Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire BL constituent la première version d'un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2011.

# 1 Sujets donnés en option scientifique

### Sujet S 1150 - Exercice

Les variables aléatoires de cet exercice sont toutes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soit $\lambda$ un réel strictement positif donné et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\{-1, 1\}$ de même loi définie par :

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{\lambda+1}.$$

**1)** Question de cours : Enoncer le théorème de l'espérance totale.
**2)** Calculer, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, les moments d'ordre 1 et 2 de la variable aléatoire $X_n$.
**3)** Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire

$$U = X_0X_3 - X_1X_2.$$

**4)** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on pose $Y_n = \prod_{i=0}^{n} X_i$.
  **a)** Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de $\lambda$ et de $n$. En déduire la loi de $Y_n$.
  **b)** Etudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**5)** Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On suppose que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, les variables aléatoires $T, X_0, .., X_n$ sont mutuellement indépendantes.
Soit $V = \prod_{i=0}^{T} X_i$ l'application définie sur $\Omega$ par : $\forall \omega \in \Omega, \quad V(\omega) = \prod_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega).$
  **a)** En admettant que V est une variable aléatoire, déterminer pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant l'événement $(T = n)$.
  **b)** En déduire l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}\left(V / [T = n]\right)$.
  **c)** Montrer que $\mathbb{E}(V) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\exp\left(-\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)$.

**6)** Quelle est la loi de la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$ ?

### Sujet S 1150 - Exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré $\leqslant n$.
**1)** Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ unique tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \; P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

**2)** Décomposer $P_n$ en un produit de polynômes de degré 1.

**Sujet S 1152 - Exercice**

1) Question de cours : Théorème de d'Alembert-Gauss.
2) On considère l'équation (1) dont l'inconnue $x$ est réelle :

$$x^3 - x^2 + k = 0 \quad (1).$$

Donner en fonction de $k \in \mathbb{R}$, le nombre de racines de (1).
3) On suppose que (1) possède trois racines (éventuellement confondues) que l'on note $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. On pose :

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma,\ \tau = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma \ \text{ et } \ \pi = \alpha\beta\gamma.$$

Montrer que $\sigma = 1$, $\tau = 0$, $\pi = -k$.
Réciproquement, si on suppose $\sigma = 1$, $\tau = 0$, $\pi = -k$, peut-on en déduire que les nombres $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont les trois solutions de (1) ?
4) Soit $a$, $b$ et $c$, trois réels donnés. On note $s = a + b + c$, $t = ab + ac + bc$ et $p = abc$.
On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant A pour matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
  a) Montrer que $s$ est une valeur propre de A et donner un vecteur propre associé à $s$.
  b) Montrer que le plan vectoriel P d'équation $x + y + z = 0$ est stable par $f$.
  c) On suppose qu'il existe une autre valeur propre $\lambda \neq s$. Montrer que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\lambda$ est inclus dans P.

  Dans la suite, on suppose que : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $t = ab + ac + cb = 0$ et $a + b + c > 0$.

5) a) Montrer que $a$, $b$, $c$ sont racines de (1) et $k \in [0, \frac{4}{27}]$.
  b) Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathscr{V}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & r \end{pmatrix}$.
  c) Montrer que $u = r$, $v = -w$ et $u^2 + w^2 = 1$. En déduire l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = r = \cos\theta$ et $w = -v = \sin\theta$. L'endomorphisme $f$ admet-il d'autres valeurs propres que 1 ?

**Sujet S 1152 - Exercice sans préparation**

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ i.i.d.. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $X_k$ suit une loi uniforme sur le segment $[0,1]$.
On pose $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Etudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**Sujet S 1155 - Exercice**

1) Question de cours : Rappeler la définition d'un espace vectoriel euclidien.
2) On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
   Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant comme matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   a) Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}^3,\ \|f(u)\| \leqslant \|u\|$.
   b) Vérifier que $f$ est un projecteur.
   c) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sans calcul.
      Montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.
3) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n$, et $p$ un projecteur de E.
   a) Montrer que si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont orthogonaux, alors : $\forall u \in E,\ \|p(u)\| \leqslant \|u\|$.
   b) Montrer que si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ ne sont pas orthogonaux, alors : $\exists u \in E,\ \|p(u)\| > \|u\|$.
   c) Montrer qu'un projecteur $p$ non nul est une projection orthogonale si et seulement si :

$$\sup_{u\neq 0} \frac{\|p(u)\|}{\|u\|} = 1.$$

**Sujet S 1155 - Exercice sans préparation**

Soient $X_1$,..., $X_n$ $n$ variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.
On suppose que l'espérance $\theta = \mathbb{E}(X_1)$ est non nulle et inconnue.
Trouver l'estimateur sans biais de l'espérance $\theta = \mathbb{E}(X_1)$ qui soit de variance minimale dans l'ensemble des estimateurs sans biais de la forme $\tilde{\theta}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad \big((a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\big)$.

