MATHEMATIQUES : ANNEXE

Option scientifique, économique, technologique et B/L

Les exercices suivants, posés aux candidats des options scientifique et économique, constituent un échantillon de l'ensemble des exercices proposés lors des épreuves orales du concours 2006

1 Exercices donnés en option scientifique

1. Un composant électronique a une durée de vie X, variable aléatoire positive de densité f. Pour tout réel $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on définit la *fiabilité* de ce composant à l'instant t par

$$R(t) = P(X > t)$$

et on définit le *taux de défaillance* par

$$h(t) = \lim_{x \to 0} \frac{P_{(t<X)}(t < X \leqslant t + x)}{x}.$$

   (a) Quel lien existe-t-il entre R et f ?

   (b) Montrer que, pour tout t strictement positif :

$$h(t) = -[\log(R(t))]' = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

   (c) On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ .Montrer que $h(t)$ est constant. Montrer que pour tous $s, t > 0$ on a

$$P_{(X>t)}(X > t + s) = P(X > s)$$

   (d) Montrer qu'un composant qui a un taux de défaillance constant a une durée de vie exponentielle.

   (e) On considère n composants électroniques de durée de vie indé pendantes et de même loi X. On note $N(t)$ le nombre de composants encore en marche à la date t. Quelle est la loi de $N(t)$? Montrer que pour tout $t > 0$ on a

$$h(t) = \lim_{x \to 0} \frac{E(N(t)) - E(N(t + x))}{xE(N(t))}.$$

   Commentez ce résultat.

2. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$; on notera L_X la fonction, définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall t \geq 0,\ L_X(t) = E(e^{tX}).$$

   On dit que $L_X(t)$ est la transformée de Laplace de X.

(a) Déterminer les transformées de Laplace des lois suivantes : loi uniforme sur $[-1;1]$, loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Vérifier que pour chacune de ces lois, on a $L_X(0) = 1$, $L'_X(0) = E(X)$ et $L''_X(0) = E(X^2)$.

(b) Montrer que, pour tout $t > 0$ tel que $L_X(t)$ soit fini et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité suivante :

$$P(X > x) \leqslant L_X(t)\, e^{-tx}.$$

Indication : appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $Y = e^{tX}$.

(c) Si X_1, ..., X_n sont indépendantes et de même loi telles que leur transformée de Laplace existe, calculer la transformée de Laplace de $X_1 + \cdots + X_n$.

(d) On note $\Lambda(t) = \ln L_X(t)$, et on considère la variable aléatoire $\bar{X}$ définie par

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Montrer que, pour tout $t > 0$ tel que $L_X(t)$ soit fini et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité suivante :

$$\ln P(\bar{X} > x) \leqslant -n\,(tx - \Lambda(t)).$$

(e) En déduire que si on note $\Lambda^*(x) = \operatorname{Sup}\,(tx - \Lambda(t))$ on peut optimiser cette inégalité, par

$$P(\bar{X} > x) \leqslant e^{-n\Lambda^*(x)}.$$

3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n : $P = a_0 \ + a_1X \ + a_2X^2 \ + \dots + a_nX^n$ oú $a_n \neq 0$.
Soient $z_0, z_1, \dots, z_n$ les racines $n+1$-èmes de l'unité (c.à.d telles que $\forall k \quad z_k^{n+1} = 1$) et soit

$$M = sup\{|P(z_k)|, k \in \{0, 1, \dots, n\}\}.$$

(a) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^{n+1} = 1$ et montrer que l'on peut choisir z_1 de sorte que $z_k = z_1^k$.

(b) Montrer que $M > 0$.

(c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k^p$ en fonction de p .

(d) Montrer que $\displaystyle|\sum_{k=0}^{n} P(z_k)| \leq (n+1)M$ et en déduire que $|a_0| \leq M$.

(e) Montrer que $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad |a_k| \leq M$.

4. On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoire indépendantes et suivant toutes la loi normale de moyenne m et d'écart-type σ.

   Soit, pour n entier non nul, $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T_n^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

   (a) Quelle est la loi de $\overline{X}_n$?

   (b) Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais et convergent de m.

   (c) Soit $Z_n = \frac{X_1+X_n}{2}$. Montrer que Z_n est aussi un estimateur sans biais convergent de m. De $\overline{X}_n$ et Z_n lequel est de plus petite variance ?

   (d) Montrer que $E(T_n^2) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i - \overline{X}_n)$.

   (e) En déduire la valeur du réel a tel que $S_n^2 = aT_n^2$ soit un estimateur sans biais de σ^2.

