

Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire BL, constituent la première version d'un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2009.

1 Sujets donnés en option scientifique

Sujet S 1 - Exercice

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$. On considère la variable aléatoire T définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

$$T = \inf \{n \in \mathbb{N}^* / S_n \geq 1\}.$$

- 1) Question de cours : Densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- 2) On admet dans cette question que : $\mathbb{P}([S_n < 1]) = \frac{1}{n!}$ pour $n \geq 2$.
 - a) Que vaut $\mathbb{P}([T = 1])$?
 - b) Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'événement $[T = n]$ en fonction des événements $[S_n \geq 1]$ et $[S_{n-1} < 1]$.
 - c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la valeur de $\mathbb{P}([T = n])$.
 - d) Établir l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(T)$; calculer $\mathbb{E}(T)$.
- 3) a) Déterminer une densité de la variable aléatoire S_2 .
 b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une densité f_{S_n} de la variable aléatoire S_n est donnée par :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j} (x-j)^{n-1} & \text{si } x \in [k-1, k], (1 \leq k \leq n) \\ 0 & \text{si } x \notin [0, n] \end{cases}$$

- c) En déduire que $\mathbb{P}([S_n < 1]) = \frac{1}{n!}$.

Sujet S 1 - Exercice sans préparation

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$. Soit f et g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

- 1) Prouver qu'il existe un endomorphisme ϕ de E ayant des valeurs propres positives tel que $f = \phi^2$ (ϕ^2 désigne $\phi \circ \phi$).
- 2) Montrer que :

$$\text{Ker}(f + g) = \text{Ker } f \cap \text{Ker } g.$$

Sujet S 2 - Exercice

- 1) Question de cours : Existence des moments d'une variable aléatoire discrète.
- 2) Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 2(1-x)^2 \ln(1-x)}{12x^2}$$

- a) Étudier les variations de f .

b) Montrer que, lorsque x tend vers 0^+ , $f(x) \sim \frac{x}{18}$.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, strictement positives, indépendantes et de même loi.

On pose : $U = X_1 + X_2$, $T = X_1 - X_2$, $Y_1 = \frac{X_1}{U}$, $Y_2 = \frac{X_2}{U}$.

- 3) a) Montrer que Y_1 et Y_2 suivent la même loi et admettent des moments de tous ordres. Calculer $\mathbb{E}(Y_1)$ et $\mathbb{E}(Y_2)$.
- b) En déduire que $\frac{T}{U}$ admet des moments de tous ordres. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{T}{U}\right)$.
- c) Montrer que $\mathbf{Cov}(Y_1, Y_2) = -\mathbb{V}(Y_1)$. En déduire une formule reliant $\mathbb{V}\left(\frac{T}{U}\right)$ et $\mathbb{V}(Y_1)$.
- 4) On suppose que X_1 et X_2 suivent la loi géométrique de paramètre p ($p \in]0, 1[$). On pose $q = 1 - p$. On admet le résultat suivant : $\mathbb{V}(Y_1) = f(q)$.

À l'aide des résultats précédents, établir l'encadrement suivant :

$$0 < \mathbb{V}\left(\frac{T}{U}\right) < \frac{1}{3}$$

Sujet S 2 - Exercice sans préparation

1- Montrer que pour $z > 0$, l'intégrale

$$J(z) = \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

est convergente.

2- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J(z)$ est équivalent en $+\infty$ à $\frac{e^{-z}}{z}$.

Sujet S 3 - Exercice

- 1) Question de cours : Donner la définition et les principales propriétés d'une fonction convexe sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On admettra que si f est convexe sur I et $(x, y, z) \in I^3$, alors

$$f\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right) \leq \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) + \frac{1}{3}f(z).$$

- 2) Soient a, b et c trois réels strictement positifs, montrer que :

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

En déduire que :

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

en posant $(a', b', c') = (1/a, 1/b, 1/c)$,

3) Soient a_0, b_0 et c_0 trois réels strictement positifs. On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ par les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3} \\ b_{n+1} = (a_n b_n c_n)^{\frac{1}{3}} \\ c_{n+1} = \frac{3}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}} \end{cases}$$

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les réels a_n, b_n et c_n sont bien définis et $0 < c_n \leq b_n \leq a_n$.
 b) Montrer que les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ sont monotones et que les trois suites $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ sont convergentes. On note λ, μ et ν leurs limites respectives.
 c) Montrer que $\lambda = \mu = \nu$.

d) On cherche maintenant à montrer que la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ est toujours monotone.

i) Soient x, y et z trois réels, tels que $0 < x < y < z$. On note :

$$\begin{cases} s = x + y + z \\ d = xy + xz + yz \\ p = xyz \end{cases}$$

Montrer que $ps^3 - d^3$ est du signe de $xz - y^2$.

