C})\\ &= \pi(a^2 + b^2 - 2aa_n - 2bb_n - a_n^2 - b_n^2 + 2a_n^2 + 2b_n^2)\\ &= \pi\big((a-a_n)^2 + (b-b_n)^2\big) \geqslant 0.\end{aligned}$$

   Ainsi $F_n(a,b) \geqslant F_n(a_n,b_n)$ pour tout (a,b).
4. L'hypothèse selon laquelle f est C^1 nous invite à faire une intégration par parties, puis par inégalité triangulaire, on obtient :

$$|u_n| = \left|\left[-f(t)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos(nt)f'(t)dt\right| \leqslant \frac{|f(0)-f(2\pi)|}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} |f'(t)|dt.$$

   Ainsi, par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
5. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $F_n(a,b) = ||f - (a\varphi_n + b\psi_n)||^2$
   Or, quand (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$, $a\varphi_n + b\psi_n$ décrit $\mathrm{Vect}(\varphi_n,\psi_n)$. Ainsi, on sait que F_n admet un minimum atteint quand $a\varphi_n + b\psi_n$ est égal à la projection orthogonale de f sur $\mathrm{Vect}(\varphi_n,\psi_n)$.

Exercice 2.2

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une suite strictement croissante de n réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$). On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 x_k^2 - \left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2\right]^2 \quad \textbf{et} \quad g(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

On pose $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 1\}$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Donner les gradients de f et de g au point x.

(b) Justifier l'existence d'un maximum global de f sur $\mathcal{S}$.

(c) Vérifier que la contrainte $g(x) = 1$ n'est pas critique.

(d) Soit $y \in \mathcal{S}$ tel que $f(y) = \max\{f(x) : x \in \mathcal{S}\}$. Écrire la condition nécessaire du premier ordre que l'on doit avoir au point y. Montrer que si la i-ème composante y_i de y ($i \in \{1, \cdots, n\}$) est non nulle, alors λ_i est racine d'une équation du second degré de la forme $X^2 - 2bX - c = 0$ où b et c sont indépendants de i. En déduire que y a exactement deux composantes non nulles. Que peut-on dire de plus sur celles-ci ? Montrer que :

$$\max\{f(x) : x \in \mathcal{S}\} = \frac{(\lambda_n - \lambda_1)^2}{4}.$$

2. Dans cette question, on suppose seulement que les réels $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ vérifient $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ et on définit encore f et g par les mêmes formules que dans la question 1.

(a) Montrer que :

$$\max\{f(x) : x \in \mathcal{S}\} \leqslant \frac{(\lambda_n - \lambda_1)^2}{4}.$$

(Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, \cdots, n\}$, on pourra poser $\lambda_i(p) = \lambda_i + (i-1)/p$ et utiliser la question 1).

(b) Prouver que l'on a encore :

$$\max\{f(x) : x \in \mathcal{S}\} = \frac{(\lambda_n - \lambda_1)^2}{4}.$$

3. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note X la matrice colonne associée à x. On considère une matrice A carrée d'ordre n qui est symétrique et réelle.

(a) Justifier le fait que la matrice A est diagonalisable et écrire A à l'aide d'une matrice diagonale D et d'une matrice orthogonale P.

(b) On note $\lambda_{max}(A)$ (resp. $\lambda_{min}(A)$) la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de A. Montrer que :

$$\max\left\{{}^tXA^2X - \left({}^tXAX\right)^2 : x \in \mathcal{S}\right\} = \frac{(\lambda_{max}(A) - \lambda_{min}(A))^2}{4}.$$

(c) En choisissant convenablement un vecteur x de $\mathcal{S}$, prouver que :

$$|\lambda_{max}(A) - \lambda_{min}(A)| \geqslant \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{Tr(A^2) - \frac{1}{n}Tr(A)^2}.$$

Solution de l'exercice 2.2

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a $\nabla(g)(x) = 2x$ et les composantes du gradient de f sont données par :

$$\partial_i(f) = 2\lambda_i^2 x_i - 4\lambda_i x_i \left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2\right] = 2\lambda_i x_i \left[\lambda_i - 2\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2\right)\right].$$

(b) La fonction f est continue sur le fermé borné $\mathcal{S}$, elle admet donc un maximum global sur $\mathcal{S}$.

(c) Pour tout $x \in \mathcal{S}$, on a $\nabla(g)(x) = 2x \neq 0$, la contrainte $g(x) = 1$ est donc non critique.

(d) Soit $y \in \mathcal{S}$ tel que $f(y) = \max\{f(x) : x \in \mathcal{S}\}$. Le cours nous dit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla(f)(y) = \alpha\nabla(g)(y)$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on a donc :

$$\lambda_i y_i \left[\lambda_i - 2\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2\right)\right] = \alpha y_i. \tag{2.1}$$

Posons $b = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$ (b est fixé car tout est donné), on voit que si $y_i \neq 0$ alors λ_i est racine de l'équation du second degré de la forme $X^2 - 2bX - \alpha = 0$. Le trinôme $X^2 - 2bX - \alpha$ admet au plus deux racines distinctes et les réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont distincts, le point y a donc au plus deux composantes non nulles. Comme $y \in \mathcal{S}$, il a au moins une composante $y_i \neq 0$. S' il n'en n'a qu'une, alors $y = \pm e_i$ et $f(y) = 0 < f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \cdots, 0) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4}$, ce qui est contradictoire. Le point y a donc exactement deux composantes non nulles y_i et y_j $(i < j)$. Par factorisation (ou par les formules classiques), on doit avoir $\lambda_i + \lambda_j = 2(\lambda_i y_i^2 + \lambda_j y_j^2)$. Or, on sait que $y_i^2 + y_j^2 = 1$; on a donc $y_i = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y_j = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans ce cas, $f(y) = \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^2}{4}$, il s'ensuit que l'on a nécessairement $i = 1$ et $j = n$ (maximum en y) et la conclusion en découle.

2. (a) On remarque que $\lambda_1(p) < \lambda_2(p) < \cdots < \lambda_n(p)$. Avec la question précédente, on sait que pour tout $x \in \mathcal{S}$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(p)^2 x_k^2 - \left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(p) x_k^2\right]^2 \leqslant \frac{(\lambda_n(p) - \lambda_1(p))^2}{4}.$$

Il suffit donc de faire tendre p vers l'infini et de prendre un point x où le maximum sur $\mathcal{S}$ est atteint.

(b) Comme $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \cdots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{(\lambda_n - \lambda_1)^2}{4}$, on déduit de la question précédente que l'on a encore :

$$\max\{f(x) : x \in \mathcal{S}\} = \frac{(\lambda_n - \lambda_1)^2}{4}.$$

3. (a) La matrice A est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable et on peut l'écrire sous la forme $A = {}^tPDP$ où P est une matrice orthogonale et D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A répétées avec leur ordre de multiplicité.

(b) On peut supposer que $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 = \lambda_{min}(A) \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n = \lambda_{max}(A)$. Comme la matrice P est orthogonale, on a $P(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. La formule demandée résulte alors de la question 2.(b) et du fait que :

$$\begin{aligned}\max\left\{{}^tXA^2X - \left({}^tXAX\right)^2 : x \in \mathcal{S}\right\} &= \max\left\{{}^t(PX)D^2(PX) - \left({}^t(PX)D(PX)\right)^2 : x \in \mathcal{S}\right\} \\ &= \max\left\{{}^tYD^2Y - \left({}^tYDY\right)^2 : y \in \mathcal{S}\right\} = \max\{f(y) : y \in \mathcal{S}\} = \frac{(\lambda_n - \lambda_1)^2}{4}.\end{aligned}$$

(c) D'après le cours, on a $Tr(A^2) = Tr(D^2)$ et $Tr(A) = Tr(D)$. Il suffit alors de prendre le vecteur $y = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ pour obtenir l'inégalité souhaitée.

Exercice 2.3

On rappelle que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres réels non entiers. On rappelle également les formules trigonométriques suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

1. Pour tout $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$, montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)$.

   On pose alors $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)$.

2. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $U_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{x+n-N}$.

   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, montrer que la suite $(U_N(x))_N$ converge vers $U(x) = S(x) + \dfrac{1}{x}$.

   (b) Montrer que la fonction U ainsi définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est impaire et périodique de période 1.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose : $V(x) = \pi\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a : $V\left(\dfrac{x}{2}\right) + V\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2V(x)$.

   (b) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x} - V(x)$ se prolonge par continuité par la valeur 0 en $x = 0$.

4. Pour tout $(x, x_0) \in ([0,1[)^2$, montrer que : $|S(x) - S(x_0)| \leqslant |x - x_0| \left(\dfrac{1}{(1-x)(1-x_0)} + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)$.

5. Pour tout $x \neq 0$, on note $I(x) = \dfrac{1}{x}$. Montrer que la fonction $S + I - V$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, impaire et périodique de période 1. On notera f ce prolongement.

6. On admet qu'alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2f(x) \qquad (E)$.

   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ et $x_1 \in [0,1]$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = f(x_0)$ et $f\left(\dfrac{x_1}{2^n}\right) = f(x_1)$.

