TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE

2

ANALYSE

Sujet 2.1

1. Soit la fonction d'une variable réelle $\varphi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$.

   Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(u)\,\mathrm{d}u$, notée K.

2. Déterminer l'ensemble D des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}\,\mathrm{d}u$ converge.

   On note alors $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}\,\mathrm{d}u$.

3. Déterminer le sens de variation de F sur D.

On admet que la fonction F est dérivable sur D et qu'elle vérifie

$$\forall x \in D\ , \qquad x\,F'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) F(x) = -K\ .$$

Pour tout $x \in D$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x)$.

4. Justifier qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in D\ , \qquad G(x) = C - K \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u\ .$$

5. Déterminer la limite de G en $+\infty$, et en déduire une relation entre C et K.
6. (a) Prouver la convergence et calculer l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t\ .$$

   (on pourra utiliser le changement de variable $u : t \to \sqrt{t}$ après l'avoir justifié).

   (b) Soit $x \in D$. Prouver la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t\ .$$

   (c) Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t\ -\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t\right] = 0\ .$$

   (d) En déduire la limite de G en 0, puis la valeur de C.
7. En déduire la valeur de K.

Solution du sujet 2.1

1. $\varphi : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi(u) \underset{0^+}{\sim} u^{-1/2}$ et $\varphi(u) = \mathrm{o}\left(u^2\right)$ en $+\infty$; donc K converge.
2. - $f_x : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi $x \geqslant 0$;
   - pour $x = 0$, $f_0(u) \underset{0^+}{\sim} u^{-3/2}$ d'intégrale divergente ;
   - pour $x > 0$, $f_x(u) \underset{0^+}{\sim} \frac{\varphi(u)}{x}$ d'intégrale convergente, $f_x(u) = \mathrm{o}\left(u^2\right)$ en $+\infty$, donc $F(x)$ converge.

   Ainsi et $D = \mathbb{R}_+^*$.
3. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f_x(u)$ décroissante, donc F aussi.
4. La fonction G est dérivable sur D et pour tout $x \in D$, d'après la relation admise,

   $$G'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{x}}\,F(x) - \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x) + \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\left[x\,F'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x)\right] = -K\,\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$

   Les fonctions G et $H : x \mapsto -K \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u$ (bien définie car φ a une intégrale convergente en 0^+) ont la même dérivée sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc y diffèrent d'une constante.
5. La fonction F est décroissante, positive et a une limite finie en $+\infty$, donc $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.
   D'autre part, par convergence de K, $G(x) = C - K \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to+\infty]{} C - K^2$; d'où $C = K^2$.
6. (a) Le changement de variables $t \mapsto \sqrt{t} = u$ est de classe C^1 bijectif de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. L'intégrale demandée et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \pi$ sont de même nature et égales. Donc $J = \pi$.

   (b) Par changement de variables $u \mapsto u/x = t$ (pour $x > 0$) on obtient

   $$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t$$

   donc l'intégrale converge.

   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de J, il existe $A > 0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,(t+1)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   Par continuité de exp en 0,

   $$\exists \eta > 0\,,\ \forall u \in \mathbb{R}\,,\quad 0 \leqslant u \leqslant \eta \implies |\mathrm{e}^{-u} - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

   Alors, pour tout $x \in [0, \eta/A]$,

   $$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t \;-\; J\right| \leqslant \int_0^A \frac{|\mathrm{e}^{-tx} - 1|}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,(t+1)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\,J + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   d'où la différence des intégrales tend vers 0 quand x tend vers 0^+.

   (d) D'après c)

   $$G(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} J$$

   D'autre part, $\lim\limits_{0^+} G = C$ car l'intégrale de φ converge en 0 ; d'où $C = \pi$.
7. D'après 5, $K = \sqrt{C} = \sqrt{\pi}$.

SUJET 2.2

1. Soit la fonction d'une variable réelle $\varphi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$.

   En utilisant le changement de variable $u = t^2/2$, que l'on justifiera, montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(u)\,\mathrm{d}u$, notée K, et calculer sa valeur.

2. (a) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels la série de terme général $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ converge.

   Pour $x \in D$, on note alors $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in D$,

   $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,.$$

   (c) En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad U_n = S_n - 2\sqrt{n}\,.$$

   (a) Prouver que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (on pourra étudier $U_{n+1} - U_n$).

   (b) Justifier que pour tout $x \in D$ la série de terme général $S_n\,\mathrm{e}^{-nx}$ converge.
   On note alors $h(x)$ sa somme.

On admet que si $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de réels positifs tels que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_k a_{n,k}$ converge (on pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$),
- la série $\displaystyle\sum_n A_n$ converge

alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}\right)$ existe et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}\right)$.

   (c) Exprimer $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour $x \in D$.

   (d) En déduire un équivalent de $h(x)$ quand $x \to 0^+$.

4. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$ et en trouver un équivalent quand $x \to 0^+$.

Solution du sujet 2.2

1. Par changement de variable $t \mapsto t^2/2 = u$ et densité de la loi normale,

$$K = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

   NB : le théorème de changement de variable donne la convergence de l'intégrale.

2. (a) Si $x < 0$, $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge ; si $x = 0$, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge ; si $x > 0$, $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge (absolument) ; et $D = \mathbb{R}_+^*$.

   (b) Par décroissance de $u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}$ (pour tout $x > 0$) comme produit de fonctions décroissantes positives (ou étude de fonction), et convergence de la série, donc des intégrales, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\,.$$

   (c) Le changement de variables $u \mapsto u\,x = t$ (pour $x > 0$) donne

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

   d'où par encadrement $\sqrt{x}\,f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} K = \sqrt{\pi}$, soit $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$.

3. (a) On a par quantités conjuguées

$$U_{n+1}-U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{4\,n^{3/2}}$$

   de signe constant et terme général de série convergente ; donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (vers L).

   (b) Ainsi, $S_n - 2\sqrt{n} \to L = \mathrm{o}\left(\sqrt{n}\right)$, donne $S_n \sim 2\sqrt{n}$ puis $S_n\,\mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$ et la série converge.

   (c) Pour $x > 0$, par la permutation admise, après en avoir vérifié les conditions,

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{e}^{-nx}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{n=k}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{e}^{-kx}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\right] = \frac{f(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

   (d) D'après 2.c) et 3.c), $h(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}$.

4. Pour $x > 0$, on a $\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$, donc la série converge.

   On pose $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$.

   La suite convergente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée (par M), donc

$$\left|h(x) - 2\,g(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} U_n\,\mathrm{e}^{-nx}\right| \leqslant \frac{M\,\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} \underset{0^+}{\sim} \frac{M}{x} = \mathrm{o}\,(h(x)) \quad \text{donc} \quad g(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{h(x)}{2} \underset{0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\,x^{3/2}}$$

Sujet 2.3

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $]0,+\infty[$ à valeurs strictement positives telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ convergent et valent 1. Soit λ un réel de $[0,1]$.
   (a) Montrer que, $\forall t>0$, $(f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda} \leqslant \lambda f(t)+(1-\lambda)g(t)$.
   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}(f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda}dt$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}(f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda}dt \leqslant 1$.
2. Soient f et g deux fonctions continues sur $]0,+\infty[$ à valeurs strictement positives telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ convergent et $\lambda \in [0,1]$.
   En utilisant la question précédente, montrer que :

$$\int_0^{+\infty}(f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda}dt \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f(t)dt\right)^{\lambda}\left(\int_0^{+\infty} g(t)dt\right)^{1-\lambda}$$

3. (a) On rappelle que : $\forall\, x>0,\ \Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$. Montrer que pour tout $x>0$, $\Gamma(x)>0$.
   On définit alors la fonction G sur $]0,+\infty[$ par $G : x \mapsto \ln(\Gamma(x))$.
   (b) Établir que pour tout $\lambda\in[0,1]$ et $\forall (x,y)\in]0,+\infty[^2$ on a :

$$\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant (\Gamma(x))^{\lambda}(\Gamma(y))^{1-\lambda}$$

   Que peut-on en déduire pour la fonction G ?
4. Soient x et y deux réels strictement positifs. On suppose que $y \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $G(x+1) \leqslant \left(1-\dfrac{1}{y}\right)G(x)+\dfrac{1}{y}G(x+y)$.
   (b) En déduire que $\Gamma(x+y) \geqslant x^y\Gamma(x)$.
5. Soient x et y deux réels strictement positifs. On suppose que $y \leqslant 1$. Montrer que :

$$\Gamma(x+y) \leqslant x^y\Gamma(x)$$

Solution du sujet 2.3

1. (a) Pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\forall (x,y) \in]0;+\infty[\,, \ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y)$ par concavité du ln. En posant $x = f(t)$ et $y = g(t)$, les fonctions étant à valeurs strictement positives sur $]0;+\infty[$, et en passant à l'exponentielle, on a l'inégalité souhaitée.

