Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L, constituent un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2012.

1. SUJETS DE L'OPTION SCIENTIFIQUE

Exercice principal S8

1. Question de cours : Définition et propriétés des fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.

Pour toute partie $A \subseteq \mathbb{N}$, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$.

2.a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série de terme général $\dfrac{\mathbf{1}_A(k)x^k}{k!}$ est convergente.

On pose alors : $S_x(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_A(k)x^k}{k!}$.

b) On suppose que $A \subseteq B$. Comparer $S_x(A)$ et $S_x(B)$.
c) On suppose que $A \cap B = \emptyset$. Exprimer $S_x(A \cup B)$ en fonction de $S_x(A)$ et $S_x(B)$.
d) Calculer $S_x(\emptyset)$, $S_x(\mathbb{N})$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_x(\{p\})$.

3. On suppose désormais que $x \in]0, \ln 2[$.

a) Établir pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'inégalité stricte : $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^m}{m!}$.

b) Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $A \cap B = \emptyset$.
Montrer que si A n'est pas vide et si le plus petit élément m de $A \cup B$ appartient à A, alors :

$$S_x(B) < \frac{x^m}{m!} \leqslant S_x(A)$$

En déduire que si $S_x(A) = S_x(B)$, alors : $A = B = \emptyset$.
c) Montrer que l'application $A \mapsto S_x(A)$ est injective.

Exercice sans préparation S8

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $]0, 1]$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} U_i^{1/n}$ et $Y_n = (\mathrm{e}X_n)^{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $\big(\ln(Y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice principal S9

1. Question de cours : Sommes de Riemann.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n ; on effectue dans cette urne des tirages aléatoires successifs d'une boule avec remise. On note $X_1, X_2, \ldots,$ les numéros successifs obtenus et on suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$.
On note Y le rang du premier tirage pour lequel le numéro de la boule tirée est supérieur ou égal à X_1, sous réserve qu'un tel numéro existe.

2. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose : $B_k = [X_k < X_1]$.
a) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P[B_2 \cap B_3 \cap \ldots \cap B_k]$.
b) Montrer que $P\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} B_k\right) = 0$.
c) Que peut-on dire de l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels $Y(\omega)$ existe ? On admet désormais que cet ensemble est confondu avec Ω.

3.a) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a : $P[Y = m+1] = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}$.
b) Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ donnée par : $E(Y) = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$.

4. On ne considère plus l'entier n fixé et on note désormais $Y^{(n)}$ la variable aléatoire notée précédemment Y.
a) Calculer pour tout entier $m \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P[Y^{(n)} = m+1]$.
b) En déduire que la suite $(Y^{(n)})_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire discrète qui n'a pas d'espérance.

Exercice sans préparation S9

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $U = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.

On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer les valeurs propres de A.

2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A n'est pas nécessairement diagonalisable.

Exercice principal S12

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite de densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, et de fonction de répartition Φ.

2. Montrer que X admet des moments de tous ordres et établir pour tout entier naturel n, la formule :

$$E(X^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{(2p)!}{2^p p!} & \text{si } n = 2p \text{ est pair } (p \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

3.a) Montrer que pour tout $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x) \Phi(ax) dx$ est convergente. On note alors pour tout $a > 0$: $F(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x) \Phi(ax) dx$.

b) Exprimer pour tout $a > 0$, $F(a)$ en fonction de a.

4. Soit a un réel strictement positif fixé. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2f(x)\Phi(ax)$.

a) Vérifier que g peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire Y.

b) Calculer $E(Y^2)$ et exprimer la variance $V(Y)$ en fonction de a.

Exercice sans préparation S12

Soit $E(\langle\, ,\rangle)$ un espace euclidien et soit f un endomorphisme symétrique de E. On suppose l'existence d'une constante réelle $\alpha \geqslant 0$ telle que $\forall x \in E, \| f(x) \| = \alpha \| x \|$.
Montrer que $f^2 = \alpha^2 \, \mathrm{id}_E$.

