Voici un échantillon de la première version des sujets posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire BL, lors des épreuves orales du concours 2008.

A) Sujets donnés en option scientifique

SUJET N°1

■ *1 - Exercice*

Dans cet exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et Id_E l'endomorphisme identité de E.

On considère un endomorphisme u de E tel que :

$$u^2 - 2u + Id_E = 0$$

où $u^2 = u \circ u$.

1° *Question de Cours:* Enoncer le théorème du rang pour une application linéaire.

2° a) Montrer que u est un automorphisme de E.

b) Quelles sont les valeurs propres de u ?

c) A quelles conditions u est-il diagonalisable ?

d) Comparer $\mathrm{Im}(u - Id_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$ et en déduire que $\dim \mathrm{Ker}(u - Id_E) \geqslant \dfrac{n}{2}$.

3° On suppose dans la suite de l'exercice que $\dim \mathrm{Ker}(u - Id_E) = n - 1$.

a) Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(u - Id_E)$. Justifier l'existence de $n - 1$ vecteurs de E notés $e_2, \ldots, e_n$ tels que $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ soit une base de $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$ et $u(e_n) = e_1 + e_n$.

b) Montrer alors que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.

4° a) Soit N la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé en ligne 1 et colonne n qui est égal à 1. Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MN = NM$.

b) On note $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v = v \circ u\}$. Montrer que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension en fonction de n.

■ *2 - Exercice sans préparation*

**Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit λ un réel strictement positif. Pour tout n supérieur ou égal à λ, on considère la variable aléatoire $N_n = \dfrac{1}{n}\ \mathrm{Inf}\,\{i, X_{i,n} = 1\}$, où $(X_{i,n})_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que pour tout entier i, $X_{i,n}$ suive une loi de Bernoulli de paramètre λ/n.
Etudier la convergence en loi de la suite $(N_n)_{n \geqslant \lambda}$.**

SUJET N°2

■ *1 - Exercice*

1° *Question de Cours:* Rappeler la définition d'une loi uniforme sur un segment $[a, b]$ où a et b sont deux réels vérifiant $a < b$. Eléments caractéristiques de cette loi.

Soient $(U_n)_{n\geqslant 1}$ et $(V_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et toutes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On suppose de plus que toutes les variables U_n et V_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont indépendantes dans leur ensemble.

2° Déterminer la loi de U_n^2.

3° Pour tout réel $x \in]0, 1]$, calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\, dt$.

(On pourra utiliser en le justifiant le changement de variable $t - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2}. \sin\theta$ avec $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$).

4° Montrer que la variable $U_n^2 + V_n^2$ possède une densité ; on note h cette densité.
Exprimer $h(x)$ sous forme d'une intégrale pour tout $x \in [0, 2]$.
Déterminer $h(x)$ dans le cas où $x \in [0, 1]$.

5° On pose :

$$\forall n \geqslant 1,\ X_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad U_n^2 + V_n^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de X_n.

6° On pose, pour tout $n > 0$,

$$Z_n = 4\,\frac{(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)}{n}.$$

Prouver que la suite (Z_n) converge en probabilité vers la constante π.

7° Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $\delta > 0$.

a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \mathbb{P}\big([|Z_n - \pi| > \delta]\big) \leqslant \alpha.$$

Donner l'expression d'un tel n_0 en fonction de α et de δ.

b) A l'aide du théorème de la limite centrée, donner une approximation de la probabilité :

$$\mathbb{P}\big([|Z_n - \pi| > \delta]\big).$$

Expliquer comment on peut trouver une valeur de n_0 par cette méthode.

■ *2 - Exercice sans préparation*

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que u est de rang 1.

1° Montrer qu' il existe un nombre λ réel tel que $u^2 = \lambda u$ (u^2 désigne $u \circ u$).

2° Montrer que si $\lambda \neq 1, u - \mathrm{Id}_E$ est inversible et déterminer son inverse.