   (b) D'après l'inégalité précédente, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda f(t)) + (1-\lambda)(g(t))dt$ étant convergente par linéarité, on a par comparaison que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda}dt$ converge. Par croissance de l'intégrale, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda}dt \leqslant \int_0^{+\infty} (\lambda f(t)) + (1-\lambda)(g(t))dt = 1$ d'après les hypothèses.

2. Posons, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \dfrac{f(t)}{\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t}$ (le dénominateur étant non nul car l'intégrale est strictement positive) et $\psi(t) = \dfrac{g(t)}{\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t}$. φ et ψ vérifient les hypothèse de la question précédente.

   D'où : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\varphi(t))^{\lambda}(\psi(t))^{1-\lambda}dt$ converge et est inférieure ou égale à 1, d'où la conclusion par linéarité.

3. (a) $\forall x > 0, \Gamma(x) > 0$ par stricte positivité (à justifier avec le programme).

   (b) $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\lambda x + (1-\lambda)y - 1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (t^{x-1}e^{-t})^{\lambda}(t^{y-1}e^{-t})^{1-\lambda}\mathrm{d}t$, ce qui est inférieur d'après la question 2 à $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\lambda}\left(\int_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}\mathrm{d}t\right)^{1-\lambda} = \Gamma(x)^{\lambda}\Gamma(y)^{1-\lambda}$.
   On en déduit que G est convexe.

4. (a) $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, (x+1) = (1-\frac{1}{y})x + \frac{1}{y}(x+y)$, d'où le résultat par convexité.

   (b) $\forall x \in]0,+\infty[, G(x+1) = G(x) + \ln(x)$, d'où, par la question précédente, $\frac{1}{y}G(x+y) \geqslant \ln(x) + \frac{1}{y}G(x)$, c'est à dire $G(x+y) \geqslant y\ln(x) + G(x)$. En prenant l'exponentielle, on a l'inégalité souhaitée.

5. $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, (x+y) = \lambda x + (1-\lambda)(x+1)$ $(x+y \in [x,x+1])$ avec $\lambda = 1-y \in [0,1]$.
   D'où : $G(x+y) \leqslant (1-y)G(x) + yG(x+1) \leqslant (1-y)G(x) + yG(x) + y\ln(x) \leqslant G(x) + y\ln(x)$, d'où le résultat.

Sujet 2.4

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$ est convergente.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$$

2. Déterminer u_0, u_1 et u_2.
3. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_n = \frac{2}{n+1}\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

   (b) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie u_n à l'appel de `u(n)` .

```
def u(n):
    if (-1)**n==1:
        u=0
        for k in range(2,n+1,2):
            u=---
    else:
        u=---
        for k in range(---):
                u=---
    return u
```

   où la boucle `for k in range(2,n+1,2):` fait prendre à `k` des valeurs de `2` (inclus) à `n+1` (exclu) avec un pas de `2` , soit : `2,4,6,8,...`

   (c) Montrer que, pour tout p de $\mathbb{N}$, on a $u_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2}$, et pour tout p de $\mathbb{N}^*$, on a $u_{2p} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

4. (a) Pour tout réel x et pour tout p de $\mathbb{N}^*$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k x^{2k}$.

   (b) Établir la relation :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^{p+1}\int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   (c) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et donner sa somme.

   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Solution du sujet 2.4

1. La fonction intégrée est continue sur $]0, \pi/2]$.
   En 0, $\left|\dfrac{\sin(nx)}{\sin(x)}\right| \underset{x\to 0}{\sim} n$; donc l'intégrale proposée est faussement impropre en 0.
2. On trouve $u_0 = 0, u_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et $u_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos(x)\mathrm{d}x = 2$.
3. (a) On sait que $\sin((n+2)x) = \sin((n+1)x)\cos(x) + \sin(x)\cos((n+1)x)$
   et $\sin(nx) = \sin((n+1)x)\cos(x) - \sin(x)\cos((n+1)x)$.
   Donc $\sin((n+2)x) - \sin(nx) = 2\cos((n+1)x)\sin(x)$. Donc, par linéarité de l'intégration

$$u_{n+2} - u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((n+2)x) - \sin(nx)}{\sin(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 2\cos((n+1)x)\mathrm{d}x = \frac{2}{n+1}\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

   (b) On peut proposer (attention au décalage) :

```python
import numpy as np
def u(n):
    if (-1)**n==1:
        u=0
        for k in range(2,n+1,2):
            u=u+2*np.sin((k-1)*np.pi/2)/(k-1)
    else:
        u=np.pi/2
        for k in range(3,n+1,2):
                u=u+2*np.sin((k-1)*np.pi/2)/(k-1)
    return u
```

   (c) D'après 3.a), on a, $u_{2p+3} - u_{2p+1} = \frac{1}{p+1}\sin((p+1)\pi) = 0$ donc $\forall p \in \mathbb{N}, u_{2p+1} = u_1 = \frac{\pi}{2}$.

$$u_{2p+2} = u_{2p} + \frac{2}{2p+1}\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = u_{2p} + \frac{2\times(-1)^p}{2p+1} \Rightarrow u_{2p} = 2\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

4. (a) Pour tout réel x, on a $-x^2 \neq 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k x^{2k} = \frac{1-(-x^2)^p}{1+x^2} = \frac{1+(-1)^{p+1}x^{2p}}{1+x^2}$.
   (b) En intégrant cette relation sur $[0,1]$ (fonctions continues), on obtient :

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + (-1)^{p+1}\int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{p+1}\int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

   (c) Par décroissance sur $[0,1]$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, on a : $\forall x \in [0,1], 0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$.
   En multipliant par $x^{2p} \geqslant 0$ et en intégrant sur $[0,1]$, on trouve $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2p+1}$,
   et par encadrement $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^{2p}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.
   En peut passer à la limite dans 4. b), on a : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.
   (d) Pour finir, $u_{2p} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} u_{2p} = 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \lim_{p\to+\infty} u_{2p+1}$,
   donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$.

Sujet 2.5

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < f(x) \leqslant 4\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ converge.

On suppose de plus que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du$.

On pose enfin, pour tout réel x, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ et $F_1(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du$.

2. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante.
   Montrer que sa réciproque F^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante.

On admettra que F_1 vérifie aussi ces propriétés.

3. (a) Montrer qu'il existe une unique fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

   (b) Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante .

4. (a) Après avoir justifié l'existence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

   (b) Soit $A = \max(0, \varphi^{-1}(0))$.
   Montrer que $\forall x \geqslant A$, $\displaystyle\int_{x}^{x+1} \varphi(u)^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du \geqslant \varphi(x)^2\mathrm{e}^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$.

   (c) En déduire que : $|\varphi(x)| \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{\frac{(x+1)^2}{4}}\right)$.

Solution du sujet 2.5

1. la fonction $g : u \longmapsto f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus : $\forall u \in \mathbb{R}, 0 < g(u) \leqslant 4\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4}}$.
   Or l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4}} du$ converge (par exemple en utilisant la loi $\mathcal{N}(0,2)$).