   (c) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \text{on a} : \pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.3

1. Il y a convergence absolue car : $\left|\dfrac{1}{x+n}+\dfrac{1}{x-n}\right|=\left|\dfrac{2x}{x^2-n^2}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|2x|}{n^2}$.
2. (a) Par découpage puis décalages d'indices (respectivement $k=N-n$ et $k=n-N$) :
$$U_N(x)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{x+n-N}+\frac{1}{x}+\sum_{n=N+1}^{2N}\frac{1}{x+n-N}=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{x-k}+\frac{1}{x+k}\right)\to\frac{1}{x}+S(x).$$
(b) L'imparité de $x\mapsto\dfrac{1}{x+n}+\dfrac{1}{x-n}$ donne celle de S, donc de U. Et $U(x+1)=U(x)$ car :
$$U_N(x+1)=\sum_{n=0}^{2N}\frac{1}{1+x+n-N}\underset{k=n+1}{=}\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{1}{x+k-N}=U_N(x)+\frac{1}{x+N+1}-\frac{1}{x-N}\to U(x).$$
3. (a) On a $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$ et $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$, puis on utilise les formules de duplication :
$$V\left(\frac{x}{2}\right)+V\left(\frac{x+1}{2}\right)=\pi\left(\frac{\cos(\pi\frac{x}{2})}{\sin(\pi\frac{x}{2})}-\frac{\sin(\pi\frac{x}{2})}{\cos(\pi\frac{x}{2})}\right)=2\pi\left(\frac{\cos^2(\pi\frac{x}{2})-\sin^2(\pi\frac{x}{2})}{2\cos(\pi\frac{x}{2})\sin(\pi\frac{x}{2})}\right)=2V(x).$$
(b) À l'aide des développements limités de sinus et cosinus en 0 (où l'on remplace x par πx) on a :
$$\frac{1}{x}-V(x)=\frac{\sin(\pi x)-(\pi x)\cos(\pi x)}{x\sin(\pi x)}\underset{x\to0}{=}\frac{((\pi x)+o(x^2))-(\pi x)(1+o(x))}{x\sin(\pi x)}=\frac{o(x^2)}{x\sin(\pi x)}\sim\frac{o(x^2)}{\pi x^2}\to0.$$
4.
$$\begin{aligned}&|S(x)-S(x_0)|\\
=&\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x_0+n}\right)+\left(\frac{1}{x-n}-\frac{1}{x_0-n}\right)\right|=|x-x_0|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x+n)(x_0+n)}+\frac{1}{(n-x)(n-x_0)}\right)\\
=&|x-x_0|\times\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)(x_0+n)}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)(n-x_0)}+\frac{1}{(1-x)(1-x_0)}\right)\\
\leqslant&|x-x_0|\left(\frac{1}{(1-x)(1-x_0)}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)\qquad\text{car}(x+n)(x_0+n)\geqslant n^2\text{ et }(n-x)(n-x_0)\geqslant(n-1)^2.\end{aligned}$$
5. Pour $x_0\in[0,1[$ fixé, la question 4 donne $\lim\limits_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)$ *i.e.* S est continue sur $[0,1[$.
Comme $I-V$ est continue sur $]0,1[$ et converge vers 0 en 0^+, par somme on en déduit que $S+I-V$ est continue sur $]0,1[$ et converge vers 0 en 0^+.
Or, sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a $S+I-V=U+V$, avec U et V 1-périodiques.
Donc $S+I-V$ est continue sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ et converge vers 0 en n^+, pour tout $n\in\mathbb{Z}$.
De plus $U+V$ est impaire car U et V le sont, donc $S+I-V$ converge vers 0 en n^- pour tout $n\in\mathbb{Z}$.
Donc $S+I-V$ se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$ en prenant $f(x)=0$, si $x\in\mathbb{Z}$.
6. (a) Comme f est continue sur $[0,1]$ elle a un maximum (resp. minimum) ; on étend sur $\mathbb{R}$ par périodicité.
(b) La relation $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=f(x_0)$ se montre par récurrence sur $n\geqslant0$; le cas $n=0$ est évident.
Si c'est vrai pour n, prendre $x=\dfrac{x_0}{2^n}$ dans (E) donne :
$$f(x_0)\underset{6a}{\geqslant}f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)\overset{(E)}{=}2f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\right)\underset{HR}{=}2f(x_0)-f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\right)\underset{6a}{\geqslant}2f(x_0)-f(x_0)=f(x_0).$$
Et de même avec x_1 en changeant le sens des inégalités.
(c) Comme f continue en 0, en faisant tendre n vers $+\infty$, on a $\max f=\min f=f(0)=0$, donc $f=0$.
Ceci donne le résultat voulu.

Exercice 2.4

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^k \ln x \, \mathrm{d}x$ et la calculer.
   On la notera J_k.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1-x) \ln x \, \mathrm{d}x$.
   On la notera I_n.
3. Montrer la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)^2}$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$ (on pourra utiliser un télescopage).
4. (a) Trouver une suite (u_n) d'éléments de $]0,1[$ qui tend vers 1 et telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n)^n = 0$.
   (b) Soit (u_n) une suite qui vérifie les conditions de la question précédente. Montrer que :
   $$|I_n| \leqslant (u_n)^n \int_0^{u_n} \ln(1-x) \ln x \, \mathrm{d}x + \int_{u_n}^1 \ln(1-x) \ln x \, \mathrm{d}x.$$
   (c) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.
5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1[,\ \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, \mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left| I_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{J_k}{k} \right| \leqslant I_n$.
6. Calculer I_0.

Solution de l'exercice 2.4

1. La fonction $x \mapsto x^k \ln x$ est continue sur $]0,1]$. Par intégration par parties avec $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, $v'(x) = x^k$, $v(x) = \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ (u, v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$), on a :
$$\int_X^1 x^k \ln x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x \right]_X^1 - \int_X^1 \frac{x^k}{k+1} \, \mathrm{d}x = -\frac{X^{k+1}}{k+1} \ln X - \frac{1 - X^{k+1}}{(k+1)^2} \underset{X \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{(k+1)^2},$$
par croissances comparées. Donc $\boxed{J_k = -\dfrac{1}{(k+1)^2}.}$

2. La fonction $x \mapsto x^n \ln x \ln(1-x)$ est continue sur $]0,1[$; l'intégrale I_n est faussement impropre car :
   - en 0, on a : $x^n \ln x \ln(1-x) \underset{x \to 0}{\sim} -x^{n+1} \ln x \to 0$.
   - en 1, on a : $x^n \ln x \ln(1-x) \underset{x \to 1}{\sim} (x-1) \ln(1-x) \to 0$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{k(k+1)^2} = \dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)^2} = \dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)^2} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$.
Donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + 1 = 1 - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \boxed{-\frac{\pi^2}{6} + 2.}$

4. (a) On peut prendre, par exemple, $u_n = \exp\left(-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

   (b) On a $|I_n| = I_n$, puis on utilise la relation de Chasles, puis la croissance de l'intégration car :
$$x^n \ln x \ln(1-x) \leqslant u_n^n \ln x \ln(1-x) \text{ sur } [0, u_n] \qquad \text{et} \qquad x^n \ln x \ln(1-x) \leqslant \ln x \ln(1-x) \text{ sur } [u_n, 1].$$

   (c) Comme l'intégrale I_0 converge (cf. question 2), on a :
$$\lim_{n \to +\infty} \int_{u_n}^{1} \ln x \ln(1-x) \, \mathrm{d}x = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \int_0^{u_n} \ln x \ln(1-x) \, \mathrm{d}x = I_0.$$
Donc, d'après la question précédente, par théorème d'encadrement, on a : $\lim(I_n) = 0$.

5. (a) On intègre sur $[0, x]$ ($x \in [0, 1[$) la relation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1 - t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$.

   (b) Pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $t \in [0, x]$, on a : $0 \leqslant \dfrac{t^n}{1-t} \leqslant \dfrac{x^n}{1-t}$.
Donc : $\displaystyle\left| \ln(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \right| = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{1-t} \, \mathrm{d}t = -x^n \ln(1-x)$.
En multipliant par $-\ln x$ et en intégrant sur $]0, 1]$, par croissance de l'intégration (où tout converge par théorème de comparaison), on a : $\displaystyle\int_0^1 \left| \ln(1-x) \ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k \ln x}{k} \right| \mathrm{d}x \leqslant I_n$.
Donc, par inégalité triangulaire pour les intégrales, on a :
$$\left| I_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{J_k}{k} \right| = \left| \int_0^1 \ln(1-x) \ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k \ln x}{k} \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^1 \left| \ln(1-x) \ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k \ln x}{k} \right| \mathrm{d}x \leqslant I_n.$$

6. D'après les questions précédentes, par théorème d'encadrement, on a :
$$I_0 = -\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{J_k}{k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2.5

1. Soit a et b deux réels distincts fixés et $m \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^m$ par :

$$f(x_1, \cdots, x_m) = (a-b)^2 + \sum_{i=1}^{m}(x_i - a)^2 + \sum_{i=1}^{m}(x_i - b)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m}(x_i - x_j)^2.$$

   Justifier le fait que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^m$. Déterminer son gradient en tout point de $\mathbb{R}^m$.

2. Pour tout point $y \in \mathbb{R}^m$, le réel $\|y\|$ désignera la norme euclidienne canonique de y.
   (a) Notons u (resp. v) le point de $\mathbb{R}^m$ dont toutes les coordonnées sont égales à a (resp. à b). Pour tout point x de $\mathbb{R}^m$, montrer que

$$f(x) \geqslant \|x-u\|^2 + \|x-v\|^2 \geqslant (\|x\| - \|u\|)^2 + (\|x\| - \|v\|)^2 .$$

   (b) En déduire qu'il existe un réel strictement positif R tel que $f(x) > f(0)$ pour tout point x de $\mathbb{R}^m$ tel que $\|x\| > R$.
   (c) Prouver que :

$$\inf_{\|x\| \leqslant R} f(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^m} f(x).$$

   On commencera par justifier l'existence de ces deux bornes inférieures.
   (d) En déduire que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^m$ qui est atteint.
   (e) Montrer qu'il existe un unique point de $\mathbb{R}^m$ où ce minimum global est atteint et calculer ce minimum.

3. Soit $n \geqslant 3$. On considère n réels $y_1, \cdots, y_n$.
   (a) Justifier l'existence de deux entiers k_0 et k_1 tels que :

$$|y_{k_0} - y_{k_1}| = \sup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |y_i - y_j|.$$

   (b) En utilisant la question 2, prouver l'inégalité suivante :

$$\max_{1 \leqslant k < l \leqslant n} |y_k - y_l|^2 \leqslant \frac{2}{n} \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (y_k - y_l)^2.$$

   (c) Étudier les cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Solution de l'exercice 2.5

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^m$ car polynomiale. Soit $k \in \{1, \cdots, m\}$; en isolant x_k dans la somme double, il vient :

$$\begin{aligned}
\partial_k(f) &= 2(x_k - a) + 2(x_k - b) + 2\sum_{i=1}^{k-1}(x_k - x_i) - 2\sum_{j=k+1}^{m}(x_j - x_k) \\
&= 2\left[[2x_k - (a+b)] + \sum_{i=1}^{m}(x_k - x_i)\right] \\
&= 2\left[(m+2)x_k - (a+b) - \sum_{i=1}^{m} x_i\right].
\end{aligned}$$

Ce qui fournit les composantes du gradient de f.