SUJET N°3

■ *1 - Exercice*

1° *Question de Cours:* Rappeler la définition d'un vecteur propre, d'une valeur propre.
On note E l'espace vectoriel réel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On note Id_E, l'application identité de E. Soit Φ l'application définie sur E par

$$\Phi(f)(x) = f(x) + f'(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2° a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) La fonction non nulle $u \in E$ est un vecteur propre de Φ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(u) = \lambda u$. Déterminer les vecteurs propres de Φ.

c) Soit $f \in E$. Etablir la formule suivante

$$f(x) = f(0)\, e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t \left(f(t) + f'(t)\right) dt.$$

d) En déduire que l'endomorphisme Φ est surjectif.

e) Déterminer l'ensemble des fonctions f qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient l'égalité : $f(x) + f'(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3° On considère une fonction g de E qui admet une limite nulle en $+\infty$.

a) Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que g est bornée sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Prouver que la borne supérieure de l'ensemble $\Omega_a = \{|g(x)| \,/ x \in [a, +\infty[\}$ existe ; dans la suite on note $h(a)$ cette borne supérieure.

b) Démontrer que $h(a)$ tend vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$.

c) Justifier, en utilisant certaines des questions précédentes, l'existence d'une unique fonction $f \in E$ qui vérifie :

$$f(x) + f'(x) = g(x) \text{ et } f(0) = 0,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) Soit $a \in]0, +\infty[$ et $x > a$, établir l'inégalité suivante

$$\left| \int_0^x e^{t-x} g(t) dt \right| \leqslant e^{a-x} h(0) + h(a).$$

En déduire que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

■ *2 - Exercice sans préparation*

On lance au hasard une pièce de monnaie équilibrée et on relève le résultat Pile ou Face. On suppose que cette expérience peut être réalisée autant de fois que nécessaire et que les résultats successifs sont mutuellement indépendants.
Pour tout n entier naturel non nul, on note P_n la probabilité qu'au cours de n lancers, on n'ait jamais obtenu deux Pile successifs.

1° Calculer P_1, P_2, P_3.

2° Trouver une relation entre P_n, P_{n+1} et P_{n+2} pour tout n entier naturel non nul et prouver que la suite $(P_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0.

EXERCICE N°4

■ *1 - Exercice*

Afin de contrôler la qualité des produits à la sortie d'une usine, on prélève un échantillon de n objets que l'on teste. Suivant les résultats du test, les objets sont classés en deux catégories A et B uniquement.
On suppose que chaque objet a la probabilité p d'être de la catégorie B et que les classements des différents objets sont indépendants. Les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1° *Question de Cours:* Enoncer la loi faible des grands nombres.

2° On note N_n la variable aléatoire égale au nombre d'objets classés en B.
Quelle est la loi de N_n ?
Quelle est la limite de la probabilité $\mathbb{P}\big([np - \sqrt{np(1-p)} \leq N_n \leq np + \sqrt{np(1-p)}]\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

3° On distingue ensuite deux sous-catégories dans la catégorie B : B_1 et B_2.
Chaque objet de la catégorie B a la probabilité q d'être classé en B_2.
Soit M_n la variable aléatoire égale au nombre d'objets classés dans B_2. Quelle est la loi conditionnelle de M_n sachant $[N_n = k]$? En déduire la loi de M_n.
Pouvait-on prévoir le résultat ?

4° Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On ne fixe plus la taille de l'échantillon mais on prélève des objets jusqu'à en obtenir k de la catégorie B.
On suppose que le nombre des objets fabriqués est infini.

a) Soit T_k la variable aléatoire égale au nombre d'objets qu'il a fallu prélever.
Déterminer la loi de T_k ainsi que son espérance.

b) On définit les variables aléatoires U_i pour $1 \leqslant i \leqslant k$, par

$$U_1 = T_1,\ U_2 = T_2 - T_1, \cdots, U_k = T_k - T_{k-1}.$$

Quelles sont les lois suivies par les U_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$? Exprimer T_k en fonction de U_1, U_2, ..., U_k.
(On admet dans la suite que les variables U_1, U_2, ..., U_k sont indépendantes)
Déterminer la limite en probabilité de T_k/k lorsque k tend vers $+\infty$.

c) Comment les variables aléatoires T_k $(k \in \mathbb{N}^*)$ peuvent-elles servir à estimer le paramètre p ?