**Sujet S 1157 - Exercice**

**1)** Question de cours : Estimateur sans biais et convergent d'un paramètre réel inconnu.

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$, et pour $n$ entier supérieur ou égal à 2, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un $n$-échantillon i.i.d. de la loi de X. On suppose que la loi de X dépend d'un paramètre réel $\theta$ non nul inconnu.
On note $\mathscr{E}_\theta$ l'ensemble des estimateurs $T_n = T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de $\theta$ sans biais et admettant une variance.
On admet l'existence d'un estimateur $\hat{T}_n$ de $\mathscr{E}_\theta$ de variance minimale : on dit que $\hat{T}_n$ est optimal dans $\mathscr{E}_\theta$.
Soit $T_n$ et $U_n$ deux éléments de $\mathscr{E}_\theta$.
On pose, pour tout réel $\alpha$ : $S_\alpha(T_n, U_n) = T_n + \alpha(U_n - T_n)$.

**2)** Montrer que $S_\alpha(T_n, U_n)$ appartient à $\mathscr{E}_\theta$.

**3)** **a)** Etablir pour tout réel $\alpha$, l'inégalité ($\mathbb{V}$ désigne la variance et **Cov** la covariance) :

$$\alpha^2 \mathbb{V}\left(U_n - \hat{T}_n\right) + 2\alpha \,\mathbf{Cov}\left(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n\right) \geqslant 0.$$

**b)** En déduire que $\mathbf{Cov}\left(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n\right) = 0$.

**4)** Réciproquement, montrer que si $\mathbf{Cov}(T_n, U_n - T_n) = 0$ pour tout $U_n$ de $\mathscr{E}_\theta$, alors $T_n$ est optimal dans $\mathscr{E}_\theta$.

**5)** On suppose l'existence de deux estimateurs optimaux $\hat{T}_n$ et $T_n^*$ dans $\mathscr{E}_\theta$. Montrer que $T_n^* = \hat{T}_n$ presque sûrement.

**6)** Dans cette question, X suit la loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.
On pose : $\hat{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $W_n = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{X}_n\right)^2$.

**a)** Montrer que $\hat{X}_n$ et $W_n$ sont des estimateurs sans biais de $\theta$.

**b)** On admet que $\hat{X}_n$ est optimal dans $\mathscr{E}_\theta$ et que $W_n$ admet une variance.
Montrer que : $\mathbf{Cov}\left(\hat{X}_n, W_n\right) = \dfrac{\theta}{n}$.

**Sujet S 1157 - Exercice sans préparation**

Soit E l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles.
Soit $\Phi$ l'endomorphisme de E qui, à toute suite $(u_n)$ de E, associe la suite $(v_n)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

**1)** Déterminer les noyaux de $\Phi$, de $\Phi \circ \Phi$ et de $\Phi^k$ pour $k \geqslant 3$ et leurs dimensions respectives.

**2)** Quelle est l'image de $\Phi$ ?

**Sujet S 1163 - Exercice**

1) Question de cours : Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ ($n \geqslant 2$). Donner un exemple d'une fonction non continue sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^1$. On définit la fonction $g$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_x^y f(t)\, dt & \text{si} \quad x \neq y \\ f(x) & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

2) Exemple.
Dans cette question seulement, on suppose que $f$ est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.
Déterminer la fonction $g$ correspondante et montrer que $g$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

3) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x \neq y\}$. Montrer que $g$ est de classe $C^1$ sur D et calculer ses dérivées partielles du premier ordre sur D.

4) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $g$ admet des dérivées partielles du premier ordre en $(a, a)$ et les exprimer en fonction de $f'(a)$, où $f'$ désigne la dérivée de $f$.

5) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in D$.
   a) Montrer que :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) = \frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (y-t)\big(f'(t) - f'(a)\big)\, dt.$$

   b) En déduire que : $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a, a)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\sup\big\{\left|f'(t) - f'(a)\right|,\ t \in S\big\}$ où S désigne le segment d'extrémités $x$ et $y$.