2. (a) La première inégalité découle du fait que f est la somme de $\|x-u\|^2 + \|x-v\|^2$ et de termes positifs. La deuxième se ramène après un développement à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (on peut aussi utiliser l'inégalité triangulaire inverse).

   (b) On pose $g(||x||) = (\|x\| - \|u\|)^2 + (\|x\| - \|v\|)^2$. Comme $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} g(||x||) = +\infty$, on voit qu'il existe bien un réel strictement positif R tel que $f(x) > f(0)$ pour tout point x de $\mathbb{R}^m$ vérifiant $\|x\| > R$.

   (c) Comme f est minorée par 0, les deux bornes inférieures existent. Avec la question précédente, si $\|x\| > R$ on a $f(x) > f(0) \geqslant \inf\limits_{\|x\| \leqslant R} f(x)$, par suite $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^m} f(x) \geqslant \inf\limits_{\|x\| \leqslant R} f(x)$, d'où l'égalité.

   (d) La fonction f est continue sur la boule unité qui est fermée et bornée ; d'après le cours elle admet un minimum global sur cette boule. Celui-ci est aussi un minimum global sur $\mathbb{R}^m$ d'après la question précédente.

   (e) Soit x un point de $\mathbb{R}^m$ où ce minimum global est atteint. Le cours nous dit que le gradient de f doit s'annuler en ce point. Pour tout $k \in \{1, \cdots, m\}$, on a donc $x_k = 1/(m+2)[(a+b) + \sum\limits_{i=1}^{m} x_i] = t$ (indépendant de k). En remplaçant x_i par t dans la deuxième égalité, on obtient $t = (a+b)/2$. Il s'ensuit que f atteint son minimum global en un unique point $x = ((a+b)/2, \cdots, (a+b)/2)$ et que ce dernier vaut

$$f\left((a+b)/2, \cdots, (a+b)/2\right) = (a-b)^2 + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2 + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{m}{2} + 1\right)(a-b)^2.$$

3. Soit $n \geqslant 3$. On considère n réels $y_1, \cdots, y_n$.

   (a) On prend la borne supérieure pour un ensemble fini, c'est donc un maximum qui est atteint pour les composantes correspondant à deux entiers k_0 et k_1 de $\{1, \cdots, n\}$.

   (b) On pose $a = y_{k_0}$, $b = y_{k_1}$, $m = n-2$ et $x = (x_1, \cdots, x_m)$ est construit avec les composantes de y_i restantes ($i \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{k_0, k_1\}$) rangées dans le même ordre (si on veut). Si $a = b$, il n'y a rien à démontrer car on a 0 des deux cotés de l'inégalité. Sinon, on observe alors que $\sum\limits_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (y_k - y_l)^2 = f(x)$ et il suffit alors d'utiliser la question 2.(e).

   (c) Comme on l'a remarqué dans la question précédente, on a un premier cas d'égalité lorsque toutes les composantes sont égales. Avec 2.(e), le deuxième correspond obligatoirement au cas où il existe un point y ayant deux composantes distinctes y_{k_0} et y_{k_1} avec $|y_{k_0} - y_{k_1}| = \max\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |y_i - y_j|$ et où toutes les autres composantes sont égales à $(y_{k_0} + y_{k_1})/2$.

Exercice 2.6

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On note I le segment $[a, b]$. On considère une fonction f continue sur I et à valeurs dans $[0, 1]$ et une fonction g croissante et continue sur I.

1. Pour $x \in I$, on pose :

$$\varphi(x) = \int_x^b f(t)dt \text{ et } \psi(x) = \int_{b-\varphi(x)}^b g(t)dt - \int_x^b f(t)g(t)dt.$$

   (a) Vérifier que φ et ψ sont bien définies.

   (b) Justifier la dérivabilité de φ et donner sa dérivée.

   (c) Montrer que ψ est dérivable et déterminer sa dérivée.

   (d) Étudier les variations de ψ.

   (e) En déduire que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant \int_{b-\varphi(a)}^b g(t)dt.$$

2. On considère une fonction h qui est croissante et continue sur $[0, 1]$ et qui prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 (h(t))^n dt.$$

   (a) Vérifier que u_n est bien définie et montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est monotone.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$.

   (c) À l'aide de la question 1, prouver que :

$$\ell = \int_{1-\ell}^1 h(t)dt.$$

   (d) Montrer que la fonction h est constante sur $[1 - \ell, 1]$. Qu'en déduit-on si on suppose que h est strictement croissante sur $[0, 1]$?

3. On considère une fonction h qui est strictement croissante et continue sur $[0, 1]$ et qui prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Justifier l'existence de l'espérance $E(h(X)^n)$ pour $n \geqslant 1$. Que peut-on dire de la suite de terme général $E(h(X)^n)$?

Solution de l'exercice 2.6

1. (a) Comme $x \in I$ et f est continue, il est clair que φ est bien définie. Compte tenu du fait que les intégrandes sont des fonctions continues sur I, pour la fonction ψ il suffit de vérifier que $b-\varphi(x) \in I$. La fonction f continue sur I et à valeurs dans $[0,1]$; par croissance de l'intégrale on en déduit que $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant b-x \leqslant b-a$. Par suite, on a bien $a \leqslant b-\varphi(x) \leqslant b$.

   (b) Soit F une primitive de f sur I. On a alors $\varphi(x) = F(b) - F(x)$, ce qui montre que φ est dérivable et que $\varphi'(x) = -F'(x) = -f(x)$.

   (c) Soit G (resp. L) une primitive de la fonction continue g (resp. fg). On a $\psi(x) = G(b) - G(b - \varphi(x)) - L(b) + L(x)$. Par somme et composition, on voit que ψ est dérivable et que $\psi'(x) = -(-\varphi'(x))G'(b-\varphi(x)) + L'(x) = -f(x)g(b-\varphi(x)) + f(x)g(x) = f(x)\,[g(x) - g(b-\varphi(x))]$.

   (d) On a vu en 1. que $\varphi(x) \leqslant b - x$; on a donc $x \leqslant b - \varphi(x)$. Or, la fonction f est positive et g est croissante ; il en résulte que $\psi'(x) \leqslant 0$. La fonction ψ et donc décroissante.

   (e) La décroissance de ψ sur I entraîne que $\psi(b) = 0 \leqslant \psi(a)$, ce qui donne exactement l'inégalité demandée.

2. (a) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie car la fonction h^n est continue (par composition). Comme h est à valeur dans $[0,1]$, on a $0 \leqslant h(t)^{n+1} \leqslant h(t)^n \leqslant 1$ pour tout $t \in I = [0,1]$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

   (b) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et positive , elle converge donc vers une limite $\ell \in [0,1]$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in I = [0,1]$ on pose $f(t) = h(t)^n$ et $g(t) = h(t)$. Les hypothèse de la question 1 sont vérifiées, on a donc :

   $$u_{n+1} \leqslant \int_{1-u_n}^{1} h(t)dt.$$

   Par ailleurs, comme $h(t) \leqslant 1$, on a : $\int_{1-u_n}^{1} h(t)dt \leqslant \int_{1-u_n}^{1} dt = u_n$.
   Alors un passage à la limite dans ces deux inégalité larges quand n tend vers $+\infty$ fournit l'égalité demandée.

   (d) On a donc :

   $$\int_{1-\ell}^{1} (1-h(t))dt = l - \int_{1-\ell}^{1} h(t)dt = 0.$$

   L'intégrande étant une fonction continue et positive, elle doit donc être nulle sur $[1-\ell, 1]$. Par suite, la fonction h est constante et égale à 1 sur $[1-l, 1]$. Le fait que h est strictement croissante sur $[0,1]$ force ℓ à être nul, et par conséquent la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ décroît vers 0 dans ce cas.

3. Comme $0 \leqslant h(t)^n \leqslant 1$ pour tout $t \in [0,1]$, l'existence de l'espérance $E(h(X)^n)$ est donnée par cette domination. Le théorème de transfert implique l'égalité :

   $$E(h(X)^n) = \int_0^1 h(t)^n dt.$$

   Comme h est strictement croissante, continue sur $[0,1]$ et prend ses valeurs dans $[0,1]$, la question précédente nous dit que la suite de terme général $E(h(X)^n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2.7

Soit a et b deux réels positifs. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence (R) suivante :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ et pour tout entier } n \geqslant 0 : u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \qquad (R).$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $v_n \leqslant u_n$, $\;u_{n+1} \leqslant u_n$ et $v_n \leqslant v_{n+1}$.

   (b) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite qui est de plus positive. Cette limite sera **notée $M(a,b)$ dans le reste de l'exercice.** La fonction M est donc définie sur

   $$I = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant 0\}$$

   et à tout couple de conditions initiales $(u_0 = a, v_0 = b) \in I$, elle associe la limite $M(a,b)$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la relation de récurrence (R).
3. (a) Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$ pour tout réel $a \geqslant 0$.

   (b) Montrer que pour $(a,b) \in I$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, on a :

   $$M(ta, tb) = t\, M(a,b).$$

   (c) Prouver que pour $(a,b) \in I$, on a :

   $$M\Big(\frac{a+b}{2}, \sqrt{a\,b}\Big) = M(a,b).$$

   (d) Démontrer que pour $(a,b) \in I$, on a :

   $$M(a,b) = M(b,a).$$
4. Écrire une fonction Scilab qui prend en entrée deux réels positifs a et b et un réel strictement positif `eps` et qui renvoie une valeur approchée `M` de $M(a,b)$ à `eps` près, autrement dit `M` doit satisfaire $|M(a,b) - \mathtt{M}| \leqslant \mathtt{eps}$.
5. Soit $(a,b) \in I$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par la relation de récurrence (R). Pour tout entier n positif, on pose $c_n = u_n - v_n$. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a :

   $$0 \leqslant c_{n+1} \leqslant \frac{c_n^2}{8\sqrt{a\,b}}$$

Solution de l'exercice 2.7

1. Pour que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient bien définies par la relation de récurrence (R), il faut et il suffit que le produit u_nv_n soit positif pour tout entier $n\geqslant 0$. Montrons par récurrence que : "$P(n)$: $u_n\geqslant 0$ et $v_n\geqslant 0$" pour tout entier $n\geqslant 0$, ce qui impliquera que $u_nv_n\geqslant 0$. $P(0)$ est vraie car $u_0=a\geqslant 0$ et $v_0=b\geqslant 0$. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n\geqslant 0$, on a alors $u_{n+1}=(u_n+v_n)/2\geqslant 0$ et $u_nv_n\geqslant 0$, ainsi $v_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}\geqslant 0$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
2. (a) Soit $n\geqslant 0$. Comme u_n et v_n sont positifs, il s'ensuit, $0\leqslant(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n})^2=u_n+v_n-2\sqrt{u_nv_n}$ et il vient $\sqrt{u_nv_n}\leqslant(u_n+v_n)/2$. On en déduit que $v_{n+1}\leqslant u_{n+1}$. Ainsi, on a $v_n\leqslant u_n$ pour $n\geqslant 1$. Soit $n\geqslant 1$, $u_{n+1}=(u_n+v_n)/2\leqslant(u_n+u_n)/2=u_n$ (car $v_n\leqslant u_n$). Enfin, par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}^+$, $v_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}=\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}\geqslant\sqrt{v_n}\sqrt{v_n}=v_n$ (car $v_n\leqslant u_n$).