5. On suppose qu'un enfant collectionne des images de joueurs de football qu'il trouve en cadeau dans des tablettes de chocolat. Une tablette contient une seule image et il y a $N \geq 2$ images de joueurs différentes numérotées de 1 à N, que l'entreprise de chocolat a réparties avec la même fréquence $1/N$. Notons X_n le numéro de l'image trouvée dans la n-ième tablette ouverte par l'enfant. Alors, les hypothèses sur la répartition des images impliquent que $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de variables uniformes sur $\{1, \ldots, N\}$, où $N \geq 2$.
   Pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, on note

   $$\tau_k^N = \inf\{n \geq 1 \ : \ \mathrm{Card}(\{X_1, \ldots, X_n\}) = k\} \ .$$

   On a $\tau_1^N = 1$ et τ_k^N est le nombre de tablettes que l'enfant a ouvertes lorsqu'il obtient pour la première fois k images différentes.

   (a) Calculer $P(\tau_2^N - \tau_1^N = p)$ pour tout $p \geq 1$. Plus généralement, calculer pour tout $p \geq 1$,

   $$P(\tau_{k+1}^N - \tau_k^N = p) \ .$$

   Calculer également $E(\tau_{k+1}^N - \tau_k^N)$.

   (b) Posons $H_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} 1/k$ et $T_N = \tau_N^N$. Calculer $H_N^{-1}E(T_N)$.

   (c) Montrer que les variables $(\tau_{k+1}^N - \tau_k^N, 1 \leq k \leq N-1)$ sont indépendantes.

   (d) Calculer la variance de T_N notée $\mathrm{V}(T_N)$ en fonction de H_N.

   (e) Montrer que $H_N^{-1}(T_N - E(T_N))$ tend vers 0 en probabilité.

6. Soit F une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ de classe C_1 vérifiant :

   $F(0,0) = 0$ et pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$

   $$x \, \frac{\delta F}{\delta x}(x,y) \; + \; y \, \frac{\delta F}{\delta y}(x,y) \; = 0.$$

   (a) Rappeler la définition d'une dérivée partielle

   (b) Soit (x, y) fixé dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Montrer que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\phi(t) = F(tx, ty)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer sa dérivée.

   (c) En déduire l'expression de F.

   (d) Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$.
   Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   Calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$.
   Dans la suite, on se propose de trouver toutes les fonctions g de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ de classe C_1 qui vérifient le problème :
   (*) $g(0,0) = 0$ et pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$ $x \, \frac{\delta f}{\delta x}(x,y) + y \, \frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$.

   (e) Déduire des questions précédentes une fonction h vérifiant le problème (*).

   (f) On pose $G = g - h$; déterminer une équation simple vérifiée par la fonction G ?

   (g) En déduire toutes les fonctions solutions du problème (*).

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on pose $E = \{1, \cdots, n\}$.

   (a) On choisit de façon équiprobable deux éléments de $\mathcal{P}(E)$: A et B.
   Déterminer la probabilité pour que $A \subset B$.

   (b) Déterminer la probabilité pour que $\text{card}(A \cap B) = k$.

   (c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\text{card}(A \cap B)$.

   (d) Calculer $S = \displaystyle\sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{card}(A \cap B)$.

8. Soit une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant des fonctions de répartition $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et convergeant en loi vers une variable aléatoire réelle X ayant une fonction de répartition F de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   (a) Rappeler la définition de la convergence en loi, de la convergence en probabilité.

(b) Soit $\varepsilon > 0$; montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$P(A \leq X \leq B) \geq 1 - \varepsilon$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$; montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(A \leq X_n \leq B) \geq 1 - \varepsilon$$

(d) Soit une suite de variables aléatoires réelles $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant en probabilité vers 0. Montrer que la suite de variables aléatoires (X_nY_n) converge en probabilité vers 0.

9. On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi définies sur un espace probabilisé et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note M_n le maximum de $X_1, \cdots, X_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega,\ M_n(\omega) = max\{X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)\}$$

(a) propriétés de la loi exponentielle.

(b) On suppose que les variables aléatoires (X_i) suivent une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z_n = \alpha M_n - \ln(n)$ converge en loi vers une variable aléatoire.

(c) On suppose maintenant que les variables aléatoires (X_i) suivent une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ (de densité $\frac{c}{\pi(c^2+x^2)}$).
Montrer que $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $Z_n = \frac{\pi}{nc}M_n$ converge en loi vers une variable aléatoire.

10. On admet que la durée de vie d'ampoules électriques suit une loi exponentielle d'espérance inconnue $\dfrac{1}{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ et que les variables aléatoires X_i représentant la durée de vie de l'ampoule i sont indépendantes.
Pour estimer α, on choisit un lot de n ampoules et on observe les instants, supposés distincts deux à deux,
$X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(r)}$ où les r premières de ce lot éclatent (où $X_1, \cdots, X_n$ représentent les durées de vies des n ampoules).

(a) Quelle est la loi de $X_{(1)}$, de $X_{(n)}$?
En posant $X_{(0)} = 0$, on admettra, pour la suite de l'exercice, que les variables aléatoires $X_{(i)} - X_{(i-1)}$, $1 \leq i \leq n$, sont indépendantes et suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs $\alpha(n - i + 1)$.

