

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

On considère trois variables aléatoires X , Y et Z , définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

- Déterminer la loi de $Y + Z$.
- a) Soit $D = Y + Z - X$, déterminer une densité de la variable aléatoire D sur \mathbb{R}^+ .
b) Calculer $P(X \leq Y + Z)$.
- Déterminer l'événement complémentaire de l'événement $[X \leq Y + Z] \cap [Y \leq Z + X] \cap [Z \leq X + Y]$, et calculer sa probabilité.
- Quelle est la probabilité pour qu'on puisse construire un triangle (éventuellement aplati) dont les côtés aient pour longueur X , Y et Z ?

Solution :

- $Y + Z$ est encore une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^+ et comme X et Y sont indépendantes, une densité f_{Y+Z} de $Y + Z$ peut être définie par convolution, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, f_{Y+Z}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) f_Z(x-t) dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \cdot \lambda e^{-\lambda(x-t)} dt \\ &= \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x} dt \\ f_{Y+Z}(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. a) La variable aléatoire $-X$ est aussi indépendante de $Y+Z$ et, à nouveau par convolution :

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, f_D(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y+Z}(t) f_{-X}(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y+Z}(t) f_X(t-x) dt \\ &= \int_x^{+\infty} \lambda^2 t e^{-\lambda t} \cdot \lambda e^{-\lambda(t-x)} dt = \lambda^3 e^{\lambda x} \int_x^{+\infty} t e^{-2\lambda t} dt \end{aligned}$$

Le calcul de l'intégrale écrite se fait sans problème à l'aide d'une intégration par parties, ce qui donne :

$$\forall x \geq 0, f_D(x) = \frac{\lambda}{4} (2\lambda x + 1) e^{-\lambda x}$$

b) On a $P(X \leq Y + Z) = P(D \geq 0) = \int_0^{+\infty} f_D(x) dx$, donc il suffisait bien de connaître une densité de D sur \mathbb{R}^+ et :

$$P(X \leq Y + Z) = \frac{\lambda}{4} \int_0^{+\infty} (2\lambda x + 1) e^{-\lambda x} dx$$

et en intégrant à nouveau par parties, on obtient : $P(D \geq 0) = \frac{3}{4}$

3. Posons $C = [X \leq Y + Z] \cap [Y \leq Z + X] \cap [Z \leq X + Y]$, les lois de Morgan montrent que :

$$\overline{C} = [X > Y + Z] \cup [Y > Z + X] \cup [Z > X + Y]$$

★ Les trois événements constituant la réunion précédente sont deux à deux disjoints (si on avait par exemple $[X > Y + Z]$ et $[Y > Z + X]$, on aurait $[X > 2Z + X]$, ce qui est clairement impossible puisque Z est à valeurs dans \mathbb{R}^+).

★ De plus chacun de ces événements relève du traitement de la question 2.

b), donc a pour probabilité $1 - P(D \geq 0) = \frac{1}{4}$, soit :

$$P(\overline{C}) = \frac{3}{4}$$

4. On peut construire un triangle de côtés donnés si et seulement si chacun de ces nombres est inférieur ou égal à la somme des deux autres, ce qui correspond à la réalisation de l'événement C de probabilité $\frac{1}{4}$.

Exercice 3.2.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Soit Z et T les variables aléatoires définies par :

$$Z = |X - Y| \text{ et } T = \inf(X, Y)$$

Sous réserve d'existence, on note $E(A)$ l'espérance de la variable aléatoire A .

1. a) Justifier l'existence des moments de tous ordres de Z et T .
 b) Montrer que $E(Z) = \frac{n(n+2)}{3(n+1)}$.
 c) En déduire $E(T)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.
2. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , telle qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $0 \leq U \leq K$.
 a) Exprimer $\sum_{j=1}^K P(U \geq j)$ en fonction de l'espérance $E(U)$.
 b) Calculer de même $\sum_{j=1}^K j^2 P(U \geq j)$ en fonction de $E(U)$, $E(U^2)$ et $E(U^3)$.
3. a) Calculer pour tout $j \in \mathbb{N}$, la probabilité $P(T \geq j)$.
 b) En utilisant la question 2. a), retrouver la valeur de $E(T)$.
4. Calculer $E(Z^2)$ en fonction de la variance σ_X^2 de la variable aléatoire X .

