

Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire BL constituent la première version d'un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2010.

1 Sujets donnés en option scientifique

Sujet S1 - Exercice

- 1) Question de cours : Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite réelle décroissante soit convergente.

Soit n un entier de \mathbb{N}^* , et M_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2) a) Montrer que le réel a est valeur propre de M_n si et seulement si le polynôme $P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - 1$ admet a pour racine.
 b) Déterminer alors le sous-espace propre associé à a .
- 3) a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, le polynôme P_k admet une unique racine dans l'intervalle $]1, +\infty[$; on la note a_k .
 b) Établir la convergence de la suite $(a_k)_{k \geq 2}$. Déterminer sa limite.
- 4) a) Montrer que, pour tout p de \mathbb{N}^* , le polynôme P_{2p} admet une racine unique dans \mathbb{R}^{-*} ; on la note b_p .
 b) Établir la décroissance, puis la convergence de la suite $(b_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite ℓ .
 c) Déterminer un équivalent simple de la suite $(b_p - \ell)_{p \in \mathbb{N}^*}$.
- 5) a) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles la matrice M_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles la matrice M_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Sujet S1 - Exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon i.i.d. de la loi de X .

- 1) Déterminer une densité de $Y_k = -\max(X_1, X_2, \dots, X_k)$, pour tout k de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
 2) En déduire $\mathbb{P}([X_n \geq X_1] \cap \dots \cap [X_n \geq X_{n-1}])$.

Sujet S2 - Exercice

Soit p un réel donné de $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère un couple (U, T) de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dont la loi de probabilité est donnée par : pour tout entier $n \geq 2$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}([U = n] \cap [T = t]) = \begin{cases} p^2 q^{n-2} & \text{si } |t| \leq n-2 \text{ et si } n, |t| \text{ de même parité} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1) Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales, lois conditionnelles.
- 2) Vérifier que $\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{\substack{|t| \leq n-2 \\ n, |t| \text{ de même parité}}} p^2 q^{n-2} = 1$.
- 3) a) Déterminer la loi marginale de U .
b) En distinguant les trois cas $t = 0$, $t > 0$ et $t < 0$, montrer que la loi marginale de T est donnée par :
pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}([T = t]) = \frac{pq^{|t|}}{1+q}$.
- c) Calculer $\mathbb{E}(T)$.
- 4) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
 - a) Déterminer la loi conditionnelle de T sachant $[U = n]$.
 - b) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(T/U = n)$ de T sachant $[U = n]$.
- 5) a) Justifier l'existence de $\mathbb{E}(U)$ et de $\mathbb{E}(UT)$. Calculer $\mathbf{Cov}(U, T)$.
b) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Sujet S2 - Exercice sans préparation

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = 3XP + (X^2 - X)P' - (X^3 - X^2)P'',$$

où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P .

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- 2) Déterminer $f(X^k)$ ($k \in \mathbb{N}$). Que peut-on dire du degré de $f(X^k)$?
- 3) f est-elle injective ? surjective ?
- 4) a) Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par f ($\mathbb{R}_n[X]$ est le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leq n$).
b) n étant ainsi choisi, soit ϕ l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$.
 ϕ est-il diagonalisable ?

Sujet S3 - Exercice

Soit a, b, c, α quatre nombres réels tels que $a \neq b$ et f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$f(P) = (X - a)(X - b)P' + \alpha(X - c)P.$$

- 1) Question de cours : Equations différentielles $h'(x) = h(x)g(x)$.
- 2) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leq n$ (en attribuant au polynôme nul le degré $-\infty$). Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, α, n pour que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par f , c'est-à-dire que $f(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
Dans toute la suite du problème, on suppose cette condition réalisée et on note f_n l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- 4) Soit λ un réel.
 - a) Trouver deux réels A et B indépendants de x , qu'on exprimera en fonction de n, a, b, c, λ , tels que :

$$\forall x \notin \{a, b\}, \frac{nx - nc + \lambda}{(x - a)(x - b)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b}.$$

- b) Donner toutes les valeurs de λ telles que $(x - a)^A(x - b)^B$ soit un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 5) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f_n .
 f_n est-il diagonalisable? f_n est-il bijectif?