■ *2 - Exercice sans préparation*

Soit f l'application de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & \text{si } (x,y) \neq (1,1), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

1° Montrer que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant 1-y$.

2° L'application f est-elle continue en $(1,1)$?

3° Justifier l'existence de $\underset{(x,y)\in[0,1]^2}{\mathrm{Min}} f(x,y)$ et de $\underset{(x,y)\in[0,1]^2}{\mathrm{Max}} f(x,y)$ et déterminer leur valeur.

EXERCICE N°5

■ 1 - *Exercice*

1° *Question de Cours:* Donner la définition d'une variable aléatoire discrète.

On veut étudier le jeu suivant. Avant le premier tour, le joueur possède un euro. A chaque tour, il peut gagner un euro (avec une probabilité $2/3$) ou perdre un euro (avec une probabilité $1/3$). Chaque tour est indépendant des précédents. Le jeu s'arrête si le joueur est ruiné.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n l'événement «le jeu se termine en moins de n tours», et p_n sa probabilité. On note T l'événement «le jeu se termine en un nombre fini de tours», et p sa probabilité.
On note $\overline{T}_n$ l'événement contraire de T_n. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note X_n, la variable aléatoire qui représente la somme d'argent détenue par le joueur après le n-ième tour de jeu si celui-ci a lieu ; sinon, on pose $X_n = 0$. On suppose que le jeu est modélisé par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2° a) Montrer que le jeu ne peut se terminer qu'après un nombre impair de tours.

b) Calculer p_1, p_3, p_5.

c) Montrer que p_n converge vers p lorsque n tend vers $+\infty$.

3° a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{P}_{[\overline{T}_n \cap (X_n=1)]}(T) = p$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier $\geqslant 2$.
On note $A_{n,k}$ l'événement « il existe $m > n$ tel que ($\overline{T}_m$ et $X_m = k-1$) ».
Montrer que $\mathbb{P}_{[\overline{T}_n \cap (X_n=k)]}(A_{n,k}) = p$.

c) En déduire, en fonction de p, la probabilité $\mathbb{P}_{\overline{T}_1}(T)$.

d) Montrer que $p = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}p^2$. On admet que $p < 1$; calculer alors p.

■ 2 - *Exercice sans préparation*

Soit $(u_n)_n$ une suite convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 2^{-n}\left(\binom{n}{0}u_0 + \binom{n}{1}u_1 + \binom{n}{2}u_2 + \ldots + \binom{n}{n}u_n\right) \quad (1)$$

On se propose de montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

1° Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k} = 0$.

2° Montrer la propriété pour $l = 0$.

3° Etudier le cas général.

SUJET N°6

■ *1 - Exercice*

1° ***Question de Cours:*** **Donner la définition et les propriétés des projecteurs.**

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n ($n \geqslant 2$). On considère un endomorphisme u de E vérifiant

$$u^2 - 2u + Id_E = 0.$$

2° a) **Montrer que u est un automorphisme de E et préciser u^{-1}. Montrer que 1 est la seule valeur propre de u.**

b) **Montrer que $\mathrm{Im}(u - Id_E) \subset \mathrm{Ker}(u - Id_E)$ et en déduire que la dimension de $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$ est supérieure ou égale à $n/2$.**

3° **Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer les équivalences suivantes :**

- $p \circ q = p \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p$,
- $p \circ q = q \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p$,

4° **Soit v un endomorphisme de E.**

a) **On suppose que $v^2 = 0$. Soient S un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, v$ dans E et p la projection sur $\mathrm{Im}\, v$ parallèlement à S. On pose $q = p - v$. Montrer que q est un projecteur et que $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$.**

b) **Montrer que $v^2 = 0$ si et seulement si il existe deux projecteurs p et q de E tels que $v = p - q$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$.**

5° **Montrer qu'il existe deux projecteurs p et q_1 de E tels que $u = p + q_1$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\, q_1$.**

■ *2 - Exercice sans préparation*

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit θ un réel strictement positif et pour tout réel $\lambda > 0$, X_λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda\theta$.

