3

PROBABILITÉS

Exercice 1.

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$.
Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n, Z)$, $n+1$ variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. On pose, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$: $Y_k = \prod_{i=1}^{k} X_i = X_1 X_2 \cdots X_k$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $L_1 = \ln\left(\frac{1}{Y_1}\right)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Reconnaître la loi suivie par L_1.

b) En déduire la loi de la variable aléatoire $\ln Y_k$, en reconnaissant au préalable la loi suivie par la variable aléatoire $-\ln Y_k$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, V_n est une variable aléatoire suivant la loi $\gamma(1, n)$ (loi Gamma de paramètres 1 et n). Soit W une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $s > 0$.
On note F_n la fonction de répartition de V_n et G la fonction de répartition de W.

a) Déterminer une relation entre $F_n(s)$ et $F_{n-1}(s)$, pour tout $n \geqslant 2$.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1 : 1 - F_n(s) = G(n-1)$.

3. On note R_n la variable aléatoire définie par $R_n = \dfrac{Y_n}{Z}$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire R_n.

b) Calculer la probabilité de l'événement $(R_n < 1)$.

Solution :

1. a) On a $L_1 = -\ln Y_1$. Donc $L_1(\Omega) = \mathbb{R}^+$, et pour tout $x \geqslant 0$:

$$F_{L_1}(x) = P(Y_1 > \mathrm{e}^{-x}) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

Ainsi L_1 suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ d'espérance et de variance égales à 1. Une densité de L_1 est donnée par :

$$\boxed{f_{L_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

b) On a $-\ln(Y_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} -\ln(X_i)$. L'indépendance des variables aléatoires (X_i) (donc des variables aléatoires $(\ln(X_i))$ permet d'affirmer que $-\ln(Y_k)$ suit la loi Gamma $\gamma(1,k)$, de densité :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-x}x^{k-1}}{(k-1)!} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Donc $\ln(Y_k)$ a pour densité :

$$\boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{x}(-x)^{k-1}}{(k-1)!} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

puisque $F_{\ln(Y_k)}(x) = 1 - F_{-\ln(Y_k)}(-x)$ pour tout x réel.

2. a) On sait que :

$$F_n(s) = P(V_n < s) = \int_0^s \frac{\mathrm{e}^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}dx$$

Une intégration par parties, les fonctions étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donne :

$$F_n(s) = \Big[-\frac{\mathrm{e}^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}\Big]_0^s + \int_0^s \frac{\mathrm{e}^{-x}x^{n-2}}{(n-2)!}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{-s}s^{n-1}}{(n-1)!} + F_{n-1}(s)$$

Comme $F_1(s) = 1 - \mathrm{e}^{-s}$, il vient :

$$\boxed{F_n(s) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-s}s^{k-1}}{(k-1)!}}$$

b) Il vient immédiatement :

$$\boxed{1 - F_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-s}s^{k-1}}{(k-1)!} = P(W \leqslant n-1) = G(n-1)}$$

3. a) On a : $\ln(R_n) = \ln(Y_n) + (-\ln Z)$. Par indépendance des variables aléatoires en jeu, pour tout x réel :

$$f_{\ln R_n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln Y_n}(u) f_{-\ln Z}(x-u)\,du$$

et :

$$f_{\ln R_n}(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^u(-u)^{n-1}}{(n-1)!} f_{-\ln Z}(x-u)\,du$$

- si $x \leqslant 0$:

$$\begin{aligned} f_{\ln R_n}(x) &= \frac{e^{-x}}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{x} e^{2u}(-u)^{n-1}\,du = \frac{e^{-x}}{2^n}\int_{-2x}^{+\infty} \frac{e^{-y}y^{n-1}dy}{(n-1)!} \\ &= \frac{e^{-x}}{2^n}(1 - F_n(-2x)) \end{aligned}$$

- si $x > 0$:

$$f_{\ln R_n}(x) = \frac{e^{-x}}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{0} e^{2u}(-u)^{n-1}\,du = \frac{e^{-x}}{2^n}$$

Pour terminer, on remarque que pour tout $u > 0$, $f_{R_n}(u) = f_{\ln R_n}(\ln u) \times \dfrac{1}{u}$, donc :

$\star$ si $0 \leqslant u \leqslant 1$: $f_{R_n}(u) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-2\ln u)^k}{k!}$

$\star$ si $u \geqslant 1$: $f_{R_n}(x) = \dfrac{1}{2^n u^2}$.

b) Ainsi :

$$\boxed{P(R_n < 1) = 1 - P(R_n \geqslant 1) = 1 - \frac{1}{2^n}}$$

Exercice 2.

Soit n un entier naturel non nul. Une boîte contient $(2n+1)$ jetons bicolores (une face est blanche, l'autre est noire). Les jetons sont numérotés de 1 à $2n+1$ sur leur face blanche, les faces noires ne portant pas de numéro.

On lance simultanément tous les jetons et on observe leurs faces supérieures.

1. Une et une seulement des deux couleurs apparaît un nombre impair de fois. Soit X la variable aléatoire associée à ce nombre.

a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer son espérance et sa variance.

2. Suite au lancer, on ramasse les jetons de la couleur apparaissant un nombre impair de fois et on note les numéros de leur face blanche. Soit Y la variable aléatoire représentant le plus petit de ces nombres.

a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de Y, conditionnée par l'événement $(X = 2k+1)$.

b) En déduire la loi de Y. Calculer son espérance.

Solution :

1. a) On a $X(\Omega) = \{2k+1,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$ et l'événement $(X = 2k+1)$ correspond à l'union des événements « on a obtenu $(2k+1)$ jetons blancs et

$(2n-2k)$ jetons noirs parmi les $(2n+1)$ » ou « on a obtenu $(2k+1)$ jetons noirs et $(2n-2k)$ jetons blancs parmi les $(2n+1)$ ».
Par incompatibilité et modèle binomial associé, il vient :

$$\boxed{P(X=2k+1) = 2\frac{\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}}{2^{2n+1}} = \frac{\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}}{2^{2n}}}$$

b) L'espérance de X est donnée par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n}(2k+1)P(X=2k+1) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1} \\ &= \frac{2n+1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{2n}^{2k} = \frac{2n+1}{2} \end{aligned}$$

(car $(1+1)^{2n} = 2^{2n}$ et $(1-1)^{2n} = 0$, d'où $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{2n}^{2k} = 2^{2n-1}$).

On a également :

$$E(X(X-1)) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)(2k)\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1} = \frac{(2n+1)(2n)}{2^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_{2n-1}^{2k-1}$$

et, en utilisant la même technique : $E(X(X-1)) = \dfrac{(2n+1)(2n)}{4}$ et :

$$\boxed{V(X) = \frac{2n+1}{4}}$$

2. a) On a $(Y/(X=2k+1))(\Omega) = [\![1, 2n-2k+1]\!]$ et :

$$P(Y=\ell/X=2k+1) = \frac{\mathrm{C}_{\ell-1}^{0}\mathrm{C}_{2n+1-\ell}^{2k}}{\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}}$$

En effet parmi les échantillons de $(2k+1)$ jetons pris parmi $(2n+1)$ (sans remise), on dénombre ceux dont aucun ne porte un numéro inférieur ou égal à $\ell-1$ et dont $2k$ portent des numéros supérieurs ou égaux à $\ell+1$, un jeton valant ℓ.

b) Pour tout $\ell \in [\![1, 2n+1]\!]$:

$$P(Y=\ell) = \sum_{k=0}^{\lfloor(2n+1-\ell)/2\rfloor} P(Y=\ell/X=2k+1)P(X=2k+1)$$

soit :

$$P(Y=\ell) = \sum_{k=0}^{\lfloor(2n+1-\ell)/2\rfloor} \frac{\mathrm{C}_{2n+1-\ell}^{2k}}{\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}} \times \frac{\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}}{2^{2n}}$$

et, pour $\ell \in [\![1, 2n]\!]$:

$$P(Y=\ell) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{\lfloor(2n+1-\ell)/2\rfloor}\mathrm{C}_{2n+1-\ell}^{2k} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{2}2^{2n+1-\ell} = \frac{1}{2^{\ell}}$$

Pour $\ell = 2n+1$:

$$P(Y=2n+1) = \frac{2^0}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}}$$

L'espérance de Y vaut alors :

$$\boxed{E(Y) = \sum_{\ell=1}^{2n} \frac{\ell}{2^l} + \frac{2n+1}{2^{2n}} = 2\big(1 - \frac{1}{2^{2n+1}}\big)}$$

Exercice 3.

On considère deux urnes U_1 et U_2. On suppose que U_1 (respectivement U_2) contient n_1 boules noires et b_1 boules blanches (resp. n_2 boules noires et b_2 boules blanches).

On choisit de façon équiprobable une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise.

Soit N_1 (resp. N_2) l'événement « tirer une boule noire au premier (resp. au second) tirage ».

1. Quelle est la probabilité de N_1 ? Quelle est la probabilité de N_2 ?

2. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire au second tirage sachant que l'on a tiré une boule noire au premier tirage ?

3. Les événements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ?

Solution :

1. En utilisant le système complet (U_1, U_2), où U_i est l'événement « les tirages se font dans l'urne U_i », il vient :

$$P(N_1) = P(N_1/U_1)P(U_1) + P(N_1/U_2)P(U_2)$$

Soit :

$$\boxed{P(N_1) = \frac{1}{2}\big(\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}\big)}$$

Le résultat est évidemment le même pour N_2.

2. $P(N_2/N_1) = \dfrac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_1)}$ et comme on ne change pas d'urne entre les deux tirages :

$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1 \cap N_2/U_1)P(U_1) + P(N_1 \cap N_2/U_2)P(U_2)$

Soit :

$$P(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{2}\Big(\big(\frac{n_1}{n_1+b_1}\big)^2 + \big(\frac{n_2}{n_2+b_2}\big)^2\Big)$$

Et en remplaçant et développant :

$$P(N_2/N_1) = \frac{n_1^2(n_2+b_2)^2 + n_2^2(n_1+b_1)^2}{(n_1^2+b_1)(n_2+b_2)^2 + (n_2^2+b_2)(n_1+b_1)^2}$$

3. Les événements N_1 et N_2 sont indépendants si et seulement si :

$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P(N_2)$$

Soit , si et seulement si :

$$\frac{1}{2}\Big(\big(\frac{n_1}{n_1+b_1}\big)^2 + \big(\frac{n_2}{n_2+b_2}\big)^2\Big) = \frac{1}{4}\big(\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}\big)^2$$

En développant, il reste : $\big(\dfrac{n_1}{n_1+b_1} - \dfrac{n_2}{n_2+b_2}\big)^2 = 0$

Ceci est réalisé si et seulement si $\dfrac{n_1}{b_1} = \dfrac{n_2}{b_2}$ (ce qui n'est pas étonnant).

Exercice 4.

Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 change d'état de la manière suivante :
• à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé.
• si à l'instant $t = n$ $(n \geqslant 0)$, le spot S_1 est allumé, un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3, S_4 s'allume à l'instant $t = n + 1$, et ceci de manière équiprobable.
• si à l'instant $t = n$ $(n \geqslant 0)$, le spot S_k $(2 \leqslant k \leqslant 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$.
• à chaque instant, un seul spot est allumé.

Soit X la variable aléatoire représentant le premier instant, s'il existe, où le spot S_2 s'allume.

1. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$ donné). En déduire que X est bien une variable aléatoire.

2. Calculer la probabilité des événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$.

3. Calculer la probabilité des événements $(X = n)$ pour $n \geqslant 3$.

4. Déterminer l'espérance de X.

Solution :

1. Le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n avec la probabilité $\left(\frac{1}{4}\right)^n$.
Dès que le spot S_1 s'éteint, alors l'un des spots S_2, S_3 ou S_4 s'allume et il n'y a plus qu'à attendre : on est sûr que S_2 s'allumera.
Par le théorème de continuité monotone d'une probabilité, la probabilité que le spot S_1 reste indéfiniment allumé vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. On est donc quasi-certain que le spot S_2 s'allumera et $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$: X est bien une variable aléatoire.