Sujet S3 - Exercice sans préparation

- 1) Soit n un entier strictement supérieur à 3.
 n personnes jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée et de façon indépendante. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qu'on précisera.
Quelle est la probabilité qu'une personne exactement obtienne un résultat différent des $n - 1$ autres personnes (événement noté A)?
- 2) Un jeu consiste à répéter l'expérience précédente (appelée "partie") jusqu'à la réalisation de A . On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit X la variable aléatoire à valeurs entières désignant le nombre de parties jouées si le jeu s'arrête et prenant la valeur 0 sinon. Donner la loi de X , son espérance et sa variance.

Sujet S 4 - Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Si $P \in E$, on note $u(P)$ le polynôme Q tel que, pour tout x réel, $Q(x) = P(x + 1)$.

- 1) Question de cours : Définition et propriétés d'une matrice inversible.
- 2) a) Montrer que u définit un endomorphisme de E .
b) Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de E .
Justifier l'existence de A^{-1} et la calculer.
c) Déterminer A^2 .
d) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
- 3) a) Déterminer, selon les valeurs du réel a , tous les polynômes P de E tels que pour tout x réel,

$$P(x + 1) + aP(x) = 0$$

- b) Déterminer, selon les valeurs des réels a et b , tous les polynômes P de E tels que pour tout x réel,

$$P(x + 2) + aP(x + 1) + bP(x) = 0$$

- 4) On note $d = u - \text{Id}_E$, où Id_E désigne l'endomorphisme identité de E .
a) Déterminer $\text{Im } d$. Que vaut d^{n+1} ? (d^{n+1} désigne l'endomorphisme $d \circ d \circ \dots \circ d$ la lettre d étant répétée $n + 1$ fois).
b) En déduire l'existence de $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que, pour tout P appartenant à E et tout x réel,

$$P(x + n + 1) = \sum_{k=0}^n a_k P(x + k)$$

- c) Si $P \in E$, on pose $s(P) = X.d(P)$. Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme de E .
Cet endomorphisme s est-il diagonalisable ?

Sujet S 4 - Exercice sans préparation

- 1) Montrer qu'il existe un réel c pour lequel la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{c}{1 + x^2}$$

est une densité de probabilité.

- 2) Une variable aléatoire réelle ayant une telle densité possède-t-elle une espérance ?
- 3) Montrer que si X est une variable aléatoire réelle de densité f , X et $1/X$ ont même loi.

Sujet S5 - Exercice

1) Question de cours : Rappeler la définition d'une série convergente. Démontrer qu'une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Cette équivalence demeure-t-elle valable pour les séries à termes réels de signe quelconque ?

2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles positives.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{cases} m_n = \min\{u_n, v_n\} \\ M_n = \max\{u_n, v_n\} \end{cases}$$

Démontrer que, si les séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ sont convergentes, les séries $\sum_{n \geq 1} m_n$ et $\sum_{n \geq 1} M_n$

le sont aussi, et leurs sommes vérifient : $\sum_{n=1}^{+\infty} m_n + \sum_{n=1}^{+\infty} M_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

3) On suppose **désormais** que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{cases} u_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \\ v_n = \frac{4}{5^n} \end{cases} .$$

a) Démontrer que les deux séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ sont convergentes, et que leurs sommes sont égales.

b) Prouver que, pour tout $n \geq 2$, on a : $v_n \leq u_n$.

4) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements $[X_n = u_n]$ et $[X_n = v_n]$ soient des parties complémentaires de Ω , de même probabilité $\frac{1}{2}$.

a) Démontrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, la série $\sum_{n \geq 1} X_n(\omega)$ est convergente et que sa somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) \text{ est comprise entre } \frac{8}{15} \text{ et } \frac{22}{15}.$$

b) Démontrer que $\left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = \frac{22}{15} \right]$ et $\left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = 1 \right]$ sont des événements de probabilité nulle.