Exercice principal S16

1. Question de cours : Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, dans le cas où les deux variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et dans le cas où elles possèdent une densité.

2. Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ qui suivent respectivement la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (d'espérance $1/\lambda$) et la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ (d'espérance $1/\mu$).

a) Donner une densité de $-Y$.

b) On pose $D = Z - Y$. Donner une densité de D.

c) Calculer $P(Y \leqslant Z)$.

Pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, strictement positives et telles que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k suit la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

3. On pose : $U = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

a) Identifier la loi de U.

b) Soit j un entier donné de $[\![1, n]\!]$. En utilisant la variable aléatoire $Z_j = \inf\limits_{i \in [\![1,n]\!], i \neq j} X_i$, calculer $P(U = X_j)$.

c) La variable aléatoire $X_j - U$ est-elle à densité ? discrète ?

4. On pose : $V = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $X'_j = -\dfrac{1}{\theta} \ln(1 - \mathrm{e}^{-\theta X_j})$.

a) Montrer que les variables aléatoires $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$ sont indépendantes et suivent chacune la même loi que les variables aléatoires X_j.

b) En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $P(V = X_i) = \dfrac{1}{n}$.

Exercice sans préparation S16

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n le polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par $P_n(X) = X^n + 1$.
Pour quelles valeurs de n, P_n est-il divisible par $X^2 + 1$?

Exercice principal S20

1. Question de cours : Théorème de la limite centrée.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires centrées réduites définies sur le même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, indépendantes, de même densité de probabilité, et admettant des moments jusqu'à l'ordre 4.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note m_4 le moment d'ordre 4 de X_n.

a) Montrer que $m_4 > 1$.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n^* = \dfrac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k^2 - 1)$.

Justifier la convergence en loi de la suite $(Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $U_n = \sqrt{\dfrac{n}{m_4 - 1}}\ \overline{X}_n^2$.

Calculer $E(U_n)$ et en déduire la convergence en probabilité vers 0 de la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Soit x et ε deux réels arbitraires avec $\varepsilon > 0$.

a) Établir l'encadrement : $P(Y_n^* \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* \leqslant x+\varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon)$.

b) En déduire l'existence d'un entier N_ε tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, on a :

$$\Phi(x) - \varepsilon \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant \Phi(x+\varepsilon) + \varepsilon$$

c) Que peut-on en conclure pour la suite $(Y_n^* - U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big((X_k - \overline{X}_n)^2 - 1\big)$.

Déduire des résultats précédents, la limite en loi de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice sans préparation S20

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. Soit T l'application qui à toute fonction $f \in E$, associe la fonction $F = T(f)$ définie par : $F(0) = f(0)$ et $\forall x > 0, F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?
2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Exercice principal S23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle et on note $\langle\, ,\rangle$ son produit scalaire canonique.

1. Question de cours : Développement limité d'ordre 1 au point $a \in \mathbb{R}^n$ pour une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ convexes et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Les fonctions suivantes sont-elles convexes : $f_1 + f_2$, αf_1 , $\min(f_1, f_2)$ et $\max(f_1, f_2)$?

b) Lorsque $n = 1$ a-t-on $f_1 \circ f_2$ convexe ?

3. Soit f une fonction convexe et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $(x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, soit $g_{x,h}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g_{x,h}(t) = f(x + th)$.

a) Montrer que $g_{x,h}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $g_{x,h}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'_{x,h}(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

c) En déduire que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle \nabla f(x), y - x\rangle \leqslant f(y) - f(x)$, où $\nabla f(x)$ est le gradient de f en x.

d) Soit a un point critique de f. Montrer que f admet un minimum global au point a.

4. Dans cette question, soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n et soit f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$.

a) Vérifier que f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \nabla f(x) = Ax$.

b) En déduire que si f est convexe, alors toutes les valeurs propres de A sont positives.