6) Déduire des questions précédentes que $g$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Sujet S 1163 - Exercice sans préparation**

Un joueur effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce qui donne Pile avec la probabilité $p$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$, $p \in ]0, 1[$.
On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On définit la variable aléatoire N égale au rang d'apparition du premier Pile s'il existe et égale à 0 si Pile n'apparait jamais.
On définit une variable aléatoire X de la façon suivante :
Si $N = n > 0$, le joueur dispose dans une urne $n$ boules numérotées de 1 à $n$ ; Il tire une boule de cette urne et X prend comme valeur le numéro de la boule tirée ;
Si $N = 0$, on pose $X = 0$.

1) Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ sous forme de somme.

2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_0^q \Big(\sum_{n=k}^{M} t^{n-1}\Big) dt.$

3) Etudier la limite de $\displaystyle\int_0^q \frac{t^M}{1-t}\, dt$ lorsque M tend vers $+\infty$. Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$.

**Sujet S 1175 - Exercice**

Soit $E = R_5[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 5 et $F = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$ .

**1)** Question de cours : Caractériser les isomorphismes d'espaces vectoriels de dimensions finies ?

**2)** Soit $f_1, f_2, ..., f_6$ les applications linéaires de E vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall P \in E,\ f_1(P) = P(0),\ f_2(P) = P'(0),\ f_3(P) = P''(0),\ f_4(P) = P(1),\ f_5(P) = P'(1) \text{ et } f_6(P) = P''(1),$$

où $P'$ et $P''$ désignent les dérivées première et seconde de P.

**a)** Que vaut $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{6} \mathrm{Ker}(f_i)$ ?

**b)** L'application $\Phi$ de E dans $\mathbb{R}^6$ définie par $\Phi(P) = (f_1(P), f_2(P), ..., f_6(P))$ est-elle un isomorphisme d'espaces vectoriels ?

**c)** En déduire que la famille $(f_1, ..., f_6)$ est libre dans l'espace vectoriel F.

**3)** Soit S l'ensemble défini par :

$$S = \{Q \in \mathbb{R}[X] \ / \ Q(0) = 1,\ Q'(0) = 1,\ Q''(0) = 0,\ Q(1) = 0,\ Q'(1) = 0 \text{ et } Q''(1) = 1\}.$$

**a)** Montrer que l'ensemble $S \cap E$ contient exactement un élément et le déterminer.

**b)** Soit $Q \in S$. Déterminer le reste de la division euclidienne de Q par $X^3(X-1)^3$. En déduire l'ensemble S.

**4) a)** Déterminer l'ensemble K défini par :

$$K = \left\{Q \in \mathbb{R}[X] \ / \ Q(-1) = 0,\ Q'(-1) = 0,\ Q''(-1) = 4,\ Q(-\frac{3}{2}) = 1,\ Q'(-\frac{3}{2}) = 2,\ Q''(-\frac{3}{2}) = 0\right\}.$$

**b)** Existe-t-il une fonction $f$, non polynomiale, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que :

$$f(-1) = 0,\ f'(-1) = 0,\ f''(-1) = 4,\ f(-\frac{3}{2}) = 1,\ f'(-\frac{3}{2}) = 2,\ f''(-\frac{3}{2}) = 0 \quad ?$$

**Sujet S 1175 - Exercice sans préparation**

On considère une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$ où $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.
On note pour $n \geqslant 1$, $X_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} U_i$.

**1)** Prouver que la suite $(X_n)$ converge en probabilité vers $\theta$.
**2)** Etudier la convergence en loi de $Y_n = n\ (\theta - X_n)$.

**Sujet S 101 - Exercice**

Dans l'exercice toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles. Lorsqu'elle existe, l'espérance d'une variable aléatoire X est notée $\mathbb{E}(X)$.

**1)** Dans cette question X est une variable aléatoire discrète ou à densité.

**a)** Question de cours : Rappeler la définition de la fonction de répartition de X et en donner les principales propriétés.

**b)** On appelle médiane de X tout réel $m$ tel que : $\mathbb{P}(X \geqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X \leqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Démontrer qu'un tel réel existe toujours, mais qu'il n'est pas forcément unique.

**2)** Dans cette question X est une variable aléatoire discrète ou à densité admettant un moment d'ordre 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \mathbb{E}((X-x)^2)$.