Solution :

1. a) Z et T sont des variables aléatoires qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Elles admettent donc des moments de tous ordres puisque les sommes qui les définissent sont en fait finies.

b) $Z = |X - Y|$ prend les valeurs $0, 1, \dots, n$ et :

$$(Z = i) = \bigcup_{k=0}^{n-i} [(X = i+k) \cap (Y = k)] \cup \bigcup_{k=0}^{n-i} [(Y = i+k) \cap (X = k)]$$

Chaque événement $(X = i) \cap (Y = j)$ est de probabilité $\frac{1}{(n+1)^2}$ et pour $i \geq 1$ la réunion précédente est une union disjointe, d'où :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(Z = i) = 2(n-i+1) \times \frac{1}{(n+1)^2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{i=0}^n iP(Z=i) = \frac{2}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i(n-i+1) \\
&= \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i - \frac{2}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 \\
&= \frac{2}{n+1} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{(n+1)^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien :

$$E(Z) = \frac{n(n+2)}{3(n+1)}$$

c) On a :

$$|X - Y| = \sup(X, Y) - \inf(X, Y), \text{ et } X + Y = \sup(X, Y) + \inf(X, Y).$$

Par conséquent : $2T = X + Y - |X - Y|$ et comme on sait que $E(X) = E(Y) = \frac{n}{2}$, il vient :

$$E(T) = \frac{n}{2} - \frac{n(n+2)}{6(n+1)} = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{n}{3}$$

2. a) On a $E(U) = \sum_{i=0}^K iP(U=i) = \sum_{i=1}^K iP(U=i)$, tandis que par retournement classique des sommations :

$$\sum_{j=1}^K P(U \geq j) = \sum_{j=1}^K \sum_{i=j}^K P(U=i) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^i P(U=i) = \sum_{i=1}^K iP(U=i)$$

On a donc bien :

$$E(U) = \sum_{j=1}^K P(U \geq j)$$

b) $\sum_{j=1}^K j^2 P(U \geq j) = \sum_{j=1}^K \sum_{i=j}^K j^2 P(U=i) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^i j^2 P(U=i)$, donc :

$$\sum_{j=1}^K j^2 P(U \geq j) = \sum_{i=1}^K \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} P(U=i)$$

Soit, en développant :

$$\sum_{j=1}^K j^2 P(U \geq j) = \frac{1}{3}E(U^3) + \frac{1}{2}E(U^2) + \frac{1}{6}E(U)$$

3. a) Evidemment, si $j > n$, on a $P(T \geq j) = 0$ et si $0 \leq j \leq n$, on peut écrire, par indépendance de X et Y :

$$P(T \geq j) = P((X \geq j) \cap (Y \geq j)) = P(X \geq j)P(Y \geq j) = \left(\frac{n-j+1}{n+1}\right)^2$$

b) Ainsi :

$$E(T) = \sum_{j=1}^n P(T \geq j) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=1}^n (n-j+1)^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=1}^n j^2$$

Soit :

$$E(T) = \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$$

4. On a, par indépendance de X et Y :

$$E(Z^2) = E((X - Y)^2) = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(X)E(Y)$$

et puisque X et Y suivent la même loi :

$$E(Z^2) = 2(E(X^2) - E(X)^2) = 2\sigma_X^2$$

Exercice 3.3.

Soient n points distincts dans le plan. Soit p un entier supérieur ou égal à n . On dispose de p crayons de couleurs distinctes, et on colorie au hasard les n points A_1, A_2, \dots, A_n .

1. Dans cette question seulement, on suppose que $n = 6$. Que vaut la probabilité que, au moins 3 points aient la même couleur ou que au moins 3 points aient des couleurs distinctes ?