Sujet S5 - Exercice sans préparation

1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

2) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que u^2 soit un projecteur de rang égal à 1.

a) Montrer que 0 est valeur propre de u et que u possède au plus une autre valeur propre, égale à +1 ou à -1.

b) Montrer que, si u admet 1 pour valeur propre et n'est pas lui-même un projecteur, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est A .

Sujet S6 - Exercice

- 1) Question de cours : Rappeler les formules de Taylor-Lagrange (égalité et inégalité), ainsi que leurs conditions de validité.
- 2) On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- a) Calculer la dérivée à droite de f en 0.
 - b) Montrer que f est une densité de probabilité.
 - c) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, admettant f pour densité. Montrer que X possède une espérance et une variance, et les calculer.
- 3) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi, admettant pour densité une fonction g continue sur \mathbb{R} , nulle sur $] -\infty, 0]$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et possédant une dérivée à droite non nulle en 0, égale à c .
- a) Justifier le développement limité, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures :

$$\mathbb{P}([X_1 \leq x]) = \frac{c}{2}x^2 + o(x^2) \quad .$$

- b) Pour tout entier $n \geq 1$, on note $Y_n = \inf\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.
 - i) Démontrer que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0 quand n tend vers l'infini.
 - ii) Trouver une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs tels que $a_n Y_n$ converge en loi vers la variable aléatoire X de la question 2 quand n tend vers l'infini.

Sujet S6 - Exercice sans préparation

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $f(M)$ la matrice $\begin{pmatrix} c'' & b'' & a'' \\ c' & b' & a' \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que f est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 2) Trouver les valeurs propres de f .
- 3) a) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, le rang de $f(M)$ est égal au rang de M .
b) Cette propriété de préservation du rang est-elle vraie pour tous les automorphismes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Sujet S7 - Exercice

- 1) Question de cours : Énoncer le théorème de réduction des matrices symétriques réelles.
- 2) Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre $n \geq 2$, ayant pour plus grande valeur propre, en valeur absolue $\lambda_{\max}(A)$. Montrer que :

$$|\lambda_{\max}(A)| = \max \left\{ \left| \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right|, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} = \max \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}.$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n issue du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- 3) Soit A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. Soit $\alpha \geq 0$. On pose :

$$M = (I - \alpha A)(I + \alpha A)^{-1}, \quad N = (I - \alpha B)(I + \alpha B)^{-1}$$

où I désigne la matrice identité d'ordre n .

Déterminer les valeurs propres des matrices M et N en fonction de celles de A et B . Montrer en particulier que ces valeurs propres sont toutes réelles et de valeur absolue inférieure ou égale à 1.

- 4) On considère la matrice $P = MN$. Montrer que les valeurs propres complexes de la matrice P sont toutes de module inférieur ou égal à 1.
- 5) Trouver un exemple en dimension 2 de deux matrices quelconques ayant des valeurs propres de module inférieur ou égal à 1 et dont le produit ne vérifie pas cette propriété.

Sujet S7 - Exercice sans préparation

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi. On suppose qu'il existe deux réels, $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ tels :

$$\mathbb{P}([X_1 > x]) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x^\lambda}$$

Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\text{pour tout } n \geq 1, \quad Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}} \max(X_1, \dots, X_n)$$

converge en loi vers une loi à déterminer.

Sujet S8 - Exercice

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toute la loi exponentielle de paramètre 1.

On définit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 1}$ par la relation :

$$Y_1 = X_1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{n+1} X_{n+1}.$$

1) Question de cours : Définition et propriétés du produit de convolution de 2 densités.

2) Reconnaître la loi de $\frac{1}{n} X_n$.

3) Montrer que Y_2 possède une densité f_2 définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f_2(x) = \begin{cases} 2 \exp(-x)(1 - \exp(-x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4) Exprimer Y_n en fonction de X_1, X_2, \dots, X_n .

Les variables aléatoires Y_n et $\frac{1}{n+1} X_{n+1}$ sont-elles indépendantes ?