**a)** Pour $x$ réel, donner, en justifiant, l'expression de $f(x)$ en fonction de la variance $\mathbb{V}(X)$ de X, de $\mathbb{E}(X)$ et de $x$.

**b)** Démontrer qu'il existe un unique réel $x_0$ en lequel la fonction $f$ est minimale et déterminer $x_0$ et $f(x_0)$.

**3)** Dans cette question X est une variable aléatoire à densité et qui admet une espérance. On pose, pour $x$ réel, $g(x) = \mathbb{E}(|X-x|)$ et $\varphi(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) - \mathbb{P}(X \geqslant x)$.

**a)** Montrer que $x\mathbb{P}(X \geqslant x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$. Quel résultat analogue a-t-on au voisinage de $-\infty$ ?

**b)** On suppose dans cette sous-question qu'il existe une densité de X qui est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $x$ réel,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{P}(X \leqslant t)\, dt + \int_{x}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant t)\, dt \quad (1).$$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que la formule (1) reste valable même si aucune des densités de X n'est continue sur $\mathbb{R}$.

**c)** Déterminer, pour $a, b$ réels, une expression de $g(b) - g(a)$ sous la forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction $\varphi$.
En déduire que si $m$ est une médiane de X, $g$ est minimale en $m$.

**4)** **a)** Soit $a$ un réel strictement positif. On note $h$ la fonction de la variable réelle définie par :

$$h(x) = \int_{0}^{+\infty} |t-x|\, e^{-at}\, dt.$$

Déterminer le minimum de $h$ et préciser un réel en lequel ce minimum est atteint.

**b)** Répondre aux mêmes questions pour la fonction $k$ définie par $k(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{|t-x|}{1+t^2}\, dt$.

**Sujet S 101 - Exercice sans préparation**

Dans cet exercice E désigne un espace vectoriel et $p, n$ sont deux entiers strictement positifs.

**1)** Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E et $x$ un vecteur de E.
Caractériser, en le justifiant, le fait que la famille $(e_1, \dots, e_p, x)$ soit liée.

**2)** Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E supposés non tous nuls. On note

$$\mathscr{A} = \left\{ \mathrm{J} \subset [\![1, n]\!],\ (x_i)_{i \in \mathrm{J}} \text{ libre} \right\}$$

Soit $\mathrm{J}_0$ un élément de $\mathscr{A}$ de cardinal maximal.
Que peut-on dire de $(x_i)_{i \in \mathrm{J}_0}$ vis-à-vis de $\mathrm{Vect}\,(x_1, \dots x_n)$ ?

**3)** Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E et $r$ le rang de cette famille.
On en extrait une famille de $n'$ vecteurs et on note $r'$ le rang de cette famille extraite. Montrer que $n - r \geqslant n' - r'$.

**Sujet S 108 - Exercice**

Dans l'exercice toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles.

**1)** Soit X une variable aléatoire.

**a)** Rappeler la définition de la fonction de répartition F de X et en donner des propriétés.

**b)** Dans cette sous-question, on suppose que X est à densité. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ si et seulement si F est strictement croissante.

**c)** Soit Y une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Soit X définie sur $\Omega$ par :

$$X(\omega) = \begin{cases} Y(\omega)+1, & \text{si } Y(\omega) < -1\,; \\ 0, & \text{si } -1 \leqslant Y(\omega) \leqslant 1\,; \\ Y(\omega)-1, & \text{si } Y(\omega) > 1. \end{cases}$$

Montrer que X est une variable aléatoire, et représenter sa fonction de répartition. Quel commentaire peut-on faire ?

Dans la suite de l'exercice X désigne une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F est strictement croissante. On envisage plusieurs méthodes pour simuler la loi de X conditionnellement à $(X > m)$ pour un réel $m$ donné.

**2)** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et $m$ un réel fixé.

**a)** Montrer que l'événement $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X_n \leqslant m)$ est de probabilité nulle.

**b)** Soit Z l'application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall\, \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = X_p(\omega)$ où $p$ est le plus petit indice $n$ tel que $X_n(\omega) > m$ si $\omega \notin A$ et $Z(\omega) = m$ si $\omega \in A$.
Montrer que Z est une variable aléatoire et que pour tout $x$ réel, $\mathbb{P}(Z \leqslant x) = \mathbb{P}_{(X>m)}(X \leqslant x)$.