2. Comme g est positive sur $\mathbb{R}$ et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)du$ converge, $F(x)$ existe pour tout x de $\mathbb{R}$.

   De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = F(0) + \displaystyle\int_0^x g(t)dt$. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = g(x) > 0$. Ainsi F est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{x\to-\infty} F(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
   D'après le cours, F^{-1} est aussi strictement croissante de $]0, \sqrt{2\pi}[$ dans $\mathbb{R}$.
   Comme F' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, F^{-1} est dérivable (et donc continue)sur $]0, \sqrt{2\pi}[$ et pour tout x de $]0, \sqrt{2\pi}[$,

   $$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'[F^{-1}(x)]} = \frac{1}{g[F^{-1}(x)]} = \frac{1}{f \circ F^{-1}(x) \times \mathrm{e}^{-\frac{(F^{-1}(x))^2}{2}}}$$

   Donc $(F^{-1})' > 0$ et est continue (théorèmes généraux).

3. (a) On veut $F \circ \varphi = F_1$. Donc φ est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi = F^{-1} \circ F_1$.
   (b) Par composée, φ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$.

4. (a) Convergence classique, soit par les intégrales de Riemann, soit en utilisant la loi $\mathcal{N}(0,2)$.

   $$F(\varphi(x)) = F_1(x) \Rightarrow F'(\varphi(x)) \times \varphi'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

   soit

   $$\varphi^2(x)f(\varphi(x))\mathrm{e}^{-\frac{\varphi(x)^2}{2}}\varphi'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi^2(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

   Donc, en posant le changement de variable $u = \varphi(x)$, il vient

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

   (b) Soit $x \geqslant A$. On a donc $x \geqslant 0$ et $x \geqslant \varphi^{-1}(0)$.
   Soit $u \in [x, x+1], 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(u) \leqslant \varphi(x+1)$ car φ est strictement croissante.
   Donc $0 \leqslant \varphi(x)^2 \leqslant \varphi(u)^2$ et $\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$ donc $\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\varphi(u)^2 \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{(x+1)^2}{2}}\varphi(x)^2$.
   On intègre sur $[x, x+1]$ ce qui donne le résultat souhaité.

   (c) Or l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du$ converge, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{x+1} \varphi(u)^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du = 0$.
   Donc par d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi^2(x)\mathrm{e}^{-\frac{(x+1)^2}{2}} = 0$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} |\varphi(x)|\mathrm{e}^{-\frac{(x+1)^2}{4}} = 0$.
   D'où $|\varphi(x)| \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{\frac{(x+1)^2}{4}}\right)$.

Sujet 2.6

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i$.

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes et en déduire que la série $\sum u_n$ converge.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\left| \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \sum_{i=0}^{n-1} (-t)^i \right) dt \right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
4. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{3n} = \dfrac{1}{2n+1}$, $v_{3n+1} = \dfrac{-1}{4n+2}$, $v_{3n+2} = \dfrac{-1}{4n+4}$ et $T_n = \sum\limits_{i=0}^{n} v_i$.

5. Montrer la suite (T_{3n+2}) converge et préciser sa limite.
6. En déduire que la série $\sum v_n$ converge et préciser la somme de cette série.

On considère désormais une suite (a_n) de réels **positifs** et φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = a_{\varphi(n)}$.

7. Montrer que la série $\sum a_n$ converge si et seulement si la série $\sum b_n$ converge et que si la série $\sum a_n$ converge alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.
8. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si l'on ne suppose plus que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$?

Solution du sujet 2.6

1. On a $|u_n| = \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} > 0$ et la série harmonique diverge.

2.
   - $S_{2n+2} - S_{2n} = \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{2n+2}$ donc (S_{2n}) est décroissante.
   - (S_{2n+1}) est croissante
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$

   les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes donc convergent et ont même limite donc (S_n) converge donc la série $\sum u_n$ converge.

3. Soit $t \in [0,1]$. On a $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-t)^i = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$,

   Donc
   $$\left|\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \sum_{i=0}^{n-1} (-t)^i\right) dt\right| = \left|\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

4. Enfin $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \sum_{i=0}^{n-1} (-t)^i\right) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^1 (-t)^i\, dt = \ln(2) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i+1}.$

5. Soit $a_n = v_{3n} + v_{3n+1} + v_{3n+2} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{4n+2} - \dfrac{1}{4n+4} = \dfrac{1}{4n+2} - \dfrac{1}{4n+4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}\right).$

   On a $T_{3n+2} = \sum\limits_{i=0}^{3n+2} v_{3n} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\dfrac{1}{2i+1} - \dfrac{1}{2i+2}\right) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{2n+1} \dfrac{(-1)^i}{i+1} = \dfrac{1}{2} S_{2n+1} \to_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}\ln(2).$

6. On a $T_{3n} = T_{3n+2} - (v_{3n+1} + v_{3n+2})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{3n} = \dfrac{1}{2}\ln(2)$ et de même $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{3n+1} = \dfrac{1}{2}\ln(2)$ donc la série $\sum v_n$ converge et a pour somme $\dfrac{\ln(2)}{2}$.

7. Supposons que $\sum a_n$ converge et posons $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ et $\sigma'_n = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{\varphi(i)}$ Soit $N = \max\{\varphi(i), i \in [\![0,n]\!]\}$.

   On a $\sigma'_n \leqslant \sigma_N \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ car $a_n \geqslant 0$.

   La suite (σ'_n) est donc majorée donc $\sum b_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

   On a $a_n = b_{\varphi^{-1}(n)}$ donc si $\sum b_n$ converge alors $\sum a_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.

8. Utilisons la question 6. On a $v_{3n} = u_{2n}$, $v_{3n+1} = u_{4n+1}$ et $v_{3n+2} = u_{4n+3}$.
   Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(3n) = 2n$, $\varphi(3n+1) = 4n+1$ et $\varphi(3n+2) = 4n+3$. φ est bijective car atteint tous les pairs et tous les impairs exactement une fois.
   On a $v_n = u_{\varphi(n)}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ donc le résultat précédent ne subsiste pas si la série n'est pas à terme positifs.

Sujet 2.7

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et est finie si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(u_{n+1}-u_n)$ converge.
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note γ sa limite.
3. (a) Justifier les inégalités suivantes :
   $$\forall n \geqslant 3, \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}dt \leqslant \frac{\ln(n)}{n} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 4, \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t}dt.$$
   (b) Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n}(-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$.
   Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
   Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente ; on note S sa limite.
4. Le but de cette question est de calculer la valeur de S en fonction de γ.
   Pour $n \geqslant 3$, on pose $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$ et $a_n = t_n - \frac{(\ln(n))^2}{2}$.
   (a) Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 3, S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)\ln(2)$.
   En déduire une expression de S_{2n} où figurent a_n, a_{2n} et u_n.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}$ en fonction de γ et de $\ln(2)$. Déterminer S.

SOLUTION DU SUJET 2.7

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1$.
   Ainsi la suite (u_n) admet une limite si et seulement si la série télescopique converge.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on a
   $$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}+\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2(n+1)^2}.$$
   D'où la convergence de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$, par comparaison de séries signe constant (ou par convergence absolue) avec un série de RIEMANN. D'après la question 1 la suite converge donc.
3. (a) La fonction $h : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$ car $h'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2}$. Ainsi :
   $$\forall n \geqslant 3,\ \forall t \in [n, n+1],\ \frac{\ln(t)}{t} \leqslant \frac{\ln(n)}{n} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 4,\ \forall t \in [n-1, n],\ \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \frac{\ln(t)}{t}.$$
   D'où les inégalités demandées en intégrant ces inégalités respectivement sur $[n, n+1]$ et $[n-1, n]$.

