CHAPITRE

2

ANALYSE

Sujet n° 1

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose $||f||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

1. Soit φ l'application définie sur E par $\varphi(f) = F$ avec $F' = f$ et $\displaystyle\int_0^1 F(t)\mathrm{d}t = 0$.
   (a) Montrer que φ est bien définie.
   (b) Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. (a) Justifier que l'ensemble
$$A = \left\{ \frac{||\varphi(f)||_\infty}{||f||_\infty}\,,\ f \in E \setminus \{0\} \right\}$$
   est non vide et majoré. On note M sa borne supérieure.
   (b) Soit $f \in E$, $F = \varphi(f)$ et G la primitive de F sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0.
   Pour $x \in [0,1]$, exprimer $G(0)$ et $G(1)$ en fonction de $G(x)$ à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral.
   En déduire
$$\forall x \in [0,1], \quad |F(x)| \leqslant \left[\frac{(1-x)^2 + x^2}{2}\right] ||f||_\infty$$
   (c) Déterminer M.
3. On définit une suite de fonctions de E par $P_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = \varphi(P_n)$$
   (a) Expliciter P_1 et P_2.
   (b) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la série de terme général $P_n(x)\, t^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge pour tout réel t tel que $|t| < 2$.

Solution du sujet n° 1

1. (a) Le polynôme $f \in E$ a des primitives polynomiales sur $\mathbb{R}$; si H est celle qui s'annule en 0, les autres sont de la forme $H + k$, $k \in \mathbb{R}$; alors

$$0 = \int_0^1 (H+k) \Leftrightarrow k = -\int_0^1 H \quad \text{d'où} \quad F = H - \int_0^1 H$$

d'où l'existence et l'unicité de F.

(b) Le polynôme $F \in E$ par primitivation, et φ est linéaire par linéarité de l'intégration et de $f \mapsto H$.

2. (a) Soit $E' = E \setminus \{0\}$ qui est non vide ; la fonction $f \in E'$ est polynomiale donc continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée ; de même pour $\varphi(f)$. Enfin, $||f||_\infty = 0$ implique $f = 0$, ce qui est exclu pour $f \in E'$. Donc A est bien défini et non vide.

Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}|F(x)| &= \left| \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \left[\int_0^s f(t)\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}s \right| \leqslant \int_0^1 |f| + \int_0^1 \left[\int_0^s |f| \right] \mathrm{d}s \\ &\leqslant ||f||_\infty + \int_0^1 s||f||_\infty \mathrm{d}s \leqslant 2||f||_\infty\end{aligned}$$

Ainsi $M \leqslant 2$.

(b)

$$G(0) = G(x) + (0-x)G'(x) + \int_x^0 (0-t)G''(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(1) = G(x) + (1-x)G'(x) + \int_x^1 (1-t)G''(t)\mathrm{d}t$$

Pour tout $x \in [0,1]$, par soustraction vu que $G(0) = G(1) = 0$ (par hypothèse sur F), il vient

$$F(x) = G'(x) = -\int_x^1 (1-t)G''(t)\mathrm{d}t + \int_x^0 (0-t)G''(t)\mathrm{d}t$$

$$|F(x)| \leqslant ||f||_\infty \left(\int_x^1 (1-t)\mathrm{d}t + \int_0^x t\mathrm{d}t \right) = \left[\frac{(1-x)^2 + x^2}{2} \right] ||f||_\infty$$

(c) Pour $x \in [0,1]$, $\dfrac{(1-x)^2 + x^2}{2} = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{2}$; d'où $M \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Pour $f = 1$, on a $F(x) = x - \frac{1}{2}$, $||f||_\infty = 1$ et $||F||_\infty = \frac{1}{2}$; donc $M \geqslant \frac{1}{2}$, d'où l'égalité.

3. (a) On a $P_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$ et $P_2(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{12}$.

(b) Par récurrence, $||P_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. D'où si $|t| < 2$ alors

$$|P_n(x)\, t^n| \leqslant \left(\frac{|t|}{2} \right)^n$$

qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

Sujet n$^{\text{o}}$ 4

Dans tout l'exercice, f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.
On note F la primitive de f qui s'annule en 0.
On pose, pour tout réel x strictement positif :

$$K(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt$$

1. Un exemple. On suppose dans cette question que f est la fonction définie par :

$$f : t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$$

   Vérifier que f répond bien aux hypothèses de l'exercice et déterminer les limites de $K(x)$ aux bornes de son domaine.

   Dans la suite, on revient au cas général où f est quelconque .

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} K(x)$.
3. (a) Soit ε un réel strictement positif.
   Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, on a :$|F(x) - I| < \varepsilon$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt = I$ (on pourra découper $\displaystyle\int_0^x F(t)dt$ en fonction de A).

   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} K(x)$.

Solution du sujet n$^{\text{o}}$ 4

1. Par calcul d'une primitive de $t \mapsto f(t)$ puis de limite, on a la convergence et $K(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{2x}$.
   D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} K(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} K(x) = 0$
2. Posons $G(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$ la primitive de $t \to tf(t)$ qui s'annule en 0. Alors, $K(x) = \dfrac{G(x) - G(0)}{x - 0}$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} K(x) = G'(0) = 0$.
3. (a) Comme l'intégrale est convergente, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = I$.

   (b) On remarque que $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x I dt = I$. Ainsi

   $$\frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt - I = \frac{1}{x}\int_0^x (F(t)-I)dt = \frac{1}{x}\int_0^A (F(t)-I)dt + \frac{1}{x}\int_A^x (F(t)-I)dt$$

   Par définition de A et inégalité triangulaire, on a : $\left|\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_A^x (F(t)-I)dt\right| < \varepsilon\dfrac{x-A}{x} < \varepsilon$,
   et il existe B tel que si $x > B$ alors :

   $$\left|\frac{1}{x}\int_0^A (F(t)-I)dt\right| = \frac{C_A}{x} < \varepsilon$$

   Ainsi si $x > \max(A, B)$, on obtient $\left|\displaystyle\int_0^x F(t)dt - I\right| < 2\varepsilon$.

   (c) On intègre par parties $\displaystyle\int_0^x tf(t)dt$ et on divise par x. Il vient $K(x) = F(x) - \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x F(t)dt$. D'après ce qui précède : $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x) = 0$.

Sujet n° 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{x}{2\left(1+\sqrt{1+x}\right)}$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme v_0 (avec $v_0 > 0$) et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n).$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, strictement positive et qu'elle converge vers 0.
2. Trouver un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\ln\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{v_n + 1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} {v_n}^{\alpha}$.

Dans la suite, on admet que : $\forall x > 0,\ \dfrac{2f'(x)}{\sqrt{f(x)\left(f(x)+1\right)}} = \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{v_n} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}$.
   On la note w_n.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation simple entre w_{n+1} et w_n (on pourra effectuer un changement de variable $x = f(t)$ après l'avoir justifié).
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $w_n = \dfrac{w_0}{2^n}$.
5. *Dans cette question, on pourra utiliser sans démonstration que la dérivée de la fonction* $h : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *est donnée par :*

   $$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}.$$

   Trouver un équivalent de v_n qui ne dépend que de n et v_0, quand n tend vers $+\infty$.

Solution du sujet n° 8

1. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ la relation : v_n est défini et $v_n > 0$.
   - Comme $v_0 > 0$ est donné, la relation est vraie pour $n = 0$.
   - Si la relation est vrai pour n, alors, comme f est clairement définie sur $\mathbb{R}_+$, $v_{n+1} = f(v_n)$ est défini. Or, pour tout $x > 0$, on a clairement $f(x) > 0$, donc $v_{n+1} > 0$.
     Ainsi la relation est vraie à l'ordre $n+1$.

   Autre rédaction : f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $\forall x > 0,\ f(x) > 0$ *i.e.* la partie $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f et $v_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
   Comme $v_n > 0$, on peut étudier la monotonie de (v_n) à l'aide de : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{2(1+\sqrt{1+v_n})} \leqslant \dfrac{1}{4} \leqslant 1$.
   Donc (v_n) est décroissante et minorée (par 0) ; ainsi elle converge, d'après le théorème de la limite monotone.
   Comme f est continue, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on a : $\ell = f(\ell)$.
   Soit $\ell = 0$ ou $2(1+\sqrt{1+\ell}) = 1$. Comme la seconde égalité est impossible, on a donc $\lim(v_n) = 0$.
2. D'après un DL usuel, on a : $\sqrt{x} + \sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{=} \sqrt{x} + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$ (terme prépondérant).
   En posant $u = \sqrt{x} + \sqrt{1+x} - 1$, qui tend vers 0, dans l'équivalent usuel $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, on a donc :
   $$\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x} + \sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}.$$
   Comme $\lim(v_n) = 0$, on peut remplacer x par v_n, soit : $\ln\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{v_n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} {v_n}^{\frac{1}{2}}$ *i.e.* $\alpha = \frac{1}{2}$.
3. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(t+1)}}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
   Comme $v_n > 0$, la convergence de l'intégrale ne pose problème qu'en 0. Or : $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t(t+1)}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.
   Donc, comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge, par théorème de comparaison l'intégrale $\displaystyle\int_0^{v_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}}$ existe.
   Autre idée moins acceptable : utiliser la dérivée fournie à la fin de l'exercice pour calculer $\displaystyle\int_X^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}}$ puis montrer que cela converge quand X tend vers 0^+.
4. Comme $f(0) = 0$ et $v_{n+1} = f(v_n)$, et comme $f'(x) = \dfrac{\sqrt{f(x)(f(x)+1)}}{2\sqrt{1+x}} > 0$, on peut effectuer le changement de variable $x = f(t)$ qui est $\mathcal{C}^1$, strictement croissant, bijectif de $]0, u_n]$ sur $]0, u_{n+1}]$:
   $$w_{n+1} = \int_0^{v_{n+1}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}} = \int_0^{v_n} \frac{f'(t)}{\sqrt{f(t)\,(f(t)+1)}}\,\mathrm{d}t \underset{\mathrm{Q2}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{v_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}} = \frac{1}{2} w_n.$$
   On voit que la suite (w_n) est géométrique, donc $w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n w_0$.
5. D'après la primitive fournie par l'énoncé, on a :
   $$w_n = \int_0^{v_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}} = \Big[\ \left(2\ln\left(\sqrt{t} + \sqrt{t+1}\right)\right)\ \Big]_0^{v_n} = 2\ln\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{v_n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2{v_n}^{\frac{1}{2}} \qquad \text{d'après Q2.}$$
   Donc, d'après Q4 : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{w_n^2}{4} = \dfrac{1}{4}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \displaystyle\int_0^{v_0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+1)}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \ln^2\left(\sqrt{v_0} + \sqrt{v_0+1}\right)$.

Sujet n° 12

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$ converge. On la note I_n.

   (b) Établir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\quad I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$.

   (c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ l'expression de I_n en fonction de I_1 et de n.

2. Une urne contient initialement une boule blanche et deux boules rouges. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne suivant le protocole suivant : à chaque extraction d'une boule, on note sa couleur puis on la replace dans l'urne accompagnée de trois boules ayant la même couleur que celle-ci. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité d'obtenir n boules rouges lors des n premiers tirages.
   Exprimer p_n en fonction des intégrales I_k $(k \in \mathbb{N}^*.)$

3. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\quad I_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^3}{n}\right)^{-n} dt.$

   On pose alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^3}{n}\right)^{-n} dt.$

   (b) On pose, pour tout t de $\mathbb{R}_+$ et tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $g_t(x) = -x \ln\left(1 + \dfrac{t^3}{x}\right)$ et $\quad u_t(x) = \left(1 + \dfrac{t^3}{x}\right)^{-x}$.

   On donne $g_t''(x) = \dfrac{t^6}{x(x+t^3)^2}$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g_t'(x) = 0$.
   Etudier la monotonie de la fonction u_t.

   (c) En déduire convergence de (a_n). On note ℓ sa limite.

   (d) On admet l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^3} dt$. Montrer que $\ell \geqslant I > 0$.

   (e) Déterminer un équivalent de p_n lorsque n tend vers $+\infty$, en fonction de ℓ et de I_1.