(on pourra remarquer que $ps^3 - d^3 = -(yz - x^2)(zx - y^2)(xy - z^2)$).

ii) En appliquant le résultat précédent à a_1, b_1 et c_1 , montrer que $b_3 - b_2$ est du signe de $b_2 - b_1$.
 Conclure.

Sujet S3 - Exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une famille de n variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω , indépendantes et de même loi.

On définit la variable aléatoire :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- 1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'espérance $\mathbb{E}(e^{xS_n})$ existe et $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}([S_n \geq a]) \leq e^{-ax} \mathbb{E}(e^{xS_n})$.
 2) Appliquer ce résultat au cas où chaque X_i suit la loi définie par :

$$\mathbb{P}([X_i = 1]) = p, \quad \mathbb{P}([X_i = -1]) = 1 - p.$$

Sujet S4 - Exercice

Si $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$.

On note F le sous-ensemble de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ constitué des matrices $M(a)$ quand a parcourt \mathbb{R}^4 .

On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n .

- a) Question de cours : Rappeler la définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille (x_1, \dots, x_p) de vecteurs de E . Dans quel cas la famille (x_1, \dots, x_p) est-elle une base de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$?
- b) Soient E_1 de base (x_1, \dots, x_p) et E_2 de base (y_1, \dots, y_q) deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ est libre. Qu'en déduit-on sur $p + q$?
- 2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et en donner la dimension.
- 3) Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de \mathbb{R}^4 . Pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on pose $M_i = M(e_i)$. Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, la matrice $M_i + J$ est inversible et que la famille $(M_i + J)_{1 \leq i \leq 4}$ est libre.
- 4) Soit $a \in \mathbb{R}^4$. Montrer que si pour tout réel θ non nul, la matrice $M(a) + \theta J$ est non inversible, alors $a = (0, 0, 0, 0)$.
- 5) Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui ne contient aucune matrice inversible et tel que $J \in G$.
- a) Déterminer $G \cap F$ et en déduire que la dimension de G est inférieure ou égale à 12.
- b) Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de dimension 12 ne contenant aucune matrice inversible et contenant J ?

Sujet S4 - Exercice sans préparation

Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0, 1[$.

- 1) Montrer que pour $a > 0$ fixé, $\mathbb{P}(|X_n| \leq a)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- 2) Montrer que si $b > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \min(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$$

Qu'en déduit-on pour $\mathbb{P}(|X_n - np| \leq nb)$ quand n tend vers $+\infty$?

Sujet S5 - Exercice

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p ($p \in]0, 1[$).

On pose $q = 1 - p$, $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

- 1) Question de cours : Définition et propriétés de la loi géométrique.
- 2) Déterminer la loi de U .
- 3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
- a) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $[U = n]$.
- b) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_1 / U = n)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_1)$.
- 4) Déterminer la loi de T .
- 5) a) Calculer $\text{Cov}(U, T)$.
- b) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Sujet S5 - Exercice sans préparation

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 ayant comme matrice u dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

- 1) On pose $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, -1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1, 0)$. Calculer $f(v_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.
- 2) Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice de passage P de la base canonique de \mathbb{R}^4 à une base de vecteurs propres de M contenant le plus possible de 0, les autres termes étant $+1$ ou -1 .
- 3) Déterminer M^2 , puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.
- 4) Déterminer à l'aide de P , la matrice des projecteurs de \mathbb{R}^4 sur chacun des sous-espaces propres de M .

Sujet S6 - Exercice

1) Question de cours : Définition de la convergence absolue d'une série numérique. Lien entre convergence et convergence absolue.

2) a) Justifier pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}(1+e^{-2t})^p} dt$.

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{k,p} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}(1+e^{-2t})^p} dt$$

b) Calculer $I_{k,0}$ en fonction de k (on pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{2kt}$, après l'avoir justifié).

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n,1}$

3) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer la somme $\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}$ en fonction de $I_{2n+3,1}$ et $I_{1,1}$.

b) En déduire que la série de terme général $u_j = \frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}$ est convergente. Exprimer sa somme S en fonction de $I_{1,1}$.

4) Montrer que : $0 < S < 1$.

Sujet S6 - Exercice sans préparation

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $n \geq 1$ et (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon indépendant, identiquement distribué de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose λ inconnu et on cherche à l'estimer par un intervalle de confiance.

On pose :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

A l'aide de T_n , déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

Sujet S7 - Exercice

1) Question de cours : Diagonalisabilité d'une matrice, d'un endomorphisme.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2 (en posant $\text{degr}(0) = -\infty$).