Exercice sans préparation S23

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, vérifiant les conditions suivantes :

- $P(X = 0) = 0$;
- $P(X > 0) = \alpha > 0$;
- $P_{[X>0]}(X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ avec $a > 0$;
- $P_{[X<0]}(-X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ avec $b > 0$.

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. La variable aléatoire X est-elle à densité ?
3. Établir l'existence de $E(X)$. Calculer $E(X)$.

Exercice principal S27

1. Question de cours : Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par : $P(X) = X^3 - X^2 - 1$.
a) Montrer que toutes les racines de P sont simples.
b) Montrer que P admet une racine réelle, notée b, et deux racines complexes conjuguées, notées z et $\bar{z}$.
c) Calculer le produit $bz\bar{z}$. Comparer b et $|z|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}$ une partie de $[\![1, n]\!]$ qui possède la propriété suivante : si $p \in \mathcal{S}$, alors $p+1$ et $p+2$ n'appartiennent pas à $\mathcal{S}$; on dit que $\mathcal{S}$ est une "partie spéciale" de $[\![1, n]\!]$. Par exemple, l'ensemble vide est une partie spéciale.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note t_n le nombre de parties spéciales de $[\![1, n]\!]$ et on pose $t_0 = 1$.
a) Calculer t_1 , t_2 et t_3.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $t_{n+3} = t_n + t_{n+2}$.

4. Soit V l'ensemble des suites réelles $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $(v_0, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+3} = v_n + v_{n+2}$.
a) Montrer que V est un espace vectoriel.
b) Déterminer la dimension de V ainsi qu'une base de V.

5) Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & z & \bar{z} \\ b^2 & z^2 & \bar{z}^2 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que la matrice M est inversible.
b) Quelles sont les suites géométriques de V ?
c) Soit α, β et γ des constantes complexes telles que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha b^n + \beta z^n + \gamma \bar{z}^n = 0$.
Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
d) En déduire qu'il existe une constante réelle A et une constante complexe B vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_n = Ab^n + Bz^n + \overline{B}\bar{z}^n$.

Exercice sans préparation S27

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_*^+$.

1. On suppose que la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ admet une espérance. Montrer que X admet une espérance.

2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice principal S28

Soit p un paramètre réel inconnu vérifiant $0 < p < 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli d'espérance p.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$; on note $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X et exp la fonction exponentielle.

1. Question de cours : Rappeler comment l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de définir à partir de $\overline{X}_n$, un intervalle de confiance de risque α $(0 < \alpha < 1)$ pour le paramètre p.

2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) = -p\,t + \ln(1 - p + p\,e^t)$.

a) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée seconde vérifie : $\forall t \geqslant 0,\ f''(t) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

b) Montrer à l'aide d'une formule de Taylor que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $f(t) \leqslant \dfrac{t^2}{8}$.

c) En déduire que pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $E\big(\exp(t(X_k - p))\big) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{8}\right)$.

3.a) Montrer que si S est une variable aléatoire discrète finie à valeurs positives et a un réel strictement positif, on a : $P(S \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(S)}{a}$.

b) À l'aide des questions 2.c) et 3.a), établir pour tout couple $(t, \varepsilon) \in (\mathbb{R}^+)^2$, l'inégalité :

$$P(\overline{X}_n - p \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}\right)$$

c) Montrer que pour tout $\varepsilon \geqslant 0$, on a : $P(|\overline{X}_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\,\exp(-2n\varepsilon^2)$.

d) En déduire un intervalle de confiance de risque α pour le paramètre p et comparer sa longueur, lorsque α est proche de 0, à celle de l'intervalle de confiance demandé dans la question 1.

Exercice sans préparation S28

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$. On note $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.

1. Exprimer P^{-1} en fonction de P.

2. Établir l'inégalité : $\left|\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} p_{i,j}\right| \leqslant n$.

Exercice principal S33

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$.