Solution du sujet n° 12

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^3)^n}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

   De plus : $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3n}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3n}} dx$ converge car $3n > 1$.
   Donc, par thèorème de comparaison, l'intégrale I_n est bien définie.

   (b) Soit $a \geqslant 0$. Par intégration par parties avec $u(x) = (1+x^3)^{-n}$, $v'(x) = 1$, $u'(x) = \dfrac{-3nx^2}{(1+x)^{n+1}}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{(1+x^3)^n} dx &= \left[\frac{x}{(1+x^3)^n}\right]_0^a + 3n \int_0^a \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}} dx \\ &= \frac{a}{(1+a^3)^n} + 3n \int_0^a \frac{1+x^3-1}{(1+x^3)^{n+1}} dx \\ &= \frac{a}{(1+a^3)^n} + 3n \left(\int_0^a \frac{1}{(1+x^3)^n} dx - \int_0^a \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}} dx \right)\end{aligned}$$

   Quand a tend vers $+\infty$, on obtient : $I_n = 3n(I_n - I_{n+1})$, soit : $I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$.

   (c) Un raisonnement par récurrence permet alors d'établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = I_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note R_k : « on obtient une boule rouge au k-ième tirage ».
   On a : $\forall n \geqslant 2$, $P(R_1) = \dfrac{2}{3}$, $\quad P_{R_1}(R_2) = \dfrac{5}{6}$, $\quad P_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \dfrac{8}{9}, \dots, \quad P_{R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}}(R_n) = \dfrac{3n-1}{3n}$.
   Ainsi, d'après la formule des probabilités composées :

$$p_n = P(R_1 \cap \ldots \cap R_n) = P(R_1) P_{R_1}(R_2) \ldots P_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1}}(R_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{3k} = \frac{I_{n+1}}{I_1},$$

   car I_1 n'est pas nulle (intégrale d'une fonction continue positive, non indentiquement nulle, sur un intervalle d'amplitude non nulle).

3. (a) On fait le changement de variable affine $t = n^{\frac{1}{3}} x$ dans l'intégrale I_n

   (b) Comme g_t'' est clairement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, alors g_t' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et de limite 0 en $+\infty$. Donc g_t décroit sur $\mathbb{R}_+^*$, tout comme $u_t = exp \circ g_t$.

   (c) Pour tout réel t positif, u_t décroit sur $]0, +\infty[$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_t(n+1) \leqslant u_t(n)$.
   Alors, par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant), on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} \leqslant a_n$.
   Ainsi (a_n) décroit. Or, par positivité de l'intégrale, (a_n) est minorée par 0 donc elle converge.

   (d) La fonction u_t décroît sur $]0, +\infty[$ et a pour limite e^{-t^3} en $+\infty$ (puisque $g_t(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -t^3$) donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_t(n) \geqslant e^{-t^3}$. Par croissance de l'intégrale, $a_n \geqslant I$. Comme I est l'intégrale d'une fonction continue et strictement positive sur un intervalle non réduit à un point, elle est strictement positive.
   Par passage à la limite, $\ell \geqslant I > 0$.

   (e) On en déduit que : $p_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{I_1\, n^{\frac{1}{3}}}$.

Sujet n° 13

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = x\mathrm{e}^x$.
2. (a) Montrer que la restriction de f à $[-1, +\infty[$ réalise une bijection sur un intervalle J qu'on déterminera. On note W la réciproque de cette bijection.
   (b) Déterminer $W(0)$ et $W'(0)$.
   (c) Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque x tend vers 0 et un équivalent de $W(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (d) Tracer les courbes représentatives de f et W.
3. Montrer rapidement que la restriction de f à $]-\infty, -1[$ réalise une bijection sur un intervalle J' qu'on déterminera. On note V la réciproque de cette bijection.
4. Soit m réel.
   Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x\mathrm{e}^x = m$.
   Exprimer, lorsqu'elles existent, ces solutions à l'aide des fonctions W et V.
5. Soit a, b deux réels non nuls. Soit l'équation $\mathrm{e}^{ax} + bx = 0$. Déterminer le nombre de solutions de cette équation en fonction de a et b.
   Exprimer, lorsqu'elles existent, ces solutions à l'aide des fonctions W et V.

Solution du sujet n° 13

1. D'une part f est continue. D'autre part, comme $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$, la fonction f est strictement décroissante donc bijective de $]-\infty, -1]$ sur $]0, -1/\mathrm{e}]$. Et f est strictement croissante donc bijective de $[-1, +\infty[$ sur $[-1/\mathrm{e}, +\infty[$.
2. (a) La restriction de f à $[-1, +\infty[$ réalise une bijection sur $[-1/\mathrm{e}, +\infty[$, car f y est strictement croissante. On note W la réciproque de cette bijection.

   (b) On a $f(0) = 0$, donc $W(0) = 0$. Ensuite comme $f'(0) = 1$, le théorème de dérivation des fonctions réciproques s'applique en 0 et $W'(0) = \dfrac{1}{f'(W(0))} = 1$.

   (c) En 0, on a $W(x) = W(0) + xW'(0) + o(x)$ soit $W(w) \sim x$.
   Au voisinage de $+\infty$, comme $W(x) > 0$, on écrit

   $$x = f(W(x)) = W(x)\mathrm{e}^{W(x)} \Rightarrow W(x) + \ln W(x) = \ln x$$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} W(x) = +\infty$; donc $\ln W(x) = o(W(x))$ et $W(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

   (d) $[\cdots]$ (à faire).
3. La fonction f est strictement décroissante de $]-\infty, -1[$ sur $]0, -1/\mathrm{e}]$.
   C'est donc une bijection de réciproque notée V.
4. On s'aide de la représentation graphique
   - si $m \in]-\infty, -1/\mathrm{e}[$, il n'y a pas de solution.
   - si $m = -1/\mathrm{e}$, il y a une unique solution $W(m)$.
   - si $m \in]-1/\mathrm{e}, 0[$, il y a deux solutions $W(m)$ et $V(m)$.
   - si $m = 0$, une seule solution $x = 0 = W(0)$
   - si $m > 0$, il y a une unique solution $W(m)$.
5. L'équation $\mathrm{e}^{ax} + bx = 0$ est équivalente à l'équation $-ax\mathrm{e}^{-ax} = \dfrac{a}{b}$, soit $f(-ax) = \dfrac{a}{b}$.
   On est revenu à l'équation précédente avec $m = \dfrac{a}{b}$ et x remplacé par $-ax$. Ainsi :
   - si $a/b \in]-\infty, -1/\mathrm{e}[$, il n'y a pas de solution.
   - si $a/b = -1/\mathrm{e}$, il y a une unique solution $-ax = W(a/b)$, soit $x = -\frac{1}{a}W(a/b)$.
   - si $a/b \in]-1/\mathrm{e}, 0[$, il y a deux solutions $W(a/b)$ et $V(a/b)$ et $x = -\frac{1}{a}W(a/b)$, $x = -\frac{1}{a}V(a/b)$.
   - si $a/b > 0$, il y a une unique solution $x = -\frac{1}{a}W(a/b)$.

Sujet n° 16

Soit la fonction $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0,1[$, par $f(x) = \ln(1-x)$

1. (a) Montrer que f admet une primitive F qui s'annule en 0. Donner une expression de F.

   (b) Calculer les dérivées successives de F au point 0.

   (c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, pour tout entier $n \geqslant 2$

$$F(x) = -\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k(k-1)} - \frac{1}{n}\int_0^x \Big(\frac{x-t}{1-t}\Big)^n dt$$

   (d) En déduire pour tout $x \in [0,1[$,

$$F(x) = -\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k(k-1)}$$

Dans la suite, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. Soit p un réel fixé de $]0,1[$. On note $q = 1-p$.
   Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = pq^k$.
   On pose

$$Y = \frac{1}{(X+1)(X+2)}$$

   (a) Montrer l'existence de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$, et les calculer.

   (b) Déterminer la loi de Y. Montrer qu'elle admet une espérance $E(Y)$ et la calculer.

3. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(n+1)pq^k}{(k+1)(k+2)}$$

   (a) Montrer que u_n est le terme général d'une série convergente puis calculer sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

   On pourra utiliser le résultat suivant : si $(\alpha_{n,k})_{n\geqslant 0, k\geqslant 0}$ *désigne une famille de réels positifs tel que la série de terme général* $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_{n,k}$ *converge alors on a l'égalité :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_{n,k}\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{k} \alpha_{n,k}\Big)$

   (b) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ P_{[X=k]}(Z = n+1) = \begin{cases} \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} & \text{si } n \in [\![0,k]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

Solution du sujet n° 16

1. (a) La fonction f est continue sur $[0,1[$ donc admet une primitive $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ qui s'annule en 0.

   Par IPP : $F(x)=\int_0^x 1.\ln(1-t)dt=[t\ln(1-t)]_0^x-\int_0^x (1-\frac{1}{1-t})dt=(x-1)\ln(1-x)-x$

   (b) On a par le théorème fondamental du calcul intégral, $F'(x)=f(x)=\ln(1-x)\Rightarrow F''(x)=\frac{-1}{1-x}$.

   Par une récurrence immédiate : $\forall p\geqslant 2,\ F^{(p)}(x)=\frac{-(p-2)!}{(1-x)^{p-1}}$.

   On en déduit les dérivées successives en 0 : $F(0)=F'(0)=0$ et $\forall p\geqslant 2,\ F^{(p)}(0)=-(p-2)!$.

   (c) Par application de la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction F sur le segment $[0,x]$ avec $x\in[0,1[$, on obtient :

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}F^{(k)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}F^{(n+1)}(t)dt=-\sum_{k=2}^{n}\frac{x^k}{k(k-1)}-\frac{1}{n}\int_0^x\Big(\frac{x-t}{1-t}\Big)^n dt$$

   (d) Soit $x\in[0,1[$, $\forall t\in[0,x]$ on a $0\leqslant\frac{x-t}{1-t}\leqslant 1$. D'où : $\left|\frac{1}{n}\int_0^x\Big(\frac{x-t}{1-t}\Big)^n dt\right|\leqslant\frac{1}{n}\int_0^x dt=\frac{x}{n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

   En passant à la limite : $F(x)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^k}{k(k-1)}$.

2. (a) La variable aléatoire $X+1$ suit une loi géométrique de paramètre p d'où l'existence de moments de tous ordres et $E(X)=E(X+1)-1=\frac{1}{p}-1$ et $V(X)=V(X+1)=\frac{1-p}{p^2}$.

   (b) Par théorème de transfert, on a :

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}pq^k=\frac{p}{q^2}\sum_{k'=2}^{+\infty}\frac{q^{k'}}{(k'-1)k'}=-\frac{p}{q^2}F(q)=\frac{p}{q^2}(q+p\ln(p)).$$

3. (a) On a $\frac{(n+1)pq^k}{(k+1)(k+2)}\leqslant(n+1)pq^k$ et $\sum_{k=n}^{+\infty}q^k=q^n\sum_{k'=0}^{+\infty}q^{k'}=q^n\frac{1}{1-q}=\frac{q^n}{p}$

   d'où $u_n\leqslant(n+1)p\frac{q^n}{p}=(n+1)q^n$, qui est le terme général d'une série convergente ; donc la série $\sum u_n$ (à termes positifs) converge. De plus

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n&=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(n+1)pq^k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{k}\frac{(n+1)pq^k}{(k+1)(k+2)}\Big)\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{pq^k}{(k+1)(k+2)}\sum_{n=0}^{k}(n+1)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{pq^k}{(k+1)(k+2)}\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\&=\frac{p}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}q^k=\frac{p}{2}\frac{1}{1-q}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

   (b) La formule des probabilités totales donne : $\forall n\in\mathbb{N},\ P(Z=n+1)=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}pq^k=u_n$

   Si Z admet une espérance, alors son expression est : $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)P(Z=n+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

   On a vu que cette série converge et que sa somme vaut $\frac{1}{2}$; on obtient $E(Z)=\frac{1}{2}$.

Sujet n° 21

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^a \,\mathrm{d}t$.