   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, on a $S_{2n+2} - S_{2n} = \dfrac{\ln(2n+2)}{n+2} - \dfrac{\ln(2n+1)}{2n+1} = h(2n+2) - h(2n+1) \leqslant 0$
   car la fonction h est décroissante sur $[3, +\infty[$, donc la suite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
   De même, pour tout $n \geqslant 1, S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\dfrac{\ln(2n+3}{2n+3} + \dfrac{\ln(2n+2)}{2n+2} = h(2n+2) - h(2n+3) \geqslant 0$
   donc la suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   Enfin, pour tout $n \geqslant 1, S_{2n+2} - S_{2n+1} = \dfrac{\ln(2n+2)}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+2})_{n\geqslant 1}$ sont donc adjacentes : on en déduit qu'elles sont convergentes de même limite S, ce qui implique que la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est elle-même convergente de limite S.
4. (a) On a $a_{n+1} - a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}\left((\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2\right) = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leqslant 0$,
   d'après Q3b (seconde inégalité), donc la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.
   D'après Q3b (première inégalité) et en sommant pour k allant de 3 à n, on a
   $$t_n = \frac{\ln(2)}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k)}{k} \geqslant \frac{\ln(2)}{2}+\int_3^{n+1}\frac{\ln(t)}{t}\,dt \geqslant \frac{\ln(2)}{2}+\int_3^{n}\frac{\ln(t)}{t}\,dt = \ln(2)+\frac{1}{2}((\ln(n))^2-(\ln(3))^2)$$
   d'où $\forall n \geqslant 3,\ a_n \geqslant \frac{\ln(2)}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2}$.
   La suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est donc décroissante et minorée, donc convergente (th. de la limite monotone).

   (b) Pour tout $n \geqslant 1$ $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$ d'où
   $$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2)+\ln(k)}{k} - t_{2n}.$$
   En scindant la première somme, on a donc $S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\ln(2)$.
   En remplaçant par les expressions des suites (a_n) et (u_n), on obtient
   $S_{2n} = (u_n + \ln(n))\ln(2) + a_n + \frac{(\ln(n))^2}{2} - a_{2n} - \frac{(\ln(2n))^2}{2}$ puis $S_{2n} = u_n \ln(2) + (a_n - a_{2n}) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$.

   (c) En passant à la limite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = S = \gamma\ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$.

Sujet 2.8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $F_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2^n \mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^n}$.

1. (a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$; en déduire que $F_2 = 1$.

   (b) À l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^x$, montrer que $F_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'existence de F_n et montrer que $F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1} F_n$.

   (b) Étudier la monotonie de la suite (F_n).

   (c) Exprimer F_{2n+1} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 2$, soient $u_n = \ln\left(\dfrac{n^n \sqrt{n}}{n!\mathrm{e}^n}\right)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{2(n-1)}$ $(n \geqslant 2)$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_n^{n+1} (x-n)(n+1-x) \times \frac{1}{2x^2}\, \mathrm{d}x$; on la notera I_n.

   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln n) - 1 \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.

   (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n \geqslant 2}$ et $(v_n)_{n \geqslant 2}$ sont adjacentes.

4. Déduire des questions 1 et 2 que $F_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} F_n$, puis que $F_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

5. En déduire la formule de Stirling : $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \dfrac{n^n \sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$.

SOLUTION DU SUJET 2.8

1. (a) On a : $\displaystyle\int_0^X \frac{4\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2} = \left[\ \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\ \right]_0^X \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, car : $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = 1$. Soit $\boxed{F_2 = 1.}$

   (b) La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$, donc
   $$F_1 = \int_1^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}u}{u\left(u+\frac{1}{u}\right)} = \left[\ 2\arctan\ \right]_1^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi}{2}.}$$

2. (a) Pour tout $X>0$, par intégration par parties sur le segment $[0,X]$ avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on a :
   $$\begin{aligned}\int_0^X \frac{2^{n+2}\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^{n+2}} &= \left[\ \frac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})} \times \frac{2^n}{((\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}))^n}\ \right]_0^X - \int_0^X \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} \times \left(-\frac{n2^n(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^{n+1}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\frac{2^n(\mathrm{e}^X-\mathrm{e}^{-X})}{(\mathrm{e}^X+\mathrm{e}^{-X})^{n+1}}}_{\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0} - n\int_0^X \frac{2^{n+2}\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^{n+2}} + n\int_0^X \frac{2^n\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^n}.\end{aligned}$$
   (On a utilisé la relation $(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2 = (\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2-4$). D'où la convergence de F_n par récurrence double sur $n \geqslant 1$. Et $\boxed{F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}F_n.}$

   (b) On a $(\mathrm{e}^x-1)^2 \geqslant 0 \iff \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2} \geqslant 1$. Donc, par croissance de l'intégration $\boxed{(F_n) \text{ est décroissante.}}$

   (c) On a $\displaystyle F_{2n+1} = F_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \boxed{\frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.}$

3. (a) $\displaystyle I_n = \int_n^{n+1} -\frac{1}{2} + \frac{n+\frac{1}{2}}{x} - \frac{n(n+1)}{2x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x}{2} + \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln|x| + \frac{n(n+1)}{2x}\right]_n^{n+1} = \left(n+\frac{1}{2}\right)(\ln(n+1)-\ln n) - 1.$

   Or, par $\boxed{\text{croissance de l'intégration}}$: $\displaystyle 0 \leqslant I_n \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{2n^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}.$

   (b) Comme $v_n - u_n = \dfrac{1}{2(n-1)}$, il est clair que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0.}$
   $$u_{n+1}-u_n = \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!\mathrm{e}^{n+1}}\right) - \ln\left(\frac{n^n\sqrt{n}}{n!\mathrm{e}^n}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 = I_n \geqslant 0,$$
   d'après la question précédente. Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

   Et $\boxed{(v_n) \text{ décroissante}}$ car : $v_{n+1}-v_n = u_{n+1}-u_n + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2(n-1)} \leqslant I_n - \dfrac{1}{2n^2} \leqslant 0,$

4. On a $F_n > 0$ (l'intégrale d'une fonction continue positive n'est nulle que si la fonction est nulle), donc $\dfrac{n}{n+1} \underset{\text{Q2a}}{=} \dfrac{F_{n+2}}{F_n} \underset{\text{Q2b}}{\leqslant} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} \leqslant 1$. Par $\boxed{\text{théorème d'encadrement,}}$ on en déduit que $\boxed{F_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} F_n.}$

   Or, d'après Q2.b on a $(n+1)F_{n+2}F_{n+1} = nF_nF_{n+1}$, suite constante qui vaut $F_1F_2 = \dfrac{\pi}{2}$ (cf. Q1).

   D'où : $\dfrac{\pi}{2} = nF_{n+1}F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n(F_n)^2$, comme $F_n \geqslant 0$, on en déduit que $\boxed{F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}.}$

5. D'après Q3b, (u_n) [et (v_n)] converge vers une limite ℓ_0, donc $\mathrm{e}^{u_n} \to \mathrm{e}^{\ell_0} = \ell \neq 0$, soit $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^n\sqrt{n}}{\ell\mathrm{e}^n}.}$

   Donc : $\displaystyle\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{Q4}}{\sim}} F_{2n+1} \underset{\text{Q2c}}{=} \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{\frac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{\ell\mathrm{e}^{2n}}}{2^{2n}\left(\frac{n^n\sqrt{n}}{\ell\mathrm{e}^n}\right)^2} = \frac{\pi\ell}{\sqrt{2n}}$. D'où $\boxed{\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}.}$

Sujet 2.9

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin^{2n}(x)\, \mathrm{d}x$. On la note J_n.
2. Calculer J_0.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $J_n = \dfrac{2n(2n-1)}{4n^2+1} J_{n-1}$.
4. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et convergente.