2. $\star$ $P(X = 1) = \dfrac{1}{4}$ (le spot S_2 s'allume à l'instant 1).
$\star$ $(X = 2)$ est réalisé, soit si le spot S_1 reste allumé à l'instant 1 et le spot S_2 s'allume à l'instant 2, soit si le spot S_3 s'allume à l'instant 1 (et S_2 s'allumera nécessairement à l'instant 2), donc :
$$P(X = 2) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,1 = \frac{5}{16}$$

3. Soit $n \geqslant 3$, S_2 s'allume pour la première fois à l'instant n si et seulement si :

⋆ Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-1$ et S_2 s'allume à l'instant n ;
⋆ Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-2$ et S_3 s'allume à l'instant $n-1$;
⋆ Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-3$ et S_4 s'allume à l'instant $n-2$;

Soit, par disjonction :

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, P(X=n) = \frac{1}{4^{n-1}}\frac{1}{4} + \frac{1}{4^{n-2}}\frac{1}{4} + \frac{1}{4^{n-3}}\frac{1}{4} = \frac{21}{4^n}}$$

4. La convergence de la série étant évidente :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n.P(X=n) = \frac{1}{4} + 2\,\frac{5}{16} + 21\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{4^n}$$

$$E(X) = \frac{7}{8} - \frac{21}{4} - \frac{21}{8} + \frac{21}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^{n-1}}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{7}{3}}$$

Exercice 5.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} k.P(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - n.P(X>n)$$

En déduire que si X admet une espérance, alors :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$$

b) Montrer de même que si X admet une variance, alors :

$$E\left(X^2\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\,P(X>k)$$

2. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

a) Calculer l'espérance de X. Préciser la loi de X.

b) Déterminer un équivalent de $E(X)$ lorsque N tend vers l'infini, à n fixé (on pourra comparer à une intégrale).

c) $Z = \dfrac{n+1}{n}X$ est-il un estimateur sans biais de N ?

d) Dans les mêmes conditions, déterminer un équivalent de la variance $V(X)$.

Solution :

1. a) On peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k[P(X>k-1)-P(X>k)]\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(k+1-k)P(X>k) - nP(X>n) + P(X>0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)\end{aligned}$$

Si X admet une espérance, la série $\sum kP(X=k)$ converge. Mais :

$$0 \leqslant nP(X>n) = n\sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X=k)$$

Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)}$$

b) Utilisons le même type d'argument. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2P(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k^2[P(X>k-1)-P(X>k)]\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\big((k+1)^2-k^2\big)P(X>k) - n^2P(X>n) + P(X>0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)P(X>k) - n^2P(X>n)\end{aligned}$$

Si X admet une variance, X admet un moment d'ordre 2, et la série $\sum k^2P(X=k)$ converge. Mais :

$$0 \leqslant n^2P(X>n) = n^2\sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2P(X=k)$$

Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc :

$$\boxed{E\big(X^2\big) = \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)\,P(X>k)}$$

2. a) Il est immédiat que pour tout $k \in [\![1,N]\!]$:

$$P(X \leqslant k) = \big(\tfrac{k}{N}\big)^n, \text{ et } P(X>k) = 1-\big(\tfrac{k}{N}\big)^n$$

Donc, par la question précédente :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{N-1}\big(1-\big(\tfrac{k}{N}\big)^n\big) = N - \sum_{k=0}^{N-1}\big(\tfrac{k}{N}\big)^n$$

Quant à la loi de X (on a : $X(\Omega) = [\![1,N]\!]$) :

$$\boxed{P(X=k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = \frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}}$$

Ce calcul étant valable même pour $k=1$.

b) On a :
$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n = N\Big(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\Big)$$
Or, lorsque N tend vers l'infini :
$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \sim \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$
ce qui donne, pour N grand :
$$\boxed{E(X) \sim N - \frac{N}{n+1} = \frac{nN}{n+1}}$$

c) On en conclut que Z est un estimateur asymptotiquement sans biais de N.

d) On refait un calcul analogue :
$$\begin{aligned}E(X^2) &= \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)P(X>k) = \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1) - \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)\left(\frac{k}{N}\right)^n \\ &= N + N(N-1) - 2N^2\times\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} - N\times\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \\ &= N^2 - 2N^2\Big(\int_0^1 x^n dx + o(1)\Big) - N\Big(\int_0^1 x^n dx + o(1)\Big)\end{aligned}$$
$$E(X^2) = N^2 - \frac{2N^2}{n+2} - \frac{N}{n+1} + o(N^2) = \frac{n}{n+2}N^2 + o(N^2)$$
Et comme $[E(X)]^2 = \dfrac{n^2}{(n+1)^2}N^2 + o(N^2)$, il vient, pour N tendant vers l'infini :
$$\boxed{V(X) \sim \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}N^2}$$

Exercice 6.

Dans cet exercice, Ω désigne un ensemble fini non vide, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de Ω dans $\mathbb{R}$. Si $X \in \mathcal{F}$, on note $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X.

Si A est une partie de Ω, on note 1_A la fonction caractéristique de A, c'est-à-dire l'application définie pour tout $\omega \in \Omega$ par :
$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. Soit $A \subset \Omega$. Calculer $E(1_A)$.

2. Montrer que l'application φ définie sur $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ par :
$$\varphi : (X,Y) \mapsto E(XY)$$
est un produit scalaire sur $\mathcal{F}$ si et seulement si pour tout $\omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) > 0$.

Dans la suite de l'exercice, on supposera que P vérifie cette propriété et $\mathcal{F}$ sera muni de ce produit scalaire.

3. Soit $X \in \mathcal{F}$ une variable aléatoire non constante.
On note G le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par X et la variable aléatoire constante égale à 1, soit $G = \text{Vect}(X, 1_\Omega)$.
Soit $Y \in \mathcal{F}$.

a) Déterminer les réels a_0 et b_0 pour lesquels $Y - a_0X - b_0$ est orthogonal à tout élément de G.

b) En déduire l'expression de la projection orthogonale de Y sur G qu'on notera $p_G(Y)$.

c) Comparer $E(p_G(Y))$ et $E(Y)$.

d) On suppose que $X = 1_A$, avec A partie de Ω non vide et distincte de Ω. Montrer que pour tout $B \subset \Omega$:

$$p_G(1_B) = P(B/A)1_A + P(B/\overline{A})1_{\overline{A}}$$

où $P(U/V)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement U, sachant que l'événement V est réalisé.

Solution :

1. $E(1_A) = 1.P(A) + 0.P(\overline{A}) = P(A)$.

2. $\star$ L'application φ est bilinéaire (par linéarité de l'espérance), symétrique (par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, donc dans $\mathcal{F}$) et également positive (car si $X \in \mathcal{F}, \varphi(X, X) = E(X^2) \geqslant 0$).
$\star$ Si φ est un produit scalaire, pour tout $\omega \in \Omega$, $X = 1_{\{\omega\}}$ est un élément non nul de $\mathcal{F}$, donc $\varphi(X, X) = E(1_{\{\omega\}}{}^2) = E(1_{\{\omega\}}) = P(\{\omega\}) > 0$.
$\star$ Réciproquement, supposons que $\forall\, \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) > 0$. Soit $X \in \mathcal{F}$ non nulle. Alors il existe $\omega_0 \in \Omega$ tel que $X(\omega_0) \neq 0$.
Dans ces conditions $\varphi(X, X) = E(X^2) \geqslant X^2(\{\omega_0\})P(\{\omega_0\})$, donc φ est bien un produit scalaire.

3. a) $$Y - a_0X - b_0 \in G^\perp \iff \begin{cases} \varphi(Y - a_0X - b_0, 1_\Omega) = 0 \\ \varphi(Y - a_0X - b_0, X) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a_0E(X) + b_0 = E(Y) \\ a_0E(X^2) + b_0E(X) = E(XY) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a_0 = \dfrac{E(XY) - E(X)E(Y)}{V(X)} = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \\ b_0 = E(Y) - E(X)\dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \end{cases}$$
Notons que $V(X) \neq 0$, puisque X n'est pas constante.

b) $p_G(X)$ est l'unique élément Z de G tel que $Y - Z \in G^\perp$, donc :

$$\boxed{p_G(X) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}\,X + E(Y) - E(X)\,\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}}$$

c) $E(p_G(Y) = a_0E(X) + b_0 = E(Y)$ (conséquence de $Y - p_G(Y) \perp 1_\Omega$)

d) Remarquons que $A \neq \Omega$ et $A \neq \emptyset$, donc $X = 1_A$ n'est pas constante.
$\mathrm{Cov}(1_A, 1_B) = E(1_A 1_B) - E(1_A)E(1_B) = E(1_{A\cap B}) - E(1_A)E(1_B)$, donc

$$\mathrm{Cov}(1_A, 1_B) = P(A\cap B) - P(A)P(B)$$

$V(1_A) = P(A)P(\overline{A})$ (car 1_A suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$).
$p_G(1_B) = a_0 1_A + b_0(1_A + 1_{\overline{A}}) = (a_0 + b_0)1_A + b_0 1_{\overline{A}}$
avec :

$$a_0 + b_0 = E(1_B) + \frac{\mathrm{Cov}(1_A, 1_B)}{V(1_A)}(1 - E(1_A))$$

$$= P(B) + \frac{P(A\cap B) - P(A)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B/A)$$

et :

$$b_0 = E(1_B) - E(1_A)\frac{\mathrm{Cov}(1_A, 1_B)}{V(1_A)} = P(B) - \frac{P(A\cap B) - P(A)P(B)}{P(\overline{A})}$$

$$= P(B/\overline{A})$$

Finalement :

$$\boxed{p_G(1_B) = P(B/A)1_A + P(B/\overline{A})1_{\overline{A}}}$$

Exercice 7.

On considère une suite de parties indépendantes de «pile» ou «face», la probabilité d'obtenir «pile» à chaque partie étant égale à p (où $p \in]0,1[$).

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n le numéro de l'épreuve amenant le $n^{\text{ème}}$ «pile».

Enfin, on pose $A_1 = T_1$ et pour $n \geqslant 2, A_n = T_n - T_{n-1}$.

1. Quelle est la loi de T_1 ? Donner la valeur de son espérance.

2. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi.

3. On pose $\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum\limits_{i=1}^n x_i = 1\}$ et on définit l'application f de Δ_n dans $\mathbb{R}$ par, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n : f(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^n x_i^2$

a) Soit $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\big(\frac{1}{n} + h_1, \frac{1}{n} + h_2, \dots, \frac{1}{n} + h_n\big) \in \Delta_n$.
Simplifier :

$$f\big(\frac{1}{n} + h_1, \frac{1}{n} + h_2, \dots, \frac{1}{n} + h_n\big) - f\big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\big)$$

b) En déduire que f admet un minimum atteint en un unique point de Δ_n que l'on précisera.

4. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé, il existe parmi les combinaisons linéaires de $T_1, \dots, T_n$ un estimateur sans biais de $\frac{1}{p}$ qui est de variance minimale et préciser quel est cet estimateur. Cet estimateur est-il convergent ?

Solution :

1. La variable aléatoire T_1 est le temps d'attente du premier «pile», elle suit la loi géométrique de paramètre p, donc d'espérance $\frac{1}{p}$.

2. Notons X_n la variable aléatoire égale à 1 si la partie numéro n amène «pile» et 0 sinon. Les variables X_n sont des variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
Soit $(i_1, \dots, i_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. L'événement $(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n)$ est :
$(X_1 = \cdots = X_{i_1 - 1} = 0, X_{i_1} = 1, X_{i_1+1} = \cdots = X_{i_1+i_2-1} = 0, X_{i_1+i_2} = 1, ..$ jusqu'à $X_{i_1+\cdots+i_n} = 1)$
Donc, en posant $q = 1 - p$:

$$P(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n) = q^{i_1-1}pq^{i_2-1}p \dots q^{i_n-1}p \qquad (*)$$

En sommant pour $(i_1, \dots, i_{n-1}) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}$, on obtient compte tenu du fait que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = \frac{p}{1-q} = 1$:

$$P(A_n = i_n) = q^{i_n-1}p$$

Ce qui prouve que A_n suit la loi géométrique de paramètre p, donc les variables A_k sont toutes de même loi.
De plus, l'expression $(*)$ prouve que :

$$P(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k = i_k)$$

Ce qui prouve l'indépendance des variables A_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a) Remarquons que $\left(\frac{1}{n} + h_1, \dots, \frac{1}{n} + h_n\right) \in \Delta_n$ si et seulement si $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i = 0$.
Dans ces conditions :
$f\left(\frac{1}{n} + h_1, \dots, \frac{1}{n} + h_n\right) - f\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{n} + h_i\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^2.$

b) $f\left(\frac{1}{n} + h_1, \dots, \frac{1}{n} + h_n\right) - f\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ est toujours $\geqslant 0$, avec égalité seulement si tous les h_i sont nuls. On en déduit que f admet un minimum global sur Δ_n atteint uniquement en $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

4. On remarque que $\text{Vect}(T_1, \dots, T_n) = \text{Vect}(A_1, \dots, A_n)$.
Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $E(x_1A_1 + \cdots + x_nA_n) = \frac{1}{p} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, donc $x_1A_1 + \cdots + x_nA_n$ est un estimateur sans biais de $\frac{1}{p}$ si et seulement si $(x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$.
Dans ces conditions, vu l'indépendance des A_i :

$$V(x_1A_1 + \cdots + x_nA_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 V(A_i) = V(A_1)f(x_1, \ldots, x_n)$$

Cette variance est minimale si et seulement si $(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$.
Il existe donc parmi les combinaisons linéaires de $T_1, \ldots, T_n$ un estimateur sans biais de variance minimale qui est $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{1}{n}T_n$.