2. Calculer la probabilité $P_{n,p}(k)$ que k couleurs exactement apparaissent, lorsque :

- $k = 1$,
- $k = 2$,
- $k = n$.

3. a) On désigne par $S_{n,k}$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à k éléments.

Trouver une relation de récurrence liant $S_{n,k}$, $S_{n-1,k}$ et $S_{n-1,k-1}$.

b) Les entiers n, p et k étant donnés, décrire un algorithme et écrire un programme turbo-pascal permettant de calculer $S_{n,k}$.

c) Trouver une relation liant $S_{n,k}$ et $P_{n,p}(k)$, et en déduire une relation de récurrence liant les termes $P_{n,p}(k)$.

4) Etudier la convergence de la suite de terme général $\sqrt[p]{P_{p,p^2}(2)}$.

Solution :

1. Soit c le nombre de couleurs effectivement utilisées :

si $c \geq 3$, il y a au moins trois points qui ont des couleurs distinctes !

si $c = 1$, il y a au moins trois points de la même couleur !!

si $c = 2$, comme il y a six points à colorier, il y en a au moins trois de l'une des deux couleurs utilisées.

La probabilité cherchée vaut donc 1.

2. Il y a p^n façons de colorier les n points, toutes équiprobables.

a) Il y a p couleurs disponibles, donc : $P_{n,p}(1) = \frac{p}{p^n}$.

b) On choisit une première couleur de p façons, puis on choisit une partie de $E = \{A_1, \dots, A_n\}$, non vide et différente de E de $2^n - 2$ façons pour colorier ces points avec cette couleur, on choisit enfin une deuxième couleur de $p - 1$ façons pour achever le coloriage. Ainsi il y a $p(p - 1)(2^n - 2)$ façons de colorier en utilisant deux couleurs et :

$$P_{n,p}(2) = \frac{p(p - 1)(2^n - 2)}{p^n}$$

c) On choisit la couleur de A_1 de p façons, puis celle de A_2 de $p - 1$ façons, celle de A_3 de $p - 2$ façons, etc. Donc :

$$P_{n,p}(n) = \frac{p(p - 1) \dots (p - n + 1)}{p^n}$$

3. a) Soit E de cardinal n , F de cardinal p et a un élément de E .

Les surjections φ de E vers F sont de deux sortes :

→ celles pour lesquelles la restriction de φ à $E' = E \setminus \{a\}$ est encore une surjection de E' vers F . On les obtient à partir des $S_{n-1,k}$ surjections de E' vers F , chacune d'elles pouvant se prolonger de k façons. Il y en a donc $kS_{n-1,k}$;

→ celles pour lesquelles la restriction de φ à E' n'est plus surjective de E' vers F . L'image de a par φ est un des éléments de F , disons b , et la restriction de φ à E' est une surjection de E' vers $F' = F \setminus \{b\}$. On trouve donc $kS_{n-1,k-1}$ surjections de ce type.

Finalement :

$$S_{n,k} = k(S_{n-1,k} + S_{n-1,k-1})$$

b) On procède récursivement, à partir de $S_{n,n} = n!$ et $S_{n,1} = 1$, pour $n \geq 1$. En supposant la fonction factorielle définie antérieurement, notée **fact**, cela donne :

```
function s(n : integer ; k : integer) : integer ;
begin
  if k=n then s := fact(n) else if k=1 then s :=1 else
    s :=k*(s(n-1,k)+s(n-1,k-1)) ;
end ; ...
```

c) On a $P_{n,p}(k) = \frac{\binom{p}{k} S_{n,k}}{p^n}$ (on commence par choisir k couleurs parmi les p disponibles, puis on construit une surjection de l'ensemble des n points vers l'ensemble de ces k couleurs).