On aborde maintenant deux manières différentes d'obtenir la limite ℓ de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. *Méthode 1 :*
   (a) Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{2n(2n-1)}{4n^2+1}\right)$.
   (b) En déduire la valeur de ℓ.
6. *Méthode 2 :*
   (a) Montrer l'existence d'une constante M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $J_{n+1} \leqslant M \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n}(x)\, \mathrm{d}x$.
   (b) En déduire la valeur de ℓ.
   Indication : on pourra exprimer $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n}(x)\, \mathrm{d}x$ *à l'aide de* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\, \mathrm{d}x$*, puis découper cette dernière intégrale en deux autour de la borne* $\dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$.

Solution du sujet 2.9

1. On a : $|\mathrm{e}^{-x}\sin^{2n}x| \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ converge,
   Donc, par théorème de comparaison, l'intégrale J_n converge absolument.
2. $J_0 = 1$ (intégrale de la densité de la loi exponentielle de paramètre 1).
3. Pour tout $A > 0$, par intégration par parties avec des fonctions de classe C^1, on a :

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-t}\sin^{2n} t \ \mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\sin^{2n} t\right]_0^A + 2n\int_0^A \mathrm{e}^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t \ \mathrm{d}t$$

   d'où, lorsque A tend vers l'infini : $J_n = 2n\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t \ \mathrm{d}t$. On intègre de nouveau par parties :

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t \ \mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t\right]_0^A + \int_0^A e^{-t}((2n-1)\sin^{2n-2} t\cos^2 t - \sin^{2n} t) \ \mathrm{d}t$$

   puis, quand A tend vers l'infini : $J_n = 2n\big((2n-1)J_{n-1} - (2n-1)J_n - J_n\big)$, soit $J_n = \dfrac{2n(2n-1)}{1+4n^2}J_{n-1}$.
4. On a $J_0 > 0$ et $\dfrac{2n(2n-1)}{1+4n^2} > 0$ pour tout $n \geqslant 1$.
   Par récurrence sur $n \geqslant 0$ évidente, la question précédente donne $J_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$.
   De plus $\dfrac{J_n}{J_{n-1}} = \dfrac{4n^2-2n}{4n^2+1} \leqslant 1$, donc la suite (J_n) est décroissante ; comme elle est minorée, elle converge.
5. (a) On a : $v_n = \ln\left(\dfrac{4n^2-2n}{4n^2+1}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1+2n}{1+4n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1+2n}{1+4n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.
   Ainsi, la série à termes positifs $\sum -v_n$ $\boxed{\text{diverge}}$ par théorème de comparaison ; donc $\sum v_n$ aussi.

   (b) Il s'ensuit que les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=0}^n v_k$ tendent vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

   Or, d'après les questions 2 et 3, on a : $J_n = 1 \times \displaystyle\prod_{k=1}^n \frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}$,

   Donc, $\ln(J_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0.}$
6. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, par changement de variable affine, on a $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t}\sin^{2n+2} t \ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} e^{-u-k\pi}\sin^{2n+2} u \ \mathrm{d}u$.
   Donc, par relation de Chasles, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{(N+1)\pi} \mathrm{e}^{-t}\sin^{2n+2} t \ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^N \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-t}\sin^{2n+2} t \ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\left(\sum_{k=0}^N \mathrm{e}^{-u-k\pi}\right)\sin^{2n+2} u \ \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1-\mathrm{e}^{-(N+1)\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}\mathrm{e}^{-u}\sin^{2n+2} u \ \mathrm{d}u \leqslant M\int_0^{\pi}\sin^{2n} u \ \mathrm{d}u \text{ avec } M = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}$$

   car $\sin^{2n+2} u \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-u} \leqslant 1$ et $\mathrm{e}^{-(N+1)\pi} \geqslant 0$.
   D'où le résultat voulu par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$.

   (b) Par relation de Chasles puis changements de variables affines, puis Chasles encore, on a :

$$\int_0^{\pi}\sin^{2n} u \ \mathrm{d}u = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n} u \ \mathrm{d}u = 2\int_0^{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}}\cos^{2n} u \ \mathrm{d}u + 2\int_{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n} u \ \mathrm{d}u \leqslant \frac{2}{n^{\frac{1}{3}}} + 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\cos\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^{2n}.$$

Or $\ln\left(\cos\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^{2n} = 2n\ln\left(\cos\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\times-\dfrac{1}{2n^{\frac{2}{3}}} \underset{n\to}{\longrightarrow} -\infty$, donc : $\left(\cos\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
Ainsi, par encadrement , on retrouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0.$

Sujet 2.10

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$. On la note I_n.

   (b) Sans faire de calcul de primitive, donner les valeurs des intégrales I_0, I_1 et I_2.

   (c) Que dire de I_3 ? Calculer I_4.

2. Montrer que pour tous réels x et y la convergence de $\displaystyle\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$. On appelle $G(x, y)$ cette intégrale.
   Exprimer $G(x, y)$ sans signe intégral, en fonction de x et y.
3. Déterminer les extrémums locaux et globaux de la fonction G.

Solution du sujet 2.10

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   On a $t^n \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to\pm\infty}{=} o(1/t^2)$. La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ entraîne celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ aussi.
   Il en va de même pour la borne $-\infty$ (ou bien par parité ou imparité de f_n selon n).
   Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt$ est convergente.

   (b) On sait que si X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1/\sqrt{2})$, alors $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-t^2}$ est une densité de f.
   De $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$, on déduit $I_0 = \sqrt{\pi}$. De $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = E(X) = 0$, on déduit $I_1 = 0$.
   De $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + 0 = \frac{1}{2}$, on déduit $I_2 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   (c) Par imparité $I_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$.
   Pour I_4, par int. par parties avec $u(t) = t^3$ et $v'(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}$ qui sont C^1, il vient $I_4 = \dfrac{3}{2}I_2 = 3\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(t-x)^2(t-y)^2 = t^4 - 2(x+y)t^3 + (x^2+y^2+4xy)t^2 - 2xy(x+y)t + x^2y^2$.
   par linéarité pour les intégrales convergentes, grâce aux questions précédentes, il vient immédiatement que $G(x, y)$ existe pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et que :
$$G(x,y) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\big(I_4 - 0 + (x^2+y^2+4xy)I_2 + 0 + x^2y^2I_0\big) = 4x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 8xy + 3.$$

3. La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, car elle est polynomiale. Déterminons les points critiques de G.
   On a $\nabla G(x, y) = \begin{pmatrix} 8xy^2 + 4x + 8y \\ 8x^2y + 4y + 8x \end{pmatrix}$. Et
$$\begin{cases} 2xy^2 + x + 2y = 0 \\ 2x^2y + y + 2x = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2xy^2 + x + 2y = 0 \\ 2xy(x-y) + (x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 + x + 2y = 0 \\ (x-y)(2xy+1) = 0 \end{cases}.$$
   1^er^ cas : $y = x$. Alors $2x^3 + 3x = 0$. Un seul point critique de ce type $O(0, 0)$.
   2^e^ cas : $y \neq x$, alors $2xy = -1$ puis $-y + x + 2y = 0$, soit $y = -x$ et $2x^2 = 1$.
   Ainsi, $\boxed{G \text{ possède trois points critiques } O = (0,0),\ A = \big(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\big) \text{ et } B = \big(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\big).}$

   Comme on a $G(x, y) = G(y, x)$ pour tout x, y, on en déduit que A et B sont de même nature.