   (b) Déterminer :
   $$\lim_{p \to +\infty} \left(\int_0^1 \frac{t^{(p+1)\,\alpha}}{1+t^\alpha} \,\mathrm{d}t \right) .$$

   (c) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1}$. On pose alors :
   $$U(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1}$$
   Déterminer une expression de $U(\alpha)$ sous forme d'une intégrale.

2. (a) Déterminer l'ensemble D des réels α tels que l'intégrale
   $$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$$
   soit convergente. On pose alors : $V(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

   (b) Soit $\alpha \in D$. Déterminer un réel β tel que $u \mapsto u^\beta = t$ définisse un changement de variables licite qui permet d'exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$ à l'aide de la fonction U.

   (c) En déduire que :
   $$\forall \alpha \in D\,, \qquad V(\alpha) = U(\alpha) + \frac{1}{\alpha-1}\,U\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big) .$$

3. Exprimer
   $$S = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^{n-1}}{n^2\,\alpha^2 - 1}$$
   à l'aide d'une intégrale.

Solution du sujet n° 21

1. (a) $\displaystyle\int_0^1 t^a \, \mathrm{d}t = \frac{1}{a+1}$.

   (b) $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{(p+1)\,\alpha}}{1+t^\alpha} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{(p+1)\,\alpha} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(p+1)\,\alpha + 1} \underset{p\,\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1} = \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{p} (-1)^n \, t^{n\,\alpha} \, \mathrm{d}t\right] = \int_0^1 \frac{1-(-1)^{p+1}\, t^{(p+1)\,\alpha}}{1+t^\alpha} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} + (-1)^p \int_0^1 \frac{t^{(p+1)\,\alpha}}{1+t^\alpha} \mathrm{d}t$ (valable car $-t^\alpha \neq 1$), d'où :

$$U(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$$

2. (a) La fonction $t \mapsto 1/(1+t^\alpha)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout α réel et :

   * si $\alpha > 0$, elle est continue en 0 et équivalente à $1/t^\alpha$ quand $t \longrightarrow +\infty$, d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$ ssi $\alpha > 1$;
   * si $\alpha = 0$, elle vaut $1/2$, d'intégrale divergente en $+\infty$;
   * si $\alpha < 0$, elle tend vers 1 en $+\infty$, donc d'intégrale divergente.

$$D = \,]1, +\infty[$$

   (b) Le changement de variable $u \mapsto u^\beta = t$ est $\mathcal{C}^1$ bijectif de $]0, 1[$ sur $]1, +\infty[$ pour $\beta < 0$ et donne

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \int_1^0 \frac{\beta\, u^{\beta-1}}{1+u^{\alpha\,\beta}} \, \mathrm{d}u = -\beta \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{1-\beta} + u^{(\alpha-1)\,\beta+1}} \, .$$

   Pour obtenir $(\alpha-1)\,\beta + 1 = 0$, on choisit $\beta = 1/(1-\alpha) < 0$ d'où, comme $\alpha/(\alpha-1) > 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = -\beta \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^{\alpha/(\alpha-1)}} = \frac{1}{\alpha-1}\, U\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big)$$

   (c) Puis, par la relation de Chasles :

$$V(\alpha) = U(\alpha) + \frac{1}{\alpha-1}\, U\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big)$$

3. On tire de ce qui précède, en changeant d'indice,

$$V(\alpha) = U(\alpha) + \frac{1}{\alpha-1}\, U\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\alpha+\alpha-1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n\,\alpha+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n\,\alpha-1}\right]$$

   soit

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^{n-1}}{n^2\,\alpha^2 - 1} = V(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$$

Sujet n° 24

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \cos(u_n)$$

1. (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n appartient à l'intervalle $[0, \pi/2]$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = \dfrac{\pi}{2} - u_n$.
   (a) Montrer que : $v_n - v_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   (b) En déduire la nature de la série de terme général v_n.
3. (a) Soit deux suites (a_n) et (b_n) à termes strictement positifs telles que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.
   On suppose que la série de terme général a_n est convergente. Montrer que l'on a :
   $$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$$
   (b) En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

SOLUTION DU SUJET N° 24

1. (a) On montre par récurrence la relation demandée.
   - Vérifiée pour $u_0 = 0$. On a $u_1 = \cos(0) = 1 > u_0$.
   - La fonction $f : x \to x + \cos x$ est strictement croissante sur $[0, \pi/2[$ (de dérivée positive). Donc $1 = f(u_0) < f(u_n) < f(\pi/2) = \pi/2$.

   (b) Si l'on suppose que $u_{n-1} < u_n$ (c'est vérifié pour $u_0 < u_1$), la croissance de f donne $u_n = f(u_{n-1}) < f(u_n) = u_{n+1}$.
   La suite (u_n) est croissante et majorée : elle est donc convergente.
   En notant ℓ sa limite, on obtient par passage à la limite dans l'égalité définissant u_n, et par continuité de la fonction cosinus, $\ell = \ell + \cos(\ell)$. Donc $\ell = \dfrac{\pi}{2}$.

2. (a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_n - v_{n+1} = u_{n+1} - u_n = \cos(u_n) = \cos(\pi/2 - v_n) = \sin v_n$$

   Or (v_n) tend vers 0. Donc $v_n - v_{n+1} = \sin v_n \sim v_n$.

   (b) On a, pour tout entier n supérieur ou égal à 1

$$\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n = \frac{\pi}{2} - v_n \to \frac{\pi}{2}$$

   On en déduit que la série de terme général $v_k - v_{k+1}$ est convergente et comme $v_k - v_{k+1} \sim v_k$, le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs permet de conclure que la série de terme général v_n est convergente.

3. (a) On écrit la définition de deux suites (a_n) et (b_n) positives équivalentes

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \,/ n \geqslant N \Rightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon b_n$$

   Les séries $\sum a_n$ et donc $\sum b_n$ étant convergentes, pour $n \geqslant N$

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n}^{+\infty} b_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} |a_k - b_k| < \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$$

   ce qui donne la réponse à cette question.

   (b) On sait que $v_k - v_{k+1} \sim v_k$ et que la série $\sum v_k - v_{k+1}$ est à termes positifs et convergente.
   La question précédente donne :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(v_k - v_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

   Enfin

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty}(v_k - v_{k+1}) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n}^{N}(v_k - v_{k+1}) = \lim_{N\to+\infty} v_n - v_{N+1} = v_n$$

SUJET N° 26

On suppose qu'il existe trois rationnels a, b, c, avec $a \neq 0$, tels que $a\mathrm{e}^2 + b\mathrm{e} + c = 0$, où $\mathrm{e} = \exp(1)$.

1. Montrer que l'hypothèse ci-dessus est équivalente à la même hypothèse mais où a, b, c sont des entiers relatifs.

On suppose désormais qu'il existe trois entiers relatifs a, b, c, avec $a \neq 0$ tels que $a\mathrm{e}^2 + b\mathrm{e} + c = 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a\mathrm{e}^x + c\mathrm{e}^{-x}$.
   (a) Montrer que f est de classe C^∞ et déterminer $f^{(k)}(x)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer qu'il existe une constante $s > 0$ telle que
   pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $k \geqslant 0$, on a : $|f^{(k)}(x)| \leqslant s$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$f(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$
   (d) Montrer qu'il existe $\theta_n \in [0, 1]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt = \frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n!}$
3. (a) Montrer que $f(1)$ est un entier.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0)$ est un entier.
   (c) En déduire que $\dfrac{f^{(n)}(\theta_n)}{n}$ est un entier.
4. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $\dfrac{f^{(n)}(\theta_n)}{n} = 0$.
5. Qu'en conclut-on sur a, b, c ?

Solution du sujet n° 26

1. On réduit au même dénominateur l'équation. L'égalité à zéro ne modifie rien.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a\mathrm{e}^x + c\mathrm{e}^{-x}$.
   (a) La fonction f est de classe C^∞ car l'exponentielle l'est et $f^{(k)}(x) = a\mathrm{e}^x + (-1)^k c\mathrm{e}^{-x}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) On a $|f^{(k)}(x)| = |a\mathrm{e}^x + (-1)^k c\mathrm{e}^{-x}| \leqslant |a|\mathrm{e} + |c|$.
   (c) Il s'agit de la formule de Taylor reste intégral sur l'intervalle $[0, 1]$ pour une fonction C^∞.
   Autre idée : par récurrence sur n en intégrant par parties.
   (d) D'après le théorème des bornes atteintes, on a :
   $$\forall t \in [0,1],\ m = \min_{[0,1]} f^{(n)} \leqslant f^{(n)}(t) \leqslant M = \max_{[0,1]} f^{(n)}.$$
   Donc :
   $$\frac{m}{n!} \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt = \frac{M}{n!}$$
   Le réel $n! \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$ est un élément de $[m, M]$.
   On termine avec le théorème des valeurs intermédiaires.
3. (a) On a : $f(1) = a\mathrm{e} + c\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{a\mathrm{e}^2 + c}{\mathrm{e}} = -b \in \mathbb{Z}$.
   (b) On a : $f^{(k)}(0) = a + (-1)^k c \in \mathbb{Z}$.
   (c) En utilisant les questions précédentes et le fait que $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :
   $$\frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n} = (n-1)! \left(f(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right) \in \mathbb{Z}$$
4. La suite $\left(\dfrac{(f^{(n)}(\theta_n))}{n} \right)$ est une suite d'entiers relatifs et qui tend vers 0.
   Donc elle est nulle à partir d'un certain rang.
5. On obtient pour $n \geqslant n_0$, $a\mathrm{e}^{\theta_n} + (-1)^n c\mathrm{e}^{-\theta_n} = 0$.
   - Si a et c sont de même signe, il vient, avec n pair $a = c = 0$ et $b = 0$
   - Si a et c sont de signes contraires, il vient, avec n impair $a = c = 0$ et $b = 0$

   On a montré par l'absurde qu'un tel triplet a, b, c, avec $a \neq 0$ n'existe pas.

   On pourrait démontrer que si $a = 0$, il n'existe pas b, c entiers tels que $b\mathrm{e} + c = 0$, en démontrant que e *n'est pas un nombre rationnel.*

Sujet n° 30

Pour tout $\lambda \geqslant 0$, on pose $P_\lambda(x) = x^3 + \lambda x - 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique $u(\lambda) \in \mathbb{R}_+$ tel que $P_\lambda(u(\lambda)) = 0$.
   On considère désormais l'application $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\lambda \mapsto u(\lambda)$.
2. Montrer que u est décroissante sur $\mathbb{R}_+$
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. On suppose que $f(I)$ est un intervalle. Montrer que f est continue sur I (on pourra raisonner par contraposée).
4. Montrer que $u(\mathbb{R}_+^*) =]0, 1[$.
5. En déduire que u est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Déterminer $\lim_{\lambda \to 0^+} u(\lambda)$ et $\lim_{\lambda \to +\infty} u(\lambda)$

Solution du sujet n^o^ 30

1. On met de côté le cas $\lambda = 0$, auquel cas $u_0(0) = 1$. On suppose désormais que $\lambda > 0$.
   On étudie la fonction polynomiale $P_\lambda : x \to P_\lambda(x)$. Sa dérivée est $x \to 3x^2 + \lambda > 0$. La fonction P_λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Or $P_\lambda(0) = -1$ et $P_\lambda(1) = \lambda > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance de P_λ, il existe un unique $u(\lambda)$ tel que $P_\lambda(u(\lambda)) = 0$. De plus $0 < u(\lambda) < 1$.
2. Soit λ, μ tels que $0 \leqslant \lambda < \mu$. On a $P_\mu(u(\lambda)) = u(\lambda)^3 + \mu u(\lambda) - 1 \geqslant u(\lambda)^3 + \lambda u(\lambda) - 1 = 0$ (car $0 \leqslant u(\lambda)$).
   Donc $P_\mu(u(\lambda)) \geqslant 0$, et $P_\mu(\mu) = 0$. Par la stricte croissance de P_μ, on a $u(\mu) < u(\lambda)$. Ainsi l'application u est décroissante.
3. Supposons que f est décroissante et que f ne soit pas continue en $x_0 \in I$.
   Ainsi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a > b = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. Soit $b < \alpha \neq f(x_0) < a$. Il n'existe pas de $x \in I$ tel que $f(x) = \alpha$.
   En effet si $x < x_0, f(x) \geqslant a$ et si $x > x_0, f(x) \leqslant b$. Ainsi $f(I)$ n'est pas un intervalle.
4. Montrons que $u(]0, +\infty[) =]0, 1[$. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Alors $\lambda = \dfrac{1 - \alpha^3}{\alpha} > 0$ vérifie $\alpha^3 + \lambda\alpha - 1 = 0$; soit $P_\lambda(\alpha) = 0$. Par unicité de $u(\lambda)$, il vient $u(\lambda) = \alpha$.
5. La fonction u est monotone décroissante. La question précédente montre que u est continue.
6. On peut utiliser directement la question 4 et la monotonie de f ou refaire une démonstration.
   Les limites $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} u(\lambda)$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} u(\lambda)$ existent puisque la fonction u est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et bornée.
   Posons $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} u(\lambda) = a$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} u(\lambda) = b$. Il vient $0 \leqslant a, b \leqslant 1$.
   - On a : $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} u(\lambda)^3 = a^3$ et $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \lambda u(\lambda) = 0$. Donc $a^3 = 1$ et $a = 1$.
   - Supposons que $b \neq 0$. On a $\lambda = \dfrac{1 - u^3(\lambda)}{u(\lambda)}$. Par limite de u, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda = \dfrac{1 - b^3}{b}$.
     Contradiction. Donc $b = 0$.