   (b) D'après les questions 1) et 2)(a), on a pour tout $n\geqslant 1$, $0\leqslant v_n\leqslant v_{n+1}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$. On en déduit d'une part que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle est minorée par 0 donc elle converge vers un réel $l\geqslant 0$. D'autre part, la suite (v_n) est croissante, positive et majorée par u_1 à partir du rang 1 donc elle converge vers un réel $\tilde{l}\geqslant 0$. Enfin, par passage à la limite dans la relation $u_{n+1}=(u_n+v_n)/2$, il découle que $l=(l+\tilde{l})/2$ et donc que $l=\tilde{l}=M(a,b)\geqslant 0$.
3. (a) Soit $a\geqslant 0$. Si $b=a$, on montre par une récurrence immédiate que $u_n=v_n=a$ pour tout $n\geqslant 1$. Ainsi par passage à la limite, on a $M(a,a)=a$. Maintenant si $b=0$, on a par récurrence immédiate $v_n=0$ pour tout $n\geqslant 0$. Ainsi par passage à la limite, on obtient $M(a,0)=0$.

   (b) Soit $(a,b)\in I$. On appelle $(\tilde{u}_n)$ et $(\tilde{v}_n)$ les suites associées aux conditions initiales $\tilde{u}_0=t\,a\geqslant 0$ et $\tilde{v}_0=t\,b\geqslant 0$ (car $t\geqslant 0$) par (R). On peut alors les comparer à (u_n) et (v_n) qui ont pour conditions initiales $u_0=a$ et $v_0=b$. Montrons par récurrence que "$P(n)$: $\tilde{u}_n=t\,u_n$ et $\tilde{v}_n=t\,v_n$" pour $n\geqslant 0$. $P(0)$ est vraie par définition des condtions initiales. Supposons $P(n)$ pour un entier $n\geqslant 0$. On a alors $\tilde{u}_{n+1}=(\tilde{u}_n+\tilde{v}_n)/2=t(u_n+v_n)/2$ (d'après $P(n)$) et ainsi $\tilde{u}_{n+1}=tu_{n+1}$. On a aussi en utilisant $P(n)$, (R) et le fait que $t\geqslant 0$: $\tilde{v}_{n+1}=\sqrt{\tilde{u}_n\,\tilde{v}_n}=\sqrt{t^2u_n\,v_n}=t\sqrt{u_n\,v_n}=tv_{n+1}$. Donc $P(n+1)$ est vraie. En passant à la limite sur les relations $\tilde{u}_n=t\,u_n$ et $\tilde{v}_n=t\,v_n$, il vient $M(ta,tb)=t\,M(a,b)$.

   (c) Soit $(a,b)\in I$. On appelle $(\tilde{u}_n)$ et $(\tilde{v}_n)$ les suites associées aux conditions initiales $\tilde{u}_0=(a+b)/2=u_1\geqslant 0$ et $\tilde{v}_0=\sqrt{a\,b}=v_1\geqslant 0$. Par récurrence immédiate, on a $\tilde{u}_n=u_{n+1}$ et $\tilde{v}_n=v_{n+1}$ et donc par passage à la limite, il vient : $M((a+b)/2,\sqrt{a\,b})=M(a,b)$.

   (d) D'aprés la question 3)(c), on a $M(b,a)=M\left(\frac{b+a}{2},\sqrt{b\,a}\right)=M(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab})=M(a,b)$.
4. D'après 2) (a), (u_n) et (v_n) sont respectivement décroissante et croissante à partir du rang 1 et $v_n\leqslant u_n$ pour $n\geqslant 1$. Il vient donc $v_n\leqslant M(a,b)\leqslant u_n$ pour $n\geqslant 1$. On conclut que $|M(a,b)-v_n|\leqslant u_n-v_n$. Cette dernière inégalité est utilisée comme critère d'arrêt dans la procédure.

```
function M=moyennearithmgeo(a,b,eps)
    u=(a+b)/2;
    v=sqrt(a*b);\smallskip
    while(u-v> eps)
        aux1=u;
        aux2=v;
        u=(aux1+aux2)/2;
        v=sqrt(aux1 *aux2);
    end
    M=v;
endfunction
```

5. D'après la question 2)(a), on a $v_{n+1}\leqslant u_{n+1}$ pour tout n positif. Donc, on a $0\leqslant c_{n+1}$. De plus, on a d'après la question 2)(a), $u_{n+1}+v_{n+1}\geqslant 2v_{n+1}\geqslant 2v_1=2\sqrt{ab}>0$ (car (v_n) est décroissante à partir du rang 1 et $a,b>0$). Ainsi, on obtient :

$$c_{n+1}=\left(\frac{u_n+v_n}{2}-\sqrt{u_nv_n}\right)\frac{\left(\frac{u_n+v_n}{2}+\sqrt{u_nv_n}\right)}{u_{n+1}+v_{n+1}}\leqslant\frac{\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)^2-u_nv_n}{2\sqrt{a\,b}}\leqslant\frac{\frac{1}{4}(u_n^2+v_n^2)-\frac{1}{2}u_nv_n}{2\sqrt{ab}}\leqslant\frac{c_n^2}{8\sqrt{a\,b}}.$$

Exercice 2.8

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On pose, pour tout x réel :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{(x-t)} g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour tout x réel, soit φ_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ \varphi_x(\lambda) = \int_x^{+\infty} \left(g(t) - \lambda\,\mathrm{e}^{\,(x-t)}\right)^2 \mathrm{d}t\,.$$

En considérant le signe de la fonction φ_x sur $\mathbb{R}$, établir l'inégalité :

$$\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{(x-t)} g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{2(x-t)}\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_x^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout x réel, $f'(x) = f(x) - g(x)$.
4. (a) En utilisant la question précédente, montrer que pour tout a réel et tout $x \geqslant a$, on a :

$$\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \frac{f^2(x)}{2}$$

   (b) En déduire l'inégalité :

$$\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t + f^2(x)$$

   (c) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution de l'exercice 2.8

1. Les fonctions $t \mapsto e^{x-t}$ et g sont de carré intégrable sur $[x, +\infty[$ ($\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt$ converge), donc leur produit est intégrable d'après l'inégalité $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

2. (a) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (la fonction φ_x est positive pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et est un trinôme en λ, donc, le discriminant est négatif ou nul) on a :
$$|f(x)| \leqslant \left(\int_x^{+\infty} e^{2(x-t)}dt\right)^{1/2} \left(\int_x^{+\infty} g^2(t)dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_x^{+\infty} g^2(t)dt\right)^{1/2}$$
Comme g est de carré intégrable, alors $\int_x^{+\infty} g^2(t)dt \to 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (b) On remarque que, pour tout x réel, on a : $f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}g(t)dt$. De plus, $\int_x^{+\infty} e^{-t}g(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}g(t)dt - \int_0^x e^{-t}g(t)dt$. Ainsi, la fonction f est dérivable et, en utilisant la dérivée d'un produit, on obtient :
$f'(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}g(t)dt - e^x \left(e^{-x}g(x)\right) = f(x) - g(x)$.

3. (a) Les fonctions f et f' étant continues, en multipliant la relation précédente par f et en intégrant sur le segment $[a, x]$, il vient :
$$\begin{aligned}\int_a^x f^2(t)dt - \int_a^x f(t)g(t)dt = \int_a^x f(t)f'(t)dt = \left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_a^x = \frac{f^2(x)}{2} - \frac{f^2(a)}{2} \leqslant \frac{f^2(x)}{2}\\ \Rightarrow \int_a^x f^2(t)dt \leqslant \int_a^x f(t)g(t)dt + \frac{f^2(x)}{2}\\ \Rightarrow \int_a^x f^2(t)dt \leqslant \left(\int_a^x f^2(t)dt\right)^{1/2} \left(\int_a^x g^2(t)dt\right)^{1/2} + \frac{f^2(x)}{2}\end{aligned}$$

   (b) Rappelons que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$. Ainsi, en utilisant l'inégalité précédente, on a :
$$\begin{aligned}\int_a^x f^2(t)dt - \frac{f^2(x)}{2} &\leqslant \left(\int_a^x f^2(t)dt\right)^{1/2} \left(\int_a^x g^2(t)dt\right)^{1/2}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[\int_a^x f^2(t)dt + \int_a^x g^2(t)dt\right]\\ \frac{1}{2}\int_a^x f^2(t)dt &\leqslant \frac{1}{2}\int_a^x g^2(t)dt + \frac{f^2(x)}{2}\end{aligned}$$
Ainsi, $\int_a^x f^2(t)dt \leqslant \int_a^x g^2(t)dt + f^2(x)$.

   (c) En fixant a dans l'inégalité précédente, pour tout $x \geqslant 0$, on a : $\int_a^x f^2(t)dt \leqslant \int_a^x g^2(t)dt + f^2(x)$.
Comme g est de carré intégrable et $\lim_{+\infty} f = 0$, alors $x \mapsto \int_0^x f^2(t)dt$ est bornée donc convergente et, en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$ dans l'inégalité, on obtient : $\int_a^{+\infty} f^2(t)dt \leqslant \int_a^{+\infty} g^2(t)dt$.
Il reste à faire tendre a vers $-\infty$ pour obtenir le résultat demandé.