Cet estimateur est convergent, puisque $V\left(\frac{1}{n}T_n\right) = \frac{1}{n}V(T_1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 8.

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
On considère deux variables aléatoires indépendantes, X_1 et X_2, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et suivant la loi uniforme discrète sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Soit a un entier de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leqslant a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a \end{cases}$$

a) Déterminer la loi de Y. (Vérifier que l'on a bien obtenu une loi de probabilité).

b) Calculer l'espérance de Y et la comparer à celle de X_1.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de a cette espérance est-elle maximale ?

2. Soient a et b deux entiers de $\{1, \ldots, n\}$.
On définit la variable aléatoire Z par :

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leqslant a \\ X_2(\omega) & \text{si } a < X_2(\omega) \leqslant b \\ X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > b \end{cases}$$

a) Déterminer la loi de Z ainsi que son espérance.

b) Pour quelles valeurs du couple (a, b) cette espérance est-elle maximale ?

Solution :

1. a) On a $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et, par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 :

- si $k \leqslant a$, $P(Y = k) = P[(X_1 = k) \cap (X_2 \leqslant a)] = \frac{1}{n} \times \frac{a}{n}$.
- si $k > a$, $P(Y = k) = P[(X_1 = k) \cap (X_2 > a)] + P[(X_2 = k) \cap (X_2 > a)]$
$= \frac{1}{n} + \frac{a}{n^2}$.

On a bien : $\frac{a}{n^2} \times a + \frac{a}{n^2} \times (n - a) + \frac{n-a}{n} = 1$

b) Le calcul de l'espérance est facile :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{a} k\frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^{n} k\frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{a(n+1)}{2n} + \frac{(a+n+1)(n-a)}{2n}$$
$$= E(X_1) + \frac{a}{2n}(n-a) > E(X_1)$$

c) On vérifie que :

$$E(Y) = \frac{1}{2n}\big(\frac{5}{4}n^2 + n - (a - \frac{n}{2})^2\big)$$

Ainsi $E(Y)$ est maximale pour $a - \frac{n}{2}$ le plus petit possible :

- si n est pair, c'est pour $a = \frac{n}{2}$,
- si n est impair, c'est pour $a = \frac{n-1}{2}$ ou $a = \frac{n+1}{2}$.

2\. a) On procède dans cette question comme dans la question précédente :

- si $k \leqslant a$, $P(Z = k) = P[(X_1 = k) \cap (X_2 \leqslant a)] + P[(X_1 = k) \cap (X_2 > b)]$
$$= \frac{1}{n^2}(a - b + n).$$
- si $k > b$, la méthode et le résultat sont identiques,
- si $a < k \leqslant b$,

$$P(Z = k) = P[(X_1 = k) \cap (X_2 \leqslant a)] + P[(X_2 = k) \cap (a < X_2 \leqslant b)] + P[(X_1 = k) \cap (X_2 > b)]$$
$$= \frac{1}{n^2}(a - b + n) + \frac{1}{n}$$

Le calcul de l'espérance donne :

$$E(Z) = \frac{1}{2n}\big(b^2 - a^2 - bn + an + n^2 + n\big) = E(X_1) + \frac{b-a}{2n}(b + a - n)$$

b) De plus :

$$E(Z) = \frac{1}{2n}\big[\big(b - \frac{n}{2}\big)^2 - \big(a - \frac{n}{2}\big)^2 + n^2 + n\big]$$

$E(Z)$ est maximale pour $a = n/2$ si n est pair et pour $a = \frac{n-1}{2}$ ou $a = \frac{n+1}{2}$ si n est impair (voir la question précédente) et b tel que $\big(b - \frac{n}{2}\big)^2$ maximal, soit $b = n$.

Exercice 9.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ de densités respectives f_X et f_Y.

1\. a) On pose $U = \ln(X)$ et $V = \ln(Y)$.
Exprimer des densités f_U et f_{-V} de U et de $-V$ à l'aide de f_X et de f_Y.

b) Déduire de la question précédente une expression d'une densité de $T = \ln\big(\frac{X}{Y}\big)$.

c) Montrer qu'une densité g de $\frac{X}{Y}$ est :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x} f_T(\ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. Montrer que le quotient de deux variables exponentielles indépendantes de paramètres respectifs λ et μ suit une loi de Pareto dont on déterminera les paramètres.

3. On admet que si les variables X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, une densité g de $\dfrac{X}{Y}$ est définie, pour tout x réel par :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_X(xt) f_Y(t)\, dt$$

Déterminer la loi du quotient de deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite.

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi de Pareto de paramètres $\alpha > 0$, $a > 0$ et x_0 lorsqu'une densité de X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{a}\left(\dfrac{a}{x - x_0}\right)^{\alpha+1} & si\ x - x_0 > a \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Solution :

1. a) Les variables aléatoires U et V sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[U \leqslant x] = [X \leqslant \mathrm{e}^x] \implies F_U(x) = F_X(\mathrm{e}^x) \implies f_U(x) = \mathrm{e}^x f_X(\mathrm{e}^x)$$

(où F_W désigne la fonction de répartition et f_W une densité de la variable aléatoire à densité W). De même :

$$[-V \leqslant x] = [Y \geqslant \mathrm{e}^{-x}] \implies F_V(x) = 1 - F_Y(\mathrm{e}^{-x}) \implies f_V(x) = \mathrm{e}^{-x} f_Y(\mathrm{e}^{-x})$$

b) On remarque que $T = \ln(X) - \ln(Y) = U - V$. Les variable X et Y étant indépendantes, il en est de même pour U et V, et une densité de T est donnée par convolution :

$$f_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_{-V}(x - t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^t f_X(\mathrm{e}^t) \mathrm{e}^{-x+t} f_Y(\mathrm{e}^{-x+t})\, dt$$

c) On remarque que $\dfrac{X}{Y} = \mathrm{e}^T$. La variable aléatoire $\dfrac{X}{Y}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$:

$$\left[\frac{X}{Y} \leqslant x\right] = [T \leqslant \ln x] \implies F_{X/Y}(x) = F_T(\ln x)$$

Par dérivation, une densité de $\dfrac{X}{Y}$ est définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} f_T(\ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. C'est une application de la question précédente. Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, si Y suit la loi $\mathcal{E}(\mu)$, et si X, Y sont indépendantes, $\dfrac{X}{Y}$ a pour densité :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda\mu \displaystyle\int_0^{+\infty} u.\mathrm{e}^{-(\lambda x + \mu)u}\, du & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Donc, pour $x > 0$, après une intégration par parties :

$$g(x) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda x + \mu)^2} = \frac{\mu/\lambda}{(x + \mu/\lambda)^2}$$

On reconnaît une loi de Pareto de paramètres $\alpha = 1, a = \mu/\lambda, x_0 = -\mu/\lambda$.

3. Il suffit d'appliquer la formule proposée :

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |t|.\mathrm{e}^{-(xt)^2/2}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t.\mathrm{e}^{-(x^2+1)t^2/2}\,dt$$

Soit, en intégrant « à vue » :

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}}$$

On dit que $\frac{X}{Y}$ suit une loi de Cauchy.

Exercice 10.

1. Soient deux entiers naturels n et r avec $0 \leqslant r \leqslant n$.
On définit la fonction $F_{r,n}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F_{r,n}(x) = \sum_{k=r}^{n} C_k^r x^k$$

a) Montrer que pour tout x réel, on a $(1-x)F_{r,n}(x) = xF_{r-1,n-1}(x) - C_n^r x^{n+1}$.

b) Soit $x \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}$ fixés. Donner un équivalent simple de $C_n^r x^{n+1}$ quand n tend vers l'infini.

c) Montrer que pour tout x tel que $0 < x < 1$ et $r \in \mathbb{N}$ fixés, $F_{r,n}(x)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite.

On dispose de deux pièces de monnaie. La première pièce donne « Pile » avec la probabilité p et la seconde avec la probabilité $q = 1 - p$. ($p \in]0,1[$).

- on lance la première pièce jusqu'à obtenir pour la première fois « Pile ». Soit N le nombre de lancers effectués.
- on lance alors N fois la seconde pièce et on note X la variable aléatoire égale au nombre de « Pile » obtenus durant ces N tirages.

2. a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer son espérance. Commenter les cas où $p = q = 1/2$ et où p est de la forme $1/r$.

Solution :

1. a) On utilise la relation appelée « du triangle de Pascal », soit :

$$\mathrm{C}_k^r = \mathrm{C}_{k-1}^{r-1} + \mathrm{C}_{k-1}^r$$

avec les conventions habituelles de nullité.

Pour tout x réel :

$$F_{r,n}(x) = \sum_{k=r}^{n} \mathrm{C}_k^r x^k = \sum_{k=r}^{n} \mathrm{C}_{k-1}^{r-1} x^k + \sum_{k=r}^{n} \mathrm{C}_{k-1}^{r} x^k$$

Or :

$$\sum_{k=r}^{n} \mathrm{C}_{k-1}^{r-1} x^k = \sum_{k=r-1}^{n-1} \mathrm{C}_{k}^{r-1} x^{k+1} = xF_{r-1,n-1}(x)$$

$$\sum_{k=r}^{n} \mathrm{C}_{k-1}^{r} x^k = \sum_{k=r+1}^{n} \mathrm{C}_{k-1}^{r} x^k, \text{ car } \mathrm{C}_{r-1}^{r} = 0$$

$$\sum_{k=r}^{n} \mathrm{C}_{k-1}^{r} x^k = \sum_{k=r}^{n} \mathrm{C}_{k}^{r} x^{k+1} = x\left(F_{r,n}(x) - C_n^r x^n\right)$$

D'où :

$$\boxed{(1-x)F_{r,n}(x) \;=\; xF_{r-1,n-1}(x) - C_n^r x^{n+1}}$$

b) Soit $x \in]0,1[$. Raisonnons par récurrence sur r :

- si $r = 0$, $F_{0,n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ admet $\dfrac{1}{1-x}$ pour limite lorsque n tend vers l'infini.
- si $r = 1$, $F_{1,n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} kx^k$ admet $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ pour limite lorsque n tend vers l'infini.
- supposons que pour $r > 0$, $F_{r-1,n}(x)$ admette $\dfrac{x^{r-1}}{(1-x)^r}$ pour limite lorsque n tend vers l'infini ; la relation précédente et la remarque suivante :

$$\mathrm{C}_n^r x^{n+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} x^{n+1} \sim \frac{n^r}{r!} x^{n+1}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (prépondérance classique), donnent pour $x \in]0,1[$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_{r,n}(x) = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}}$$

2. a) La loi conditionnelle de X, conditionnée par la réalisation de l'événement $[N = n]$ est une loi binomiale de paramètres n et q, et $([N = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X = k/N = n)P(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{C}_n^k q^k p^{n-k} pq^{n-1}$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{C}_n^k (pq)^n = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \frac{(pq)^k}{(1-pq)^{k+1}} = \frac{pq^{2k-1}}{(1-pq)^{k+1}}$$

Et pour $k = 0$:

$$P(X = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n pq^{n-1} = \frac{q}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (q^2)^n = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}$$

b) La série $\sum\limits_{k} k \dfrac{pq^{2k-1}}{(1-pq)^{k+1}}$ est convergente.

Le terme général s'écrit : $\dfrac{pq}{(1-pq)^2} k \left(\dfrac{q^2}{1-pq}\right)^{k-1}$, avec $0 < \dfrac{q^2}{1-pq} < 1$.