   - Étude du point $O(0, 0)$. On a donc $H_G(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, dont le déterminant est $-48 < 0$.
     Donc $O(0, 0)$ est un point col et $\boxed{G \text{ n'a pas d'extrémum local en } (0,0).}$
   - Étude du point $A\big(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\big)$ (idem en B) On a $H_G\big(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\big) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
     de valeur propre double 8.
     On a $8 > 0$, donc $\boxed{G \text{ présente un minimum local en } A \text{ de valeur } G\big(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\big) = 2.}$

   Comme il n'y a pas de maximum local, $\boxed{\text{il n'y a pas non plus de maximum global.}}$
   Si G admet un minimum global, alors il est atteint en A et B et il vaut 2.
   Or pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $G(x, y) - 2 - 2(x+y)^2 = 4x^2y^2 + 4xy + 1 = (2xy+1)^2 \geqslant 0$.
   On en déduit que $G(x, y) \geqslant 2 + 2(x+y)^2 \geqslant 2$.
   Ainsi, $\boxed{2 \text{ est bien le minimum global de } G \text{ et il est atteint en } A \text{ et } B.}$

Sujet 2.11

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n réels strictement positifs $x_1, \cdots, x_n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.
   (a) Si t est un réel strictement positif , montrer que
   $$\ln(t) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + (nt-1) - \int_{\frac{1}{n}}^{t} \frac{t-s}{s^2} ds.$$
   (b) En déduire l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) \leqslant n \ln(\frac{1}{n})$.
   (c) Montrer qu'il existe un unique point $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$ pour lequel il y a égalité dans l'inégalité précédente.
2. Dans cette question, on suppose seulement que $y_1, \cdots, y_n$ sont n réels strictement positifs ($n \geqslant 1$).
   (a) À l'aide de la question 1.(b), montrer que
   $$\left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k. \qquad (1)$$
   (b) Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité (1)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge.

3. On introduit la suite $(\alpha_k)_{k\geqslant 1}$ définie par $\alpha_k = \dfrac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$ et on pose $v_n = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{n}}$ pour $n \geqslant 1$.
   (a) Calculer le produit $\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n$ et montrer que la suite $\left(\dfrac{\alpha_k}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ est croissante.
   (*On pourra considérer les points* $y_1 = 1$, $y_2 = \cdots = y_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{k}$ *et utiliser l'inégalité (1)*).
   Déterminer la limite de cette suite.
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, prouver que
   $$\sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k\right] \leqslant \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \sum_{p=1}^{N} u_p.$$
   (*Pour* $\ell \geqslant 1$, *on pourra utiliser l'égalité* $\dfrac{1}{\ell(\ell+1)} = \dfrac{1}{\ell} - \dfrac{1}{\ell+1}$).
4. On considère la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ où $s_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.
   (a) Montrer que la série de terme général s_n est divergente.
   (b) Prouver que la série de terme général v_n est convergente et que l'on a
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

SOLUTION DU SUJET 2.11

1. (a) Par calcul : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{t} \frac{t-s}{s^2} ds = \left[-\frac{t}{s} - \ln s\right]_{s=\frac{1}{n}}^{s=t} = \cdots$ ou avec TAYLOR reste intégral.

   (b) Comme $x \in \mathbb{R}_+^{*n}$ et que $x_1 + \cdots + x_n = 1$, avec la question précédente on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) = n\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left[(nx_k - 1) - \int_{\frac{1}{n}}^{x_k} \frac{x_k - s}{s^2} ds\right] = n\ln\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{1}{n}}^{x_k} \frac{x_k - s}{s^2} ds\right] \leqslant n\ln\left(\frac{1}{n}\right),$$

   car toutes les intégrales sont positives (quelle que soit la position de x_k par rapport à $\frac{1}{n}$).

   (c) D'après ce qui précède, l'égalité est équivalente à $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{x_k} \frac{x_k - s}{s^2} ds = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

   Or ceci n'est possible que si $x_k = \dfrac{1}{n}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Sinon il y a une intégrande continue, de signe constant et qui ne s'annule pas sur l'intervalle d'intégration non réduit à un singleton, ce qui interdit à l'intégrale correspondante d'être nulle.

2. (a) Comme ln est strict. croissante cela revient à montrer $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(y_k) \leqslant \ln(y_1 + \cdots + y_n) + \ln(\frac{1}{n})$,

   soit encore : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{y_k}{y_1 + \cdots + y_n}\right) \leqslant n\ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

   C'est vrai d'après la question 1.b car les $x_k = \frac{y_k}{y_1 + \cdots + y_n}$ en vérifient les hypothèses

   (b) Le cas d'égalité dans l'inégalité se produit si et seulement si on est dans le cas d'égalité avec les x_k pour l'inégalité (1), c'est à dire que $x_k = \frac{y_k}{y_1 + \cdots + y_n} = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   On observe alors que c'est équivalent au fait que $y_1 = \cdots = y_n$.

3. (a) On trouve $\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n = (n+1)^n$. Posons $e_k = \dfrac{\alpha_k}{k} = \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k$.

   Avec l'indication et l'inégalité (1), on obtient

$$(y_1 \times \cdots \times y_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}} \leqslant \frac{1}{k+1}\left(1 + k\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = 1 + \frac{1}{k+1}$$

   d'où $e_k \leqslant e_{k+1}$. De plus, $e_k = \exp(1 + o(1)) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

   (b) Avec l'inégalité (1) et la question précédente, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} v_n &= \sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k u_k}{\alpha_k}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k u_k)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k \\ &= \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]\alpha_k u_k = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right)\alpha_k u_k \leqslant \sum_{k=1}^{N} e_k u_k \leqslant e_N \sum_{k=1}^{N} u_k.\end{aligned}$$

4. (a) La série de terme général s_n est clairement divergente puisque $s_n \geqslant \dfrac{u_1}{n}$ avec $u_1 > 0$.

   (b) Avec les questions 3. (a) et 3. (b), on voit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{N} u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Les deux séries sont à termes positifs, la convergence de la série de terme général v_n résulte du théorème de comparaison puisque $\sum u_n$ est convergente. Un passage à la limite donne l'inégalité souhaitée.

Sujet 2.12

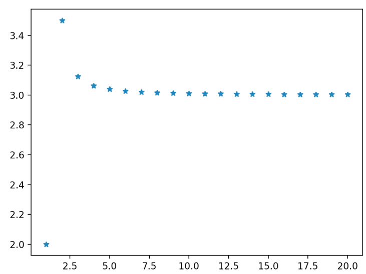
On considère deux réels a et b, $a > 0$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par récurrence :

$$u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{a}{n}\right) + b \qquad (R)$$

1. On suppose dans cette question que $b = 0$ et on pose $r = \lfloor a \rfloor + 1$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant r+1$, $u_n = u_r \displaystyle\prod_{k=r}^{n-1}\left(1 - \frac{a}{k}\right)$.
   (b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant r} \ln\left(1 - \frac{a}{k}\right)$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
2. Dans cette question, on suppose que $a = 1/2, b = 9/2$ et $u_1 = 2$.
   On rappelle que `range(1,n+1)` crée la ligne des nombres de `1` à `n`.
   On exécute le programme Python suivant :

```python
import numpy as np, matplotlib.pyplot as plt
n=20 ; a=0.5 ; b=4.5 ; u1=2
u=np.zeros(n); v=np.zeros(n) ; u[0]=u1 ; v[0]=u1
for k in range(1,n):
    u[k]=u[k-1]*(1-a/k)+b
    v[k]=u[k]-u[k-1]
plt.plot(range(1,n+1),v,'*')
plt.show()
```

   et l'on obtient :



   Quelle conjecture peut-on faire ?
3. On revient maintenant au cas général.
   (a) Déterminer l'unique réel α tel que la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence (R).
   (b) Établir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n - n\alpha) = 0$. La conjecture formulée précédemment est-elle vraie ?
4. On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = b.$$

   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par récurrence : $u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{a_n}{n}\right) + b_n \qquad (R')$
   (a) On suppose que $b = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\forall n \geqslant n_0, |u_n| \leqslant |u_{n_0}| + (n - n_0)\varepsilon$$

   En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.
   (b) On suppose b non nul. En considérant la suite $(u_n - n\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \alpha$.