Exercice 2.9

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. On dit que le produit $\prod_n u_n$ converge si la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$ admet une limite non nulle ℓ, et l'on note alors :

$$\ell = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \cdots$$

1. Dans cette question, on suppose que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :
   (a) le produit $\prod_n (1+u_n)$ converge ;
   (b) la série $\sum_n \ln(1+u_n)$ converge ;
   (c) la série $\sum_n u_n$ converge.
2. Dans cette question, la suite $(u_n)_n$ est à valeurs strictement supérieures à -1 et est telle que la série $\sum_n u_n^2$ converge.
   (a) Montrer qu'il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que : $\forall n \geqslant N,\ |\ln(1+u_n) - u_n| < Cu_n^2$.
   (b) En déduire que le produit $\prod_n (1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_n u_n$ converge.
3. Dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ avec $x \in]0,\pi[$ et $v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$.
   (a) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = v_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{\sin x}{2^n}$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.
   (b) En déduire l'égalité :
   $$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \cdots$$

Solution de l'exercice 2.9

1. Par stricte positivité de u_n et par continuité de la fonction logarithme :

   a) $\iff$ c) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}(1+u_k)=\lambda\neq 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln(1+u_k)=\ln\lambda$.

   c) $\Rightarrow$ b) : comme $u_n>0$, $\ln(1+u_n)\leqslant u_n$.

   b) $\Rightarrow$ c) : Si $\sum\ln(1+u_n)$ converge, alors $\ln(1+u_n)\to 0$, donc $u_n\to 0$. Donc $\ln(1+u_n)\sim u_n$.

2. (a) Comme $\sum u_n^2$ converge, la suite (u_n) tend vers 0.

   Par ailleurs le développement limité de $\ln(x+1)$ à l'ordre 2 donne : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, donc le quotient est borné (par $C>0$) au voisinage de 0.
   Autre idée : majorer le reste intégrale de la formule de Taylor pour $\ln(1+x)$.

   (b) Donc, par théorème de comparaison la série $\sum\ln(1+u_n)-u_n$ converge absolument, donc converge. Comme la différence des deux séries $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n\ln(1+u_n)$ converge, elles sont de même nature, et cette dernière est de même nature que le produit $\prod\limits_n(1+u_n)$ ($u_n>0$ ne sert pas là dans Q1).

3. (a) Comme $\sin x=2\sin(x/2)\cos(x/2)$, il vient, en posant $v_n=\prod\limits_{k=1}^{n}u_k$:

$$\begin{aligned}
w_n=v_n\times\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)&=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\times\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\\
&=\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\times\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\\
&=\frac{1}{2}w_{n-1}
\end{aligned}$$

   La suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, de premier terme $w_1=\cos(x/2)\sin(x/2)=\dfrac{1}{2}\sin x$ et

$$w_n=\frac{1}{2^{n-1}}w_1=\frac{\sin x}{2^n}\quad\text{donc}\quad v_n=\frac{\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\sin x}{x}$$

   (b) On doit montrer que : $\dfrac{2}{\pi}=x_1\times x_2\times x_3\times\cdots$,
   où la suite (x_k) est définie par $x_{k+1}=\alpha_{k+1}/2$ avec la suite (α_k) définie par récurrence par $\alpha_1=\sqrt{2}$ et $\alpha_{k+1}=\sqrt{2+\alpha_k}$.
   Or par récurrence sur $k\geqslant 1$ on obtient que $x_k=\cos(\pi/2^k)$. En effet l'initialisation est évidente et si c'est vrai à l'ordre k, alors, comme $\cos(2x)=2\cos^2 x-1$, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1}^2=2+\alpha_k=2(1+\cos(\pi/2^k))=4\cos^2(\pi/2^{k+1})&\Longrightarrow\alpha_{k+1}=2\cos(\pi/2^{k+1})\\
&\iff x_{k+1}=\cos(\pi/2^{k+1}).
\end{aligned}$$

   Le résultat voulu s'obtient alors avec la question précédente en prenant $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2.10

Dans tout l'exercice, α est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$ est convergente. On pose alors :

$$\forall\, x > 0,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\big(-xt^\alpha\big)dt$ est convergente. On pose alors :

$$\forall\, x > 0,\ I(\alpha, x) = \int_0^{+\infty} \exp\big(-xt^\alpha\big)dt$$

   (b) À l'aide du changement de variable $u = xt^\alpha$ dont on justifiera la validité, montrer que

$$I(\alpha, x) = C\, x^{-\frac{1}{\alpha}}$$

   où C est une constante strictement positive que l'on déterminera en fonction de α.

2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, la série de terme général $\exp\big(-xn^\alpha\big)$ est convergente. On pose alors :

$$\forall\, x > 0,\ S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\big(-xn^\alpha\big)$$

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} S_\alpha(x)$.

3. (a) Établir pour tout $x > 0$, l'encadrement : $S_\alpha(x) - 1 \leqslant I(\alpha, x) \leqslant S_\alpha(x)$.

   (b) Montrer qu'au voisinage de 0, on a : $S_\alpha(x) \sim I(\alpha, x)$.

Solution de l'exercice 2.10

1. (a) Soit $\alpha > 0$ et $x > 0$. La fonction $t \to \mathrm{e}^{-xt^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   Au voisinage de $+\infty$, $\lim_{t\to+\infty} t^2\mathrm{e}^{-xt^\alpha} = 0$.

   (b) Le changement de variable $u = xt^\alpha$ de classe C^1, str. croissant, bijectif de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, donne :

$$I(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha x^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} u^{1/\alpha-1}\mathrm{e}^{-u}du = \frac{1}{\alpha x^{1/\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Longrightarrow C = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

2. (a) Comme précédemment, comme $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} n^2\mathrm{e}^{-xn^\alpha} = 0$.

   (b) Comme S_α est croissante, la limite existe est finie au vaut $+\infty$. Par l'absurde, si elle est finie, comme $\mathrm{e}^{-xn^\alpha} > 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_\alpha(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{-xn^\alpha} \Rightarrow \lim_{x\to 0} S_\alpha(x) \geqslant N + 1$$

   Comme c'est vrai pour tout N, on en déduit $\lim_{x\to 0} S_\alpha(x) = +\infty$, ce qui est absurde. Donc $\lim_{x\to 0} S_\alpha(x) = +\infty$.

3. (a) On utilise une comparaison série/intégrale avec $f_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-xt^\alpha}$.
   La fonction f est décroissante de $\mathbb{R}^+$ sur $]0, 1]$.

   (b) Il vient (classique) :

$$\forall\, x > 0,\ S_\alpha(x) - 1 \leqslant I(\alpha, x) \leqslant S_\alpha(x) \Longrightarrow S_\alpha(x) \sim \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^\alpha}\, dt = I(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha x^{1/\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Exercice 2.11

Dans cet exercice, α est un réel de $]0,1]$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$$

1. Montrer que $S_n(\alpha) = \dfrac{1}{n^{2\alpha-1}} \times \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k/n)^\alpha (1-k/n)^\alpha}$.
2. Dans cette question $\alpha = 1$.
   (a) Montrer que $\dfrac{1}{k(n-k)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n-k}\right)$.
   (b) En déduire un équivalent de $S_n(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   On suppose désormais que $\alpha \in]0,1[$.
3. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha (1-t)^\alpha}$ est convergente.
   (b) Étudier les variations de $f : x \to \dfrac{1}{x^\alpha (1-x)^\alpha}$ sur $]0,1[$.
4. En l'encadrant à l'aide d'intégrales, montrer que $S_n(\alpha)$ est équivalent à $\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}} \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha (1-t)^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 2.11

1. Question évidente.
2. (a) La décomposition est donnée : il suffit de la vérifier.
   (b) On a alors :

$$S_n(1) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \sim \frac{2\ln n}{n}$$

3. (a) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^\alpha}$ est convergente, par critère de Riemann en 0 et en 1.
   (b) La dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{\alpha(2x-1)}{(x(1-x))^{\alpha+1}}$ qui est du signe de $2x-1$. Elle est décroissante sur $]0,1/2]$, puis croissante sur $[1/2,1[$ et admet un minimum en $1/2$ qui vaut 4^α.
4. On effectue une comparaison série/intégrale sur chacun de ces intervalles. Pour plus de clarté, on suppose que n est pair (on n'aura pas à écrire des parties entières...) et on pose $n = 2p$.
   - Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, $k/n \leqslant t \leqslant (k+1)/n \Rightarrow f((k+1)/n) \leqslant f(t) \leqslant f(k/n)$ et

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f((k+1)/n)dt \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(k/n)dt$$

   soit,

$$\frac{1}{n}f((k+1)/n) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}f(k/n)$$

   On somme, et par la relation de Chasles, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p-1} f((k+1)/n) \leqslant \int_{1/n}^{1/2} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p-1} f(k/n)$$

   - Pour $k \in [\![p, 2p]\!]$, le même type de raisonnement donne :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=p}^{n-1} f(k/n) \leqslant \int_{1/2}^{1-1/n} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=p}^{n-1} f((k+1)/n)$$

   On somme ces inégalités, puis en réindexant, on obtient $S_n(\alpha)$ équivalent à $\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^\alpha}$.

Exercice 2.12

Soit $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x}$.

1. (a) Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes telle que pour tout $n \geqslant 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$.
   (on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n).
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, P_n est un polynôme unitaire de degré n dont les coefficients sont des entiers naturels.
2. Montrer que pour tout $x \in I$, on a : $2f'(x) = f^2(x) + 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.
   (a) Montrer que $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et que pour $n \geqslant 1$, on a :
   $$2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}$$
   (b) À l'aide d'une formule de Taylor, montrer que pour $x \in [0, \pi/2[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ converge.
   (c) On note $g(x)$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$; on admet que g est dérivable sur $[0, \pi/2[$ et que pour tout $x \in [0, \pi/2[$, on a $2g'(x) = g^2(x) + 1$.
   Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2[$, on a $f(x) = g(x)$.