On a alors :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{pq^{2k-1}}{(1-pq)^{k+1}} = \frac{pq}{(1-pq)^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \Big(\frac{q^2}{1-pq}\Big)^{k-1}$$
$$= \frac{pq}{(1-pq)^2} \frac{1}{(1-\frac{q^2}{1-pq})^2} = \frac{pq}{(1-pq-q^2)^2} = \frac{q}{p}$$

⋆ Si $p = q = 1/2$, on joue en moyenne 2 fois avec la première pièce et on a donc en moyenne 1 fois Pile avec la seconde. Le résultat ci–dessus paraît normal.

⋆ Si $p = 1/r$, $E(N) = r$ et on joue en moyenne r fois avec la probabilité $\dfrac{r-1}{r}$ d'obtenir Pile. On obtient Pile en moyenne $(r-1)$ fois. On retrouve $E(X) = \dfrac{q}{p}$.

Exercice 11.

1. Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $]0,1]$. On pose $Y = \ln X$.

Déterminer la loi de Y.

2. Soit (a,b) deux variables aléatoires à densité, indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, suivant toutes deux la loi uniforme sur $]0,1]$. A tout $\omega \in \Omega$, on associe l'équation :

$$a(\omega)x^2 - b(\omega)x + 1 = 0$$

On note $\alpha(\omega)$ et $\beta(\omega)$ les racines dans $\mathbb{C}$ de cette équation.

Déterminer la loi de la variable aléatoire S définie par :

$$S(\omega) = \alpha(\omega) + \beta(\omega)$$

Solution :

1. On sait que $Y(\Omega) =]-\infty, 0]$. Aussi pour tout $x \leqslant 0$:

$$P(Y \leqslant x) = P(\ln(X) \leqslant x) = P(X \leqslant \mathrm{e}^x) = F_X(\mathrm{e}^x)$$

où F_X est la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
Par conséquent :

$$F_Y(x) = \begin{cases} F_X(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et une densité de Y est alors :

$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

2. On sait que : $S(\omega) = \alpha(\omega) + \beta(\omega) = \dfrac{b(\omega)}{a(\omega)}$

Pour déterminer la loi de S on étudie la loi de $\ln S = \ln b - \ln a = Z_1 - Z_2$, avec comme densités respectives :

$$f_{Z_1}(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad f_{-Z_2}(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Une densité h de $\ln(S)$ est alors définie par convolution :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_1}(t) f_{-Z_2}(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^t f_{-Z_2}(x-t)\,dt$$

donc :

$$h(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{2t-x}\,dt = \frac{e^x}{2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2t-x}\,dt = \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Enfin, comme $S(\Omega) = \mathbb{R}^+$, il vient, pour $x \geqslant 0$:

$$P(S \leqslant x) = P(\ln S \leqslant \ln x) = F_{\ln S}(\ln x)$$

soit :

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ F_{\ln S}(\ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et :

$$\boxed{f_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1/(2x^2) & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

Exercice 12.

Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$.

1. Montrer que I converge. Déterminer sa valeur.

2. Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

a) Montrer que f est une densité de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité.
X a-t-elle une espérance ? une variance ?

Solution :

1. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$ est continue sur $]-1,1[$, donc intégrable sur tout segment de cet intervalle.

• au voisinage de 1, on a $0 < g(x) \sim \dfrac{1}{4\sqrt{1-x}}$ fonction qui est intégrable au voisinage de ce point (intégrale de référence de Riemann).

• au voisinage de -1, on fait un raisonnement identique en valeur absolue, ou mieux on invoque l'imparité de la fonction à intégrer.

Enfin, puisque g est impaire et l'intégrale convergente, il vient :

$$\boxed{I = 0}$$

2. a) La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. De plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^1 g(x)\,dx = \lim_{a,b \to 0} \int_b^{1-a} \frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

La fonction cosinus est bijective de $[0, \pi/2]$ sur $[0,1]$ et de classe C^1. Posons $x = \sqrt{\cos t}$. Il vient :

$$2\int_0^1 g(x)\,dx = \lim_{\alpha \to 0, \beta \to \pi/2} \int_\beta^\alpha \frac{2\,dt}{2(1+\cos t)} = \lim_{\alpha \to 0, \beta \to \pi/2} \int_\beta^\alpha \frac{dt}{2\cos^2(t/2)}$$

$$\boxed{2\int_0^1 g(x)\,dx = \lim_{\alpha \to 0, \beta \to \pi/2} \big[\tan t\big]_\alpha^\beta = 1}$$

b) Au voisinage du point 1, on a :

$$0 < \frac{2x^n}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} \sim \frac{2}{\sqrt{1-x}}$$

Ainsi, l'intégrale définissant $E(X^n)$ est convergente, et X admet un moment d'ordre n, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13.

Soient n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

1. Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$, $n+p$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.
On note :

$$R_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n), \qquad S_p = \max(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$$

a) Déterminer la loi de R_n et la loi de S_p.

b) En déduire la loi de $\ln R_n$ et celle de $\ln S_p$, où ln représente la fonction logarithme népérien.

c) En déduire une densité de la variable aléatoire $P = R_n S_p$.

d) Montrer que P admet des moments de tous ordres. Calculer son espérance.

2. Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_p)$, $n+p$ nombres réels positifs ou nuls. Montrer que :

$$\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \max(y_1, y_2, \ldots, y_p) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p} (x_i y_j)$$

3. En utilisant le résultat de la question précédente, on cherche à déterminer la loi de P de la manière suivante :

- on détermine la loi du produit $X_i Y_j$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p$.
- on détermine la loi de $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p} X_i Y_j$.

Cette méthode présente un inconvénient majeur. Lequel ?

Solution :

1. a) On sait que $R_n(\Omega) = [0,1]$, et pour tout x de cet intervalle :

$$P(R_n < x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < x) = x^n$$

Donc la fonction de répartition de R_n est donnée par :

$$\boxed{F_{R_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

Le calcul de la loi de S_p est identique.

b) On a $\ln(\mathbb{R}_n)(\Omega) = \mathbb{R}^-$, et pour tout $x \leqslant 0$: $F_{\ln R_n}(x) = \mathrm{e}^{nx}$. Une densité est alors :

$$\boxed{f_{\ln R_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ n.\mathrm{e}^{nx} & \text{sinon} \end{cases}}$$

Le calcul de la loi de $\ln S_p$ est identique.

c) Par indépendance des variables aléatoires en jeu, et par convolution, si on pose $Z = \ln R_n + \ln S_p$:

$$f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{\ln R_n}(u) f_{\ln S_p}(x-u)\, du = \int_x^0 np.\mathrm{e}^{px}\mathrm{e}^{(n-p)u}\, du \quad \text{pour } x < 0$$

Donc :

- si $n = p$

$$f_Z(x) = \begin{cases} -xn^2.\mathrm{e}^{nx} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- si $n \neq p$

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{np}{n-p}(\mathrm{e}^{px} - \mathrm{e}^{nx}) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis $f_P(x) = f_Z(\ln x) \times \dfrac{1}{x}$, soit :

$$\boxed{\text{si } n \neq p : \; f_P(x) = \begin{cases} \dfrac{np}{n-p}(x^{p-1} - x^{n-1}) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

$$\boxed{\text{si } n = p : \; f_P(x) = \begin{cases} -n^2 x^{n-1}\ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

d) On voit que $E(P^k)$ existe dès que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ et un calcul immédiat donne :

$$\boxed{E(P) = \begin{cases} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 & \text{si } n = p \\ \dfrac{np}{(n+1)(p+1)} & \text{si } n \neq p \end{cases}}$$

2. Classons les $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et les $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ en notant :

$$\begin{cases} \min(x_i) = x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)} = \max(x_i) \\ \min(y_j) = y_{(1)} \leqslant y_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant y_{(p)} = \max(y_j) \end{cases}$$

Alors $\max(x_i) \times \max(y_j) = x_{(n)}.y_{(p)}$ et ce produit reste supérieur à tout produit $x_k.y_\ell$.

3. Il est simple de déterminer la loi de X_iY_j, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$. Mais les np variables aléatoires X_iY_j ne sont pas indépendantes !
La loi de $\max\limits_{i,j}(X_iY_j)$ sera nettement plus difficile à obtenir.

Exercice 14.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω et à valeurs dans $\{1, \ldots, n+1\}$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On pose, pour tout couple $(i,j) \in \{1, \ldots, n+1\}^2$,

$$a_{i,j} = P(X = i, Y = j)$$

On suppose que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} & \text{si } |i + j - (n+2)| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a) Vérifier que la famille $(a_{i,j})$ ainsi définie est bien une loi de probabilité de couple.

b) Ecrire la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le terme général est $a_{i,j}$. Vérifier que A est diagonalisable.

2. Déterminer les lois de probabilité de X et Y.

3. Pour tout couple $(i,j) \in \{1, \ldots, n+1\}^2$, on pose :

$$b_{i,j} = P(X = i / Y = j)$$

(où $P(A/B)$ désigne la probabilité conditionnelle de A, sachant que B est réalisé).

Déterminer la matrice $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le terme général est $b_{i,j}$.

Montrer que le vecteur $v = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ \vdots \\ \vdots \\ P(X = n+1) \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B.

Solution :

1. a) Tous les scalaires $a_{i,j}$ sont positifs ou nuls. Déterminons le nombre de termes $a_{i,j}$ non nuls. Ce sont les termes pour lesquels :

• soit $i + j = n + 3$, avec $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$, soit tous les couples (i,j) de la forme $(i, n+3-i)$, avec $1 \leqslant i, n+3-i \leqslant n+1$ ou $2 \leqslant i \leqslant n+1$. Il y en a n ;

- soit $i+j=n+1$, avec $1 \leqslant i,j \leqslant n+1$, soit tous les couples (i,j) de la forme $(i,n+1-i)$, avec $1 \leqslant i, n+1-i \leqslant n+1$ ou $1 \leqslant i \leqslant n$. Il y en a n également.

Au total il y en a $2n$. Ceci montre que $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} a_{i,j} = 1$ et on a bien défini une loi de probabilité.

b) La matrice A s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 1/2n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1/2n & 0 & 1/2n \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1/2n & \iddots & \iddots & & & \vdots \\ 0 & 1/2n & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.

2. La loi de X est donnée par $P(X=i) = \sum\limits_{j=1}^{n+1} a_{i,j}$. Donc :

- $P(X=1) = \dfrac{1}{2n}$, $(a_{1,n} \neq 0)$.
- $P(X=n+1) = \dfrac{1}{2n}$, $(a_{n+1,2} \neq 0)$.
- pour $2 \leqslant i \leqslant n, P(X=i) = \dfrac{1}{n}$, $(a_{i,n+3-i}, a_{i,n+1-i} \neq 0)$.

Par raison de symétrie Y suit la même loi que X.

3. a) On a, pour tout $1 \leqslant i,j \leqslant n+1$: $b_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}}{P(Y=j)}$

- $b_{1,j} \neq 0$ si et seulement si $j=n$. Donc $b_{1,n} = \dfrac{1}{2}$.
- $b_{n+1,j} \neq 0$ si et seulement si $j=2$. Donc $b_{n+1,2} = \dfrac{1}{2}$.
- Pour $2 \leqslant i \leqslant n$, $b_{i,j} \neq 0$ si et seulement si $j=n+3-i$ ou $j=n+1-i$.

Donc :

$$\begin{cases} b_{2,n+1} = 1 & b_{i,n+3-i} = 1/2 \\ b_{n,1} = 1 & b_{i,n+1-i} = 1/2 \end{cases}$$

ce qui donne la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 1/2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1/2 & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1/2 & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1/2 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

b) On vérifie alors aisément que :

$$B\begin{pmatrix}1/2n\\1/n\\\vdots\\1/n\\1/2n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2n\\1/n\\\vdots\\1/n\\1/2n\end{pmatrix}$$

Exercice 15.

Soit $p\in]0,1[$ et $q=1-p$. On considère la matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-p^2q&0&1\end{pmatrix}$$

1. Montrer que les valeurs propres de A sont p et les deux réels a et b définis par :

$$\begin{cases}a+b&=&q\\ab&=&-pq\end{cases}$$

2. On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{B},P)$, pour lesquelles, à chaque épreuve, la probabilité du succès est p.
Si l'on obtient deux succès consécutifs, on dit que l'on a réalisé un doublé.
Pour tout $n\geqslant 2$, on note :

• A_n l'événement «le premier doublé est obtenu par un succès à la $(n-1)^{\text{ème}}$ épreuve et un succès à la $n^{\text{ème}}$ épreuve».

• B_n l'événement : «un doublé au moins est obtenu dans les n premières épreuves».