Comme $\binom{p}{k} = \frac{p}{k} \binom{p-1}{k-1}$, il vient en remplaçant dans la relation obtenue en 3. a) :

$$P_{n,p}(k) = \frac{k}{p} P_{n-1,p}(k) + \frac{p-k+1}{p} P_{n-1,p}(k-1)$$

4. On a $P_{p,p^2}(2) = \frac{p^2(p^2-1)(2^p-2)}{(p^2)^p}$, donc :

$$\sqrt[p]{P_{p,p^2}(2)} = \exp\left(\frac{1}{p} \ln\left(\frac{p^2(p^2-1)(2^p-2)}{(p^2)^p}\right)\right)$$

Or $\frac{1}{p} \ln\left(\frac{p^2(p^2-1)(2^p-2)}{(p^2)^p}\right) = \frac{1}{p} \ln p^2 + \frac{1}{p} \ln(p^2-1) + \frac{1}{p} \ln(2^p-2) - \ln p^2$

Les deux premiers termes sont de limite nulle, le troisième de limite $\ln 2$ et le dernier de limite $-\infty$, le tout est donc de limite $-\infty$ et :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{P_{p,p^2}(2)} = 0$$

Exercice 3.4.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. Montrer que si X est une variable aléatoire à densité, prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^+ et admettant une espérance m , alors pour tout scalaire $\lambda > 0$, on a :

$$P(X \geq \lambda m) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

2. Soit X une variable aléatoire positive à densité, f une densité de X , F sa fonction de répartition supposée strictement croissante sur \mathbb{R}^+ . On suppose enfin X admet une espérance m .

a) Montrer que F réalise une bijection de \mathbb{R}^+ sur $[0, 1[$. On note F^{-1} la bijection réciproque.

b) Montrer que : $F^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \leq \frac{4m}{3}$; $F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \leq 2m$; $F^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \leq 4m$.

3. Soit Y une variable aléatoire réelle à densité, admettant une densité g paire et admettant une variance σ^2 . On suppose que la fonction de répartition G de Y est strictement croissante sur \mathbb{R} .

a) Vérifier que G réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]0, 1[$.

On note alors G^{-1} sa bijection réciproque et on pose $I = G^{-1}(\frac{3}{4}) - G^{-1}(\frac{1}{4})$.

b) Montrer que $P(|Y| > G^{-1}(\frac{3}{4})) \leq (\frac{2\sigma}{I})^2$.

c) En déduire que $I \leq 2\sqrt{2}\sigma$.

Solution :

1. L'inégalité à démontrer (inégalité de Markov) est triviale si $0 < \lambda \leq 1$.

Si $\lambda > 1$, on écrit :

$$m = \int_0^{+\infty} xf(x) dx \geq \int_{\lambda m}^{+\infty} xf(x) dx \geq \lambda m \int_{\lambda m}^{+\infty} f(x) dx$$

Ainsi :

$$P(X \geq \lambda m) \leq \frac{m}{\lambda m} = \frac{1}{\lambda}$$

2. a) La fonction F est continue, strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , d'image $[0, 1[$. Elle réalise donc une bijection de \mathbb{R}^+ sur $[0, 1[$.

b) D'après l'inégalité de Markov, on a pour $\lambda \geq 1$:

$$1 - F(\lambda m) \leq \frac{1}{\lambda}, \text{ i.e. } F(\lambda m) \geq 1 - \frac{1}{\lambda}$$

et, par croissance de F^{-1} :

$$\lambda m \geq F^{-1}(1 - \frac{1}{\lambda})$$

En choisissant successivement $\lambda = \frac{4}{3}$, $\lambda = 2$ et $\lambda = 4$, on obtient les inégalités :

$$F^{-1}(\frac{1}{4}) \leq \frac{4m}{3}; F^{-1}(\frac{1}{2}) \leq 2m; F^{-1}(\frac{3}{4}) \leq 4m$$

3. a) On démontre comme en 2. a) que G réalise une bijection strictement croissante de \mathbb{R} sur $]0, 1[$.

b) On écrit :

$$P(Y \leq G^{-1}(1/4)) = G(G^{-1}(1/4)) = 1/4$$

$$P(Y \geq G^{-1}(3/4)) = 1 - G(G^{-1}(3/4)) = 1/4$$

Par suite $G^{-1}(1/4) = -G^{-1}(3/4)$ et $I = 2G^{-1}(3/4)$.