Sujet n° 33

Soit ω une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x,

$$\omega(x) = \int_{x-1}^{x} \omega(t)\mathrm{d}t$$

1. (a) Pour tout entier naturel n, justifier l'existence du maximum b_n de ω sur $[n, n+1]$.
   On note x_n un réel de $[n, n+1]$ tel que $\omega(x_n) = b_n$.

   (b) Soit n un entier naturel non nul.

   i. Montrer que, si $x_n \in \,]n, n+1[$, alors $\omega'(x_n) = 0$ et comparer alors $\omega(x_n - 1)$ à $\omega(x_n)$.

   ii. Montrer que, si $x_n = n+1$, alors ω est constante sur $[n, n+1]$.

   iii. Montrer que $b_{n-1} \geqslant b_n$.

   On définit de même le minimum a_n de ω sur $[n, n+1]$ et on montrerait que $a_{n-1} \leqslant a_n$.

2. On pose $\ell = 2\displaystyle\int_0^1 t\omega(t)\mathrm{d}t$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} (t-x)\omega(t)\mathrm{d}t$.
   Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée et exprimer $F(x)$ à l'aide de ℓ.

   (b) Montrer que, pour tout réel $x \geqslant n$,

   $$0 \leqslant \int_x^{x+1} (t-x)(b_n - \omega(t))\mathrm{d}t \leqslant b_n - \omega(x+1)$$

   (c) En déduire que

   $$0 \leqslant \frac{b_n - \ell}{2} \leqslant b_n - b_{n+1}$$

   On montrerait de même l'encadrement :

   $$0 \leqslant \frac{\ell - a_n}{2} \leqslant a_{n+1} - a_n$$

3. Montrer que les suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \omega(x)$.

Solution du sujet n° 33

1. (a) Pour tout entier naturel n, la fonction ω est continue sur le segment $[n, n+1]$, donc elle y est bornée et elle atteint ses bornes.

   (b) i. La fonction ω est dérivable sur l'ouvert $]n, n+1[$ et si $x_n \in]n, n+1[$, alors elle atteint son maximum en x_n qui est un point de cet ouvert, donc $\omega'(x_n) = 0$. En dérivant l'égalité initiale, il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, \omega'(x) = \omega(x) - \omega(x-1)$. En l'évaluant en x_n, on a alors : $\omega(x_n) = \omega(x_n - 1)$.

   ii. Si $x_n = n+1$, l'égalité initiale appliquée à $n+1$ donne :

$$b_n = \int_n^{n+1} \omega(t)\mathrm{d}t \quad \text{soit} \quad \int_n^{n+1} (b_n - \omega(t))\mathrm{d}t = 0$$

   La fonction intégrée étant continue et positive sur $[n, n+1]$, elle est nulle sur cet intervalle, c'est-à-dire que ω est constante sur $[n, n+1]$.

   iii. Dans le cas (i), $b_n = \omega(x_n) = \omega(x_{n-1}) \leqslant b_{n-1}$ car $x_{n-1} \in [n-1, n]$.
   Dans le cas (ii), $b_n = \omega(n+1) = \omega(n) \leqslant b_{n-1}$ car $n \in [n-1, n]$.
   Il reste un cas : celui où $x_n = n$. Dans ce cas, $b_n = \omega(n) \leqslant b_{n-1}$ car $n \in [n-1, n]$.
   Dans tous les cas, on a bien : $b_{n-1} \geqslant b_n$.

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} t\omega(t)\mathrm{d}t - x\int_x^{x+1} \omega(t)\mathrm{d}t$, donc F est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = (x+1)\omega(x+1) - x\omega(x) - \int_x^{x+1} \omega(t)\mathrm{d}t - x(\omega(x+1) - \omega(x)) = \omega(x+1) - \int_x^{x+1} \omega(t)\mathrm{d}t = 0$$

   On en déduit que F est constante et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = F(0) = \dfrac{\ell}{2}$.

   (b) Pour tout $t \in [x, x+1]$, on a $0 \leqslant t - x \leqslant 1$.
   En notant $p = \lfloor t \rfloor$, on a d'une part $t \in [p, p+1]$; d'autre part $t \geqslant x \geqslant n$ entraîne $p \geqslant n$.
   Ainsi $\omega(t) \leqslant \max\limits_{[p,p+1]} \omega = b_p \leqslant b_n$, puisque la suite (b_k) est décroissante, d'où $b_n - \omega(t) \geqslant 0$.
   Ainsi, par produit, on a : $0 \leqslant (t-x)(b_n - \omega(t)) \leqslant b_n - \omega(t)$.
   D'où, en intégrant :

$$0 \leqslant \int_x^{x+1} (t-x)(b_n - \omega(t))\mathrm{d}t \leqslant b_n - \int_x^{x+1} \omega(t)\mathrm{d}t = b_n - \omega(x+1)$$

   (c) On remarque que, pour tout réel $x \geqslant n$:

$$\int_x^{x+1} (t-x)(b_n - \omega(t))\mathrm{d}t = b_n \int_x^{x+1} (t-x)\mathrm{d}t - \int_x^{x+1} (t-x)\omega(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}b_n - F(x) = \frac{b_n - \ell}{2}$$

   On conclut alors en évaluant l'encadrement de la question précédente en $x = x_{n+1} - 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}, a_1 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_1$, donc les suites (a_n) et (b_n) sont bornées et monotones, elles sont donc convergentes. Un passage à la limite dans les deux encadrements de la question précédente montre qu'elles convergent toutes deux vers ℓ.
   Soit maintenant un réel $\varepsilon > 0$ fixé.
   Il existe un entier n_1 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_1, \ell - \varepsilon \leqslant a_n$ et il existe un entier n_2 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_2, b_n \leqslant \ell + \varepsilon$. En notant $n_3 = \max(n_1, n_2)$, pour tout réel $x \geqslant n_3$, $x \in [n, n+1]$, où n est un entier supérieur ou égal à n_3. On a donc :

$$\ell - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant \omega(x) \leqslant b_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

   On en déduit que la limite de ω en $+\infty$ est égale à ℓ

Sujet n° 36

Soit a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout λ réel , on pose

$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$$

1. Soit λ, μ réels tels que $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Montrer que $\lambda = \mu$.
2. Pour tout réel x, on pose $H_\lambda(x) = \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t))dt$. On suppose que H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$.

   Montrer que $I(\lambda)$ existe.

3. Soit T un réel strictement positif. Dans cette question, on suppose que la fonction f est T-périodique.
   (a) Montrer qu'il existe un réel λ_0 pour lequel la fonction H_{λ_0} est elle aussi T-périodique.
   (b) En déduire qu'il existe une unique valeur λ pour laquelle $I(\lambda)$ existe.
4. Déterminer un équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_1^x \frac{|\sin t|}{t} dt$.

SOLUTION DU SUJET N° 36

1. Supposons $\lambda \neq \mu$. Les deux intégrales $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existant, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda-\mu}{t}dt$ converge comme différence de deux intégrales convergentes : contradiction.
2. La fonction $H_\lambda(x) = \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t))dt$ est une primitive de $x \to \lambda - f(t)$. Une intégration par parties donne
$$\int_a^x \frac{\lambda - f(t)}{t}dt = \left[\frac{H_\lambda(t)}{t}\right]_a^x + \int_a^x \frac{H_\lambda(t)}{t^2}dt$$
Lorsque $x \to +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{H_\lambda(x)}{x} = 0$ (car H_λ est bornée) et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{H(t)}{t^2}dt$ existe par comparaison avec un intégrale de RIEMANN. Donc $I(\lambda)$ existe.
3. (a) La condition nécessaire et suffisante pour que les primitives d'une fonction f, T-périodique, soient également T-périodiques et $\displaystyle\int_0^T f(t)dt = 0$. On le démontre en remarquant que pour tout x, $\displaystyle\int_x^{x+T} f(u)du = \int_0^T f(u)du$.

   Ici, on obtient
$$0 = \int_0^T (\lambda - f(t))dt \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$
   (b) Pour cette valeur λ_0, la fonction H est T-périodique, donc bornée sur $\mathbb{R}$. Par les question 2 et 1, Il existe une unique valeur λ_0 pour laquelle $I(\lambda_0)$ existe.
4. La question 3 s'applique à la fonction $f : t \to |\sin(t)|$ qui est π périodique. Or $\displaystyle\int_0^\pi |\sin t|dt = 2$. Donc en posant $\lambda_0 = \dfrac{2}{\pi}$, il vient
$$\int_1^x \frac{|\sin t|}{t}dt = \frac{2}{\pi}\int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^x \frac{f(t)-\lambda_0}{t}dt$$
Et $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_1^x \frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi}\ln x$ avec $x \to \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)-\lambda_0}{t}dt$ bornée. En utilisant les résultats précédents :
$$\int_1^x \frac{|\sin t|}{t}dt \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln x$$

Sujet n° 38

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   On pose désormais $u_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ et on se propose, d'une part, de trouver un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$, puis, d'autre part, de déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\ln(n) + \dfrac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.

   (b) En déduire un équivalent de H_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

3. Pour tout entier naturel k non nul, on pose $v_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$.

   (a) Établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{2}{(k+1)\pi} \leqslant v_k \leqslant \dfrac{2}{k\pi}$.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\,(H_n - 1) \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\left(H_n - \frac{1}{n}\right)$.

   (c) En déduire, d'une part, un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$, et d'autre part, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$

4. Cette question est indépendante des précédentes. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$?

Solution du sujet n° 38

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{|\sin t|}{t}$ est continue sur $]0, n\pi]$. De plus, au voisinage de 0^+, on a $\dfrac{|\sin t|}{t} = \dfrac{\sin t}{t}$ mais $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, donc $t \mapsto \dfrac{|\sin t|}{t}$ se prolonge par continuité en 0 . Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. (a) On connait (ou on prouve) l'inégalité, valable pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$. On somme pour k allant de 1 à $n-1 (n \geqslant 2)$, ce qui donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$, soit :

   $H_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant H_n - \dfrac{1}{n}$ (valable aussi pour $n = 1$).

   En recentrant l'encadrement, on trouve bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln n + \dfrac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln n + 1$.