On note $p_n=P(A_n)$ et on pose $p_1=0$.

a) Montrer que $P(B_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k$, puis que :

$$p_{n+3}=p^2q\left(1-\sum_{k=1}^{n}p_k\right)$$

b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $p_{n+3}=p_{n+2}-p^2qp_n$, puis que :

$$p_n=p^2\,\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}$$

Solution :

La méthode du pivot de Gauss appliquée à la matrice $A-\lambda I$ donne :

$$A-\lambda I\sim\begin{pmatrix}-p^2q&0&1-\lambda\\0&p^2q&\lambda(\lambda-1)\\0&0&P(\lambda)\end{pmatrix}$$

où :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - p^3 + p^2 = (\lambda - p)(\lambda^2 - \lambda q - pq)$$

Ainsi λ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda = p$ ou $\lambda^2 - \lambda q - pq = 0$. Les racines a et b de cette dernière équation sont réelles et distinctes (car son discriminant $\Delta = q^2 + 4pq$ est strictement positif), et elles vérifient :

$$\begin{cases} a + b &= q \\ ab &= -pq \end{cases}$$

2. a) L'événement B_n est «un doublé au moins est obtenu dans les n premières épreuves». C'est donc également «un premier doublé est obtenu dans les n premières épreuves». Ainsi :

$$B_n = \bigcup_{k=2}^{n} A_k$$

événements qui sont deux à deux incompatibles. Donc :

$$P(B_n) = \sum_{k=2}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \text{ (car } p_1 = 0)$$

Notons S_i (resp. E_i) l'événement «obtenir un succès (resp. un échec) à la $i^{\text{ème}}$ épreuve». On a alors :

$$B_{n+3} = \overline{B_n} \cap E_{n+1} \cap S_{n+2} \cap S_{n+3}$$

et, par indépendance :

$$p_{n+3} = P(\overline{B_n})P([E_{n+1} \cap S_{n+2} \cap S_{n+3}]/\overline{B_n}) = (1 - p_n)p^2 q$$

Donc :

$$p_{n+3} = p^2 q\big(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\big)$$

b) On a :

$$p_{n+3} - p_{n+2} = p^2 q\big(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\big) - p^2 q\big(1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\big) = -p^2 q p_n$$

Enfin, montrons la relation :

$$p_n = p^2 \, \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b}$$

par récurrence sur n.

- La relation est vérifiée pour $n = 1$ ($p_1 = 0$) et $n = 2$ ($p_2 = p^2$) ;
- supposons la relation vérifiée jusqu'à un certain ordre $n + 2$. Alors :

$$\begin{aligned} p_{n+3} = p_{n+2} - p^2 q p_n &= p^2 \, \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} - p^4 q \, \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b} \\ &= \frac{p^2}{a - b}\big(a^{n-1}(a^2 - p^2 q) - b^{n-1}(b^2 - p^2 q)\big) \end{aligned}$$

Or, par la première question, a et b vérifient $a^2 - p^2 q = a^3, b^2 - p^2 q = b^3$, ce qui permet d'achever la démonstration de la récurrence.

Exercice 16.

1. Montrer que pour tout réel a, l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^{2t} + 1}$ est convergente et la calculer.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Vérifier que f est une densité de probabilité (on pourra utiliser le changement de variable $x = \tan u$).

3. Montrer, en les calculant, qu'il existe deux réels A et B, indépendants de u tels que, $\forall\, u \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{1}{(u+1)(\mathrm{e}^{2x}+u)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{\mathrm{e}^{2x}+u}$$

4. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, de densité f.

a) Déterminer une densité de $\ln|X|$.

b) Déterminer une densité de $Z = \ln(|XY|)$.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2t}+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car son dénominateur est continu et ne s'annule pas), donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Au voisinage de $+\infty$: $0 < \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2t}+1} \sim \mathrm{e}^{-2t}$, fonction qui est intégrable sur ce voisinage. On en déduit que $I(a)$ existe par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.

Le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-t}$ donne :

$$I(a) = \int_0^{\mathrm{e}^{-a}} \frac{udu}{u^2+1} = \frac{1}{2}\big[\ln(u^2+1)\big]_0^{\mathrm{e}^{-a}} = \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{-2a}+1)$$

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs positives. Le changement de variable $u = \tan x$ donne :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du = 1$$

3. Il suffit de réduire au même dénominateur et d'identifier pour obtenir :

$$\frac{1}{(u+1)(\mathrm{e}^{2x}+u)} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{2x}}\left(\frac{1}{u+1} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+u}\right)$$

4. a) Pour tout x réel :

$$P(\ln|X| \leqslant x) = P(|X| \leqslant \mathrm{e}^x) = P(\mathrm{e}^{-x} \leqslant X \leqslant \mathrm{e}^x) = F_X(\mathrm{e}^x) - F_X(\mathrm{e}^{-x})$$

et si g désigne une densité de $\ln|X|$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{2.\mathrm{e}^x}{\pi(\mathrm{e}^{2x}+1)}$$

b) On a $Z = \ln|XY| = \ln|X| + \ln|Y|$. Ces deux variables aléatoires sont indépendantes, puisque X et Y le sont. Une densité h de Z est alors donnée par convolution :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)g(x-t)\,dt = \frac{4.\mathrm{e}^x}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(\mathrm{e}^{2t}+1)(\mathrm{e}^{2x-2t}+1)}$$

ou

$$h(x) = \frac{4.\mathrm{e}^x}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2t}\,dt}{(\mathrm{e}^{2t}+1)(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2t})}$$

Pour $x \neq 0$ et en utilisant la question précédente :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2t}\,dt}{((\mathrm{e}^{2t}+1)(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2t})} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{2x}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{1}{\mathrm{e}^{2t}+1} - \frac{1}{e^{2(t-x)}+1}\Big)dt$$

On ne peut partager cette dernière intégrale en deux, puisque chaque intégrale diverge en $-\infty$. Il faut donc écrire : :

$$J(a) = \int_a^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^{2t}+1} - \int_a^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^{2(t-x)}+1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{-2a}+1) - \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{-2(a-x)}+1) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{\mathrm{e}^{-2a}+1}{\mathrm{e}^{-2(a-x)}+1}\Big)$$

et : $\lim_{a\to-\infty} J(a) = \frac{1}{2}\ln\big(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}\big) = -x$

Donc, pour $x \neq 0$:

$$\boxed{h(x) = \frac{4x.\mathrm{e}^x}{\pi^2(\mathrm{e}^{2x}-1)}}$$

qui se prolonge par continuité en 0 par $h(0) = \dfrac{2}{\pi^2}$.

Exercice 17.

On admet que la mesure d'une grandeur physique, dont la valeur exacte est m, suit une loi normale $\mathcal{N}\big(m, \frac{m}{10}\big)$, d'espérance m et d'écart-type $\dfrac{m}{10}$.

On effectue une série de n mesures indépendantes et on note Y_n la moyenne des résultats obtenus.

1. Montrer que Y_n est un estimateur sans biais et convergent de m.

2. Combien faut-il effectuer de mesures pour que l'erreur relative commise sur m soit inférieure à 1% avec une probabilité supérieure à 0,9 ?

On pourra utiliser la table de la loi normale jointe au sujet.

Solution :

1. La variable aléatoire Y_n suit la loi normale $\mathcal{N}\big(m, \dfrac{m}{10\sqrt{n}}\big)$, donc son espérance et sa variance valent :

$$\boxed{E(Y_n) = m, \quad V(Y_n) = \frac{m^2}{10n^2}}$$

Ainsi Y_n est un estimateur sans biais et convergent de m.

2. Notons Y_n^* la variable centrée réduite associée à Y_n. Alors :

$$P\big(|Y_n - m| < \frac{m}{100}\big) = P\big(|Y_n^*| < \frac{\sqrt{n}}{10}\big) = 2\Phi\big(\frac{\sqrt{n}}{10}\big) - 1$$

où Φ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$. D'où, en utilisant une table de la fonction Φ :

$$\boxed{2\Phi\big(\frac{\sqrt{n}}{10}\big) - 1 \geqslant 0.9 \iff \frac{\sqrt{n}}{10} \geqslant 1.65 \iff n \geqslant 273}$$

Exercice 18.

On effectue une suite indéfinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_n la probabilité qu'au cours des n premiers lancers le résultat « Pile » n'ait pas été obtenu trois fois de suite.

1. a) Calculer p_1, p_2 et p_3.
Dans la suite on pose $p_0 = 1$.

b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{1}{8}p_{n-3} \qquad (\star)$$

2. a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, la série $\sum p_n x^n$ est convergente.

b) Pour $x \in [0,1]$, calculer la somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.

3. a) Montrer que l'équation $(E) : 8x^3 - 4x^2 - 2x - 1 = 0$ admet une unique racine réelle ; on la note r. Encadrer r par deux entiers consécutifs.

b) Montrer que l'équation (E) admet deux racines complexes conjuguées, ω et $\overline{\omega}$, de module strictement inférieur à r.

c) Montrer que la suite (p_n) est une combinaison linéaire des trois suites $(r^n), (\omega^n)$ et $(\overline{\omega}^n)$. (On pourra montrer que le $\mathbb{C}$–espace vectoriel des suites complexes vérifiant la relation $(\star)$ est de dimension 3).

d) En déduire la convergence et la limite de la suite $(p_n)_n$. Donner une explication du résultat obtenu.

Solution :

1. a) On trouve $p_1 = p_2 = 1$ et $p_3 = \dfrac{7}{8}$, puisque l'événement contraire « obtenir trois Piles consécutifs » se réalise avec la probabilité $\dfrac{1}{8}$.

b) Si $n \geqslant 4$, on n'a pas encore conclu au bout de trois tirages et on a donc pu obtenir F_1 ou P_1F_2 ou $P_1P_2F_3$, où P_i (resp. F_i) consiste à obtenir Pile (resp. Face) au $i^{\text{ème}}$ lancer. A l'issue de chacune de ces séquences on est alors revenu au point de départ.
Ainsi, notons A l'événement « ne pas obtenir 3 Piles consécutifs au cours des n premiers lancers » :
$p_n = P(A/F_1)P(F_1) + P(A/(P_1 \cap F_2))P(P_1 \cap F_2)$

$$+P(A/(P_1 \cap P_2 \cap F_3))P(P_1 \cap P_2 \cap F_3)$$

soit :

$$\boxed{p_n = \frac{1}{2}\,p_{n-1} + \frac{1}{4}\,p_{n-2} + \frac{1}{8}\,p_{n-3}}$$

2. a) Comme $0 \leqslant p_n \leqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a pour $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant p_n x^n \leqslant x^n$. On en déduit la convergence de la série $\sum p_n x^n$.

b) Par convergence des séries en question, on peut écrire :

$$\sum_{n\geqslant 3} p_n x^n = \frac{x}{2}\Big(\sum_{n\geqslant 3} p_{n-1}x^{n-1}\Big) + \frac{x^2}{4}\Big(\sum_{n\geqslant 3} p_{n-2}x^{n-2}\Big) + \frac{x^3}{8}\Big(\sum_{n\geqslant 3} p_{n-3}x^{n-3}\Big)$$

ou, en notant $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n$:

$$S(x) - 1 - x - x^2 = \frac{x}{2}\big(S(x) - 1 - x\big) + \frac{x^2}{4}\big(S(x) - 1\big) + \frac{x^3}{8}\,S(x)$$

soit :

$$\boxed{S(x) = \frac{2x^2 + 4x + 8}{8 - 4x - 2x^2 - x^3}}$$

3. a) Soit $P(x) = 8x^3 - 4x^2 - 2x - 1$. On a :

$$P'(x) = 24x^2 - 8x - 2 = 24(x - 1/2)(x + 1/6).$$

Ceci permet d'étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$ et d'en déduire que $P(x) < 0$ pour $x \leqslant 1/2$, puis que P est strictement croissante sur $[1/2, +\infty[$.

Comme $P(0)P(1) < 0$, l'équation (E) admet une unique racine réelle r appartenant à $]0, 1[$.

b) On remarque d'abord que P étant un polynôme réel de degré 3, le théorème de d'Alembert permet d'affirmer que P admet deux racines complexes conjuguées ω et $\overline{\omega}$.

Soit donc ω tel que $P(\omega) = 0$. Alors $8\omega^3 = 4\omega^2 + 2\omega + 1$ entraîne que

$$8|\omega|^3 \leqslant 4|\omega|^2 + 2|\omega| + 1$$

donc que $P(|\omega|) < 0$, ce qui d'après les variations de P entraîne que $|\omega| < r$.

c) Le $\mathbb{C}$–espace vectoriel $\mathcal{S}$ des suites complexes vérifiant la relation $(\star)$ est de dimension 3.