Solution de l'exercice 2.12

1. (a) On obtient, pour $x \in I$: $f'(x) = \dfrac{1+\sin x}{(\cos x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{(\cos x)^3}$.
La fonction f est clairement de classe C^∞ sur I. La propriété à démontrer (existence d'un polynôme P_n) est vraie au rang 0 avec $P_0 = X + 1$ et, si elle est vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$, alors,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(1-\sin^2 x)P_n'(\sin x) + (n+1)\sin(x)P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$$

où P_{n+1} est le polynôme $P_{n+1} = (n+1)XP_n + (1-X^2)P_n'$. On a alors $P_0 = P_1 = X + 1$, $P_2 = X^2 + 2X + 1$.
Notons que l'unicité du polynôme P_n est immédiate par l'argument classique : un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

(b) La propriété à démontrer est vraie pour $n = 1$ (initialisation) et, si elle est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ donné, on peut écrire $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n = 1$ et $a_k \in \mathbb{N}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Par la relation de récurrence obtenue précédemment, on calcule alors :

$$P_{n+1} = X^{n+1} + 2a_{n-1}X^n + \sum_{k=1}^{n-1}\Big((n-k+2)a_{k-1} + (k+1)a_{k+1}\Big)X^k + a_1$$

Le polynôme P_{n+1} ainsi écrit est bien unitaire de degré $n+1$, à coefficients entiers naturels, ce qui achève la récurrence.

2. On a $1 + f(x)^2 = \dfrac{\cos^2 x + 1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{2 + 2\sin x}{\cos^2 x} = 2f'(x)$.

3. (a) On constate que $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, donc $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la formule de Leibniz,

$$2f^{(n+1)} = (2f')^{(n)} = (f^2+1)^{(n)} = (f^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}f^{(n-k)}$$

En évaluant en 0, cela donne $2\alpha_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_k\alpha_{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(b) Comme $\alpha_n = f^{(n)}(0)$, par la formule de Taylor avec reste intégral, pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \pi/2[$, on a : $f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha_n}{n!}x^n = \int_0^x \frac{(x-t)^N f^{(N+1)}(t)}{N!}\mathrm{d}t$.
Or, $f^{(N+1)}(t) = \dfrac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}}$ est positif car $\sin t \geqslant 0$ pour $t \in [0, \pi/2[$ et d'après la remarque, l'intégrande étant positive sur $[0, x]$ avec $x \geqslant 0$, le reste intégral est positif, d'où l'inégalité :
$\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, \pi/2[\qquad \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha_n}{n!}x^n \leqslant f(x)$.
Pour $x \in [0, \pi/2[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\alpha_n}{n!}x^n$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées ; elle est donc convergente.

(c) Pour $x \in I$, posons $\varphi(x) = \arctan\big(f(x)\big)$ et $\psi(x) = \arctan\big(g(x)\big)$. Les fonctions φ et ψ sont de classe C^1 sur I avec $\varphi' = \dfrac{f'}{1+f^2}$ et $\psi' = \dfrac{g'}{1+g^2}$. Les questions précédentes montrent que $\varphi' = \psi' = \dfrac{1}{2}$, donc $\varphi = \psi + C$ sur I, où C est une constante. Comme $\varphi(0) = \psi(0) = \pi/4$, la constante est nulle et $\varphi = \psi$. Comme $f(x) = \tan\big(\varphi(x)\big)$ et $g(x) = \tan\big(\psi(x)\big)$, on a $f = g$ sur I.

Exercice 2.13

1. Pour quelles valeurs de x réel l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}$ converge-t-elle ?

   On note alors $I(x)$ cette intégrale.
2. Calculer $I(1)$.

   On suppose désormais $x > 0$.
3. En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{x}{u}$, montrer que $I(x) = 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}$.
4. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x > 0,\ g(x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}}.$$

   (a) Montrer que g admet une limite en $+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

   (b) Montrer que pour tout $t \in [0, \sqrt{x}]$, on a : $\left|\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\right| \leqslant \dfrac{t^2}{1+t^2} \leqslant x$

   (c) À l'aide d'une majoration de $|I(x) - g(x)|$, montrer que lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, on a : $I(x) \sim g(x)$.

5.) Calculer la dérivée de $t \to \ln(t + \sqrt{x^2+t^2})$.
   En déduire un équivalent simple de $I(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Solution de l'exercice 2.13

(1) • Si $x \neq 0$, la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.

Au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) \sim \dfrac{1}{t^2}$ dont l'intégrale converge.

• Par contre, pour $x = 0$, $\varphi(t) \sim \dfrac{1}{t}$ (en $+\infty$) dont l'intégrale diverge.

Finalement, I est définie sur $\mathbf{R}^*$. Par parité, il suffira de l'étudier pour $x > 0$.

2. On a $I(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

3. On écrit :

$$I(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}$$

On effectue le changement de variable C^1 proposé. Il vient :

$$\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} = -\int_{\sqrt{x}}^{0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2/u^2}\sqrt{x^2+x^2/u^2}} \frac{x}{u^2} du = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{x^2+u^2}}$$

4. (a) Pour $t \geqslant 0$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \leqslant \dfrac{1}{x}$, d'où $0 \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

   (b) Pour $t > 0$, la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 0 donne :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\right| = \left|-\int_0^t \frac{u}{(1+u^2)^{3/2}} du\right| \leqslant \int_0^t \frac{|u|}{(1+u^2)^{3/2}} du \leqslant t^2 \leqslant x.$$

   On peut aussi multiplier par la quantité conjuguée ; pour tout $t \in [0, \sqrt{x}]$ on a :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\right| = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}(1+\sqrt{1+t^2})} \leqslant \frac{t^2}{1+t^2} \leqslant t^2 \leqslant x.$$

   (c) On fait la différence entre $I(x)$ et l'équivalent proposé. Il vient :

$$|I(x) - g(x)| \leqslant 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 1\right| dt \leqslant x g(x) = o\big(g(x)\big)$$

5. (a) Le calcul donne $\dfrac{d}{dt}(\ln(t + \sqrt{x^2+t^2})) = \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}$.

   (b) Donc, au voisinage de 0, on a :

$$I(x) \sim 2\ln\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^2+x}}{x}\right) \sim 2\ln\frac{2}{\sqrt{x}} \sim -\ln x$$

Exercice 2.14

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   On définit ainsi la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que : $\forall x \geqslant 1,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.
5. (a) Montrer que la fonction g définie sur $]0,1]$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en 0.

   (b) Montrer que $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ au voisinage de 0^+.

   (c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.

Solution de l'exercice 2.14

1. L'intégrand est continu et positif sur $[x, +\infty[$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$,
donc par critère de convergence, par négligeabilité, l'intégrale proposée converge.

2. La fonction f se prolonge par continuité en 0 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Comme tout est positif et que $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t} \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$, où $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, f ne peut être prolongée par continuité en 0.

3. Par la relation de Chasles, on a : $f(x) = f(1) - \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$.
Donc, par le théorème fondamental du calcul intégral, f est dérivable et :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x} < 0,$$

   ce qui montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Pour tout $x \geqslant 1$ et tout $t \geqslant x$, on a : $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t} \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2}$.
En intégrant sur $[x, +\infty[$ l'encadrement précédent (les intégrales convergent et les bornes sont dans le sens croissant), on obtient :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2} dt = \left[\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\ \right]_x^{+\infty} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

5. (a) On a $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t} \underset{t\to0^+}{\sim} t$, donc l'intégrale est faussement impropre.

   (b) Pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = f(1) + \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t = f(1) - \int_x^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = f(1) - g(x) - \ln x.$$

   En 0^+, comme ln est prépondérant sur $f(1) - g(x)$ qui converge, on a donc $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$.

   (c) Par intégration par parties, pour tout (a, A) tel que $0 < a < A$, on a :

$$\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x = Af(A) - af(a) + \int_a^A \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   D'après la question 4, par encadrement on a $\lim\limits_{A\to+\infty} Af(A) = 0$ et d'après la question 5.b), on a $\lim\limits_{a\to0^+} af(a) = 0$. Par suite :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{x=\frac{u}{\sqrt{2}}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 2.15

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute variable aléatoire Z définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prend n valeurs réelles distinctes $z_1, \ldots, z_n$ (*i.e.* $Z(\Omega) = \{z_1, \ldots, z_n\}$ et $p_k = P(Z = z_k) \neq 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$), on appelle entropie de Z, le nombre réel défini par :

$$H(Z) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k).$$

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in]0,1[^n$, on note $h_n(x) = h_n(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{k=1}^{n} x_k \ln(x_k)$.

1. Calculer l'entropie d'une variable aléatoire U qui suit une loi uniforme sur un ensemble $\{u_1, \ldots, u_n\}$.
2. Justifier que la fonction h_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0,1[^n$ et calculer en tout point $x \in]0,1[^n$, le gradient $\nabla(h_n)(x)$ et la matrice hessienne $\nabla^2(h_n)(x)$ de h_n.
3. Montrer que la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = 1$ n'est pas critique. Montrer que la condition nécessaire d'ordre 1 pour un extremum de la fonction h_n est vérifiée en un unique point critique x^* que l'on précisera.
4. Fixons $x \in]0,1[^n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 1$ et notons $u = x - x^*$.
   (a) Vérifier que, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $x^* + tu \in]0,1[^n$.
   On note alors ψ la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\psi(t) = h_n(x^* + tu)$.
   (b) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour ψ entre les points 0 et 1, montrer que h_n admet en x^* un maximum global sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = 1$.
   Ce maximum est-il atteint en d'autres points que x^* ?
5. Parmi les variables aléatoires prenant n valeurs (chacune avec une probabilité non nulle), quelles sont les lois de celles qui ont la plus grande entropie ?

Solution de l'exercice 2.15

1. On a $H(U) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \ln n$.

2. La fonction h_n est $\mathcal{C}^2$ comme somme de fonctions $\mathcal{C}^2$ et :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \partial_i(h_n) = -(\ln x_i) - 1 \quad \text{et} \quad \forall\,(i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \partial^2_{i,i}(h_n) = -\frac{1}{x_i},\ \partial^2_{i,j}(h_n) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Donc $\nabla(h_n)(x) = \big(-(\ln x_1) - 1, \ldots, -(\ln x_n) - 1\big)$ et $\nabla^2(h_n)(x) = \operatorname{diag}\left(-\frac{1}{x_1}, \ldots, -\frac{1}{x_n}\right)$.