   (b) Pour $n \geqslant 2$, on peut tout diviser par $\ln n > 0$, ce qui donne : $1 + \dfrac{1}{n \ln n} \leqslant \dfrac{H_n}{\ln n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln n}$. On trouve, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{H_n}{\ln n} = 1$ et on peut conclure : $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

3. (a) On effectue le changement de variable $u = t - k\pi$ de classe C^1 sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ et on trouve :
   $v_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u+k\pi)|}{u+k\pi}\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \frac{\left|(-1)^k \sin u\right|}{u+k\pi}\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{u+k\pi}\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+k\pi}\mathrm{d}u.$
   Pour tout u de $[0, \pi]$, on a $k\pi \leqslant u + k\pi \leqslant (k+1)\pi$ puis en inversant (car $k \in \mathbb{N}^*$ donc tout est strictement positif), et en multipliant par $\sin u \geqslant 0$, on arrive à : $\dfrac{\sin u}{(k+1)\pi} \leqslant \dfrac{\sin u}{u+k\pi} \leqslant \dfrac{\sin u}{k\pi}$.

   On intègre sur $[0, \pi]$ (fonctions continues et $0 < \pi$) : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{2}{(k+1)\pi} \leqslant v_k \leqslant \dfrac{2}{k\pi}$.

   (b) Avec la relation de Chasles, on peut écrire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = u_n - u_1 = u_n - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

   Conclusion : $\forall n \geqslant 2, u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$. Comme, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{(k+1)\pi} \leqslant v_k \leqslant \dfrac{2}{k\pi}$,

   on en déduit $\displaystyle\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} v_k \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et on trouve :

   $$\forall n \geqslant 2, \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}(H_n - 1) \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\left(H_n - \frac{1}{n}\right)$$

   Cette relation est aussi valable pour $n = 1$ puisqu'elle donne : $u_1 \leqslant u_1 \leqslant u_1$.

   (c) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est indépendante de n et $H_n \sim \ln n$ donc on peut supposer que $u_n \sim \dfrac{2}{\pi} \ln n$, ce qui se confirme aisément en divisant l'encadrement de 4 b) par $\dfrac{2}{\pi} \ln n > 0$.

   On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{\pi} \ln n = +\infty$, et comme $u_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$, on peut conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (sinon $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ serait finie).

4. En 0, pas de problème, puisque $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, et en $+\infty$, une IPP, avec $u = \dfrac{1}{t}$ et $v' = \sin t$, fournit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. On conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Sujet n° 41

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant a_0, a_1 et a_2 donnés et

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$$

1. (a) Montrer (sans calculer les a_n) que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$, alors il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|a_n| \leqslant M\,2^n$.

   (b) En déduire la convergence de la série de terme général $a_n x^n$ pour des valeurs de x à préciser.

   (c) Pour ces valeurs de x, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$. Calculer $f(x)$.

2. (a) Que dire de l'ensemble $\mathcal{E}$?

   (b) Déterminer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}$ telle que $a_0 = 0\,,\ a_1 = 1\,,\ a_2 = 2\,.$

   (c) Déterminer les suites géométriques appartenant à $\mathcal{E}$.

   (d) En déduire une base de $\mathcal{E}$, et exprimer le terme général d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ en fonction de a_0, a_1, a_2.

   (e) Retrouver alors l'expression de $f(x)$. Pour quels réels x est-elle valable ?

3. (a) Soit $(a_n) \in \mathcal{E}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

   (b) Calculer A^n à l'aide de ce qui précède.

Solution du sujet n° 41

1. (a) Par récurrence forte en choisissant $M \geqslant \max\big(|a_0|, 2|a_1|, 4|a_2|\big)$; alors :

$$|a_{n+3}| \leqslant |a_{n+2}| + |a_{n+1}| + |a_n| \leqslant M\, 2^n \big(2^2 + 2 + 1\big) \leqslant M\, 2^n \times 8 = M\, 2^{n+3}$$

   (b) Si $|x| < 1/2$, alors $\forall n$, $|a_n\, x^n| \leqslant M\, |2x|^n$ terme général d'une série géométrique convergente ; par comparaison, $\sum a_n\, x^n$ converge absolument, donc converge.

   (c) Pour $0 < |x| < 1/2$, on a en multipliant par x^n et en sommant :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+3}\, x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\ \frac{1}{x^3}\Big[f(x) - a_0 - a_1\, x - a_2\, x^2\Big] &= \frac{1}{x^2}\Big[f(x) - a_0 - a_1\, x\Big] + \frac{1}{x}\Big[f(x) - a_0\Big] - f(x) \\ f(x) &= \frac{(a_2 - a_1 - a_0)\, x^2 + (a_1 - a_0)\, x + a_0}{x^3 - x^2 - x + 1}\end{aligned}$$

   cette égalité étant encore vraie pour $x = 0$.

2. (a) Par linéarité de la relation, $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 via l'isomorphisme

$$\Phi : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E} \mapsto \big(a_0, a_1, a_2\big) \in \mathbb{R}^3$$

   (b) Par récurrence forte immédiate, $\forall n$, $a_n = n$.

   (c) La suite nulle est solution. Sinon on a :

$$(r^n) \in \mathcal{E} \iff \forall n,\ r^n\Big[r^3 - r^2 - r + 1\Big] = 0 \iff (r-1)^2\,(r+1) = 0 \iff r \in \{-1, 1\}$$

   (d) D'où une base de $\mathcal{E}$ constituée de $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$; donc il existe α, β, γ réels tels que, pour tout n, on a : $a_n = \alpha + n\,\beta + (-1)^n\,\gamma$; puis

$$\left\{\begin{array}{cccll} \alpha & & +\gamma & = & a_0 \\ \alpha & +\beta & -\gamma & = & a_1 \\ \alpha & +2\beta & +\gamma & = & a_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccll} \alpha & & +\gamma & = & a_0 \\ -\alpha & & +3\gamma & = & a_2 - 2a_1 \\ \alpha & +\beta & -\gamma & = & a_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccl} \alpha & = & \frac{1}{4}\big[-a_2 + 2a_1 + 3a_0\big] \\ \beta & = & \frac{1}{4}\big[2a_2 - 2a_0\big] \\ \gamma & = & \frac{1}{4}\big[a_2 - 2a_1 + a_0\big] \end{array}\right.$$

   (e) Par somme d'une série géométrique (dérivée) convergente pour $|x| < 1$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\big[\alpha + n\,\beta + (-1)^n\,\gamma\big]\, x^n = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta x}{(1-x)^2} + \frac{\gamma}{1+x} = \frac{x^2\,(-\alpha+\beta+\gamma) + x\,(\beta - 2\gamma) + (\alpha+\gamma)}{(1-x)^2\,(1+x)}$$

   qui redonne bien l'expression ci-dessus, pour $|x| < 1$.

3. (a) Par identification :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Par récurrence immédiate on a :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

   d'où A^n par identification en remplaçant α, β, γ trouvés en 2.(d) dans l'expression de a_n, a_{n+1}, a_{n+2}.

Sujet n° 43

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ positive continue et décroissante.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$.

Dans tout l'exercice, on suppose la suite (S_n) convergente et on note

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n\geqslant 0} f(n)$$

1. Montrer la convergence de la série : $\sum (-1)^n f(n)$. On note $A = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n f(n)$
2. Montrer la convergence des séries $\sum f(2n)$ et $\sum f(2n+1)$.
   On note SP et SI les sommes des ces deux séries. Exprimer SP et SI en fonction de S et A.
3. Pour tout entier $n > 0$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)dt$ converge et que : $|S - S_n| \leqslant \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)dt$
4. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note : $A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(k)$, $v_n = A_{2n-1}$ et $w_n = A_{2n}$.
   (a) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes puis que :
   $$\forall n > 0,\ A_{2n-1} \leqslant A_{2n+1} \leqslant A \leqslant A_{2n}$$
   (b) En déduire : $\forall n > 0, |A - A_n| \leqslant f(n+1)$

On suppose désormais la fonction f **strictement** décroissante.

5. Pour tout $(p, \varepsilon) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$ on note $H(p, \varepsilon)$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+p} - S_n \leqslant \varepsilon\}$.
   (a) Montrer que $H(p, \varepsilon)$ admet un plus petit élément qu'on notera $\varphi(p, \varepsilon)$
   (b) Justifier la bijectivité de f et montrer l'inégalité :
   $$\varphi(p, \varepsilon) \leqslant f^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{p}\right) - 1$$
6. Cas particulier. On prend $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2}$ et on donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer A, SP, SI.
   Comment choisir n de telle sorte que S_n et A_n approchent respectivement S et A avec une erreur inférieure à 0.1 ?

Solution du sujet n° 43

1. L'hypothèse $f \geqslant 0$ entraîne $|(-1)^n f(n)| = f(n)$ d'où la convergence absolue de la série $\sum(-1)^n f(n)$.
2. On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(2k) \leqslant S_{2n} \leqslant S$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(2k+1) \leqslant S_{2n+1} \leqslant S$.
   Ainsi les sommes partielles des deux séries à termes positifs étudiées sont bornées ; donc ces séries convergent.
   $$\begin{cases} S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(2k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(2k+1) \\ A_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(2k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(2k+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(2k) = \frac{1}{2}(S_{2n} + A_{2n}) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(2k+1) = \frac{1}{2}(S_{2n} - A_{2n}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SP = \displaystyle\sum_{\geqslant 0} f(2k) = \frac{1}{2}(S+A) \\ SI = \displaystyle\sum_{\geqslant 0} f(2k+1) = \frac{1}{2}(S-A) \end{cases}$$
3. Comme f est décroissante, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n) \Rightarrow \forall p > 0,\ \int_n^{n+p} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} f(k) \leqslant S$
   d'où la convergence de l'intégrale $\int_n^{+\infty} f(t)dt$.
   $$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt \Rightarrow \forall p > 0,\ 0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} f(k) < \sum_{k=n+1}^{n+p} \int_{k-1}^{k} f(t)dt = \int_n^{n+p} f(t)dt \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)dt$$
   d'où en prenant la limite quand p tend vers $+\infty$: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) = |S - S_n| \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)dt$
4. (a) on a : $v_{n+1} - v_n = -f(2n+1) + f(2n) \geqslant 0$, $w_{n+1} - w_n = f(2n+2) - f(2n+1) \leqslant 0$ et $w_n - v_n = f(2n)$ La série $\sum f(n)$ étant supposée convergente, nécessairement $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}(w_n - v_n) = 0$ ce qui montre que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes ; elles convergent vers la même limite A vérifiant $w_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} w_n \leqslant A \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n \leqslant v_n$
   La croissance de w_n entraîne : $A_{2n-1} \leqslant A_{2n+1} \leqslant A \leqslant A_{2n}$
   (b) on en déduit : $|A - A_{2n-1}| \leqslant A_{2n} - A_{2n-1} = f(2n)$(cas pair)
   et $|A - A_{2n}| \leqslant A_{2n} - A_{2n+1} = f(2n+1)$(cas impair)
   d'où : $\forall n > 0, |A - A_n| \leqslant f(n+1)$
5. (a) $S_{n+p} - S_n = f(n+1) + \cdots f(n+p)$ est la somme de p suites toutes convergentes et de limites nulles, donc $\lim_{n\to+\infty}(S_{n+p} - S_n) = 0$, ce qui prouve que $H(p,\varepsilon)$ est non vide.
   $H(p,\varepsilon)$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle admet un plus petit élément.
   (b) La fonction f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ donc bijective.
   La décroissance de f entraîne : $S_{n+p} - S_n = f(n+1) + \cdots f(n+p) \leqslant pf(n+1)$
   Tout n tel que $pf(n+1) \leqslant \varepsilon \Rightarrow n \geqslant f^{-1}(\frac{\varepsilon}{p}) - 1$ appartient à $H(p,\varepsilon)$. Donc $\varphi(p,\varepsilon) \leqslant f^{-1}(\frac{\varepsilon}{p}) - 1$.
6. $$f(t) = \frac{1}{(t+1)^2} \Rightarrow S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } SI = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2(k+1))^2} = \frac{1}{4}S = \frac{\pi^2}{24}$$
   On sait aussi : $SI = \frac{1}{2}(S - A)$ on en déduit $A = \frac{S}{2} = \frac{\pi^2}{12}$, d'où : $SI = \frac{\pi^2}{24}$ et $SP = \frac{3\pi^2}{24}$.
   $|S - S_n| \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{n+1}$ est inférieur à 0.1 pour $n \geqslant 9$.
   $|A - A_n| \leqslant f(n+1) = \frac{1}{(n+2)^2}$ est inférieur à 0.1 pour $n \geqslant \sqrt{10} - 2$ donc dès que $n \geqslant 2$.
   On choisit donc $n \geqslant 9$ pour avoir les deux simultanément.

