Les exercices suivants ont été posés à l'oral aux candidats des options scientifique et économique ; ils constituent un échantillon représentatif de l'ensemble des exercices proposés lors des épreuves orales du concours 2005

1 Exercices et questions sans préparation donnés en option scientifique

1.1 Exercices

1. Le fonctionnement d'une machine de tri postal est perturbé par des pannes dues à la présence de lettres non conformes aux normes. On désigne par X_1 le temps écoulé entre le début du tri et la première panne et par X_i le temps écoulé entre la reprise du travail après la réparation de la $(i-1)$-ème panne et la i-ème panne (si elles existent). On suppose que les variables X_i sont mutuellement indépendantes et suivent toutes une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer une densité de la variable aléatoire W_n.
   (b) Soit a un réel strictement positif et R la variable aléatoire représentant le nombre de pannes qui se produisent durant l'intervalle de temps $[0, a[$. Exprimer l'événement $[R = n]$ en fonction de W_n et W_{n+1} et en déduire la loi de R.
2. Soit $(\hat{p}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'estimateurs du paramètre réel t d'une famille de lois de probabilités $(P_t)_{t\in\mathbb{R}}$ dépendant de t.

   On suppose que la suite $(\hat{p}_n)$ d'estimateurs de t est asymptotiquement sans biais et que $\lim\limits_{n\to+\infty} V(\hat{p}_n) = 0$ (où $V(\hat{p}_n)$ désigne la variance de $\hat{p}_n$).
   On note enfin $b_n(t)$ le biais de $\hat{p}_n$ pour estimer t.
   Pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

   $A_n(\varepsilon) = [|\hat{p}_n - t| \geq \varepsilon]$ et $B_n(\varepsilon) = [|\hat{p}_n - E(\hat{p}_n)| + |b_n(t)| \geq \varepsilon]$.
   (a) Montrer que $A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$.
   (b) Montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que :
   $$(\forall n > N)\ B_n(\varepsilon) \subset \left[|\hat{p}_n - E(\hat{p}_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right].$$
   (c) La suite $(\hat{p}_n)$ converge-t-elle en probabilité ?
3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(a) On suppose $P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = 1$ et $(\exists c < 1)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $P(A_n) \leq c$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 - P(A_k)) = 0$, et en déduire que la série de terme général $P(A_n)$ converge.

(b) On suppose

$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) < 1\,.$$

Montrer la convergence des séries de terme général respectivement $a_n = -\ln(1 - P(A_n))$ et $b_n = P(A_n)$.

4. Pour x réel positif, on note $[x]$ la partie réelle de x, c'est à dire l'unique entier n tel que $n \leq x < n+1$.

   (a) Soit X une variable aléatoire réelle à densité f, à valeurs positives, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose $Y = [X]$.

   (b) Quelle est la loi de Y ?

   (c) Montrer que $E(Y)$ existe si et seulement si $E(X)$ existe. Montrer qu'on a alors :

$$E(Y) \leq E(X) \leq E(Y) + 1\,.$$

   (d) On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

   (e) Déterminer la loi de $Y = [X]$ et celle de $Z = X - [X]$.

   (f) Calculer l'espérance mathématique de Y et celle de Z.

5. (a) i. Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé. Montrer que : $P(A \cap B) \geq P(A) - P(\overline{B})$.

   ii. Caractériser les cas d'égalité dans l'inégalité précédente à l'aide de $P(A \cup B)$.

   (b) Soit n événements $A_1, \ldots, A_n$. Comparer $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$ et $\max_{1\leq i\leq n}\Big(P(A_i) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} P(\overline{A_j})\Big)$.

6. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, telles que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ P[X_n = 1] = P[X_n = -1] = \frac{1}{2}\,.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

   (a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\frac{e^t + e^{-t}}{2} \leq e^{t^2/2}$.

(b) Déterminer, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, l'espérance $E\left(e^{\frac{tS_n}{\sqrt{n}}}\right)$ et sa limite pour $n \to +\infty$.

(c) Soit $a \geq 0$ et $t \geq 0$. Montrer que $P[S_n \geq a] \leq e^{-t\,a}\,E(e^{t\,S_n})$.

7. Soit f définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t}\,dt\,.$$

Déterminer l'ensemble de définition D de f ; étudier la continuité et la dérivabilité de f ; étudier les limites éventuelles de f aux bornes de D.

8. On considère l'espace vectoriel E des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n, et pour tout couple $(f,g) \in E^2$, on pose

$$\phi(f,g) = \int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,e^{-t}\,dt\,.$$

(a) Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur E.

(b) Pour k entier tel que $1 \leq k \leq n$, on considère $P_k(X) = \left[(1-X)^n X^k\right]^{(k-1)}$.
En explicitant ce polynôme et en calculant sa valeur en 1, prouver que

$$0 = k! + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j\,C_n^j\,\frac{(j+k)!}{(j+1)!}\,.$$

(c) Déterminer la projection orthogonale (pour ce produit scalaire) du polynôme constant égal à 1 sur le sous-espace vectoriel $H = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^n)$.

9. Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et soit I l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$I(f) = \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,dt\right).$$

(a) i. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$?

ii. A-t-on, pour toutes fonctions f et g de E, $f+g \in E$ et $I(f+g) = I(f) + I(g)$?