(b) Parmi les estimateurs sans biais de $\frac{1}{\alpha}$ de la forme

$$U = \lambda_1 X_{(1)} + \cdots + \lambda_r X_{(r)}$$

(c'est à dire combinaison linéaire des r observations $X_{(i)}$), trouver celui, noté $\hat{U}$, qui rend minimum $\text{var}(U)$. On commencera par déterminer l'espérance et la variance d'une telle variable aléatoire U.

Puis, on pourra montrer que $\hat{U} = (X_{(1)} + \cdots + X_{(r)})\frac{1}{r} + X_{(r)}\frac{n-r}{r}$ et qu'alors $\text{var}(\hat{U}) = \frac{1}{r\alpha^2}$.

11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient n variables aléatoires réelles indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un espace probabilisé $\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $\hat{X}_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

    (a) Rappeler la loi de $Y_n = n\hat{X}_n$, son espérance et sa variance. Quelle convergence peut-on établir pour la suite $(\hat{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
    On cherche à évaluer $P(X = 0) = e^{-\lambda}$ à l'aide d'une suite d'estimateurs (Z_n) convergeant en un certain sens vers $e^{-\lambda}$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(Z_n) = e^{-\lambda}$.

    (b) Une première idée est de poser $Z_n = e^{-\hat{X}_n}$. Que penser de ce choix ?

    (c) Une autre idée consiste à choisir $Z_n = \frac{K_n}{n}$ où $\forall \omega \in \Omega, K_n(\omega) = \text{Card}\{i,\ 1 \le i \le n,\ X_i(\omega) = 0\}$.
    Déterminer la loi de K_n. Qu'en déduire pour la suite (Z_n) ?

12. Soit M la matrice de $M_4(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    (a) Déterminer les entiers n de $\mathbb{N}$ tels que M^n soit inversible .

    (b) Déterminer les entiers n de $\mathbb{N}$ tels que M^n soit diagonalisable .

13. Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé, on appelle " chemin " de $O(0,0)$ à $A_n(n,n)$, où n est un entier, une ligne brisée de O à A_n formée de segments de longueur 1 et dont les changements de direction ne se font que vers le haut ou vers la droite.
    Dénombrer le nombre de chemins différents de O à A_n.

14. Soit, pour tout n entier non nul , $P_n(x) = x^n + x - 1$.

    (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$. (on définit ainsi une suite de réels $(x_n)_n$.)

    (b) Etudier la monotonie de la suite $(x_n)_n$.

(c) Montrer que x_n converge vers un réel que l'on précisera.

(d) Montrer que pour tout n non nul $1 - x_n \leq \frac{\log(n)}{n}$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre $a > 0$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

15. (a) Montrer que la variable aléatoire $\dfrac{1}{S_n}$ a une espérance finie qu'on note m.

    Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$.

    (b) Calculer l'espérance $E(\dfrac{S_k}{S_n})$ en fonction de n, a , k et m.

16. Soit f une fonction continue de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$.

    (a) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé, il existe un unique couple (a_n, b_n) de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\int_0^{2\pi} (f(t) - a\cos(nt) - b\sin(nt))^2 dt$$

    soit minimale.

    (b) Que dire des limites des suites (a_n) et (b_n) pour $n \to +\infty$ lorsque f est supposée de plus de classe C^1 ?

17. Montrer que, lorsque n tend vers l'infini,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$

    est équivalent à

$$\frac{1}{2}e^n$$

    (on pourra introduire une variable aléatoire discrète usuelle).

18. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : P' divise P $(*)$.

    (a) Montrer que P'' divise P'.

    (b) En déduire tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la propriété $(*)$.

19. Soit n un entier supérieur à 2 et E un espace vectoriel euclidien de dimension n .

(a) Existe-t-il une suite de m vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_m)$, avec $m \neq n$, telle que pour tout x de E on ait :

$\|x\| = \sqrt{< x|x_1 >^2 + < x|x_2 >^2 + ... + < x|x_m >^2}$?

(b) Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une suite de n vecteurs qui vérifient :

$\|x_1\| = \|x_2\| = ... = \|x_n\| = 1$

et pour tout x de E, $\|x\| = \sqrt{< x|x_1 >^2 + < x|x_2 >^2 + ... + < x|x_n >^2}$.

Montrer que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une base de E .

20. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont des valeurs propres.
Démontrer que f est diagonalisable.
21. Soit A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Montrer qu'il existe un triplet de scalaires non tous nuls $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tel que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ admette une unique valeur propre.
22. Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t) f(t) dt = 1 + x$.

2 Exercices donnés en option économique

1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
   La matrice A est-elle inversible ?

   (b) Déterminer tous les entiers naturels p et q tels que $A^{2p+1} = A^{2q}$.

   (c) Existe-t-il un entier n de $\mathbb{N}$ tel que $M^n = A$ si :

   i. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   ii. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à densité continues.
Soit $U = min(X, Y)$ et $V = max(X, Y)$.
Soient F_X, F_Y, F_U, F_V les fonctions de répartition de X, Y, U et V respectivent.