3. Posons $g(x) = x_1 + \cdots + x_n$. Comme $\nabla g(x) = (1, \ldots, 1) \neq 0$, la contrainte $g(x) = 1$ n'est pas critique, donc pour que h_n admette un point critique sous la contrainte $g(x) = 1$, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla h_n(x) = \lambda \nabla g(x)$, soit :

$$-(\ln x_1) - 1 = \cdots = -(\ln x_n) - 1,$$

soit $x_1 = \cdots = x_n$. Comme $x_1 + \cdots + x_n = 1$, on en déduit $x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$ *i.e.* $x^* = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$.

4. (a) On a $x^* + tu = (1-t)x^* + tx = \big(tx_1 + (1-t)x_1^*, \ldots, tx_n + (1-t)x_n^*\big)$.
Comme $x_i^* = \frac{1}{n} \in]0,1[$, par somme d'encadrements (dont l'un au moins est strict car t et $1-t$ ne sont pas tous les deux nuls), on en déduit que $tx_i + (1-t)x_i^* \in]0,1[$.

(b) Puisque ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, entre 0 et 1 donne :

$$\psi(1) = \psi(0) + \psi'(0) + \int_0^1 (1-t)\psi''(t)\ \mathrm{d}t.$$

Les formules de dérivation directionnelle du programme d'ECS (dérivée de $t \mapsto h_n(x^* + tu)$ aux ordres 1 et 2) donnent :

$$\psi'(0) = \langle \nabla(h_n)(x^*) | u \rangle \quad \text{et } \psi''(t) = q_{x^*+tu}(u),$$

où q_{x^*+tu} est la forme quadratique associée à la matrice $\nabla^2(h_n)(x)$.
Or, comme $g(x) = 1$, on a :

$$\langle \nabla(h_n)(x^*) | u \rangle = \langle \lambda \nabla(g)(x^*) | u \rangle = u_1 + \cdots + u_n = (x_1 + \cdots + x_n) - (x_1^* + \cdots + x_n^*) = 1 - 1 = 0.$$

Donc la formule de Taylor se simplifie en :

$$h_n(x) = h_n(x^*) + \int_0^1 (1-t) q_{x^*+tu}(u)\ \mathrm{d}t \leqslant h_n(x^*),$$

car $\nabla^2(h_n)(x)$ est diagonale avec des coefficients diagonaux strictement négatifs, et donc $q_{x^*+tu}(u) \leqslant 0$. Ainsi, h_n admet en x^* un maximum global sous la contrainte $g(x) = 1$ (qui vaut $h_n(x^*) = \ln n$).

Il y a égalité $h_n(x) = h_n(x^*)$ si et seulement si l'intégrale est nulle. Comme il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue négative, cela n'est possible que si la fonction $t \mapsto (1-t)q_{x^*+tu}(u)$ est nulle, soit $q_{x^*+tu}(u) = 0$ pour tout $t \in [0,1[$. Or, $q_{x^*+tu}(u) < 0$ si $u \neq 0$ *i.e.* $x \neq x^*$, donc h_n atteint son maximum en x^* uniquement.

5. Pour toute variable Z, on a $H(Z) = h_n(P(Z = z_1), \ldots, P(Z = z_n))$.
D'après les questions 1 et 4b, on a donc : $H(Z) \leqslant h_n(x^*) = H(U)$,
avec égalité si et seulement si $(P(Z = z_1), \ldots, P(Z = z_n)) = (P(U = u_1), \ldots, P(U = u_n))$.
Donc, l'entropie est maximale pour les variables qui suivent la loi uniforme et pour elles seulement.

Exercice 2.16

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0,1\},\quad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln^2(t)}\,dt.$$

1. Montrer que f est bien définie, de classe C^1 sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.
2. Calculer la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0,1\}$. En déduire les variations de f.
3. Montrer que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.
4. (a) Calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln^2(t)}\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0,1\}$.
   (b) En déduire un équivalent de $f(x)$ en 1.
5. Quelle est la limite de $f(x)$ en 0 ?

Solution de l'exercice 2.16

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln^2(t)}$ est définie, continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ donc admet une primitive notée G. On a donc :
$$\forall x > 1, \quad f(x) = G(x^2) - G(x).$$
On en déduit que f est bien définie, et C^1 sur $]1,+\infty[$. Idem sur $]0,1[$.
2. On a donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0,1\}, \quad f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{2x}{\ln^2(x^2)} - \frac{1}{\ln^2(x)} = \frac{x-2}{2\ln^2(x)}.$$
On en déduit que f est décroissante sur $]0,1[$, puis sur $]1,2[$, puis croissante sur $[2,+\infty[$.
3. On a l'encadrement suivant : $\forall x > 1, \ \forall t \in [x,x^2], \ \frac{1}{\ln^2(x^2)} \leqslant \frac{1}{\ln^2(t)} \leqslant \frac{1}{\ln^2(x)}$.
D'où en intégrant sur $[x,x^2]$, $\forall x > 1, \ \frac{x^2-x}{4\ln^2(x)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2-x}{\ln^2(x)}$.
(*remarque* : ceci s'obtient aussi par le th. des accroissements finis pour G)
On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. (a) Connaissant une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\,\ln^2(t)}$, on a : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\,\ln^2(t)}dt = \frac{1}{2\ln(x)}$.

   (b) Or par encadrement on obtient :
$$\forall x > 1, \ \forall t \in [x,x^2], \quad \frac{1}{x^2\ln^2(t)} \leqslant \frac{1}{t\ln^2(t)} \leqslant \frac{1}{x\ln^2(t)}.$$
On intègre :
$$\forall x > 1, \quad \frac{f(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2\ln(x)} \leqslant \frac{f(x)}{x}.$$
Soit,
$$\forall x > 1, \quad \frac{x}{2\ln(x)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2}{2\ln(x)}.$$
De même,
$$\forall\, x \in]0,1[, \quad \forall t \in [x^2,x], \quad \frac{1}{x\ln^2(t)} \leqslant \frac{1}{t\ln^2(t)} \leqslant \frac{1}{x^2\ln^2(t)}.$$
On intègre mais puisque les bornes ne sont pas dans l'ordre croissant, on a :
$$\forall\, x \in]0,1[, \quad \frac{f(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2\ln(x)} \leqslant \frac{f(x)}{x}.$$
On en déduit qu'un équivalent de $f(x)$ en 1 est $\dfrac{1}{2\ln(x)}$.
5. Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln^2(t)}$ est prolongeable par continuité en 0, on en déduit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est 0.

Exercice 2.17

1. Soit la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x (1 + |\sin(t)|)dt$
   (a) Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$.
   (c) Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (d) Montrer que la fonction définie par $h(x) = F(x) - x$ est strictement croissante.
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles positives ou nulles telle que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

   Pour tout $n \geqslant 0$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} v_i$ la somme partielle d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} v_n$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive telle que :
   $$u_0 = 0 \text{ et pour tout } n \geqslant 0, \int_{u_n}^{u_{n+1}} (1 + |\sin(t)|)dt = v_n$$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$
3. (a) Calculer $F(k\pi)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Exprimer $F(u_n)$ en fonction de S_{n-1}.
   (c) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n \sim \dfrac{\pi}{2 + \pi} S_{n-1}$.

Solution de l'exercice 2.17

1. (a) La fonction $g : t \mapsto 1 + |\sin(t)|$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, le théorème fondamental du calcul intégral entraîne l'existence de l'intégrale de g sur $[0, x]$ et donc de $F(x)$; de plus, F est la primitive de g qui s'annule en 0, elle est donc dérivable et $F^{'} = g$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc, F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) On a : $1 \leqslant 1 + |\sin(t)| \Rightarrow x \leqslant F(x)$ par croissance de l'intégrale.
   donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

   (c) La fonction F est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$; c'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

   (d) La fonction $h(x) = F(x) - x$ est croissante car dérivable et de dérivée $|\sin(x)| \geqslant 0$. De plus, $\sin x$ ne s'annule qu'en des points isolés, d'où la stricte croissance de h.

2. (a) Les conditions voulues sur la suite (u_n) équivalent à : $u_0 = F(0)$ et $\forall n \geqslant 1, v_n = F(u_{n+1}) - F(u_n)$, soit encore, en calculant les sommes partielles et en posant $S_{-1} = 0$:

$$\forall n \geqslant 0,\ F(u_n) = S_{n-1}.$$

   Comme F est bijective cela prouve l'existence et l'unicité de (u_n), donnée par $u_n = F^{-1}(S_{n-1})$.

   (b) La fonction F est croissante, donc F^{-1} aussi, tout comme la suite (S_{n-1}) (car $v_i \geqslant 0$), donc (u_n) est croissante.

   (c) L'égalité s'écrit $v_n = F(u_{n+1}) - F(u_n)$. Par somme et télescopage, $F(u_n) - F(u_0) = F(u_n) = S_{n-1}$ et par bijectivité de F, $u_n = F^{-1}(S_{n-1}) \to +\infty$.

3. (a) On a :

$$\begin{aligned}
F(k\pi) &= k\pi + \int_0^{k\pi} |\sin(t)|dt = k\pi + \sum_{i=0}^{k-1} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} |\sin(t)|dt \\
&= k\pi + \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^{\pi} |\sin(u + i\pi)|du \qquad \text{(changement de variable : } u = t - i\pi) \\
&= k\pi + \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^{\pi} |\sin(u)|du = k\pi + k[1 + 1] = k(\pi + 2)
\end{aligned}$$

   (b) Par télescopage déjà vu, $F(u_n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(F(u_{i+1}) - F(u_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} 1 + |\sin(t)|dt = \sum_{i=0}^{n-1} v_i = S_{n-1}$.

   (c)
   - Soit $n \geqslant 0$. L'entier $m \geqslant 0$ défini par $m = \left\lfloor \dfrac{u_n}{\pi} \right\rfloor$ est tel que : $m\pi \leqslant u_n < (m + 1)\pi$ d'où, par croissance de F, on a : $F(m\pi) \leqslant F(u_n) \leqslant F((m + 1)\pi) \Rightarrow m(2 + \pi) \leqslant S_{n-1} \leqslant (m + 1)(2 + \pi)$.
   - Pour n assez grand, on a $m > 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'où :
     $2 + \pi \leqslant \dfrac{S_{n-1}}{m} \leqslant 2 + \pi + \dfrac{2 + \pi}{m} \Rightarrow \dfrac{S_{n-1}}{m} \sim 2 + \pi$
   - or $m = \left\lfloor \dfrac{u_n}{\pi} \right\rfloor \sim \dfrac{u_n}{\pi}$

   Donc :

$$u_n \sim \frac{\pi}{2 + \pi} S_{n-1}$$

Exercice 2.18

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)dt$ converge. Pour $f \in E$, on pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)dt$.