1. Question de cours : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.
Rappeler la signification de la relation : $v_n = o(u_n)$.
Montrer que si $v_n = o(u_n)$ et si la série de terme général u_n est convergente, la série de terme général v_n l'est aussi et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$.

2. Soit α un réel strictement positif.
a) Établir la relation : $\mathrm{e}^{-n^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
b) En déduire l'existence d'un réel c_α et d'une variable aléatoire X_α à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([X_\alpha = n]) = c_\alpha\,\mathrm{e}^{-n^\alpha}$$

c) On suppose que $\alpha = 1$.
Identifier la loi de X_1 et calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité conditionnelle $P_{[X_1 \geqslant n]}([X_1 \geqslant n+1])$.

3. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$ et on lui associe X_α comme en 2.b).
a) Établir la relation : $\mathrm{e}^{-(n+1)^\alpha} = o\big(\mathrm{e}^{-n^\alpha} - \mathrm{e}^{-(n+1)^\alpha}\big)$.
b) À l'aide du résultat de la question 1, établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $P([X_\alpha \geqslant n+1]) = o\big(P([X_\alpha = n])\big)$.
c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_{[X_\alpha \geqslant n]}([X_\alpha \geqslant n+1]) = 0$.

4. On suppose dans cette question que $0 < \alpha < 1$ et on lui associe X_α comme en 2.b).
a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{(n+1)^\alpha}\big(\mathrm{e}^{-n^\alpha} - \mathrm{e}^{-(n+1)^\alpha}\big)$.
b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_{[X_\alpha \geqslant n]}([X_\alpha \geqslant n+1])$.

Exercice sans préparation S33

Soit D la matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

Exercice principal S34

1. Question de cours : Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Dans les deux cas, préciser les propriétés des sous-espaces propres.

Dans tout l'exercice, on associe à tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la matrice-colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On considère des réels a, b et c strictement positifs et la matrice $A = \begin{pmatrix} -b & b & a \\ b & -c & c \\ a & c & -a \end{pmatrix}$.

2. Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, à valeurs réelles, telle que $\varphi(u, v) = {}^tUAV$ est une forme bilinéaire symétrique.

3.a) Soit $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Déterminer les signes de $\varphi(u, u)$ et $\varphi(v, v)$ respectivement.
L'application φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

b) Montrer que A admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative.
(on ne cherchera pas à les calculer)

4. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y, z) = x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^z + z\,\mathrm{e}^x$.

a) Montrer qu'un point critique $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ de f vérifie les conditions : $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} = -1,\ \overline{x} < 0$, $\overline{y} < 0$ et $\overline{z} < 0$.
Donner un point critique de f.

b) Justifier l'existence du développement limité à l'ordre 2 de f en un point critique, et écrire ce développement.

c) La fonction f admet-elle un extremum local ?

Exercice sans préparation S34

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1.a) Montrer que pour tout entier $n > \lambda - 1$, on a : $P(X \geqslant n) \leqslant P(X = n) \times \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

b) En déduire que $P(X \geqslant n) \underset{n\to+\infty}{\sim} P(X = n)$.

2. Montrer que $P(X > n) = o\big(P(X = n)\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice principal S36

1. Question de cours : Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(u_n) = \dfrac{n-1}{n}$ et $u_n \in]0, \pi/2]$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

b) Déterminer une constante réelle C telle que $u_n \sim \dfrac{C}{\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et exp la fonction exponentielle.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\big(1 - \Phi(x)\big)$.

a) On pose pour tout $x > 0$: $\theta(x) = 1 - \Phi(x) - \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. Déterminer le signe de $\theta(x)$.

b) Calculer $f(0)$. Montrer que f est décroissante et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

4.a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2 + u_n^2}\,dx$ et calculer cette intégrale. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n f(x)}{x^2 + u_n^2}\,dx$; on note I_n cette intégrale.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $K_n = \displaystyle\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n\big(f(x) - f(0)\big)}{x^2 + u_n^2}\,dx$.
Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et a pour limite 0.
c) En déduire la convergence et la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice sans préparation S36

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1. Établir l'existence d'un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$.
2. On suppose que la matrice A est inversible. Montrer que A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.