$\star$ On montre en effet facilement que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites sur $\mathbb{C}$.

$\star$ Il suffit ensuite de montrer que les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ de $\mathcal{S}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 & u_1 = 0 & u_2 = 0 \\ v_0 = 0 & v_1 = 1 & v_2 = 0 \\ w_0 = 0 & w_1 = 0 & w_2 = 1 \end{cases}$$

en forment une base.

- toute suite de $\mathcal{S}$ étant définie par ses trois premiers termes est donc combinaison linéaire des trois suites définies ; la famille proposée est génératrice.

- ces trois suites forment un système libre, puisque toute suite de $\mathcal{S}$ identiquement nulle a ses trois premiers termes nuls et donc tous ses termes nuls.

Montrons que les trois suites $(r^n), (\omega^n), (\overline{\omega}^n)$ forment un système libre :
si pour tout $n \geqslant 0$: $\lambda r^n + \mu\omega^n + \nu\overline{\omega}^n = 0$, on divise par r^n, puis on fait tendre n vers l'infini pour obtenir $\lambda = 0$. En faisant alors $n = 0$, puis $n = 1$, comme $\omega \neq \overline{\omega}$, il vient $\mu = \nu = 0$.

d) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \lambda r^n + \mu\omega^n + \nu\overline{\omega}^n$.
Comme $|\omega| = |\overline{\omega}^n| < r$, il vient :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{\lambda r^n} = 1$$
soit $p_n \sim \lambda r^n$, et comme $0 < r < 1$:
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 0}$$

Explication : lors d'un «grand» nombre de lancers, il y aura presque certainement une séquence de 3 piles consécutifs.

Exercice 19.

On note $X_{n,p}$ une variable aléatoire binomiale de paramètre (n,p), où n est un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$.

1. On pose $p_k = P[X_{n,p} = k]$, avec $k \in [\![0,n]\!]$. Rappeler la formule donnant p_k.

2. Soit k un entier naturel compris au sens large entre 0 et $n-1$, on pose $t(k) = \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$.
Calculer $t(k)$ en fonction de n, p, et k.

3. Les nombres n et p étant supposés fixés tels que le produit $n.p$ soit égal à un entier naturel non nul λ, montrer qu'il existe un unique entier naturel k_0 compris entre 0 et $n-1$, que l'on calculera en fonction de n et p, puis de λ, tel que :

- pour tout entier naturel k, $0 \leqslant k \leqslant k_0 \implies t(k) \geqslant 1$, et
- pour tout entier naturel k, $n-1 \geqslant k > k_0 \implies t(k) < 1$.

En déduire la valeur $M(n,p)$ du maximum de p_k, et une valeur $k_{\max}$ de l'indice k pour laquelle ce maximum est atteint.

4. On suppose maintenant que la variable aléatoire binomiale X_{n,p_n} a pour paramètre (n, p_n), avec $p_n \in]0,1[$.
On cherche à étudier le comportement de $M(n,p_n)$ selon les valeurs de n.
On continue à supposer que pour tout n entier naturel, $np_n = \lambda$ est fixé, λ entier naturel non nul.

a) Montrer que $M(n,p_n)$ admet lorsque n tend vers l'infini une limite finie que l'on déterminera en fonction de λ.

b) Comparer le résultat obtenu avec la valeur du maximum de la loi de Poisson de paramètre λ.

Solution :

1. $\forall\, k \in [\![0, n]\!], p_k = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

2. En revenant aux factorielles : $t(k) = \dfrac{n-k}{k+1}\,\dfrac{p}{1-p}$.

3. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$: $t(k) \geqslant 1 \iff (n-k)p \geqslant (k+1)(1-p)$

$$\iff (n+1)p \geqslant k+1$$

Le nombre k_0 cherché est donc $\lfloor (n+1)p - 1 \rfloor$, car on vérifie facilement que ce nombre est bien compris entre 0 et $n-1$.
Or $k_0 + 1 = \lfloor (n+1)p \rfloor = \lfloor np + p \rfloor = \lfloor np \rfloor = \lambda$, et :

$$\boxed{M(n,p) = \mathrm{C}_n^\lambda p^\lambda (1-p)^{n-\lambda}}$$

4. a) En remplaçant et en utilisant la relation $n.p_n = \lambda$:

$$\begin{aligned} M(n,p_n) &= \frac{n!}{\lambda!(n-\lambda)!}\Big(\frac{p_n}{1-p_n}\Big)^\lambda \Big(\frac{1}{1-p_n}\Big)^{-n} \\ &= \frac{\lambda^\lambda}{\lambda!}\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{n-\lambda} \times \frac{n(n-1)\cdots(n-\lambda+1)}{n\cdot n\cdots n} \end{aligned}$$

Or $\Big(1-\dfrac{\lambda}{n}\Big)^{n-\lambda} = \exp\Big((n-\lambda)\ln(1-\dfrac{\lambda}{n})\Big) = \exp\Big((n-\lambda)(-\dfrac{\lambda}{n} + o(n^{-1})\Big)$

$$= \exp\big(-\lambda + o(1)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-\lambda+1)}{n\cdot n\cdots n} = 1$, d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} M(n,p_n) = \frac{\lambda^\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda!}}$$

b) Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $q_k = P(Y=k) = \dfrac{\lambda^k.\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$. Alors :
$\dfrac{q_{k+1}}{q_k} = \dfrac{\lambda}{k+1}$ et le maximum de q_k est obtenu pour q_λ.
On trouve donc le même résultat que dans la question précédente (ce qui n'est pas très étonnant puisque l'on est dans les conditions d'approximation du phénomène binomial par le phénomène de Poisson).

Exercice 20.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant f pour densité.

2. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Etudier les variations de φ. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et déterminer sa bijection réciproque.

3. On définit une variable aléatoire Y par :

$$Y = \varphi(X) = \frac{e^X - 1}{e^X + 1}$$

Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y.

Solution :

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et positive.
On remarque que $x \mapsto \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ est une primitive de f et donc :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{1 + e^{-b}} - \frac{1}{1 + e^{-a}}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut 1 :

$$f \text{ est une densité de probabilité}$$

Si X est une variable aléatoire de densité f, on a :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leqslant x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}}$$

2. La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable, et : $\varphi'(x) = \dfrac{2.e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$.
Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$, φ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.
$y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \iff e^x = \dfrac{1 + y}{1 - y}$ et donc $\forall\, y \in]-1, 1[, \varphi^{-1}(y) = \ln\big(\dfrac{1 + y}{1 - y}\big)$.

3. Y prend ses valeurs dans $]-1, 1[$ et, pour tout x de $]-1, 1[$:

$$P(Y \leqslant x) = P(\varphi(X) \leqslant x) = P\big(X \leqslant \varphi^{-1}(x)\big) = P\big(X \leqslant \ln\big(\frac{1 + x}{1 - x}\big)\big)$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-\ln(\frac{1+x}{1-x})}} = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = \frac{x + 1}{2}$$

Ainsi : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}(]-1, 1[)}$

Exercice 21.

1. Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant « pile » avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois « pile ». Soit X le nombre aléatoire de « face » obtenus au cours de cette expérience.

a) Déterminer la loi de X. Vérifier que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(X=n)=1$.

b) Montrer que X admet une espérance et calculer sa valeur.

2. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on tire ensuite une boule de cette urne.
On note alors Y le numéro obtenu.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Montrer que Y admet une espérance et calculer sa valeur.

3. On pose $Z=X-Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Solution :

1. a) $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et pour $n\in\mathbb{N}$, l'événement $(X=n)$ est réalisé si et seulement si on obtient exactement une fois « pile » au cours des $(n+1)$ premiers lancers, le $(n+2)^{\text{ème}}$ lancer amenant « pile », soit, avec $q=1-p$:

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, P(X=n)=(n+1)pq^np=(n+1)p^2q^n$$

La série rencontrée est une série de référence et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)=p^2\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}=p^2\,\frac{1}{(1-q)^2}=1$$

b) La convergence est à nouveau évidente, et :

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty} n.P(X=n)=p^2q\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2}=p^2q\,\frac{2}{(1-q)^3}$$

$$\boxed{E(X)=\frac{2q}{p}}$$

2. a) $\forall\, n\in\mathbb{N},\forall\, k\in[\![0,n+1]\!], P(Y=k/X=n)=\dfrac{1}{n+1}$ et, par la formule des probabilités totales :

$$\forall\, k\in\mathbb{N}, P(Y=k)=\sum_{n=0}^{\infty} P(Y=k/X=n)P(X=n)$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}(n+1)p^2q^n\,\frac{1}{n+1}=p^2q^k\sum_{n=k}^{\infty} q^{n-k}=p^2q^k\,\frac{1}{1-q}$$

$$\boxed{\forall\, k\in\mathbb{N}, P(Y=k)=pq^k}$$

b) $Y+1\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$ et $E(Y)=\dfrac{1}{p}-1=\dfrac{q}{p}$.

3. La variable Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(Z=h)=\bigcup\limits_{j=0}^{\infty}[(Y=j)\cap(X=h+j)]$.

Cette réunion étant disjointe, il vient :

$P(Z=h)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}P(Y=j/X=h+j)P(X=h+j)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}p^2q^{h+j}$

$$\boxed{\forall\, h\in\mathbb{N}, P(Z=h)=p^2q^h\,\frac{1}{1-q}=pq^h}$$

On a : $P[(Z=h)\cap(Y=j)]=P[(X=h+j)\cap(Y=j)]$

$$=P(Y=j/X=h+j)P(X=h+j)=p^2q^{h+j}$$

On constate que l'on a : $P[(Z=h)\cap(Y=j)]=P(Z=h)P(Y=j)$ et :

$$\boxed{Y \text{ et } Z \text{ sont indépendantes}}$$

Exercice 22.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} a.3^{-x} & \text{si } x>0\\ a.3^{x} & \text{si } x<0\end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

a) Déterminer la fonction de répartition de X

b) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et la calculer.

3. On pose $Y=3^X$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Y.

b) Y admet-elle une espérance ?

Solution :

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, positive si $a\geqslant 0$ et :

$\displaystyle\int_0^{+\infty}3^{-x}\,dx=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\ln 3}\,dx=\frac{1}{\ln 3}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0}3^{x}\,dx=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{x\ln 3}\,dx=\frac{1}{\ln 3}$

Ainsi f est une densité de probabilité si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1$, *i.e.* si $\boxed{a=\frac{1}{2}\ln 3}$

2. a) $\star$ Si $x\leqslant 0$, $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln 3\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{t\ln 3}\,dt=\frac{1}{2}\,3^x$.

$\star$ Si $x\geqslant 0$, $F(x)=F(0)+\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-t\ln 3}\,dx=1-\frac{1}{2}\,3^{-x}$.

b) L'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ est convergente, car la fonction à intégrer est négligeable au voisinage de $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$; il en est de même par imparité pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} tf(t)\,dt$ et, toujours par imparité :

$$\boxed{E(X) = 0}$$

3. Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall x \geqslant 0, P(Y \leqslant x) = P(3^X \leqslant x) = P(X \leqslant \frac{\ln x}{\ln 3}).$$

$\star$ Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $F_Y(x) = \frac{1}{2}\, 3^{\frac{\ln x}{\ln 3}} = \frac{x}{2}$

$\star$ Si $x > 1$, $F_Y(x) = 1 - \frac{1}{2}\, 3^{-\frac{\ln x}{\ln 3}} = 1 - \frac{1}{2x}$

b) Pour $x > 1$, on prend pour densité de Y la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2x^2}$; comme $xf(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2x}$, $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ est divergente et Y n'a pas d'espérance.

Exercice 23.

Soit n un entier naturel de $\mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées depuis 1 jusqu'à n. On effectue trois tirages au hasard d'une boule de cette urne, en replaçant à chaque fois la boule obtenue avant le tirage suivant.
On désigne par M la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus et par m la variable aléatoire égale au plus petit des numéros obtenus, et enfin, par Z la variable aléatoire égale à $M - m$.

1. a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Z.

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.

c) Déterminer, en fonction de l'entier n, l'espérance $E(Z)$.

2. a) Déterminer un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P(X+1) - P(X) = nX^3 - X^4$$

b) En déduire la variance $V(Z)$ en fonction de n.