5) Montrer que pour tout $n \geq 1$, Y_n possède une densité f_n définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f_n(x) = \begin{cases} n \exp(-x)(1 - \exp(-x))^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(on pourra raisonner par récurrence sur n).

En déduire que Y_n et $Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ont la même loi.

6) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini (on pourra utiliser une comparaison série-intégrale).

Sujet S8 - Exercice sans préparation

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$ tel que :

$$(f - \text{Id})^3 \circ (f - 2\text{Id}) = 0 \quad \text{et} \quad (f - \text{Id})^2 \circ (f - 2\text{Id}) \neq 0.$$

Etudier la diagonalisabilité de f .

Sujet S9 - Exercice

On se place dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P)

Soit X une variable aléatoire dont la loi dépend du paramètre réel inconnu $\lambda > 0$.

Soit n un entier non nul et (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon i.i.d. de cette loi.

On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre inconnu λ , et on pose :

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

On se propose d'étudier certaines propriétés de \bar{X}_n .

1) Question de cours : Donner la définition d'un estimateur de λ .

Dans quel cas peut-on dire que cet estimateur est sans biais ?

2) Montrer que \bar{X}_n est un estimateur sans biais de λ .

3) On définit la fonction L de $\mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$ dans \mathbb{R} par :

$$\forall (k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*, \quad L(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \prod_{i=1}^n P(X = k_i).$$

On pose alors, pour tout $(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $G(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \ln(L(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda))$.

a) Vérifier que la fonction G est bien définie. Calculer $\frac{\partial G}{\partial \lambda}(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda)$.

b) Soit (k_1, k_2, \dots, k_n) un n -uplet fixé dans \mathbb{N}^n .

Etudier les variations de la fonction $h : \lambda \rightarrow G(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda)$.

Que représente le réel $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$ pour \bar{X}_n ?

4) On considère la variable aléatoire $-\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(X_1, X_2, \dots, X_n, \lambda)$. Exprimer cette variable aléatoire à l'aide de \bar{X}_n .

Calculer son espérance notée $I_n(\lambda)$ et déterminer une relation entre $I_n(\lambda)$ et la variance $V(\bar{X}_n)$.

Sujet S9 - Exercice sans préparation

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 définis par :

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \text{ et } x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$

Déterminer une base ainsi que la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels.

Déterminer $F \cap G$ et $F \cup G$.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le noyau et l'image de f .

Sujet S 10 - Exercice

1) Question de cours : Énoncé du théorème de la limite centrée.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, qui suit une loi de Poisson de paramètre λ inconnu strictement positif.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose d'un n -échantillon i.i.d. (X_1, X_2, \dots, X_n) de la loi de X .

On pose : $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\bar{X}_n = \frac{Y_n}{n}$.

2) a) Rappeler sans démonstration, la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y_n .

b) Montrer que \bar{X}_n est un estimateur sans biais et convergent du paramètre λ .

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la loi conditionnelle du vecteur (X_1, X_2, \dots, X_n) sachant l'événement $[Y_n = k]$ où $k \in \mathbb{N}^*$, ne dépend pas de λ .

4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

a) Quelle est la limite en loi de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$? On note T cette limite en loi.

b) On admet que n est suffisamment grand pour approcher la loi de T_n par la loi de T . On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Soit α un réel donné vérifiant $0 < \alpha < 1$, et t_α le réel strictement positif tel que :

$$\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Déterminer un intervalle de confiance pour λ au risque α .

Sujet S 10 - Exercice sans préparation

Soit n un entier supérieur ou égal à deux. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que le rang de A est égal au rang de ${}^t A A$.

Sujet S 11 - Exercice

- 1) Question de cours : Dans une série statistique associée à un échantillon, définition de la moyenne empirique et de la variance empirique.

On observe conjointement deux caractères quantitatifs X et Y sur un échantillon de taille n ($n \geq 2$) d'une population.

Ces observations sont donc constituées par un n -uplet $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$ d'éléments de \mathbb{R}^2 . A chaque individu k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on associe le couple d'observations (x_k, y_k) de \mathbb{R}^2 . On suppose que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, avec $i \neq j$, on a : $x_i \neq x_j$ et $y_i \neq y_j$.