Sujet n° 48

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$. On définit $F :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F : (x, y) \mapsto f(x) + f(y) - f(x+y)$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$ et exprimer, pour tout $(x, y) \in]0,+\infty[^2$, les dérivées partielles premières $\partial_1 F(x, y)$ et $\partial_2 F(x, y)$ en fonction de $f'(x)$, $f'(y)$ et $f'(x+y)$.
2. Établir que, pour tout $a \in]0,+\infty[$, l'équation $f'(x) = f'(a)$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet au plus une solution distincte de a.
3. En déduire que, pour tout $(x, y) \in]0,+\infty[^2$, (x, y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x = y \text{ et } f'(x) = f'(2x).$$

4. Montrer que F admet un unique point critique, noté (α, α), et montrer que $1 < \alpha < 2$.
5. Montrer : $f''(\alpha) < 0$ et $f''(2\alpha) > 0$.
6. Montrer que F admet un extremum local. Déterminer la nature de cet extremum local.

Solution du sujet n° 48

1. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ par produit de fonctions $\mathcal{C}^2$.
   Les fonctions $(x,y)\mapsto x,(x,y)\mapsto y$ et $(x,y)\mapsto x+y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$ car polynomiales, et à valeurs dans $]0,+\infty[$. Donc, par composition, F est $\mathcal{C}^2$ car somme de fonctions $\mathcal{C}^2$. On a alors
   $$\partial_1 f(x,y)=f'(x)-f'(x+y) \text{ et } \partial_2 F(x,y)=f'(y)-f'(x+y)$$
2. On a $f':x\mapsto e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$, et donc $f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=e^{-x}(x-2)$. On a f' qui est strictement monotone sur $]0,2]$ et sur $]2,+\infty[$, l'équation $f'(x)=f'(a)$ possède au plus deux solutions. Puisque l'une d'elles est a, elle possède au plus une solution distincte de a.
3. (x,y) est un point critique de F si et seulement si $\partial_1 F(x,y)=\partial_2 F(x,y)=0$, soit
   $$\begin{cases} f'(x)=f'(x+y)\\ f'(y)=f'(x+y)\end{cases}$$
   Comme x et y sont strictement positifs, $x+y>x$ et $x+y>y$. Donc d'après la question précédente, l'équation $f'(t)=f'(x+y)$ possède au plus une solution différente de $x+y$.
   Et donc si $f'(x)=f'(y)=f'(x+y)$, alors nécessairement $x=y$, et alors $x+y=2x$, donc $f'(x)=f'(2x)$. Réciproquement, si $x=y$ et $f'(2x)=f'(2x)$, alors $f'(x)=f'(x+y)$ et $f'(y)=f'(x+y)$ et donc (x,y) est un point critique de F.
   En conclusion, (x,y) est un point critique de F si et seulement si $x=y$ et $f'(x)=f'(2x)$.
4. Une solution de l'équation $f'(x)=f'(2x)$ sera nécessairement dans $[0,2]$, avec $2x\in[2,+\infty[$. Autrement dit, une solution de $f'(x)=f'(2x)$ est nécessairement dans $]1,2[$.
   De plus, on a
   $$f'(x)=f'(2x)\Leftrightarrow e^{-x}(1-x)=e^{-2x}(1-2x)\Leftrightarrow(1-x)=e^{-x}(1-2x).$$
   Posons alors $g(x)=1-x-e^{-x}(1-2x)$, de sorte que $f'(x)=f'(2x)$ si et seulement si $g(x)=0$. Une étude de la fonction g donne $g'(x)=-1+e^{-x}(1-2x)+2e^{-x}=e^{-x}(3-2x)-1$. On montre que g est strictement décroissante sur $]1,2[$.
   D'autre part, $g(1)=\mathrm{e}^{-1}\geqslant 0$ et $g(2)=-1+3\mathrm{e}^{-2}$. Puisque $\mathrm{e}\geqslant 2,\mathrm{e}^{-2}\leqslant\frac{1}{4}$ et donc $g(2)\leqslant 0$.
   D'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique $\alpha\in]1,2[$ tel que $g(\alpha)=0$ et donc un unique $\alpha\in]1,2[$ tel que $f'(\alpha)=f'(2\alpha)$.
5. Puisque $\alpha\in]1,2[$ et $2\alpha>2$, d'après le tableau de variation, on a $f''(\alpha)<0$ et $f''(2\alpha)>0$.
6. Puisque F possède un unique point critique, elle possède au plus un extremum local, qui sera nécessairement en (α,α). Un calcul rapide de la hessiennne de F en (α,α) donne
   $\nabla^2F(\alpha,\alpha)=\begin{pmatrix} f''(\alpha)-f''(2\alpha) & -f''(2\alpha)\\ -f''(2\alpha) & f''(\alpha)-f''(2\alpha)\end{pmatrix}.$
   Par la question précédente, $\mathrm{tr}(\nabla^2F)<0$ et $\det((\nabla^2F))=f''(\alpha)(f''(\alpha)-2f''(2\alpha))>0$. Cette matrice possède deux valeurs propres non nulles de même signe (déterminant positif) et qui sont négatives par la trace. Ainsi F admet en (α,α) un maximum local.

Sujet n° 51

On note I le segment $[0,1]$ de $\mathbb{R}$.

1. Soit $r \in]0,1[$. Dans cette question, f désigne une fonction continue sur I qui est strictement croissante sur $[0,r]$ et strictement décroissante sur $[r,1]$. De plus, on suppose que $f(0)=f(1)=0$ et on pose $M=f(r)$.
   (a) Donner l'allure de la courbe représentative de f.
   (b) Justifier que f est une bijection de $[0,r]$ (resp. $[r,1]$) sur le segment $[0,M]$; on note g_1 (resp. g_2) sa réciproque. Que peut-on dire de g_1 et g_2 ?
   (c) Vérifier que pour tout $x \in I$, on a $g_1(f(x)) \leqslant x \leqslant g_2(f(x))$. En déduire que si (x_n) est une suite de points de I telle que la suite $(f(x_n))$ tend vers M, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = r$.
2. Dans cette question, on pose $f(x)=x(1-x)$.
   (a) Étudier rapidement la fonction f.
   (b) On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie en se donnant $u_0 \in [0,\dfrac{1}{2}[$ et en posant $u_{n+1} = \dfrac{1}{4(1-u_n)}$. Vérifier que la suite (u_n) est correctement définie et que pour tout entier $n \geqslant 0$, u_n est contenu dans $[0,\dfrac{1}{2}[$.
   (c) Montrer que $u_0 < u_1$, puis étudier les variations de la suite (u_n).
   (d) Montrer que la suite (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Dans toute la suite, on considère une fonction g qui est continue sur $[0,1]$, strictement croissante sur $[0,\frac{1}{2}]$, strictement décroissante sur $[\frac{1}{2},1]$ et telle que : $g(0)=g(1)=0$ et $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

3. (a) On se donne $v_0 \in [0,\dfrac{1}{2}[$. Montrer que l'on peut trouver $v_1 \in]0,\dfrac{1}{2}[$ tel que $g(v_1)(1-g(v_0)) > \dfrac{1}{4}$.
   (b) Construire par récurrence une suite $(v_n)_{n\geqslant 0} \subseteq I$ telle que $g(v_{n+1})(1-g(v_n)) > \dfrac{1}{4}$ pour tout $n \geqslant 0$.
4. Dans cette question, on considère une suite $(w_n)_{n\geqslant 0} \subseteq I$ telle que $g(w_{n+1})(1-g(w_n)) \geqslant \dfrac{1}{4}$ pour tout $n \geqslant 0$.
   (a) Montrer que la suite $(g(w_n))$ est croissante.
   (b) En déduire que la suite (w_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution du sujet n° 51

1. (a) La courbe passe par les points remarquables $(0,0)$, (r,M) et $(1,0)$. Il est clair que cette courbe passe par un unique sommet (maximum global) qui est atteint au point d'abscisse r.

   (b) La fonction f est continue et strictement croissante (resp strictement décroissante) sur l'intervalle $I_1 = [0,r]$ (resp. $I_2 = [r,1]$). Le théorème de la bijection s'applique sur chacun de ces segments, d'où l'existence des réciproques g_1 et g_2. De plus, ce théorème nous dit que ces deux fonctions sont continues, que g_1 est strictement croissante et g_2 strictement décroissante et de plus on a $g_1 \leqslant g_2$.

   (c) Il est clair que cette inégalité est vérifiée puisque x est nécessairement l'un des deux termes extrêmes. Comme la suite $(f(x_n))$ tend vers M, par encadrement on voit que la suite (x_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_1(f(x_n)) = g_1(M) = r \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} g_2(f(x_n)) = g_2(M) = r$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = r$.

2. (a) On voit facilement que f satisfait les hypothèses requises dans la question 1.) avec $r = \dfrac{1}{2}$ et $M = \dfrac{1}{4}$. De plus, la courbe est symétrique par rapport à l'axe $y = \dfrac{1}{2}$ car $f(x) = f(1-x)$.

   (b) Comme $u_0 \in [0, \dfrac{1}{2}[$, le quotient associé à u_1 est bien défini et $0 < u_1 < \dfrac{1}{4} \times 2 = \dfrac{1}{2}$. Soit $n \geqslant 1$, supposons que u_n soit bien défini et que $u_n \in]0, \dfrac{1}{2}[$; alors de la même manière, on voit que u_{n+1} est bien défini ($u_n \neq 1$) et que $0 < u_{n+1} < \dfrac{1}{4} \times 2 = \dfrac{1}{2}$ $(0 < (1-u_n)^{-1} < 2)$, ce qui termine la question.

   (c) On observe que $u_1 - u_0 = \dfrac{(1-2u_0)^2}{4(1-u_0)} > 0$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4(1-x)}$ est strictement croissante sur $[0, \dfrac{1}{2}[$ et que $u_n \in [0, \dfrac{1}{2}[$ pour tout entier n, on voit en appliquant n fois cette fonction que $u_n < u_{n+1}$; la suite (u_n) est donc strictement croissante.

   (d) La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente, d'où $M = \dfrac{1}{4} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}(1 - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1-u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$. Avec 1. c), on en déduit que la suite (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

3. (a) Comme $v_0 \in [0, \dfrac{1}{2}[$, on a $1 - g(v_0) > \dfrac{1}{2}$ et il suffit alors de considérer la fonction $h : x \mapsto g(x) \times (1 - g(v_0))$ sur l'intervalle $[0, \dfrac{1}{2}]$ qui est évidemment continue, et telle que $h(0) = 0$ et $h(\dfrac{1}{2}) > \dfrac{1}{4}$, ce qui nous assure l'existence d'un $v_1 \in]0, \dfrac{1}{2}[$ tel que $g(v_1)(1 - g(v_0)) > \dfrac{1}{4}$.

   (b) Il suffit de prendre pour hypothèse de récurrence au rang $n \geqslant 0$: « il existe $v_{n+1} \in]0, \dfrac{1}{2}[$ (bien penser à mettre cette relation d'appartenance) tel que $g(v_{n+1})(1 - g(v_n)) > \dfrac{1}{4}$ ». La question 3. a) nous dit que c'est vrai au rang 0. Si on suppose que c'est vrai au rang n, un raisonnement analogue à celui de la question précédente nous montre que c'est encore vrai au rang $n+1$.

4. (a) On remarque que $g(w_n)$ est toujours différent de 1. Par ailleurs, il vient $g(w_{n+1})(1 - g(w_n)) \geqslant \dfrac{1}{4} = M \geqslant f(g(w_n)) = g(w_n)(1 - g(w_n))$, d'où $g(w_{n+1}) \geqslant g(w_n)$ puisque $1 - g(w_n) > 0$.