1° **Montrer que $\dfrac{X_\lambda - \lambda\theta}{\lambda}$ converge en probabilité vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.**

2° **En déduire pour x réel distinct de θ l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda\theta} \sum_{k \leqslant \lambda x} \frac{(\lambda\theta)^k}{k!}$.**

SUJET N°7

■ *1 - Exercice*

1° ***Question de Cours:*** **Enoncer le théorème du rang.**

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On définit u^n pour tout n entier naturel par : $u^0 = Id_E$ et pour $n \geqslant 1, u^n = u^{n-1} \circ u$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \operatorname{Ker} u^n$, et $d_n = \dim K_n$; on note aussi $L_n = \operatorname{Im} u^n$.

2° **Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion. Que dire de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$?**

3° **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = d_{n+1} - d_n$. Montrer que K_{n+1} est l'image réciproque par u^n de $\operatorname{Ker} u$, et déterminer l'image directe de K_{n+1} par u^n. En déduire que $p_n = \dim(L_n \cap \operatorname{Ker} u)$, puis que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.**

4° **On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$. Montrer que, pour tout $n \geqslant N$, $K_n = K_N$.**

5° **On note $v = u \circ u$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $q_n = \dim(\operatorname{Ker} v^{n+1}) - \dim(\operatorname{Ker} v^n)$. Exprimer q_n en fonction des termes de la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$.**

6° **Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et $v : E \to E$ l'endomorphisme défini, pour tout polynôme P, par :**

$$v(P) = P(0)X^2 + P'(0).$$

Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'endomorphisme $u : E \to E$ tel que $v = u \circ u$.

■ *2 - Exercice sans préparation*

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère n variables aléatoires à densité, de même loi et indépendantes $X_1, \ldots, X_n$. On note F la fonction de répartition et f une densité des X_i.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $(Y_1(\omega), Y_2(\omega) \ldots, Y_n(\omega))$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ réordonnés par ordre croissant. On a donc $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \ldots \leqslant Y_n(\omega)$ pour tout ω de Ω.

1° **Si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que**

$$\mathbb{P}([Y_k \leqslant x]) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j}.$$

2° **En déduire que Y_k admet une densité qu'on explicitera sans signe $\sum$.**

SUJET N°8

■ *1 - Exercice*

1° ***Question de Cours:*** **Donner la définition d'une fonction f convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle de $\mathbb{R}$.**

Lors d'une soirée, n amis ($n \geqslant 2$) jouent au jeu suivant. Chacun met un euro sur la table et inscrit pile ou face sur un papier sans que les autres puissent connaître son choix. Un serveur lance ensuite une pièce équilibrée. La somme de n euros est partagée (théoriquement sous forme fractionnaire) entre les gagnants (ceux qui ont fait le bon choix). S'il n'y a pas de gagnant, on donne la somme totale au serveur en guise de pourboire.

2° Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note X_k la somme aléatoire que reçoit le joueur k. Calculer l'espérance de X_k.

3° Dans cette question, on suppose qu'une nouvelle personne arrive avant que la pièce ne soit lancée. On demande à un joueur s'il accepte que cette nouvelle personne participe au jeu.
Que doit répondre ce joueur s'il veut maximiser le gain espéré ?
Quel doit être l'avis du serveur si il veut maximiser le pourboire espéré ?

4° Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de points de I et tout n-uplet $(t_1, \ldots, t_n)$ de réels positifs tel que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a :

$$f(t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n) \leqslant t_1 f(x_1) + \ldots + t_n f(x_n).$$

b) Soit X une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs contenues dans I. Montrer que :

$$f(E(X)) \leqslant E(f(X)).$$

5° On se place à nouveau dans un jeu à n joueurs.

a) Calculer $E(X_k^2)$ sous forme d'une somme finie.

b) Montrer que :

$$E(X_k^2) \geqslant \frac{2n^2}{(n+1)^2}.$$

■ *2 - Exercice sans préparation*

1° Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \longmapsto (1+x)^{1/2}$ admet un développement limité d'ordre p au voisinage de 0. On note $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ la partie régulière de ce développement limité.