Exercice principal S39

1. Question de cours : Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et E_0 le sous-ensemble de E constitué des fonctions continues s'annulant en 0.
Soit $t \in]0,1[$ et $\varphi_t : E_0 \longrightarrow E_0$ définie par : $\forall f \in E_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_t(f)(x) = f(x) - f(tx)$.

2.a) Montrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de E et que φ_t est un endomorphisme de E_0.

b) Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de E_0 dans E.

c) Montrer que l'endomorphisme φ_t est injectif.

3. Soit g une fonction de E_0 telle que : $\exists K > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |g(x) - g(y)| \leqslant K|x-y|$.

a) Soit $f \in E_0$ vérifiant $\varphi_t(f) = g$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g(t^k x) + f(t^n x)$.

En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$.

b) Montrer que g admet un unique antécédent pour φ_t.

4. Trouver l'ensemble des fonctions $f \in E_0$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 2f(tx) + f(t^2 x) = x$.

Exercice sans préparation S39

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1,2\}, P(Y=1) = P(Y=2) = \dfrac{1}{2}$. On pose : $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

Exercice principal S40

1. Question de cours : Comparaison de séries à termes positifs.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} \times u_n$.

2. Écrire une fonction Pascal ayant pour argument un entier n et renvoyant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$.

a) Rappeler le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.
Montrer que $\ln v_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{5}{2n}\right)$.
Pour quelle valeur α_0 du réel α la série de terme général $\ln v_n$ est-elle convergente ?

b) Expliciter $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln v_k$ sans signe $\sum$, et en déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que $u_n \sim \dfrac{C}{n^{\alpha_0}}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Qu'en déduit-on pour la série $\sum u_n$?

c) Justifier l'existence d'un réel strictement positif D (indépendant de n) tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k u_k \leqslant D \times \sqrt{n}$.

4.a) Établir pour tout entier naturel n, la relation : $\displaystyle 2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice sans préparation S40

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, qui suit la loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

Déterminer toutes les fonctions g continues et strictement monotones de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)$ telles que la variable aléatoire réelle $Y = g(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice principal S42

1. Question de cours : Définition de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y, prenant chacune au moins deux valeurs avec une probabilité strictement positive. Indiquer dans quels cas $\rho_{X,Y}$ vaut 1 ou -1.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

2. Pour $r \in \mathbb{R}$, soit M_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & r & \cdots & r \\ r & 1 & r & \cdots & r \\ r & r & 1 & \cdots & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & r & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $(1-r)$ est une valeur propre de M_r et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b) Trouver une matrice diagonale semblable à M_r.

c) Pour quelles valeurs de r, l'application $(x, y) \mapsto {}^tXM_rY$ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$? (X et Y désignent les matrices-colonnes dont les composantes sont celles des vecteurs x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$)

3. Soit $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$, n variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, indépendantes et possédant toutes une variance égale à 1. On pose : $Z = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$.

a) Calculer pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la variance $V(Z_1 + \alpha Z)$ et la covariance $\text{Cov}(Z_1 + \alpha Z, Z_2 + \alpha Z)$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe un réel c_α tel que la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire $\big(c_\alpha(Z_1 + \alpha Z), \cdots, c_\alpha(Z_n + \alpha Z)\big)$ soit égale à une matrice M_r définie dans la question 2.

4. Déduire des résultats précédents que M_r est la matrice de variance-covariance d'un vecteur aléatoire discret *si et seulement si* on a : $\dfrac{1}{1-n} \leqslant r \leqslant 1$.

Exercice sans préparation S42

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

1. Montrer que si $\alpha = 2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.
2. Montrer que si $0 \leqslant \alpha < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.