   (b) La suite $(g(w_n))$ est convergente car elle est croissante et majorée. On a $\dfrac{1}{4} \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} g(w_{n+1})(1 - g(w_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(g(w_n))$. D'autre part, on a nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} f(g(w_n)) \leqslant \dfrac{1}{4}$. D'où $M = \dfrac{1}{4} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(g(w_n))$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} g(w_n) = \dfrac{1}{2}$. Or $\dfrac{1}{2}$ est le maximum de g sur I et la propriété montrée en 1.c) s'applique aussi pour g ; il en résulte que la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Sujet n$^{\text{o}}$ 52

Soit t un réel non nul. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la moyenne d'ordre t de n réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$ en posant :

$$m_t(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^t + \cdots + x_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}.$$

1. Que représente $m_1(x_1, \cdots, x_n)$?
2. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$. On introduit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $f(t) = \ln(x_1^t + \cdots + x_n^t)$.
   (a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0 (on notera encore f ce prolongement).
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis calculer f' et f''. Vérifier que ces deux fonctions se prolongent par continuité en 0.
   On admet que la fonction f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et que l'on a : $f'(0) = \lim\limits_{0^+} f'$ et $f''(0) = \lim\limits_{0^+} f''$.
   (c) Soit $t > 0$. Établir l'inégalité suivante :
   $$\left[(\ln x_1)x_1^t + \cdots + (\ln x_n)x_n^t\right]^2 \leqslant \left[(\ln x_1)^2 x_1^t + \cdots + (\ln x_n)^2 x_n^t\right]\left[x_1^t + \cdots + x_n^t\right].$$
   (d) Prouver que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
3. Dans cette question, on suppose que les n réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$ sont fixés, et pour $t > 0$, on pose $m(t) = m_t(x_1, \ldots, x_n)$.
   (a) Exprimer $m(t)$ en fonction de $f(t)$ (introduite dans la question 2.).
   (b) En revenant à la définition, prouver que m est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant une inégalité de Taylor, montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0.
   (c) Justifier les inégalités
   $$\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^n x_k}{n} \leqslant \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^n x_k^2}{n}}.$$
   (d) Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} m(t) = \max(x_1, \cdots, x_n)$ (*On pourra se ramener au cas où $x_1 = \max(x_1, \ldots, x_n)$ et introduire les points $y_k = \dfrac{x_k}{x_1}$ pour $k = 2, \ldots, n$.*).
4. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Soit $t < 0$. Vérifier que
   $$m_t(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{m_{|t|}(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n})}.$$
   (b) En déduire que la fonction $t \mapsto m_t(x_1, \cdots, x_n)$ se prolonge en une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Que peut-on dire de $m_t(x_1, \ldots, x_n)$ lorsque t tend vers $-\infty$.

Solution du sujet n° 52

1. C'est tout simplement la moyenne arithmétique habituelle.
2. (a) Comme $x_k^t = \exp(t \ln x_k) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 1$, on voit que $f(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \ln n$, et par suite la fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln n$.

   (b) Par somme et composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on voit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ouvert. De plus, pour $t > 0$ on a

$$f'(t) = \frac{\sum_{k=1}^n (\ln x_k) x_k^t}{\sum_{k=1}^n x_k^t} \text{ et } f''(t) = \frac{\left[\sum_{k=1}^n (\ln x_k)^2 x_k^t\right]\left[\sum_{k=1}^n x_k^t\right] - \left[\sum_{k=1}^n (\ln x_k) x_k^t\right]^2}{\left[\sum_{k=1}^n x_k^t\right]^2}.$$

   Ces deux fonctions se prolongent donc par continuité en 0 car

$$\lim_{t \to 0^+} f'(t) = \ln\left((x_1 \times \cdots \times x_n)^{\frac{1}{n}}\right) = f'(0) \text{ et}$$
$$\lim_{t \to 0^+} f''(t) = n^{-2}\left[n \sum_{k=1}^n (\ln x_k)^2 - \ln\left(x_1 \times \cdots \times x_n\right)^2\right] = f''(0).$$

   (c) On écrit le terme général de la somme, qui apparaît dans le membre de gauche, sous la forme $\left(x_k^{\frac{t}{2}} \ln(x_k)\right) \times x_k^{\frac{t}{2}}$ et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

   (d) Avec la question 2. b) et l'inégalité précédente, on voit que f'' est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Le cours nous dit alors que f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Par continuité, elle l'est encore sur $\mathbb{R}_+$.
3. (a) Pour faire intervenir f, on s'intéresse bien sûr à $\ln m(t) = t^{-1}[f(t) - \ln n] = t^{-1}[f(t) - f(0)]$, d'où $m(t) = \exp\left(t^{-1}[f(t) - f(0)]\right)$.

   (b) Supposons que $0 < t_1 < t_2$. Avec la question précédente on voit que $m(t_1) \leqslant m(t_2)$ équivaut après simplification à $f(t_1) \leqslant \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) f(0) + \frac{t_1}{t_2} f(t_2)$ et cette inégalité est vraie puisque f est convexe ($t_1 \in]0, t_2]$, $\frac{t_1}{t_2} < 1$ et $t_1 = \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \times 0 + \frac{t_1}{t_2} t_2$). Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, f'' est bornée sur $[0, 1]$ et l'inégalité de Taylor reste intégral ou de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 conduit immédiatement à $|t^{-1}[f(t) - f(0)] - f'(0)| \leqslant Mt$ (où M est une constante strictement positive). Il s'ensuit que la fonction m se prolonge par continuité en 0 en posant $m(0) = (x_1 \times \cdots \times x_n)^{\frac{1}{n}}$ ($m(0)$ est la moyenne géométrique).

   (c) Par croissance de m, on a bien $m(0) \leqslant m(1) \leqslant m(2)$ ($m(2)$ est la moyenne quadratique).

   (d) Comme les x_k jouent des rôles symétriques, on peut se ramener au cas où $x_1 = \max(x_1, \cdots, x_n)$. Il vient $m(t) = x_1 \exp\left[\frac{\ln\left(1 + \sum_{k=2}^k y_k^t\right)}{t}\right] \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} x_1$ car $y_k = \dfrac{x_k}{x_1} \in]0, 1]$ pour $k = 2, \cdots, n$.
4. (a) Soit $t < 0$. Alors $t = -|t|$ et l'égalité demandée devient un jeu d'écriture.

   (b) La valeur absolue est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$. Par composition avec une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ on obtient une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et en passant à l'inverse, il en découle que $t \mapsto m_t(x_1, \cdots, x_n)$ est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$. La réponse complète provient du raccordement continu en 0 car $\lim\limits_{t \to 0^-} m_t(x_1, \cdots, x_n) = \lim\limits_{s \to 0^+} m_s(x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1})^{-1} = (x_1 \times \cdots \times x_n)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{t \to 0^+} m_t(x_1, \cdots, x_n)$.

   (c) En utilisant une nouvelle fois 4. a), il vient

$$\lim_{t \to -\infty} m_t(x_1, \cdots, x_n) = \lim_{s \to +\infty} m_s(x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1})^{-1} = \frac{1}{\max(x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1})} = \min(x_1, \cdots, x_n).$$

Sujet n° 56

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u^{(n)}$ la dérivée n-ième de u.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction H_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ u^{(n)}(x) = H_n(x)u(x)$.

1. Trouver une relation simple entre $u'(x)$, $u(x)$ et x qui est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_{n+2}(x) = xH_{n+1}(x) + (n+1)H_n(x)$.
2. Montrer que H_n est une fonction paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair).
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, exprimer $H_{2p}(0)$ en fonction de p.
4. Montrer que la fonction H_n est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

Soit la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ définie par récurrence par $T_0 = 1$, $T_1 = 1$ et :

$$\forall n \geqslant 0,\ T_{n+2} = T_{n+1} + (n+1)T_n.$$

5. Montrer que $T_n = H_n(1)$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit la fonction v_p par : $v_p(x) = H_{2p}(x)\exp\left(\frac{x^2}{4}\right)$.
On admet qu'alors on a : $\forall x \in [0,1],\ \alpha^2 v_p(x) \leqslant v_p''(x) \leqslant \beta^2 v_p(x)$, avec $\beta = \sqrt{2p + \frac{3}{4}}$ et $\alpha = \sqrt{2p + \frac{1}{2}}$.

6. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{H_{2p}(0)}{2}\left(\mathrm{e}^{\beta x} + \mathrm{e}^{-\beta x}\right)$.
   En étudiant le signe de $w = v_p \times \varphi' - v_p' \times \varphi$, montrer que : $\forall x \in [0,1],\ v_p(x) \leqslant \varphi(x)$.

On obtiendrait de même le résultat suivant que l'on admet :

$$\forall x \in [0,1],\ v_p(x) \geqslant \frac{H_{2p}(0)}{2}\left(\mathrm{e}^{\alpha x} + \mathrm{e}^{-\alpha x}\right).$$

7. Déduire des questions précédentes un équivalent de T_{2p} lorsque p tend vers $+\infty$.

Solution du sujet n° 56

1. On a $u'(x) = xu(x)$. Donc en dérivant $n+1$ fois par la formule de Leibniz, on a :

$$u^{(n+2)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x) \times u^{(n+1-k)}(x) = xu^{(n+1)}(x) + (n+1)u^{(n)}(x).$$

Puis on multiplie tout par $u(x)$. *Autre idée :* par récurrence sur n (hérédité en dérivant une fois).

2. Comme u est paire, $u^{(n)}$ est de même parité que n, donc $H_n = \frac{u^{(n)}}{u}$ aussi.
Autre idée : montrer $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ par récurrence double sur $n \geqslant 0$.

3. En évaluant en $x = 0$ (avec $n = 2p$), on a : $H_{2(p+1)}(0) = (2p+1)H_{2p}(0)$,
Donc : $H_{2p}(0) = H_0(0) \prod_{k=0}^{p-1}(2k+1) = \dfrac{(2p)!}{\prod_{k=1}^{p} 2k} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$.

4. Montrons par récurrence double sur $n \geqslant 0$ la relation : $\forall x > 0,\ H_n(x) > 0$.
   - C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ car $H_0 = 1$ et $H_1 = X$.
   - Si c'est vrai aux rangs n et $n+1$, la question 1 montre que c'est vrai pour $n+2$.

5. Par récurrence double évidente, car $T_0 = H_0(1),\ T_1 = H_1(1)$ et

$$H_{n+2}(1) = H_{n+1}(1) + (n+1)H_n(1),\ T_{n+1} + (n+1)T_n = T_{n+2}$$

6. Notons $a = H_{2p}(0)$. Comme $H_{2p}(0) \geqslant 0$ (cf. Q3), on a $\varphi(x) \geqslant 0$, donc :

$$w'(x) = v_p(x)\varphi''(x) - v_p''(x)\varphi(x) = v_p(x)\beta^2\varphi(x) - v_p''(x)\varphi(x) = \varphi(x)\big(v_p(x)\beta^2 - v_p''(x)\big) \geqslant 0.$$

Or $\varphi'(0) = 0$ et $v_p'(0) = 0$ (car H_{2p}' impaire, car H_{2p} paire), d'où : $w(0) = v_p(0)\varphi'(0) - v_p'(0)\varphi(0) = 0$.
Comme w est croissante, on donc w est positive sur $[0,1]$.
Ainsi ($\varphi > 0$) : $\left(\dfrac{v_p}{\varphi}\right)' = -\dfrac{w}{\varphi^2} \leqslant 0$. Or $\left(\dfrac{v_p}{\varphi}\right)(0) = \dfrac{a}{a} = 1$.
Donc : $\forall x \in [0,1],\ \dfrac{v_p(x)}{\varphi(x)} \leqslant 1$, soit : $\forall x \in [0,1],\ v_p(x) \leqslant \varphi(x)$.