Posons alors $\lambda = \frac{I^2}{4\sigma^2}$ et appliquons l'inégalité de Markov à Y^2 .

La variable aléatoire Y admet une variance, elle admet donc une espérance m et comme g est paire, on a $m = 0$. Donc $E(Y^2) = V(Y) = \sigma^2$.

Ainsi : $P(Y^2 \geq \lambda E(Y^2)) \leq \frac{1}{\lambda}$ s'écrit : $P(Y^2 \geq (G^{-1}(3/4))^2) \leq (\frac{2\sigma}{I})^2$, soit :

$$P(|Y| > G^{-1}(\frac{3}{4})) \leq (\frac{2\sigma}{I})^2$$

c) On a :

$$\begin{aligned} P(|Y| > G^{-1}(\frac{3}{4})) &= P(Y \geq G^{-1}(3/4)) + P(Y \leq -G^{-1}(3/4)) \\ &= 1 - G(G^{-1}(3/4)) + G(G^{-1}(1/4)) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi $(\frac{2\sigma}{I})^2 \geq \frac{1}{2}$, d'où $I \leq 2\sqrt{2}\sigma$.

Exercice 3.5.

1. Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs dans $]0, 1[$, possédant une densité g continue sur $]0, 1[$. Montrer que Z possède une espérance.

On suppose que pour tout $x \in]0, 1[$, $g(1-x) = g(x)$. Quelle est, dans ce cas, l'espérance de Z ?

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. On note φ sa bijection réciproque. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $] - 1, 1[$ et calculer sa dérivée.

3. Soit $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. Montrer que cette intégrale converge et la calculer.

4. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité.

Déterminer $E(X)$ en utilisant la première question. Retrouver ce résultat en utilisant la définition de l'espérance et le changement de variable $x = (\sin \theta)^2$.

Solution :

1. Z est une variable bornée, elle admet donc des moments de tous ordres et, en particulier, admet une espérance.

Le changement de variable $u = 1 - t$ donne :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_0^1 t g(t) dt = \int_1^0 (1-u) g(1-u) (-du) = \int_0^1 (1-u) g(u) du \\ &= \int_0^1 g(u) du - \int_0^1 u g(u) du = 1 - E(Z) : \\ & \qquad \qquad \qquad E(Z) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. La fonction sin est continue, strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$ d'image $[-1, 1]$. Elle réalise donc une bijection entre ces deux intervalles et $\sin' = \cos$ est non nulle sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Ainsi la bijection réciproque φ est définie et continue sur $[-1, 1]$, d'image $[-\pi/2, \pi/2]$. De plus φ est dérivable sur $]-1, 1[$, avec :

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sin'(\varphi(t))} = \frac{1}{\cos(\varphi(t))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi(t)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

3. La fonction à intégrer est continue sur $]0, 1[$, équivalente à $x \mapsto \frac{1}{x^{1/2}}$ au voisinage de 0 et à $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ au voisinage de 1.

Deux applications de la règle de Riemann et la relation de Chasles prouvent alors que l'intégrale proposée converge.

On écrit $x(1-x) = x - x^2 = -(x - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}(1 - (2x - 1)^2)$, d'où à l'aide du changement de variable $t = 2x - 1$:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \frac{2 dx}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Ainsi en intégrant sur un segment $[u, v]$ inclus dans $]-1, 1[$ et en passant à la limite :

$$I = [\varphi(t)]_{-1}^1 = \pi$$

4. ★ Le calcul précédent montre que f est bien une densité de probabilité (fonction positive, continue sauf en -1 et 1 où elle admet des limites infinies, intégrale sur \mathbb{R} convergente de valeur 1)

★ La fonction f vérifie les conditions de la question 1. donc :

$$E(Z) = \frac{1}{2}$$

★ Le calcul direct, à l'aide du changement de variable $x = \sin^2 \theta$, qui est de classe \mathcal{C}^1 , strictement monotone sur $[0, \pi/2]$, d'image $[0, 1]$, donc légitime directement avec les bornes de l'énoncé, donne :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta \times 2 \sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2\theta)) d\theta = \frac{1}{\pi} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

et on retrouve :

$$E(Z) = \frac{1}{2}$$

Exercice 3.6.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ et Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $] -1, 1[$.