On considère la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

1. (a) Montrer que g est définie, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est prolongeable par continuité en 0. On note g la fonction prolongée en 0.

   (b) Pour $x > 0$, exprimer la dérivée $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $g(x)$

2. Soient a et b deux réels tels que : $0 \leqslant a < b$.

   (a) Montrer que :

$$2\int_a^b f(t)g(t)dt = bg^2(b) - ag^2(a) + \int_a^b g^2(t)dt$$

   (b) On suppose établi le fait que $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (espaces vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$). Montrer que :

$$\int_a^b g^2(t)dt - 2\sqrt{I}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \leqslant ag^2(a)$$

   (c) En déduire : $\displaystyle\int_a^b g^2(t)dt \leqslant 2I + ag^2(a) + 2\sqrt{I\ (ag^2(a) + I)}$.

3. (a) Prouver alors la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2(t)dt$

   (b) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$ puis montrer que :

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$$

Solution de l'exercice 2.18

1. (a) La continuité de f entraîne l'existence d'une primitive F sur $\mathbb{R}_+^*$; g est donc bien définie. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$: $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto F(x)$.

   La fonction F est dérivable en 0, d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-F(0)}{x} = F'(0) = f(0)$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = f(0)$.

   (b) Pour $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x}\big(f(x) - g(x)\big)$.

2. (a) Comme une primitive de f est $x \mapsto xg(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, pour $a > 0$, par intégration par parties, on a :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = [tg(t)g(t)]_a^b - \int_a^b tg(t)\frac{1}{t}(f(t)-g(t))dt = bg^2(b) - ag^2(a) - \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b g^2(t)dt$$

   soit encore, $2\displaystyle\int_a^b f(t)g(t) = bg^2(b) - ag^2(a) + \int_a^b g^2(t)dt \quad (1)$.

   Si $a = 0$, on remplace a par $\alpha > 0$ dans (1) ; alors le résultat reste vrai en faisant tendre α vers 0.

   (b) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \leqslant \sqrt{I\int_a^b g^2(t)dt}$$

   D'où $\displaystyle\int_a^b g^2(t)dt - ag^2(a) \leqslant 2\sqrt{I\int_a^b g^2(t)dt} - bg^2(b) \leqslant 2\sqrt{I\int_a^b g^2(t)dt}$, car $bg^2(b) \geqslant 0$, d'où le résultat voulu.

   (c) On reconnaît le début d'un carré dans l'expression précédente :

$$\Big(\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} - \sqrt{I}\Big)^2 - I \leqslant ag^2(a) \Rightarrow \left|\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} - \sqrt{I}\right| \leqslant \sqrt{ag^2(a)+I}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \leqslant \sqrt{I} + \sqrt{ag^2(a)+I}$$

   et en élevant au carré : $\displaystyle\int_a^b g^2(t)dt \leqslant 2I + ag^2(a) + 2\sqrt{I\ (ag^2(a)+I)}$.

3. (a) • La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $h : b \mapsto \displaystyle\int_0^b g^2(t)dt$ est bien définie. Elle est croissante (positivité de l'intégrale) et majorée (2.c), elle admet donc une limite finie lorsque $b \to +\infty$ (théorème de la limite monotone).

   (b) i. On a $0 \leqslant |f(t)g(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}(f^2(t) + g^2(t))$. Ainsi par le théorème de comparaison des fonctions positives, les questions précédentes entraînent que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)g(t)|dt$ converge.

   ii. Dans la question 2.a, pour $a = 0$, il vient : $bg^2(b) = 2\displaystyle\int_0^b f(t)g(t)dt - \int_0^b g^2(t)dt$ et

$$\lim_{b\to+\infty} bg^2(b) = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt - \int_0^{+\infty} g^2(t)dt = M$$

   Nécessairement $M = 0$, sinon on aurait : $g^2(t) \sim \dfrac{M}{t}$ en contradiction avec la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2(t)dt$. D'où $M = 0$, ce qui entraîne le résultat de la question.

Exercice 2.19

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$ est bien définie. On la note alors I_n.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante et positive.
   Que peut-on en déduire sur la nature de la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ et sur sa limite éventuelle ℓ ?
3. Pour tout entier naturel n, calculer $I_n + I_{n+2}$ en fonction de n.
   En déduire la valeur de ℓ.
4. Déduire de la question précédente que :
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{2p} = (-1)^p \left(I_0 + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{2k-1} \right)$$
   Trouver une expression semblable de I_{2p+1}, pour $p \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et donner sa somme.
   Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge et préciser sa somme.
6. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} I_n$ est-elle convergente ?

Solution de l'exercice 2.19

1. En effet, I_n est l'intégrale sur le segment $K = [0, \frac{\pi}{4}]$ d'une fonction continue.
2. Comme tan est strictement croissante sur K, on a : $0 = \tan(0) \leqslant \tan x \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
   Ensuite, la décroissance des puissances entières positives d'un réel de $[0, 1]$ donne :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant (\tan x)^{n+1} \leqslant (\tan x)^n \leqslant 1.$$
   Puis, on intègre sur $[0, \pi/4]$, les bornes étant bien rangées, et l'on obtient : $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
   Ainsi, la suite (I_n) est positive et décroissante. Donc, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite ℓ et par passage à la limite sur inégalités, on a $0 \leqslant \ell \leqslant I_0 = \frac{\pi}{4}$.
3. On remarque que :
   $$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1 + \tan^2 x)\, dx = \frac{1}{n+1}\left[\tan^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}.$$
   Du coup, en passant à la limite, on a : $2\ell = 0$, soit $\ell = 0$.
4. Par récurrence sur p :
   - La formule proposée est évidemment vraie pour $p = 1$ car $I_0 + I_2 = 1$.
   - Si la formule $I_{2p} = (-1)^p \left(I_0 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \frac{(-1)^k}{2k-1}\right)$ est vraie pour un entier p positif, alors d'après la question précédente,
     $$I_{2(p+1)} = \frac{1}{2p+1} - I_{2p} = \frac{1}{2p+1} - (-1)^p \left(I_0 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \frac{(-1)^k}{2k-1}\right) = (-1)^{p+1}\left(I_0 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant p+1} \frac{(-1)^k}{2k-1}\right),$$
     car le terme $\frac{1}{2p+1}$ correspond bien à $\frac{(-1)^{p+1-k}}{2k-1}$ pour $k = p+1$. Donc, c'est vrai à l'ordre $p+1$.

   On obtient aussi : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\quad I_{2p+1} = (-1)^p \left(I_1 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \frac{(-1)^k}{2k}\right)$.
5. Comme $(-1)^p I_{2p}$ tend vers 0 (produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle) lorsque p tend vers $+\infty$, on en déduit que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{2k-1}$ $(k \geqslant 1)$ est convergente et que :
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} = -I_0 = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 = \frac{\pi}{4}.$$
   De même, la série de terme général $\frac{(-1)^k}{2k}$ $(k \geqslant 1)$ est convergente et :
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k} = -I_1 = -\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\ln(2)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2).$$
6. D'après la formule trouvée à la question 3, si la série de terme général I_n convergeait vers S finie, alors la série de terme général $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ convergerait aussi comme somme de deux séries convergentes, ce qui est faux d'après le cours (série harmonique). Ainsi, la série de terme général I_n est divergente.

Exercice 2.20

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. Déterminer le rang de J_n et en déduire ses valeurs propres. La matrice J_n est-elle diagonalisable ?
   Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

2. Montrer que f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que f_n possède deux points critiques a et $b = -a$, avec a dont les coordonnés sont positives.
   On admet que la hessienne de f_n en a est $H_n(a) = \dfrac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$.
4. Établir que f_n possède un extremum local en a. Quelle est sa nature ? Donner sa valeur.
   On admet que f_n possède un extremum local de nature et de valeur opposées en b.
5. (a) Étudier la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$, par : $\forall\, t \geqslant 0,\ h(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}$.
   (b) Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.
   (c)) Déduire des deux questions précédentes que f_n admet en a et b des extremums globaux.

Solution de l'exercice 2.20

1. Les colonnes de J_n sont toutes égales et non nulles, donc J_n est de rang 1.. Ceci montre que 0 est valeur propre de J_n, associée à un sous-espace propre de dimension $n-1$ qui est le noyau de $(x_1,\dots,x_n) \to \sum_{k=1}^{n} x_k$.

   Son orthogonal est la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est vecteur propre associé à la valeur propre $n = \mathrm{tr}(J_n)$. La matrice J_n est symétrique réelle, donc ortho-diagonalisable.

2. La fonction f_n est composée d'un produit de fonctions polynomiales de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de la fonction exponentielle qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

3. Par dérivation d'un produit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\partial_i f_n(x) = \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$

   Les points critiques de f_n sont les $(x_1,\dots,x_n)$ qui annulent $1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k = 1 - 2x_i S_n$, donc $x_i = \dfrac{1}{2S_n}$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. En sommant, on obtient $2S_n^2 = n$ soit $S_n = \pm\sqrt{\dfrac{n}{2}}$. On en déduit que les points critiques de f_n sont $a = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}(1,\dots,1)$ et $b = -a$.

4. La matrice J_n étant diagonalisable, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D_n = \mathrm{diag}(n,0,\dots,0)$ telles que $J_n = PD_n{}^tP$. D'après l'énoncé, $H_n(a)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont $\dfrac{-2n}{\sqrt{n\mathrm{e}}}$ et $\dfrac{-4n}{\sqrt{n\mathrm{e}}}$ qui sont négatives. Donc, f_n admet un maximum local en a.

   Sa valeur est $f_n(a) = \sqrt{\dfrac{n}{2\mathrm{e}}}$.

5. (a) Une étude de la fonction h montre qu'elle admet un maximum sur $\mathbb{R}^+$ en $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ qui vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$.

   (b) C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   (c) Avec la notation $||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, les deux questions précédentes donnent :

$$|f_n(x)| \leqslant \sqrt{n}||x||\mathrm{e}^{-||x||^2} \Rightarrow |f_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{n}{2\mathrm{e}}}$$

   Donc, f_n admet en a et b des extremums globaux.