7. D'après la question prédédente, pour $x = 1$, en notant $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, on a :

$$H_{2p}(0)\cosh\left(\sqrt{2p+\frac{1}{2}}\right) \leqslant \exp\left(\frac{1}{4}\right) \times H_{2p}(1) \leqslant H_{2p}(0)\cosh\left(\sqrt{2p+\frac{3}{4}}\right).$$

Comme $\sqrt{2p+\frac{1}{2}}$ tend vers $+\infty$ et $\cosh x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2}$, on a : $\cosh\left(\sqrt{2p+\frac{1}{2}}\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2p+\frac{1}{2}}}}{2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2p}}}{2}$,
où cette seconde équivalence se justifie par : $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{2p+\frac{1}{2}}}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2p}}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2p+\frac{1}{2}}-\sqrt{2p}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2p+\frac{1}{2}}-\sqrt{2p}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,
puisque : $\sqrt{2p+\frac{1}{2}} - \sqrt{2p} = \sqrt{2p}\left(\sqrt{1+\frac{1}{2p}} - 1\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{2p} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2p} = \dfrac{1}{\sqrt{2p}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
De même, on a $\cosh\left(\sqrt{2p+\frac{3}{4}}\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2p}}}{2}$, donc par théorème d'encadrement, on en déduit que

$$T_{2p} = H_{2p}(1) \underset{p\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} H_{2p}(0) \times \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2p}}}{2} = \frac{(2p)!}{2^{p+1}p!}\mathrm{e}^{\sqrt{2p}-\frac{1}{4}}.$$

Sujet n° 60

Pour tout entier naturel n, on considère $a_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,dt$ et $g_n : t \longmapsto e^{-t}\dfrac{t^n}{n!}$

1. Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

2. (a) Calculer f_n'. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $\mathbb{R}_+$: $f_n(x) = 1 - \displaystyle\int_0^x e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,dt.$
   (b) Etablir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $f_n(n) = a_n$.
3. (a) Étudier, pour tout n de $\mathbb{N}$, les variations de la fonction g_n sur $[n, n+1]$.
   (b) En déduire que la suite (a_n) est décroissante. Étudier sa convergence.
4. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Donner la loi de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$.
   (b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$.
5. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que l'équation $f_n(x) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet une unique solution que l'on notera b_n.
   (b) Montrer l'existence de la suite (b_n) et déterminer sa limite.

Solution du sujet n$^{\text{o}}$ 60

1. Comme l'intégrale $\Gamma(n+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,dt$ converge, il en est de même de l'intégrale qui définit a_n.

2. (a) La fonction f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $f_n'(x) = -e^{-x}\dfrac{x^n}{n!}$ pour tout x de $\mathbb{R}_+$.
L'égalité découle de l'intégration de f_n' sur $[0,x]$ avec $x \geqslant 0$.

   (b) On a l'égalité car $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1.$

3. (a) Si $n \geqslant 1$, alors g_n décroît sur $[n, n+1]$ car : $g_n'(t) = e^{-t}\dfrac{t^{n-1}}{n!}(n-t) \leqslant 0$.
Même résultat pour $n = 0$ car $g_0(t) = -e^{-t}$.

   (b) En posant $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$, et en intégrant par parties, u et v étant C^1 sur $\mathbb{R}$, on obtient :
$$\int_{n+1}^{X} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,dt = \left[-e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{n+1}^{X} + \int_{n+1}^{X} e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt.$$
En faisant tendre X vers $+\infty$ et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = e^{-(n+1)}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_{n+1}^{n} e^{-t}\frac{t^n}{n!} = g_n(n+1) - \int_n^{n+1} g_n(t)dt \geqslant 0,$$
car g_n décroit sur $[n, n+1]$.
Ainsi, la suite (a_n) est décroissante. Elle est de plus minorée par 0, par positivité de l'intégrale, donc elle converge.

4. (a) Comme S_n est la somme de n variables indépendantes suvant la loi de Poisson de paramètre 1, alors S_n suit la loi de Poisson de paramètre n.
Comme $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi, de variance non nulle ($V[X_1] = 1$), d'après le théorème limite central, on a : $\dfrac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{V[S_n]}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.
Comme $E[S_n] = n$ et $V[S_n] = n$, puisque $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$, cela donne :
$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = P(S_n \leqslant n) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n = f_n(n) = e^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n^k}{k!}$, donc (a_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

5. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f_n'(x) = -e^{-x}\dfrac{x^n}{n!} \leqslant 0$. Donc f_n est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ (f_n' négative et ne s'annule qu'en 0). Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f_n est bijective de $[0, +\infty[$ sur l'intervalle $]0, 1]$.
Par conséquent, $\dfrac{1}{2}$ admet un unique antécédent b_n par f_n dans $\mathbb{R}_+$.

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n(b_n) = \dfrac{1}{2}$ et (a_n) est décroissante de limite $\dfrac{1}{2}$ donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$a_n \geqslant \dfrac{1}{2} \iff f_n(n) \geqslant f_n(b_n) \iff b_n \geqslant n$ par décroissance de f_n^{-1} sur $]0, 1]$.
On en déduit que (b_n) diverge vers $+\infty$ d'après les théorèmes de comparaison.

Sujet n° 62

Soit $(s_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$s_0 = 2 \text{ et pour tout } n \geqslant 0, s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n} s_k$$

1. Calculer s_1, s_2 et s_3.
2. Montrer que la suite (s_n) est croissante.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1$

   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{s_k}$ converge et calculer sa somme.
5. On pose $r = 2^{\frac{1}{3}}$ et on admet que pour tout $n \geqslant 3, s_n \geqslant r^{2^{n+1}}$.

   (a) Montrer que $r < \frac{21}{16}$. En déduire que $s_0 s_1 s_2 \geqslant r^{16}$.

   (b) On pose pour tout $n \geqslant 0, u_n = \dfrac{\ln(s_n)}{2^{n+1}}$. Montrer que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

   (c) Montrer que $\ell \geqslant \dfrac{\ln 2}{3}$.

Solution du sujet n° 62

1. On a $s_0 = 2, s_1 = 3, s_2 = 7, s_3 = 42$.
2. Par récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant 0, s_n \in \mathbb{N}^*$; donc $s_{n+1} > 1 + s_n > s_n$.
3. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, s_n \geqslant n$. Ceci est vérifié pour $n = 0, 1, 2, 3$. Et si $s_n \geqslant n$, alors $s_{n+1} \geqslant n! > n$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.
4. (a) On a
$$s_{n+1} - 1 = s_n \left(\prod_{k=0}^{n-1} s_k\right) = s_n(s_n - 1)$$
   (b) Ainsi
$$\frac{1}{s_{n+1} - 1} = \frac{1}{s_n(s_n - 1)} = \frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_n}$$
   Puis en sommant, $-\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{s_{k+1} - 1} - \frac{1}{s_k - 1}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{s_k}$. Et par télescopage
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{s_k} = -\frac{1}{s_n - 1} + 1 \longrightarrow 1$$
5. On pose pour tout $n \geqslant 0, u_n = \dfrac{\ln(s_n)}{2^{n+1}}$.

   (non demandé dans l'exercice). Montrons par récurrence forte sur n que pour tout $n \geqslant 3, s_n \geqslant r^{2^{n+1}}$.
   - Ceci est vérifié pour $n = 3$.
   - Supposons que $s_k \geqslant r^{2^{k+1}}$, pour tout $k \in [\![3, n]\!]$. Alors

$$s_{n+1} = 1+\prod_{k=0}^{n} s_k > s_0 s_1 s_2 \prod_{k=3}^{n} s_k > r^{16}\times\prod_{k=3}^{n} r^{2^{k+1}} \geqslant r^{16+\sum_{k=3}^{n} 2^{k+1}} = r^{16+\sum_{k=4}^{n+1} 2^{k}} = r^{16+2^{n+2}-16} = r^{2^{n+2}}$$

   (a) On a
$$r < \frac{21}{16} \Leftrightarrow 2 < \left(1 + \frac{5}{16}\right)^3$$
   Il suffit alors de développer la dernière expression par le binôme de Newton.
   On a $s_0 s_1 s_2 = 42$ et $r^{16} = 2^{16/3} = 32 \times r$. Ainsi
$$\frac{s_0 s_1 s_2}{r^{16}} = \frac{42}{32r} > \frac{r}{r} = 1$$
   (b) La suite (u_n) est décroissante (au moins à partir d'un certain rang) et minorée par 0. En effet
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+2}} \left(\ln(s_{n+1} - 2\ln(s_n))\right) = \frac{1}{2^{n+2}} \ln(1 - \frac{1}{s_n} + \frac{1}{s_n^2}) \sim -\frac{1}{2^{n+2}} \times \frac{1}{s_n} < 0$$
   car la suite (s_n) tend vers $+\infty$, donc $1/s_n^2$ est négligeable devant $1/s_n$.
   (c) Par croissance de la fonction logarithme
$$u_n = \frac{\ln s_n}{2^{n+1}} \geqslant \ln(r) = \frac{\ln 2}{3}$$
   Par passage à la limite $\ell \geqslant \dfrac{\ln 2}{3}$.

Sujet n° 66

1. (a) Étudier et représenter l'allure de la courbe de la fonction S d'une variable réelle définie par

$$S : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

   (b) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $S(x) = 1$.

   (c) Justifier que S est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser, et expliciter la bijection réciproque A.

   (d) Justifier que A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et calculer sa dérivée de deux façons.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$S(a) + S(a + x) + S(a + 2x) + S(a + 3x) = 0$$

3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + x') = f(x)\,\mathrm{e}^{x'} + f(x')\,\mathrm{e}^{-x}$$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{1}{S(nx)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   Lorsqu'elle converge, on note $F(x)$ sa somme : $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

   (b) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $F(x)$ lorsque x tend vers 0.

Solution du sujet n° 66

1. (a) La fonction $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et est impaire. Pour tout x réel, $S'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} > 0$. La fonction S est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x/2 \to +\infty$, d'où le graphe usuel. $T_{2p} = H_{2p}(1) \underset{p\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} H_{2p}(0) \times \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2p}}}{2}$.

   (b) On a $S(x) = 1$ si et seulement si $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 1 = 0$ si et seulement si $\mathrm{e}^x = 1 + \sqrt{2}$ car $\mathrm{e}^x > 0$, d'où $x = \ln\big(1+\sqrt{2}\big)$.

   (c) D'après l'étude de la première question, S est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. De même, comme $\mathrm{e}^x > 0$,
   $$S(x) = y \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = y + \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow x = \ln\big(y + \sqrt{y^2+1}\big) = A(y)$$

   (d) La fonction $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est bijective et $S' > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc, par le cours, $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,
   $$A'(y) = \frac{1}{S'\big[A(y)\big]} = \frac{2}{\mathrm{e}^{A(y)} + \mathrm{e}^{-A(y)}} = \frac{2}{y + \sqrt{y^2+1} + \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$
   On obtient le même résultat (sic) en utilisant la définition de A.

2. L'équation proposée équivaut à (puisque le crochet de gauche est non nul)
$$\mathrm{e}^a\left[1 + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}\right] = \mathrm{e}^{-a}\left[1 + \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-3x}\right] \Longleftrightarrow \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{e}^{-3x} \Longleftrightarrow x = -\frac{2a}{3}$$

3. Pour tous x, x' réels non nuls,
$$f(x)\,\mathrm{e}^{x'} + f(x')\,\mathrm{e}^{-x} = f(x+x') = f(x'+x) = f(x')\,\mathrm{e}^x + f(x)\,\mathrm{e}^{-x'} \Rightarrow \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{f(x')}{S(x')}$$
donc f/S constante. Réciproquement, on vérifie que les fonctions $\alpha\, S$, $\alpha \in \mathbb{R}$, conviennent.

4. (a) La suite $u_n(x)$ est définie si et seulement si $x \neq 0$. Pour $x > 0$, on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-nx} > 0$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Donc $\sum u_n(x)$ converge (absolument) pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (par imparité).

   (b) Pour $x > 0$, $t \mapsto 1/S(tx)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par comparaison série-intégrale,
   $$J(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{S(tx)} \leqslant F(x) \leqslant J(x) + \frac{1}{S(x)}$$
   puis par changement de variable $u = \mathrm{e}^{tx}$ de classe C^1 bijectif,
   $$J(x) = \frac{2}{x}\int_{\mathrm{e}^x}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = \frac{1}{x}\ln\left[\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}\right] \underset{0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}$$