On pose $T = X + Y$ et $Z = \lfloor T \rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x).

1. Préciser les valeurs prises par Z .
2. Expliciter la loi de Z .
3. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.
4. On désigne par F la fonction de répartition de T . Calculer $F(t)$ pour :
 - a) $t < 0$;
 - b) $t \in [0, 1[$;
 - c) $t \in [k, k + 1[$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire que T est une variable aléatoire à densité et donner une densité de T .

Solution :

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) =] -1, 1[$, comme les intervalles $[k - 1, k + 1[$, $k \in \mathbb{N}^*$ recouvrent \mathbb{R}_+^* , on a $T(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ et $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

2. La famille $(X = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, donc pour tout i de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} (Z = i) &= (X + Y \in [i, i + 1]) = \bigcup_{k=1}^{\infty} ((X + Y \in [i, i + 1]) \cap (X = k)) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} ((Y \in [i - k, i - k + 1]) \cap (X = k)) \end{aligned}$$

Compte tenu des valeurs prises par Y , seules interviennent les valeurs de k telles que $[i - k, i - k + 1[\cap] -1, 1[\neq \emptyset$, et donc :

→ $(Z = 0) = (X = 1) \cap (Y \in] -1, 0])$;

→ Pour $i \geq 1$:

$$(Z = i) = ((X = i) \cap (Y \in [0, 1])) \cup ((X = i + 1) \cap (Y \in] -1, 0])$$

D'où, par disjonction et indépendance :

$$\begin{cases} P(Z = 0) = \frac{p}{2} \\ \forall i \geq 1, P(Z = i) = \frac{1}{2}(q^{i-1}p + q^i p) = \frac{1}{2}p(1 + q)q^{i-1} \end{cases}$$

3. Les séries rencontrées sont des dérivées de séries géométriques, dont la convergence est connue. On peut alors écrire :

$$\star E(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} iP(Z=i) = \sum_{i=1}^{\infty} iP(Z=i) = \frac{1}{2}p(1+q) \sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1}$$

$$E(Z) = \frac{1}{2}p(1+q) \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1+q}{2p}$$

★ Puis :

$$E(Z(Z-1)) = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)P(Z=i) = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)P(Z=i)$$

$$= \frac{1}{2}pq(1+q) \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)q^{i-2} = \frac{1}{2}pq(1+q) \times \frac{2}{(1-q)^3}$$

Donc :

$$E(Z(Z-1)) = \frac{q(1+q)}{p^2}$$

et :

$$V(Z) = E(Z(Z-1)) + E(Z) - E(Z)^2 = \frac{q(1+q)}{p^2} + \frac{1+q}{2p} - \frac{(1+q)^2}{4p^2}, \text{ soit :}$$

$$V(Z) = \frac{(2q+p)(1+q)}{2p^2} - \frac{(1+q)^2}{4p^2} = \frac{(1+q)^2}{4p^2}$$

4. a) T prend ses valeurs dans \mathbb{R}_+^* , donc si $t < 0$, $F(t) = 0$.

b) Si $t \in [0, 1[$, on a $(X+Y \leq t) = (X=1) \cap (Y \leq t-1)$ et comme $P(X=1) = p$ et $P(Y \leq t-1) = \frac{(t-1) - (-1)}{2}$, il vient par indépendance :

$$F(t) = \frac{pt}{2}$$

c) Plus généralement, si $t \in [k, k+1[$, alors en suivant les valeurs accessibles pour la variable aléatoire X :

$$F(t) = P(X+Y \leq t)$$

$$= P(X \leq k-1) + P(X=k)P(Y \leq t-k) + P(X=k+1)P(Y \leq t-k-1)$$

$$= 1 - q^{k-1} + q^{k-1}p \frac{t-k+1}{2} + q^k p \frac{t-k}{2}$$

5. La fonction F est continue sur \mathbb{R} , dérivable sauf aux points entiers, où F admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite. Par conséquent $X+Y$ est bien une variable aléatoire à densité, une densité f de $X+Y$ étant donnée, par exemple, par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{p}{2} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{q^{k-1}p}{2}(1+q) & \text{si } t \in [k, k+1[\text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Exercice 3.7.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, d'écart-type σ , le paramètre réel inconnu σ étant strictement positif.