**c)** Quel commentaire peut-on faire sur cette méthode de simulation lorsque $m$ est très grand ?

**3)** Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$ de loi uniforme et $m \in \mathbb{R}$. On pose

$$V = F^{-1}(F(m) + (1 - F(m))U) \tag{1}$$

**a)** Montrer que V est une variable aléatoire et que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(V \leqslant x) = \mathbb{P}_{(X>m)}(X \leqslant x)$.

**b)** Comparer cette méthode à celle envisagée à la question précédente.

**c)** Déterminer F et $F^{-1}$ lorsque X a pour densité $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{2} e^{-|x|}$. Expliciter dans ce cas la variable V en fonction de U lorsque $m = 0$. Quelle est alors la loi de V ?

**d)** Si $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$, proposer, par analogie avec la formule (1), une variable aléatoire W simulant la loi de X conditionnellement à $(a < X < b)$.

**Sujet S 108 - Exercice sans préparation**

Soit $(E, \langle .\,, .\rangle)$ un espace euclidien et $u$ un endomorphisme de E pour lequel il existe une base de E dans laquelle la matrice de $u$ est triangulaire supérieure.

**1)** Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de $u$ est triangulaire supérieure (*on pourra penser au procédé d'orthonormalisation de Schmidt*).

**2)** On suppose de plus que pour tout $x$ de E, $\langle u(x)\,, x\rangle = 0$.
Montrer que $\forall\, (x, y) \in E^2$, $\big\langle u(x), y\big\rangle = -\big\langle u(y), x\big\rangle$. Que peut-on dire de $u$ ?

**Sujet S 109 - Exercice**

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1) Question de cours : Inégalité de Bienaymé-Tchébichev. Estimateur sans biais, convergent.

Pour un entier $n \geqslant 2$, on considère $n$ variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de loi uniforme sur $[0, A]$, où $A \in \mathbb{R}_+^*$ est inconnu. On pose $S_n = \dfrac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ et $M_n = \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$.

2) Calculer l'espérance et la variance de $S_n$ en fonction de A et $n$.

3) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|S_n - A| > \varepsilon\right) = 0$.

4) Calculer la fonction de répartition $F_n$ de $M_n$. La variable aléatoire $M_n$ admet-elle une densité (si oui, la donner) ?

5) Soit $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ ; on pose $\widetilde{M_n} = \alpha_n M_n$. Calculer les espérances $\mathbb{E}\left(\widetilde{M_n}\right)$ et $\mathbb{E}\left(\widetilde{M_n}^2\right)$.

6) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour que $\widetilde{M_n}$ soit un estimateur asymptotiquement sans biais de A.

7) On suppose la condition de la question précédente réalisée. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\widetilde{M_n} - A\right| > \varepsilon\right) = 0$.

8) Quel est le risque quadratique de $\widetilde{M_n}$ ? À quelle condition sur $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'agit-il d'un meilleur estimateur de A que $S_n$ ?
En particulier, si on choisit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de façon à obtenir un estimateur sans biais de A, obtient-on un meilleur estimateur que $S_n$ ?

**Sujet S 109 - Exercice sans préparation**

Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont $-1$ et $1$ sont des valeurs propres.
Démontrer que $f$ est diagonalisable.

**Sujet S 112 - Exercice**

Dans cet exercice toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

**1)** Question de cours : Rappeler la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.

**2)** Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On considère deux suites $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires convergeant en probabilité, la première vers $u$, la seconde vers $v$.

Démontrer que la suite de variables aléatoires $(\mathrm{U}_n + \mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $u + v$.

**3)** Dans cette question, on suppose les réels $u$ et $v$ supérieurs ou égaux à 1.

**a)** Établir l'inégalité : $|\ln(u) - \ln(v)| \leqslant |u - v|$.

**b)** En déduire que si $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires ne prenant que des valeurs supérieures ou égales à 1, convergeant en probabilité vers $u$, la suite de variables aléatoires $\big(\ln(\mathrm{U}_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\ln(u)$.

**4)** Dans cette question, $x$ désigne un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

**a)** Établir, pour tout $t \in [0, x]$, l'inégalité : $\dfrac{x - t}{1 - t} \leqslant x$.

**b)** En déduire la limite de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t$ quand l'entier $n$ tend vers l'infini.