Solution :

1. a) $Z(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$.

b) $\star$ $(Z = 0)$ est réalisé si on obtient trois fois la même boule, donc :

$$P(Z = 0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^2}$$

$\star$ Pour $k \neq 0$, $(Z = k)$ est réalisé si le plus petit numéro obtenu vaut i, le plus grand valant alors $i + k$, et i pouvant varier depuis 1 jusqu'à $n - k$.

Il existe $6(k-1)$ tirages réalisant $\min = i, \max = i+k$, le troisième numéro obtenu étant strictement compris entre i et $i+k$ (on choisit les trois numéros, et on peut les ordonner de 3! façons), et il existe 3 tirages où le min est doublé et également trois tirages où le max est doublé.
Ainsi :

$$P(Z=k) = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{6(k-1)+6}{n^3} = \frac{6k(n-k)}{n^3}$$

c) Ainsi $E(Z) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} 6k^2(n-k) = \frac{6}{n^3}\big(n \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^3\big)$

$$\boxed{E(Z) = \frac{n^2-1}{2n}}$$

2. a) Par disparition des termes de plus haut degré, on cherche un polynme de degré 5 et, par identification, on trouve :

$$\boxed{P(X) = -\frac{X^5}{5} + \frac{n+2}{4}X^4 - \frac{3n+2}{6}X^3 + \frac{n}{4}X^2 + \frac{1}{30}X}$$

Par addition : $P(n) - P(1) = P(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3(n-k)$, d'où :

$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{6}{n^3}P(n) - \big(\frac{n^2-1}{2n}\big)^2$, soit :

$$\boxed{V(Z) = \frac{n^4-1}{20n^2}}$$

Exercice 24.

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que pour tout $n \geqslant 1$:

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$$

1. a) Calculer l'espérance $E(\mathrm{e}^{tX_n})$, pour t réel fixé.

b) Montrer que pour tout t réel, on a $E(\mathrm{e}^{tX_n}) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$.

$\Big($ on rappelle que pour tout réel t : $\mathrm{e}^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ $\Big)$

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

2. a) Calculer l'espérance $E(\mathrm{e}^{tS_n})$ en fonction des nombres $E(\mathrm{e}^{tX_k})$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

b) Calculer pour tout t réel, $\lim_{n \to +\infty} E(\mathrm{e}^{tS_n/\sqrt{n}})$.

3. Soit a un réel strictement positif.

a) Montrer que, pour tout t réel :

$$P(S_n \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-ta} E(\mathrm{e}^{tS_n})$$

b) En déduire que :

$$P(S_n \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-a^2/2n}$$

c) En déduire un majorant de $P(|S_n| \geqslant a)$.

Solution :

1. a) On a : $E(\mathrm{e}^{tX}) = \dfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\big)$.

b) On a $\dfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\big) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $\mathrm{e}^{t^2/2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^{2n}}{2^n.n!}$

Or $(2n)! = 2^n.n!\big(1.3.\ldots.(2n-1)\big) \geqslant 2^n.n!$ et donc, par sommation et passage à la limite :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, E(\mathrm{e}^{tX_n}) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$$

2. a) $E(\mathrm{e}^{tS_n}) = E(\prod\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tX_k})$ et les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes, il en est de même des variables $\mathrm{e}^{tX_1}, \ldots, \mathrm{e}^{tX_n}$. L'espérance de leur produit est donc le produit de leurs espérances :

$$\boxed{E(\mathrm{e}^{tS_n}) = \big(E(\mathrm{e}^{tX})\big)^n = \Big(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\Big)^n}$$

b) En remplaçant t par $\dfrac{t}{\sqrt{n}}$ il vient : $E(\mathrm{e}^{tS_n/\sqrt{n}}) = \Big(\dfrac{\mathrm{e}^{t/\sqrt{n}} + \mathrm{e}^{-t/\sqrt{n}}}{2}\Big)^n = u_n$.

Un développement limité, pour n tendant vers l'infini donne :

$\ln u_n = n \ln\Big(\dfrac{\mathrm{e}^{t/\sqrt{n}} + \mathrm{e}^{-t/\sqrt{n}}}{2}\Big) = n \ln\Big(1 + \dfrac{t^2}{2n} + o(n^{-2})\Big) = \dfrac{t^2}{2} + o(n^{-1})$

Par conséquent $\ln u_n \to \dfrac{t^2}{2}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \mathrm{e}^{t^2/2}}$

3. a) Comme $E(\mathrm{e}^{tS_n}) \geqslant 1$ (faire une étude rapide de la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$ sur $\mathbb{R}$) le résultat est banal pour $t \leqslant 0$.

Supposons donc $t > 0$. Le théorème de transfert donne :

$E(\mathrm{e}^{tS_n}) = \sum\limits_{k \in S_n(\Omega)} \mathrm{e}^{tk} P(S_n = k) \geqslant \sum\limits_{k \in S_n(\Omega)/k \geqslant a} \mathrm{e}^{tk} P(S_n = k)$

$$E(\mathrm{e}^{tS_n}) \geqslant \sum_{k \in S_n(\Omega)/k \geqslant a} \mathrm{e}^{ta} P(S_n = k) = \mathrm{e}^{ta} P(S_n \geqslant a)$$

Soit :

$$\boxed{P(S_n \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-ta} E(\mathrm{e}^{tS_n})}$$

b) Ainsi, grce au résultat 1. a) : $\forall\, t \in \mathbb{R}, P(S_n \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-ta}\mathrm{e}^{nt^2/2}$.

Or $t \mapsto -ta + \dfrac{nt^2}{2}$ est minimale pour $t = \dfrac{a}{n}$, le minimum valant $-\dfrac{a^2}{2n}$, donc :

$$\boxed{P(S_n \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-a^2/2n}}$$

c) $(|S_n| \geqslant a) = (S_n \geqslant a) \cup (S_n \leqslant -a)$, mais S_n et $-S_n$ suivent la même loi, donc par disjonction :

$$\boxed{P(|S_n| \geqslant a) = 2P(S_n \geqslant a) \leqslant 2.\mathrm{e}^{-a^2/2n}}$$

Exercice 25.

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet exercice seront définies sur cet espace.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$. On pose $D = -\ln U$.

1. a) Déterminer la loi de D, puis la loi de $D_\lambda = \dfrac{D}{\lambda}$, pour $\lambda > 0$.

b) Déterminer la loi de $1 - U$.

2. Soit $p \in]0,1[$ un réel donné.

a) On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$E_k = \{\omega \in \Omega / (1-p)^k \leqslant (1-U)(\omega) < (1-p)^{k-1}\}$$

Montrer que $([U=1], (E_k)_{k\geqslant 1})$ constitue un système complet d'événements.

b) On définit une application G sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$ par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, G(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } U(\omega) = 1 \\ k & \text{si } \omega \in E_k \end{cases}$$

Montrer que G est une variable aléatoire. Quelle est la loi suivie par G ?

3. En Turbo–Pascal, la fonction `random` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
Ecrire un programme en Turbo–Pascal qui simule la loi de D_λ puis celle de G déterminées dans les questions précédentes.

Solution :

1. a) $U(\Omega =]0,1] \implies D(\Omega) = [0, +\infty[$ et :

$$\forall\, x \geqslant 0, P(D \leqslant x) = P(-\ln U \leqslant x) = P(U \geqslant \mathrm{e}^{-x}) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

On reconnaît alors dans la loi de D la loi exponentielle de paramètre 1.

On voit alors facilement que $D_\lambda = \dfrac{1}{\lambda} D$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

b) Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1])$, alors $1 - U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$.

2. a) Si $k \neq \ell$, alors $E_k \cap E_\ell = \emptyset$, pour tout k, $E_k \cap [U=1] = \emptyset$ et enfin, la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $k \mapsto (1-p)^k$ est strictement décroissante de premier

terme 1 et de limite nulle. Par conséquent $[U=1] \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \Omega$, et on a bien affaire à un système complet.

b) On a $G(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall\, k \geqslant 1, P(G=k) = P((1-p)^k \leqslant 1-U < (1-p)^{k-1}) = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k$$
$$= p(1-p)^{k-1}$$

et $P(G=0) = P(U=1) = 0$.

Donc G suit la loi géométrique de paramètre p.

3. a)

```
Function expo(lambda :real)
  begin
  expo := 1/lambda*(-ln(random))
  end ;
```

b)

```
Function geom(p :real)
var x :real
  begin
  x :=random
    if x=1 then geom :=0
           else geom := ceil(ln(1-x)/ln(1-p))
end ;
```

En effet : $(1-p)^k \leqslant 1-U \leqslant (1-p)^{k-1} \iff k-1 < \dfrac{\ln(1-U)}{\ln(1-p)} \leqslant k$

Exercice 26.

1. Si X est une variable aléatoire de densité uniforme sur $]0,1]$, quelle est la loi de $Y = -\ln X$?

2. a) Si $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un n-uplet de variables aléatoires indépendantes de même loi que X, quelle est la loi de la variable aléatoire $Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$?

b) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z_n.

3. Un individu généreux, dispose initialement d'une somme d'argent de a euros.
A chaque rencontre qu'il fait, il partage ce qui lui reste de fortune (r euros) de manière aléatoire entre lui-même et cette personne, en choisissant au hasard un nombre x entre 0 et 1, en s'accordant xr euros et en donnant le reste au bienheureux (on admet que les euros puissent être indéfiniment divisibles).
A l'issue de n rencontres il lui reste B euros. Que peut-on dire de $E_n = 2^n B$?

Solution :

1. La fonction ln étant bijective de $]0,1]$ sur $\mathbb{R}^-$, Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall\, x \geqslant 0, P(Y \leqslant x) = P(-\ln X \leqslant x) = P(X \geqslant \mathrm{e}^{-x}) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$$

2. a) Soit $S_n = -\ln(Z_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$, où $Y_i = -\ln(X_i)$.

Chaque Y_i suit la loi $\mathcal{E}(1)$ et les Y_i sont indépendantes, on en déduit que S_n suit la loi Gamma de paramètre $(1,n)$, c'est-à-dire qu'une densité de S_n est :

$$\boxed{f_{S_n}(x) = \frac{x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}}{(n-1)!}, \text{ si } x \geqslant 0\,;\, f_{S_n}(x) = 0 \text{ sinon}}$$

Alors, pour tout x de $]0,1]$, on a :

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leqslant x) = P(S_n \geqslant -\ln x) = 1 - F_{S_n}(-\ln x), \text{ soit :}$$

$$F_{Z_n}(x) = 1 - \int_0^{-\ln x} \frac{t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}}{(n-1)!}\, dt$$

Une densité f_{Z_n} de Z_n s'obtient par dérivation et :

$$\boxed{\forall\, x \in]0,1[, f_{Z_n}(x) = \frac{1}{x} f_{S_n}(-\ln x) = \frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}}$$

b) $E(Z_n) = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^1 x(-\ln x)^{n-1}\, dx.$

Le changement de variable $u = -\ln x$ donne :

$$E(Z_n) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2u}u^{n-1}\, du = \frac{1}{2^n(n-1)!}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v}v^{n-1}\, dv = \frac{1}{2^n}$$

(intégrale de référence pour la loi Gamma).

On trouve de même $E(Z_n^2) = \dfrac{1}{3^n}$, soit :

$$\boxed{E(Z_n) = \frac{1}{2^n}\,;\, V(Z_n) = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}}$$

3. On a $E_n = 2^n B = 2^n a \prod\limits_{i=1}^{n} X_i = 2^n a Z_n$.

$\star$ $E(E_n) = a$ et E_n est un estimateur de a.

$\star$ $V(E_n) = a^2\big(\big(\frac{4}{3}\big)^n - 1\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$: E_n est un estimateur non convergent.

Exercice 27.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et on appelle H_n le nombre $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i}$, que l'on ne cherchera pas à simplifier.

On dispose dans une urne n jetons numérotés de 1 à n.

1. Dans un premier temps, on prélève au hasard ces n jetons, un par un et sans remise.

On note $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ les numéros des jetons dans l'ordre dans lequel ils ont étés tirés.

Pour $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, on dit qu'il y a record en $i \geqslant 2$ si l'on a : $u_i > \max(u_1, \ldots, u_{i-1})$. On convient qu'il y a record en 1.

a) Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, montrer que si p_i est la probabilité qu'il y ait un record en i, on a $p_i = \frac{1}{i}$.

b) On appelle S_n le nombre de records obtenus au cours des n tirages. Calculer l'espérance de S_n.