2) On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Calculer son rang, en déduire une valeur propre de M et la dimension du sous-espace propre associé. Donner une base de ce sous-espace propre.

3) On pose $P_1 = X^2 - 1$, $P_2 = X^2 - X + 1$ et $P_3 = X^2 + X + 1$. Montrer que $\mathcal{V} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E .

On note $V_1 = \text{Vect}(P_1)$, $V_2 = \text{Vect}(P_1, P_2)$

4) On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice M dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de E .

Donner la matrice de f dans la base \mathcal{V} . En déduire que f^3 est nulle, puis préciser l'ensemble des valeurs propres de f .

- 5) Montrer que V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels stables par f .
- 6) On veut trouver les sous-espaces vectoriels F stables par f c'est à dire tels que $f(F) \subset F$.
 - a) Montrer que E et $\{0\}$ sont stables par f .
 - b) Soit D une droite vectorielle stable par f et $u \in D$ un vecteur non nul. Montrer que u est un vecteur propre de f . En déduire que $D = V_1$.
 - c) Soit F un plan stable par f et $v = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$ un élément de F . Montrer que $(v, f(v), f^2(v))$ est une famille liée. En déduire que $\gamma = 0$ puis que $F = V_2$.

Sujet S7 - Exercice sans préparation

Un enfant a dans chacune des deux poches de son blouson, un paquet contenant N bonbons. A chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit, de manière indépendante et avec la probabilité p , sa poche de gauche pour en prendre un.

- 1) Lorsqu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il en reste k dans l'autre poche ?
- 2) Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de bonbon dans les deux poches simultanément ?

3) Calculer $\sum_{k=0}^N 2^k \binom{2N-k}{N}$

Sujet S8 - Exercice

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- 1) Question de cours : Rappeler la définition de la convergence en probabilité. Démontrer qu'une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, suivant des lois de Poisson de paramètres θ_n , tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$, converge en probabilité vers 0.

- 2) On note F la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Démontrer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- b) On note f la fonction dérivée de F et, pour tout nombre réel θ , f_θ la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\theta(x) = f(x - \theta) \quad .$$

Vérifier que f_θ est une densité de probabilité.

- c) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, admettant f_θ pour densité. Montrer que X possède une espérance et une variance et les calculer.
- 3) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi, admettant pour densité f_θ .
Pour tout entier $n \geq 1$, on note $U_n = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $V_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

- a) Exprimer, à l'aide de F , θ et n , les fonctions de répartition de U_n et V_n .
 b) Justifier, pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, l'inégalité :

$$\mathbb{P}([-1 + \theta \leq U_n < -1 + \theta + 2\epsilon] \cap [1 + \theta - 2\epsilon < V_n \leq 1 + \theta]) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{U_n + V_n}{2} - \theta\right| < \epsilon\right).$$

- c) En déduire que $\frac{U_n + V_n}{2}$ est un estimateur convergent de θ .
 d) Est-il sans biais ?

Sujet S8 - Exercice sans préparation

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$.

- 1) Etudier la monotonie et la limite éventuelle de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^2 = 2n + x_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$.
 3) En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
 On pourra admettre que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

2 Sujets donnés en option économique

Sujet E9 - Exercice

On étudie la vente d'un certain type de produit sur internet sur trois sites A, B, C et on fait les constatations suivantes :

- si un client choisit le site A pour un achat, il choisit indifféremment A, B ou C pour l'achat suivant,
- si un client fait un achat auprès du site B, il fait l'achat suivant sur le même site B,
- si un client fait un achat sur le site C, il choisira pour l'achat suivant le site A avec une probabilité $1/12$, le site B avec une probabilité $7/12$ et le site C avec une probabilité $1/3$.

Au départ le client choisit au hasard l'un des trois sites.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_n , q_n et r_n les probabilités pour que, au n -ième achat, le client se fournisse respectivement auprès de A, B et C.

- 1) Question de cours : Énoncer la formule des probabilités totales.
 2) Quelles sont les valeurs de p_1 , q_1 et r_1 ?
 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une relation entre p_n , q_n et r_n .
 4) Exprimer p_{n+1} , respectivement q_{n+1} et r_{n+1} , en fonction des trois réels p_n , q_n et r_n .
 5) Pour $n \geq 2$, exprimer p_n en fonction de r_n et r_{n-1} .
 6) Prouver que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire. Donner l'expression de r_n , puis p_n et q_n en fonction de n .
 7) Étudier la convergence des trois suites $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Sujet E9 - Exercice sans préparation

Donner un exemple de matrice M non nulle telle que $(I, M, {}^tM)$ soit une famille liée.
 Dans quel cas de telles matrices sont-elles diagonalisables ?