2° Montrer que $P^2 - X - 1$ est divisible par X^{p+1}.

3° Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = 0$.
Montrer que l'équation $B^2 = I_n + A$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (I_n désigne la matrice identité d'ordre n) admet au moins une solution.

SUJET N°9

■ *1 - Exercice*

1° ***Question de Cours:*** **Définition d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme f. Lien entre valeurs propres de f et racines d'un polynôme annulateur de f.**

Soit $n \geqslant 2$ un entier et λ un réel. On définit l'application :

$$f_\lambda : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;, \qquad A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} .$$

2° **a) f_λ est-il injectif ? surjectif ?**

b) Déterminer $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,,\ f_\lambda(A) = \lambda U + f_0(A)$.

c) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n+1$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_\lambda\big[\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big] \subset \mathcal{F}$.

d) Déterminer $f_\lambda \circ f_\lambda$.

e) Pour quelle(s) valeur(s) de λ, f_λ est-il un endomorphisme ? Dans ce cas, f_λ est-il diagonalisable ?

3° **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $f_\lambda(A)$ soit diagonalisable.**

4° **a) Montrer que, pour tout $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$, on a :**

$$f_0(A).U = 0 \quad \text{et} \quad f_0(AB) = A\, f_0(B) \;.$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$. Montrer l'équivalence :

$$f_\lambda(A).f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB) \Leftrightarrow A.f_0(B) = f_\lambda(A).f_0(B) \;.$$

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour que :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,, \quad f_\lambda(A).f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB) \;.$$

■ *2 - Exercice sans préparation*

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi uniforme sur $]0,1]$, et $q \in\ ]0,1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire

$$X = 1 + \left\lfloor \frac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor \,,$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

SUJET N°10

■ *1 - Exercice*

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1° *Question de Cours:* Définition et propriétés de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

On note E l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes finies à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Pour $X \in E$, on note $\{x_i\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$, avec $0 \leqslant x_1 < x_2 \cdots < x_k$, l'ensemble des valeurs prises par X avec une probabilité non nulle, et on pose

$$\forall i \in [\![1, k]\!]\ , \quad \mathbb{P}[X = x_i] = p_i > 0\ .$$

On définit alors l'application :

$$\Phi_X : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}\ , \qquad t \mapsto \frac{1}{t}\ \ln\left[\sum_{i=1}^{k} p_i\, \mathrm{e}^{x_i t}\right]\ .$$

2° Exemples :

a) Déterminer Φ_Y si Y est une variable aléatoire certaine de E.

b) Soit Z une variable aléatoire de E telle que $\mathbb{P}[Z = 0] = \mathbb{P}[Z = 1] = 1/2$. Montrer que Φ_Z peut être prolongée en une fonction $\widehat{\Phi_Z}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

3° On suppose $k \geqslant 2$. Déterminer un développement limité à l'ordre 1 en 0 de Φ_X. En déduire que Φ_X peut être prolongée en une fonction $\widehat{\Phi_X}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
Que valent $\widehat{\Phi_X}(0)$ et $\left(\widehat{\Phi_X}\right)'(0)$?

4° Déterminer les limites de $\widehat{\Phi_X}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

5° $\widehat{\Phi_X}$ peut-elle être impaire ?

6° a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ une suite finie strictement croissante de réels. Montrer que la famille de fonctions $\left(t \mapsto \mathrm{e}^{y_i t}\right)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est libre.

b) X et Y étant deux éléments de E, montrer que $\Phi_X = \Phi_Y$ si et seulement si X et Y ont la même loi.

7° Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes appartenant à E. Déterminer une relation entre Φ_{X+Y}, Φ_X et Φ_Y .

■ *2 - Exercice sans préparation*

Représenter dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ l'ensemble des points de coordonnées (a, b) telles que $a > 0$, $b > 0$ et la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n}{1 + b^n}$ soit convergente.