- 2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs réelles qui, à tout couple (a, b) de \mathbb{R}^2 , associe :

$$f(a, b) = \sum_{k=1}^n (y_k - (ax_k + b))^2.$$

- a) Justifier que f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .
- b) Ecrire le système d'équations (S) permettant de déterminer les points critiques de f .
- c) On pose : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$. Etablir la formule : $\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) - n\bar{x}^2$.
En déduire que : $\left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) - n\bar{x}^2 > 0$.
- d) Résoudre le système (S). En déduire que f admet un unique point critique, noté (\hat{a}, \hat{b}) .
- e) Montrer que f admet un minimum local en (\hat{a}, \hat{b}) . Est-ce un minimum global pour f ?
- 3) On note $r_{x,y}$ le coefficient de corrélation linéaire de X et Y. Montrer que : $|r_{x,y}| \leq 1$.

Sujet S 11 - Exercice sans préparation

Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que :

$$2A^4 - 2A^3 + I = 0 \text{ (I désigne la matrice identité d'ordre } p \text{ et } 0 \text{ la matrice nulle carrée d'ordre } p \text{).}$$

- 1) Déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels la matrice $A + \frac{n}{n^2 + 1} I$ est inversible.
- 2) Existe-t-il un entier naturel n tel que $((n^2 + 1)A^2 + nA)^n = B$ où B est la matrice carrée d'ordre p définie par $B = \begin{pmatrix} n & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix}$?

Sujet S 12 - Exercice

- 1) Question de cours : Coefficient de corrélation linéaire ; définition et propriétés.
Soit n un entier de \mathbb{N}^* et a_1, a_2, \dots, a_n , des réels non nuls donnés.
- 2) Soit f la fonction définie sur $(\mathbb{R}^*)^n$ par $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j^2$, et soit D l'ensemble des solutions dans $(\mathbb{R}^*)^n$ de l'équation : $\sum_{j=1}^n a_j x_j = 1$.
 - a) Montrer que la restriction f_1 de f à D admet un unique point critique que l'on déterminera.
 - b) Etablir qu'en ce point critique, la fonction f_1 admet un minimum global.
- 3) Soit Z_1, Z_2, \dots, Z_n , n variables aléatoires discrètes indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et soit θ un paramètre réel non nul inconnu. On suppose que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{E}(Z_j) = \theta \cdot a_j$ et $\mathbb{V}(Z_j) = 1$, où \mathbb{E} et \mathbb{V} désignent respectivement l'espérance et la variance.

On pose : $X_n = \sum_{j=1}^n \beta_j Z_j$, où $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ désigne un n -uplet de réels non nuls quelconques.

- a) Déterminer la relation que doivent satisfaire $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ pour que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$, on ait : $\mathbb{E}(X_n) = \theta$.
On suppose dans la suite que cette condition est vérifiée.
 - b) Calculer en fonction de a_1, a_2, \dots, a_n , les valeurs $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_n^*$ de $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, pour lesquelles $\mathbb{V}(X_n)$ est minimale.
- 4) On pose : $X_n^* = \sum_{j=1}^n \beta_j^* Z_j$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, des réels non nuls tels que $Y_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j Z_j$ soit un estimateur sans biais de θ . On note ρ le coefficient de corrélation linéaire de X_n^* et Y_n .
- a) Montrer que $\rho > 0$.
 - b) Si $\rho = 1$, que peut-on en déduire sur les variables aléatoires X_n^* et Y_n ?

Sujet S 12 - Exercice sans préparation

Soit \mathcal{F} l'espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs réelles et E le sous-espace vectoriel de \mathcal{F} engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ où $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que \mathcal{B} est une base de E . En déduire la dimension de E .
- 2) Soit D l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad D(f) = f' - f''$$

où f' et f'' désignent les dérivées première et seconde de f .

Montrer que D est un endomorphisme de E et écrire sa matrice M dans la base \mathcal{B} .

- 3) M est-elle inversible ? diagonalisable ?