2. Dans un deuxième temps, on prélève, toujours au hasard, successivement, mais cette fois avec remise, un jeton dont on note le numéro u_i pour le $i^{\text{ème}}$ tirage. On dit maintenant qu'il y a record en 1 et en tout $i \geqslant 2$ tel que $u_i \geqslant \max(u_1, \ldots, u_{i-1})$.
On note r la probabilité qu'il n'y ait qu'un record (en 1), c'est-à-dire que $u_k < u_1$ pour tout $k \geqslant 2$.
Pour tout $j \geqslant 2$, on note r_j la probabilité de l'événement :

$$A_j = (u_2 < u_1) \cap (u_3 < u_1) \cap \ldots \cap (u_{j+1} < u_1)$$

S'il y a au moins deux records, on note t_n la durée de vie du premier record, c'est-à-dire $i - 1$ si le deuxième record est au rang i.

a) On pose $r_0 = 1$. Montrer que pour tout $k \geqslant 0$, on a $r_k = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^k$. En déduire que la série de terme général r_k est convergente.

b) Pour tout $k \geqslant 0$, exprimer la probabilité de l'événement $(t_n > k)$ à l'aide de r_k et de r. En déduire une expression de la probabilité de l'événement $(t_n = k)$ et montrer que $r = 0$.

c) Calculer l'espérance $E(t_n)$ de la durée de vie du premier record.

d) Montrer que $(t_n)_{n \geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Solution :

1. a) On a $p_1 = 1$ et pour $i \in [\![2, n]\!]$, $p_i = \frac{1}{n!}\,\mathrm{C}_n^i (i-1)!(n-i)! = \frac{1}{i}$
En effet, on a C_n^i façons de choisir les i premiers jetons, 1 façon de placer le plus grand de ceux-ci en $i^{\text{ème}}$ position, $(n-1)!$ façons de placer les $(i-1)$ autres et enfin $(n-i)!$ façons de placer à la suite les $(n-i)$ jetons non sélectionnés.

b) Soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 s'il y a un record en i et 0 sinon. On a $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, d'où $E(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$ et, avec

$E(X_i) = \dfrac{1}{i}$:

$$\boxed{E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n}$$

2. a) $\star$ $r_0 = 1 = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^0$.

$\star$ Pour $k \geqslant 1$, la famille $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (u_1 = i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ constitue un système complet, donc :

$r_k = P(A_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_k \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P[(u_1 = i) \cap (u_2 < i) \cap \ldots \cap (u_k < i)]$

Par indépendance des résultats des tirages et équiprobabilité :

$$\boxed{r_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^k = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^k}$$

Pour $i \in [\![0, n-1]\!], 0 \leqslant \dfrac{i}{n} < 1$ et la série de terme général r_k est combinaison de séries géométriques convergentes, donc est elle-même convergente.

b) $\star$ On a $P(t_n > 0) = 1 - r$.

$\star$ Pour $k \geqslant 1$, $P[(u_2 < u_1) \cap \ldots \cap (u_{k+1} < u_1)] = P(t_n > k) + r$ (si le record u_1 n'a pas toujours pas été égalé au rang $k+1$, c'est qu'il le sera plus tard ou jamais, ces deux possibilités étant incompatibles). Ainsi :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, P(t_n > k) = r_k - r$$

Comme $P(t_n = k) = P(t_n > k-1) - P(t_n > k)$:

$$\boxed{\forall\, k \geqslant 1, P(t_n = k) = r_{k-1} - r_k}$$

On a alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{j} P(t_n = k) = r_0 - r_j = 1 - r_j$. La convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} r_k$ prouve que son terme général tend vers 0, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(t_n = k) = 1$, et :

$$\boxed{r = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(t_n = k) = 0}$$

c) On a classiquement, la convergence étant acquise : $E(t_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(t_n > k)$ (ce que l'on retrouve en écrivant $P(t_n = k) = P(t_n > k-1) - P(t_n > k)$ et en séparant alors la série en deux).

Par linéarité de la sommation des séries convergentes :

$$E(t_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{n}\right)^k = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 - \frac{i}{n}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n-i}$$

Soit, en réindexant :

$$\boxed{E(t_n) = H_n}$$

d) Pour tout k de $\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \displaystyle\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$ (sommes de Riemann).

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(t_n = k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}$$

La suite $(t_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire M à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et de loi $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(M = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$

Exercice 28.

Soit n un entier naturel au moins égal à 2 et soit n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.
On suppose que ces variables aléatoires ont toutes la même espérance m et la même variance σ^2. On suppose de plus qu'il existe un nombre réel r tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \implies \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = r.\sigma^2$$

On pose enfin : $\overline{X} = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

1. Calculer la variance de $\overline{X}$ en fonction de n, r et σ^2.

2. Calculer l'espérance de $\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ en fonction de n, r et σ^2.

3. En déduire que $-\dfrac{1}{n-1} \leqslant r \leqslant 1$.

4. On considère une urne contenant deux boules blanches et $n-2$ boules noires. On extrait les boules de cette urne, une par une, au hasard et sans remise.
Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule obtenue est blanche et 0 sinon.

a) Pour $i \in [\![1,n]\!]$, calculer la variance de X_i

b) Si i et j sont deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$, calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

c) Montrer que l'encadrement obtenu en 3. ne peut pas être amélioré sans perdre sa généralité.

Solution :

1. Par les propriétés de la variance :

$$V(\overline{X}) = V\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Puis :

$$\boxed{V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2(1+(n-1)r)}{n}}$$

2. Il vient :
$E\big[\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2\big]$

$$\begin{aligned}
&= E\big[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m - (\overline{X} - m))^2\big] \\
&= E\big[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\big] + E\big[(\overline{X} - m)\big(\sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - m) - 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)\big)\big] \\
&= E\big[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\big] + E\big[(\overline{X} - m)\big(\sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - m) - 2n(\overline{X} - m)\big)\big] \\
&= E\big[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\big] - nE(\overline{X} - m)^2 = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) - nV(\overline{X}) \\
&= \sigma^2(n-1)(1-r).
\end{aligned}$$

3. On sait que $V(\overline{X}) \geqslant 0$ et que $E\big[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\big] \geqslant 0$. Les résultats des deux questions précédentes donnent :

$$\boxed{-\frac{1}{n-1} \leqslant r \leqslant 1}$$

4. Chaque variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, 2/n)$. Donc :

$$V(X_i) = \frac{2}{(n-2)n}$$

De plus, pour $i \neq j$:

$$P[(X_i = 1) \cap (X_j = 1)] = \frac{2(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n(n-1)}$$

soit :

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{4-2n}{n^2(n-1)}$$

et :

$$\boxed{\rho_{X_i, X_j} = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sigma(X_i)\sigma(X_j)} = -\frac{1}{n-1}}$$

Mais on peut également avoir $r = 1$. Pour cela, il suffit de prendre toutes les variables aléatoires X_i égales.
Les inégalités obtenues dans la question 3. sont donc les meilleures possibles.

Exercice 29.

Rappeler pourquoi les séries $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ sont convergentes. On notera

$$\zeta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \zeta_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = C\frac{3k^2 + 3k + 1}{(k(k+1))^3}$$

où C est une constante positive.

a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$:

$$\frac{3x^2 + 3x + 1}{(x(x+1))^3} = \frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^3}$$

b) Déterminer la valeur de C.

c) Déterminer la valeur de X la plus probable.

2. a) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et la calculer.

b) Montrer que X admet une variance $V(X)$ et la calculer.

3. À l'aide de l'inégalité de Cauchy–Schwarz, montrer que :

$$(\zeta_3)^2 \leqslant E[X(X+1)].E\big[\frac{X}{X+1}\big]$$

4. Écrire une procédure récursive en Pascal permettant de calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$, la valeur de n étant donnée.

Solution :

1. a) De manière évidente, on obtient $a = 1, b = -1$.

b) Il suffit d'écrire que $\sum\limits_{k \geqslant 1} P(X = k) = 1$, soit par télescopage :

$$C \sum_{k=1}^{\infty} \big(\frac{1}{k^3} - \frac{1}{(k+1)^3}\big) = 1 \text{ et } C = 1$$

c) Une étude de la position par rapport à 1 de $\dfrac{P(X = k+1)}{P(X = k)}$ montre que la valeur de X la plus probable est 1 et $P(X = 1) = \frac{7}{8} \mp$

2. a) Toutes les séries manipulées étant convergentes, on peut écrire :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(\frac{k}{k^3} - \frac{k}{(k+1)^3}\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^3}\big)$$

et :

$$\boxed{E(X) = 1 + \zeta_3 - 1 = \zeta_3}$$

b) De même :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(\frac{1}{k} - \frac{k^2}{(k+1)^3}\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{2}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+1)^3}\big)$$

Soit, par télescopage des premiers termes :

$$\boxed{E(X^2) = 1 + 2(\zeta_2 - 1) - (\zeta_3 - 1) = 2\zeta_2 - \zeta_3}$$

et

$$\boxed{V(X) = 2\zeta_2 - \zeta_3 - \zeta_3^2}$$

3. Les séries $\sum k(k+1)P(X = k)$ et $\sum \frac{k}{k+1} P(X = k)$ sont convergentes et :

$$E(X(X+1)) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)P(X = k), \quad E\big(\frac{X}{X+1}\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} P(X = k)$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$\zeta_3^2 = E(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kP(X=k)$

$$\boxed{\zeta_3^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)P(X=k)\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}P(X=k)\Big)^{1/2}}$$

4.
```
Function Zeta(n :integer) :Real ;
Begin
If n=1 then zeta3 :=1
       else zeta3 :=zeta3(n-1)+1/(n*n*n)
end ;
```

Exercice 30.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient $(V_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(W_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$, $2n$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Déterminer la loi de $\ln V_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, puis celle de $\ln\big(\frac{1}{W_i}\big)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.
Reconnaître la loi de $\ln\big(\frac{1}{W_i}\big)$. Préciser son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de $Y_i = \dfrac{V_i}{W_i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

3. On note Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(Y_i)$.

   a) Déterminer la loi de Z_n.

   b) Calculer la probabilité de l'événement $(Z_n > 1)$.

   c) Etudier l'existence des moments de Z_n.

Solution :

1. On a $\ln V_i(\Omega) = \mathbb{R}^-$, et pour tout $x < 0$, $F_{\ln V_i}(x) = \mathrm{e}^x$; d'où une densité de $\ln V_i$:

$$f_{\ln V_i}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De la même façon, $\ln(1/W_i)(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et $F_{-\ln W_i}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$. d'où :

$$f_{-\ln W_i}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La variable aléatoire $\ln(1/W_i)$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ d'espérance 1.

2. On sait que $\ln Y_i = \ln V_i + (-\ln W_i)$ et par indépendance :

$$f_{\ln Y_i}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{\ln V_i}(u) f_{-\ln W_i}(x-u)\, du$$

D'où :

- si $x \leqslant 0$, $f_{\ln Y_i}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2u} du = \frac{\mathrm{e}^x}{2}$

- si $x \geqslant 0$, $f_{\ln Y_i}(x) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2u} du = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$

Pour tout $x > 0$, $P(Y_i \leqslant x) = P(\ln Y_i \leqslant \ln x) = F_{\ln Y_i}(\ln x)$.
D'où une densité de Y_i :

$$\boxed{f_{Y_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

On remarquera que Y_i ne possède pas d'espérance.

3. a) Pour tout $z \in \mathbb{R}^+$:

$$P(Z_n > z) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i > z) = \left(\int_z^{+\infty} f_Y(x)\, dx\right)^n$$

Donc, en remarquant que $F_Z(z) = 1 - P(Z > z)$:

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{z}{2}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{(2z)^n} & \text{si } z \geqslant 1 \end{cases}$$

ce qui donne pour densité :

$$\boxed{f_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{n}{2}\left(1 - \frac{z}{2}\right)^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ n\dfrac{1}{(2z)^{n-1}} \times \dfrac{1}{2z^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

b) On a immédiatement $P(Z_n > 1) = \dfrac{1}{2^n}$.

c) L'espérance $E(Z_n^k)$ est la somme de :

- l'intégrale $\int_0^1 \frac{n}{2}\left(1 - \frac{z}{2}\right)^{n-1} z^k dz$ qui converge quel que soit $k \in \mathbb{N}$.
- l'intégrale $\int_1^{+\infty} n\dfrac{1}{(2z)^{n-1}} \times \dfrac{1}{2z^2} z^k dz$ qui converge si et seulement si

$0 \leqslant k < n$.
Les moments existent donc jusqu'au rang $n - 1$ inclus.