Solution du sujet 2.12

1. (a) On procède par récurrence sur $n \geqslant r+1$. Si $n = r+1$, $u_{r+1} = u_r\left(1-\frac{a}{r}\right) = u_r \prod_{k=r}^{r}\left(1-\frac{a}{k}\right)$ donc la propriété est vraie au rang $r+1$.
On la suppose vraie au rang n.
On a $u_{n+1} = u_n(1-\frac{a}{n}) = \left(u_r \prod_{k=r}^{n-1}\left(1-\frac{a}{k}\right)\right) \times (1-\frac{a}{n}) = u_r \prod_{k=r}^{n}\left(1-\frac{a}{k}\right)$, CQFD.

   (b) $\ln(1-a/k) \sim -a/k$ quand $k \to +\infty$. D'où par équivalence, $\sum_{k\geqslant 1} -\ln(1-a/k)$ diverge vers $+\infty$ étant donné que $-\ln(1-a/k) \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant r$, d'où le résultat.
On a alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=r}^{n} \ln(1-a/k) = -\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=r}^{n}\left(1-\frac{a}{k}\right) = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. On conjecture, grâce au graphe, que $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n) = 3$.

3. (a) On cherche α tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha(n+1) = \alpha n(1-\frac{a}{n}) + b$ soit $\alpha = -a\alpha + b$ i.e. $\alpha = \dfrac{b}{a+1}$.

   (b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - n\alpha$. Alors on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = v_n(1-a/n)$. La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie les hypothèses vérifiées par la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dans la question 1, d'où on a bien $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

   Pour la conjecture, $a = 1/2$, $b = 9/2$ d'où $\alpha = \dfrac{b}{1+a} = 3$ et

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{(u_{n+1} - 3(n+1))}_{\to 0 \text{ quand } n\to+\infty} - \underbrace{(u_n - 3n)}_{\to 0 \text{ quand } n\to+\infty} + 3$$

   d'où on a bien $u_{n+1} - u_n \to 3$ quand $n \to +\infty$.

4. (a) Il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|b_n| \leqslant \varepsilon$ et $|1 - a_n/n| < 1$ (car $0 < \frac{a_n}{n} \sim \frac{a}{n}$).
On a alors $|u_{n+1}| \leqslant |u_n| + \varepsilon$. Par récurrence sur $n \geqslant n_0$ ou par télescopage

$$|u_{n+1}| \leqslant |u_n| + \varepsilon \leqslant |u_{n_0}| + (n-n_0)\varepsilon + \varepsilon$$

   ou $|u_{n+1}| \leqslant |u_{n_0}| + (n+1-n_0)\varepsilon$.
D'où, pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{|u_n|}{n} \leqslant \dfrac{|u_{n_0}|}{n} + \dfrac{n-n_0}{n}\varepsilon$.
Il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $\dfrac{|u_{n_0}|}{n} \leqslant \varepsilon$ donc $\dfrac{|u_n|}{n} \leqslant 2\varepsilon$, ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|u_n|}{n} = 0$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - (n+1)\alpha = u_n\left(1-\frac{a_n}{n}\right) + b_n - n\alpha\left(1-\frac{a}{n}\right) - b = (u_n - n\alpha)\left(1-\frac{a_n}{n}\right) + \underbrace{\alpha(a-a_n) + b_n - b}_{\to 0 \text{ quand } n\to+\infty}$$

   On est ramené à la question précédente pour la suite $(u_n - n\alpha)_{n\geqslant 1}$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n - n\alpha}{n} = 0$ i.e. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \alpha$.

Sujet 2.13

Soit $p \geqslant 2$, on munit $\mathbb{R}^p$ de sa norme euclidienne canonique : si $x = (x_1, \dots, x_p)$, $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{p} x_k^2\right)^{1/2}$.

On note I l'intervalle d'entiers $I = [\![1, p]\!]$ et on note $D = \{(i, i) \mid i \in I\}$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^p$ par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k^2\left(1 - x_k^2\right) + 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant p} \left[(x_k + x_l - 1)^2 - x_k^2 x_l^2\right] = \|x\|^2 - \|x\|^4 + \sum_{(k,l) \in I^2 \setminus D} (x_k + x_l - 1)^2.$$

1. Dans cette question, on se place dans le cas où $p = 2$.
   (a) Expliciter $f(x_1, x_2)$.
   (b) Justifier le fait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifier que pour $k \in \{1, 2\}$, on a
   $$\partial_k f(x_1, x_2) = 2x_k - 4x_k\|x\|^2 + 4(x_1 + x_2 - 1).$$
2. On revient au cas général où $p \geqslant 2$.
   (a) Trouver une constante $a > 0$ telle que pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a :
   $$(u + v - 1)^2 \leqslant a\left(u^2 + v^2 + 1\right)$$
   (b) En déduire qu'il existe trois constantes strictement positives b, c et d telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ on ait $f(x) \leqslant b\|x\|^2 - c\|x\|^4 + d$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel r strictement positif tel que $f(x) \leqslant f(p-1, 0, \cdots, 0) - 1$ pour tout x tel que $\|x\| > r$.
   (d) Déterminer le gradient de f en tout point x de $\mathbb{R}^p$
3. On considère $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^p \mid x_1 + \cdots + x_p = p - 1\}$.
   (a) Montrer que f possède un maximum global M sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_p = p - 1$ et que si y est un point de $\mathcal{H}$ tel que $M = f(y)$ alors $\|y\| < r$.
   (b) Simplifier l'expression du gradient de f au point x lorsque $x \in \mathcal{H}$. Si y est un point de $\mathcal{H}$ tel que $M = f(y)$, donner une condition nécessaire vérifiée par les composantes de y.
   (c) Si $x \in \mathcal{H}$, montrer que $(p-1)^2 \leqslant p\|x\|^2$. Prouver que $\left\{\|x\|^2 \mid x \in \mathcal{H}\right\} = \left[\dfrac{(p-1)^2}{p}, +\infty\right[$ *(Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pourra considérer $m_t = m + t(1, -1, 0, \cdots, 0)$ où m est un point bien choisi de $\mathcal{H}$).*
   (d) Déterminer M. Est-il un maximum global de f sur $\mathbb{R}^p$?

Solution du sujet 2.13

1. (a) On voit que f est donnée par $f(x_1,x_2)=\left(x_1^2+x_2^2\right)-\left(x_1^2+x_2^2\right)^2+2\left(x_1+x_2-1\right)^2$.

   (b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ (même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^p$ car c'est une fonction polynomiale de plusieurs variables. Il vient directement de 1. (a) que pour $k\in\{1,2\}$, on a
$$\partial_k f(x_1,x_2)=2x_k-4x_k(x_1^2+x_2^2-1)+4(x_1+x_2-1)=2x_k-4x_k\|x\|^2+4(x_1+x_2-1).$$

2. (a) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ avec les vecteurs $(u,v,-1)$ et $(1,1,1)$, il suffit de prendre $a=3$.

   (b) Avec la question précédente, on voit que
$$f(x)\leqslant\|x\|^2-\|x\|^4+3\sum_{(k,l)\in I^2\setminus D}(x_k^2+x_l^2+1)\leqslant(3(p^2-p)+1)\|x\|^2-\|x\|^4+3(p^2-p),$$
   On peut donc prendre $b=3(p^2-p)+1$, $c=1$ et $d=3(p^2-p)$.

   (c) Immédiat d'après la question précédente puisque $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} b\|x\|^2-c\|x\|^4+d=-\infty$.

   (d) Si $(e_1,\cdots,e_p)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et si $x\in\mathbb{R}^p$, alors $\nabla f(x)$ est égal à
$$2\sum_{i=1}^{p}\left[x_i-2x_i\|x\|^2+2\sum_{k\neq i}(x_k+x_i-1)\right]e_i=2\sum_{i=1}^{p}\left[x_i\left(2p-3-2\|x\|^2\right)+2\sum_{k=1}^{p}x_k-2(p-1)\right]e_i.$$

3. (a) On justifie facilement que $\mathcal{H}\cap\overline{B}(0,r]$ est un fermé borné. La fonction f est continue sur cet ensemble fermé et borné, elle admet donc un maximum sur $\mathcal{H}\cap\overline{B}(0,r]$, qui est en fait un maximum global de f sur $\mathbb{R}^p$ sous la contrainte $x_1+\cdots+x_p=p-1$ en vertu de la question précédente puisque le point $(p-1,0,\cdots,0)$ appartient à $\mathcal{H}$. La dernière assertion est une conséquence directe de q2.