**c)** Démontrer l'égalité : $\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

**5)** Dans cette question, $p$ désigne un paramètre strictement compris entre 0 et 1.
Soit X une variable aléatoire discrète telle que, pour tout entier $k$ strictement positif, la probabilité que la variable X prenne la valeur $k$ soit donnée par : $\mathbb{P}[\mathrm{X} = k] = \dfrac{(1-p)^k}{k\ln(\frac{1}{p})}$
Le résultat de la question précédente, appliqué à $x = 1 - p$, prouve que X ne peut pas prendre d'autres valeurs.

**a)** Établir l'égalité : $\dfrac{\mathbb{E}[\mathrm{X}]}{\mathbb{E}[\mathrm{X}^2]} = p$, où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance.

**b)** Démontrer que si $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, alors

$$\widehat{p_n}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_i}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\mathrm{X}_i)^2}$$ est un estimateur convergent du paramètre $p$.

**Sujet S 112 - Exercice sans préparation**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On admet que $A^2 + I_3 = 2A$ où $I_3$ désigne la matrice identité d'ordre 3.

**1)** Montrer que A admet une seule valeur propre $\lambda$. A est-elle diagonalisable ?

**2)** Déterminer le sous-espace associé à $\lambda$.

**3)** Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Sujet S 113 - Exercice**

**1)** Question de cours : Rappeler la définition du rang d'une matrice.
Une matrice carrée et sa transposée ont-elles nécessairement le même rang ?

**2)** Dans cette question, A et B sont deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 1)$ qui ont au moins une valeur propre commune.

**a)** Démontrer qu'il existe un nombre réel $\alpha$ et deux matrices-colonnes $X, Y$ non nulles telles que ${}^t\!A\,X = \alpha X$ et $B\,Y = \alpha Y$.

**b)** En déduire qu'il existe une matrice carrée non nulle M telle que : $MA = B\,M$.

**c)** Montrer que les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont une valeur propre commune
et trouver une matrice non nulle M telle que : $MA = BM$.

**3)** Dans cette question, $a$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

**a)** Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que, si $z$ est un nombre complexe qui n'est pas une valeur propre de $a$ et si le polynôme $P = (X - z)\,Q$ est un polynôme annulateur de $a$, Q est alors aussi un polynôme annulateur de $a$.

**b)** Démontrer qu'il existe un polynôme annulateur de $a$ dont les seules racines sont les valeurs propres de $a$.

**4)** Dans cette question, on examine la réciproque de la propriété prouvée en 2° et on considère donc deux matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une matrice non nulle M telle que : $M\,A = B\,M$.

**a)** Que peut-on dire des valeurs propres de A et de B lorsque M est inversible ?

**b)** Démontrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on a : $M\,P(A) = P(B)\,M$.

**c)** Démontrer, à l'aide de 3°, que A et B ont nécessairement une valeur propre commune.

**Sujet S 113 - Exercice sans préparation**

On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.

**1)** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$.

**a)** Quelle est la loi de $S_n$ ?

**b)** Quelle est la limite, quand $n$ tend vers l'infini, de la probabilité $\mathbb{P}[S_n\geqslant n+\sqrt{n}]$ ?

**2)** On considère une variable aléatoire $N_n$ sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, indépendante des $X_k$ et dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}[N_n=n]=\mathbb{P}[N_n=n+1]=\frac{1}{2}\quad .$$

**a)** Trouver l'espérance et la variance de la variable aléatoire $T_n$ définie par :

$$\forall\,\omega\in\Omega,\quad T_n(\omega)=S_{N_n(\omega)}\quad .$$

**b)** Quelle est la limite, quand $n$ tend vers l'infini, de la probabilité $\mathbb{P}[T_n\geqslant n+\sqrt{n}]$ ?

# 2 Sujets donnés en option économique

**Sujet E 2203 - Exercice**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{e^{-|x|}}{2}.$$

**1)** Question de cours : Rappeler la définition d'une densité de probabilité.

**2)** Vérifier que $f$ est une densité de probabilité.
*Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, dont $f$ est une densité de probabilité.*

**3)** **a)** Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de X.

**b)** A-t-on, pour tout réel $s$, pour tout réel $t$ tels que $t\geqslant s$,

$$\mathbb{P}_{[X>s]}([X>t])=\mathbb{P}([X>t-s])?$$

**4)** Pour tout entier $n\geqslant 1$ et tout $x$ réel, on pose :

$$H_n(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)(1+t.e^{-n|t|})\,dt.$$

Montrer que $H_n$ est une fonction de répartition.

**5)** Soit $X_n$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, de fonction de répartition $H_n$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.