SUJET N°11

■ *1 - Exercice*

$1°$ *Question de Cours:* Produit de convolution.

**Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que X vérifie la propriété $(\mathcal{D})$ si, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n variables aléatoires réelles $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}$ mutuellement indépendantes, de même loi et dont la somme a même loi que X.**

$2°$ a) Montrer que si X suit une loi de Poisson, alors X vérifie $(\mathcal{D})$.

b) Montrer qu'il en est de même si X suit une loi normale.

$3°$ Une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs vérifie-t-elle la propriété $(\mathcal{D})$?

$4°$ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$. On considère dans cette question une variable aléatoire X à valeurs dans $[a, b]$ et vérifiant la propriété $(\mathcal{D})$.

a) Montrer que $\mathbb{V}(X_{1,n}) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{n^2}$.

b) Que peut-on en déduire sur X ?

$5°$ a) Déterminer le réel c tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \mapsto f_\lambda(x) = \dfrac{c\,\lambda}{\lambda^2 + x^2}$ soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite, c aura cette valeur.

b) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de densité f_1. Montrer qu'une densité g de $X_1 + X_2$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(2x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x+t)\, f_1(x-t)\, \mathrm{d}t\,.$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Déterminer quatre réels (a, a', b, b') (dépendant de x) tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{\left[1+(x-t)^2\right]\left[(1+(x+t)^2\right]} = \frac{a(x-t)+b}{1+(x-t)^2} + \frac{a'(x+t)+b'}{1+(x+t)^2}\,.$$

**d) En déduire une expression simple de g sur $\mathbb{R}^*$.
On admet que g est continue sur $\mathbb{R}$. Calculer $g(0)$.**

Plus généralement, pour λ et μ réels non nuls, on admet que le produit de convolution de f_λ et f_μ est $f_{\lambda+\mu}$.

e) Une variable aléatoire X de densité f_λ vérifie-t-elle la propriété $(\mathcal{D})$?

■ *2 - Exercice sans préparation*

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Déterminer les polynômes de degré n, divisibles par $X+1$ et dont les restes dans la division euclidienne par $X+2, \ldots, X+n+1$ sont égaux.

SUJET N°12

■ *1 - Exercice*

1° *Question de Cours:* Définition des développements limités à l'ordre 1 et 2 d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On confondra d'une part A et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique, et d'autre part un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la colonne de ses coordonnées dans la base canonique.
On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

2° Dans cette question, $n = 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer Ker A.

b) On définit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par $f(X) = {}^tXAX$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Justifier que f est positive sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses extremums globaux.

On revient au cas général, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \langle Ax, x\rangle$.

3° a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et écrire la formule de Taylor à l'ordre 1 en $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Montrer que pour tous vecteurs x, u dans $\mathbb{R}^n$: $\langle Au, x\rangle = \langle {}^tAx, u\rangle$.

En déduire que : $f(x+u) = f(x) + \big\langle (A + {}^tA)\, x, u\big\rangle + \langle Au, u\rangle$.

c) Justifier que $S = \big\{u \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } \|u\| = 1\big\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.
En déduire l'existence d'une fonction réelle ε définie sur $\mathbb{R}^n$ continue en 0 telle que, $\varepsilon(0) = 0$ et pour tout u élément de $\mathbb{R}^n$, $\langle Au, u\rangle = \|u\|\ \varepsilon(u)$.

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $\nabla f(x) = (A + {}^tA)x$, où $\nabla f(x)$ désigne le gradient de f au point x.

e) On suppose dans cette question que A est symétrique et vérifie : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \langle Ax, x\rangle \geqslant 0$.
Montrer que :

$$\big\{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = 0\big\} \subset \big\{x \in \mathbb{R}^n,\ \nabla f(x) = 0\big\} \quad \text{puis que} \quad \big\{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = 0\big\} = \mathrm{Ker}(A).$$

Que dire des extremums de f ?

■ *2 - Exercice sans préparation*

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Montrer que la fonction g définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = F(x+1) - F(x)$$

est une densité de probabilité.