1. Montrer que la variable aléatoire $T = \frac{X^2}{2\sigma^2}$ suit la loi $\gamma(1/2)$.
2. Pour n entier de \mathbb{N}^* , on considère un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) indépendant, identiquement distribué, de la loi de X .
 - a) Donner une densité de la variable aléatoire $S_n = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n X_i^2$.
 - b) Soit Y_n définie par $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$. Montrer que Y_n est un estimateur sans biais de σ^2 .
 - c) En justifiant son existence, calculer l'espérance $E(\sqrt{Y_n})$ en fonction de n et σ .
En déduire un estimateur $\widehat{\sigma}_n$ sans biais du paramètre σ .
3. a) En justifiant son existence, calculer la variance $V(\widehat{\sigma}_n)$ en fonction de n et σ .
 - b) On admet que, pour tout réel $x > 0$, on a $\Gamma(x+n) \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} n^x (n-1)!$.
Montrer que $\widehat{\sigma}_n$ est un estimateur convergent de σ .

Solution :

1. Une densité f_X de X est définie sur \mathbb{R} par : $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ et si on note F_X la fonction de répartition de X , on a :

$\forall t \geq 0, F_T(t) = P(T \leq t) = P(X^2 \leq 2\sigma^2 t) = F_X(\sigma\sqrt{2t}) - F_X(-\sigma\sqrt{2t})$
et par dérivation, une densité f_T de T est :

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{2t}} f_X(\sigma\sqrt{2t}) + \frac{\sigma}{\sqrt{2t}} f_X(-\sigma\sqrt{2t}) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

soit :

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-1/2} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Comme $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, on reconnaît :

$$T \hookrightarrow \gamma(1/2)$$

2. a) Les variables aléatoires $\frac{X_i^2}{2\sigma^2}$ sont indépendantes et de même loi $\gamma(1/2)$, on sait alors que S_n suit la loi $\gamma(n/2)$, dont une densité f_{S_n} est définie par :

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n/2)} \times t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

b) On sait aussi que $E(S_n) = \frac{n}{2}$ et comme $Y_n = \frac{2\sigma^2}{n} S_n$:

$$E(Y_n) = \frac{2\sigma^2}{n} \times \frac{n}{2} = \sigma^2$$

Y_n est un estimateur sans biais de σ^2 .

c) On a $\sqrt{Y_n} = \sigma \sqrt{\frac{2}{n}} \sqrt{S_n}$ et, par le théorème de transfert, on a (la convergence (absolue) est évidente) :

$$E(\sqrt{S_n}) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} dx = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \times \Gamma((n+1)/2)$$

$$E(\sqrt{Y_n}) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \times \sigma \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Ainsi :

$$\widehat{\sigma}_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+1)/2)} \times \sqrt{\frac{nY_n}{2}} \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma$$

3. a) Posons $a_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n+1)/2)}$, on a :

$$V(\widehat{\sigma}_n) = \frac{n}{2} a_n^2 V(\sqrt{Y_n}) = \frac{n}{2} a_n^2 (E(Y_n) - [E(\sqrt{Y_n})]^2)$$

or $E(Y_n) = \sigma^2$ et $[E(\sqrt{Y_n})]^2 = \frac{2\sigma^2}{n} \times \frac{1}{a_n^2}$, d'où :

$$V(\widehat{\sigma}_n) = \sigma^2 \left(\frac{na_n^2}{2} - 1 \right)$$

b) Le résultat admis donne : $\Gamma(n + \frac{1}{2}) \underset{(\infty)}{\sim} \sqrt{n} \cdot (n-1)!$ et on sait que pour tout k de \mathbb{N}^* , $\Gamma(k) = (k-1)!$ On distingue donc deux cas :