(b) i. Pour tout $f \in E$, comparer $I(f)$ et 1.

ii. Résoudre dans E l'équation : $I(f) = 1$.

(c) L'application I est-elle majorée ?

(d) Soit E' l'ensemble des fonctions continues f de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telles que $\int_0^1 f(t)\,dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,dt$ existent.

i. Existe-t-il une fonction h de E' qui ne soit pas la restriction d'une fonction de E ?

ii. Montrer que, pour tous f et g de E' et pour tout réel $t \in [0,1]$, on a : $(t\,f + (1-t)\,g) \in E'$

On prolonge naturellement I à E'.

(e) Montrer que, pour toutes fonctions f et g de E' et pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$I(t\,f + (1-t)\,g) \leq t\,I(f) + (1-t)\,I(g)\,.$$

10. Soit A et B deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les relations suivantes :

$$A^2 = A\,, \qquad B^2 = B\,, \qquad AB = BA = 0\,.$$

On note $E = \mathrm{Vect}(A,B)$ le sous-espace vectoriel engendré par A et B et on appelle f (respectivement g) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est A (respectivement B) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im} g \subset \ker f$.

(b) Montrer que la dimension de $\mathrm{Im} f$ est égale à 1.

(c) Montrer que, si I_2 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$(I_2 \in E) \Leftrightarrow (A + B = I_2)\,.$$

(d) Montrer que $I_2 \in E$.

11. Un animateur de télévision propose à un joueur une suite de tirages, avec remise, dans un sac contenant n papiers. Sur chaque papier est dessiné un lot.
Tous les papiers sont indiscernables à la vue et représentent des lots distincts. La suite des tirages s'arrête dès qu'un papier déjà tiré est tiré pour la deuxième fois. Le lot représenté par ce papier est alors gagné par le joueur.
On désigne par T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour gagner un lot.

(a) Ecrire un programme en langage Pascal permettant de simuler, après lecture de n, la suite des tirages et d'obtenir la valeur prise par T_n.

(b)

(c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité $P(T_n > k)$.

(d) Déterminer la loi de la variable aléatoire T_n.

(e) i. À l'aide du théorème de la limite centrée, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \sim \frac{e^n}{2}$ pour $n \to +\infty$.

ii. En déduire une constante C telle que $E(T_n) \sim C\, \frac{n!\, e^n}{n^n}$ quand n tend vers l'infini.

12. Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$.

(a) On suppose que $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer alors les sous-espaces vectoriels F de $\mathbb{R}^3$ stables par u, c'est à dire tels que $u(F) \subset F$.

(b) On suppose que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer alors les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

13. (a) Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Déterminer l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ a\, u_{n-1} + (a^2+1)\, u_n + a\, u_{n+1} = 0\,.$$

(b) Trouver l'ensemble des complexes λ tels que le système (S) suivant ait au moins une solution non nulle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccc} (\lambda^2+1)x_1 & +\lambda\, x_2 & & = & 0 \\ \lambda\, x_1 & +(\lambda^2+1)\, x_2 & +\lambda x_3 & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ \lambda\, x_{k-1} & +(\lambda^2+1)\, x_k & +\lambda x_{k+1} & = & 0\ (2 \le k \le n-1) \\ & \vdots & & \vdots & \\ \lambda\, x_{n-2} & +(\lambda^2+1)\, x_{n-1} & +\lambda x_n & = & 0 \\ \lambda\, x_{n-1} & +(\lambda^2+1)\, x_n & & = & 0 \end{array} \right.$$

14. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On définit $\phi : E \to E$ par

$$\phi : P \mapsto (X^2-1)\, P'' + X\, P' - 4P\,.$$

(a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer le degré de $\phi(P)$ et en déduire le noyau de ϕ.

(c) Montrer que E_n est stable par ϕ. On note alors ϕ_n la restriction de ϕ à E_n. Montrer que ϕ_n est diagonalisable.

1.2 Questions sans préparation

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E.
   Montrer que la somme $F+G+H$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ et $(F+G) \cap H = \{0\}$.
2. Déterminer un équivalent simple de la suite u_n définie par
   $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \Big[k \ln(n^2 + k^2)\Big] - n^2 \ln(n)\,.$$
3. On considère la série de terme général u_n avec $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n \geq 0$. On définit les séries de terme général
   $$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}\,,\ w_n = \frac{u_n}{1+n^2 u_n}$$
   Y a-t-il un lien entre la nature de la série de terme général u_n et celle des autres ?
4. Quelles sont les lois possibles pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :
   $(\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2)\ P_{[X>n]}([X > n+p]) = P[X > p]$?
5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et f un endomorphisme de E tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Déterminer le rang de f.
6. Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices symétriques non diagonalisables ?
7. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à la fois symétrique et orthogonale. Que dire si sa première ligne est $[1, 0, 0]$?
8. Soit f et g deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telles que pour tout x réel, on ait
   $$f(x)\,g(x) \geq 4\,.$$
   Montrer que :
   $$36 \leq \left(\int_{-2}^{1} f(t)\,dt\right)\left(\int_{-2}^{1} g(t)\,dt\right).$$