   (b) La seconde expression de ∇f en 2 (d) donne, pour $x\in\mathcal{H}$: $\nabla f(x)=2\sum\limits_{i=1}^{p}\left[x_i\left(2p-3-2\|x\|^2\right)\right]e_i$.

   Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ car f est une fonction polynomiale de p variables, le cours nous dit que nécessairement $\nabla f(y)\in\operatorname{Vect}((1,\cdots,1))$ *i.e.* $y_1\left(2p-3-2\|y\|^2\right)=\cdots=y_p\left(2p-3-2\|y\|^2\right)$.

   (c) L'inégalité s'obtient avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Prenons $m=\left(\dfrac{(p-1)}{p},\cdots,\dfrac{(p-1)}{p}\right)$, alors on a $m_t\in\mathcal{H}$, $\|m_t\|^2=\|m\|^2+2t^2=\dfrac{(p-1)^2}{p}+2t^2\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et $\|m_0\|^2=\dfrac{(p-1)^2}{p}$.
   Avec l'inégalité, ces deux choses et le théorème des valeurs intermédiaires, on peut conclure.

   (d) Soit $y\in\mathcal{H}$ tel que $f(y)=M$. Si $\|y\|^2\neq\dfrac{2p-3}{2}$, avec 3. (c) on a alors $y_1=\cdots=y_p$, d'où $y=(\left(\dfrac{(p-1)}{p},\cdots,\dfrac{(p-1)}{p}\right))$ et $f(y)=\dfrac{p-1}{p^2}$ (On a bien $\|y\|^2\neq\dfrac{2p-3}{2}$). On observe que le cas où $y\in\mathcal{H}$ est tel $\|y\|^2=\dfrac{2p-3}{2}$ est possible d'après 3. (d) puisque $\dfrac{2p-3}{2}\geqslant\dfrac{(p-1)^2}{p}$ $(p\geqslant 2)$. Si $y\in\mathcal{H}$ et est de ce type, on trouve
$$f(y)=\frac{2p-3}{2}-\frac{(2p-3)^2}{4}+\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}(y_k+y_l-1)^2-\sum_{k=1}^{p}(2y_k-1)^2=\frac{(2p-3)^2}{4}-p^2+3p-2=\frac{1}{4}.$$
   Or $\dfrac{p-1}{p^2}\leqslant\dfrac{1}{4}$, il en résulte que $M=\dfrac{1}{4}$. Ce n'est pas un maximum global de f sur $\mathbb{R}^p$ (qui existe par un raisonnement analogue à celui de 3. (b)) car $f(0)=p^2-p>\dfrac{1}{4}$.

Sujet 2.14

1. On dit qu'une fonction h de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$, est à variation lente si pour tout réel $c > 0$, on a :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(cx)}{h(x)} = 1.$$
   (a) Les fonctions constantes de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}^*$ sont-elles à variation lente ?
   (b) Montrer que la fonction logarithme népérien est à variation lente.
   (c) Montrer que si une fonction h de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}^*$ est telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, avec $\ell \neq 0$, alors elle est à variation lente. Qu'en est-il si $\ell = 0$?

Dans la suite, X est une variable aléatoire de densité f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, strictement positive et continue sur $\mathbb{R}_+$. On note F la fonction de répartition de X et on pose, pour tout réel x : $G(x) = 1 - F(x)$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, il existe un unique réel u_n positif ou nul tel que $G(u_n) = \frac{1}{n}$.
   (b) Donner la valeur de u_1.
3. Soit λ un réel strictement positif. Donner l'expression de u_n en fonction de n et λ lorsque X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

4. On revient au cas général.
   On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ et une fonction h de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}^*$, à variation lente, vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G(x) = \frac{h(x)}{x^a}$$
   On suppose également que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
   (a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $P(X > xu_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{nx^a}$
   (b) Soit une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On considère, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
   Déterminer, pour tout réel $x > 0$, la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{u_n} > x\right)$.

Solution du sujet 2.14

1. (a) Si h est constante non nulle, il existe un réel $K \neq 0$ tel que $h(x) = h(cx) = K$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(cx)}{h(x)} = 1$.

   (b) Si h est la fonction ln, comme c et x sont strictement positifs, on a $\ln(cx) = \ln(c) + \ln(x)$ et ainsi : $\frac{h(cx)}{h(x)} = \frac{\ln(c)}{\ln(x)} + 1$. On conclut sans problème que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(cx)}{h(x)} = 1$.

   (c) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, alors, comme $c > 0$, on a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} h(cx) = \ell$.

   Comme $\ell \neq 0$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(cx)}{h(x)} = \dfrac{\ell}{\ell} = 1$.

   Si $\ell = 0$, le résultat ne subsiste pas. Il suffit par exemple de considérer la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ pour laquelle on trouve $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(cx)}{h(x)} = \dfrac{1}{c}$, ce qui est différent de 1 dès que $c \neq 1$.

   Une autre fonction avec laquelle le résultat ne subsiste pas est $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

2. (a) La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$ tout comme F (car X est à densité). De plus, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$(sa dérivée est strictement positive par hypothèse) donc G décroît strictement sur $\mathbb{R}_+$. Comme X a une densité nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, on a $F(0) = 0$ donc $G(0) = 1$ et on a aussi : $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 1 - \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1 - 1 = 0$.

   La fonction G réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.

   Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel $\frac{1}{n}$ appartient à $]0, 1]$ donc, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel u_n positif ou nul tel que $G(u_n) = \frac{1}{n}$.

   (b) Comme $G(u_1) = 1$, on a $F(u_1) = 0$ et comme u_1 appartient à $\mathbb{R}_+$, on trouve $u_1 = 0$.

3. Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda), u_n$ est solution de l'équation $\mathrm{e}^{-\lambda x} = \frac{1}{n}$ et on trouve $u_n = \frac{\ln(n)}{\lambda}$.

4. (a) Comme h est à variation lente, on a :

$$P(X > xu_n) = G(xu_n) = \frac{h(xu_n)}{(xu_n)^a} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{h(u_n)}{(xu_n)^a} \; (\text{car}\, G(u_n) \neq 0 \text{ donc } h(u_n) \neq 0)$$

   Pour finir, on a $\frac{h(u_n)}{(xu_n)^a} = \frac{h(u_n)}{{u_n}^a x^a} = \frac{1}{x^a} G(u_n) = \frac{1}{x^a} \times \frac{1}{n}$.

   On obtient donc bien : $\mathbb{P}(x > xu_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{nx^a}$.

   (b) Comme $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, on montre que :

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant xu_n) = \mathbb{P}([X_1 \leqslant xu_n] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant xu_n])$$

   Par indépendance, on obtient $\mathbb{P}(M_n \leqslant xu_n) = F(xu_n)^n$ et on trouve ainsi :

$$\mathbb{P}(M_n > xu_n) = 1 - F(xu_n)^n$$

   D'après 4. a), on a $\mathbb{P}(X > xu_n) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{nx^a} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où : $F(xu_n)^n \underset{n \to +\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{nx^a} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$.

   De plus, on a

$$\left(1 - \frac{1}{nx^a} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^a} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

   Comme $n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^a} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{x^a}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{1}{nx^a} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = -\dfrac{1}{x^a}$ et par continuité de l'exponentielle en $-\frac{1}{x^a}$, on trouve $\lim\limits_{n \to +\infty} F(xu_n)^n = \exp\left(\dfrac{-1}{x^a}\right)$.

   On conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\dfrac{M_n}{u_n} > x\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(M_n > xu_n) = 1 - \exp\left(\dfrac{-1}{x^a}\right)$.