★ Si n est pair, $n = 2p$, alors $a_{2p} = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+1/2)} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{\sqrt{p}}$, soit $a_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$;

★ Si n est impair $n = 2p+1$, $a_{2p+1} = \frac{\Gamma(p+1/2)}{\Gamma(p+1)} = \frac{\Gamma(p+1/2)}{p\Gamma(p)} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{\sqrt{p}}{p}$, soit

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Dans tous les cas on a $a_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n^2}{2} = 1$, soit $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\widehat{\sigma}_n) = 0$ et $\widehat{\sigma}_n$ est un estimateur convergent de σ .

Exercice 3.8.

Soit X une variable aléatoire de densité f continue et strictement positive sur \mathbb{R}_+^* , nulle sur \mathbb{R}_-^* . On note F la fonction de répartition de X .

On suppose que X admet une espérance notée $E(X)$.

1. a) Justifier que l'on peut définir une fonction réciproque F^{-1} entre des intervalles à préciser.

b) Calculer $\int_0^1 F^{-1}(t) dt$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $T(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x t f(t) dt$.

2. a) Justifier que T est définie sur \mathbb{R}_+ et qu'on peut définir une fonction G sur \mathbb{R} par :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ T \circ F^{-1}(x) & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

b) Vérifier que G possède les propriétés caractérisant une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

c) Retrouver ainsi à l'aide de G le calcul de $\int_0^1 F^{-1}(t) dt$.

3. Montrer qu'une variable aléatoire Y de fonction de répartition G admet une espérance, et que

$$E(Y) = 1 - \int_0^{+\infty} T(u) f(u) du$$

Solution :

1. a) F est nulle sur \mathbb{R}^- et dérivable sur \mathbb{R}_+^* de dérivée strictement positive. Ainsi F est continue strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , d'image $[0, 1[$, on peut donc définir F^{-1} sur $[0, 1[$ et F^{-1} réalise une bijection strictement croissante de $[0, 1[$ sur $[0, +\infty[$.

b) Effectuons le changement de variable $x = F^{-1}(t)$, i.e. $t = F(x)$, qui est bien de classe \mathcal{C}^1 sur tout segment $[\alpha, \beta]$, avec $0 < \alpha < \beta < 1$. Il vient :

$$\int_{\alpha}^{\beta} F^{-1}(t) dt = \int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(\beta)} x \cdot F'(x) dx = \int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(\beta)} x \cdot f(x) dx$$

Comme X admet une espérance, on peut faire tendre α vers 0 et β vers 1 et :

$$\int_0^1 F^{-1}(t) dt = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = E(X)$$

2. a) L'espérance $E(X)$ est strictement positive, donc T est définie et continue sur \mathbb{R}^+ , nulle en 0, de limite 1 en $+\infty$ et strictement croissante, puisque de dérivée $x \mapsto \frac{1}{E(X)} x f(x)$ strictement positive sur \mathbb{R}_+^* .

Ainsi $T \circ F^{-1}$ est bien définie sur $]0, 1[$, de limite 0 en 0^+ et de limite 1 en 1^- .

b) G est en fait continue sur \mathbb{R} , dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, avec :

$$\forall x \in]0, 1[, G'(x) = T'(F^{-1}(x))(F^{-1})'(x)$$

Or $T'(x) = \frac{1}{E(X)} x f(x)$ et $(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} = \frac{1}{f(F^{-1}(x))}$, d'où :

$$\forall x \in]0, 1[, G'(x) = \frac{1}{E(X)} F^{-1}(x) f(F^{-1}(x)) \frac{1}{f(F^{-1}(x))} = \frac{F^{-1}(x)}{E(X)}$$

Donc G est croissante de limite nulle en $-\infty$ (en fait nulle sur \mathbb{R}^-) et de limite 1 en $+\infty$ (en fait valant 1 sur $[1, +\infty[$) et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux : c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

c) Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} G'(x) dx = 1 = \int_0^1 G'(x) dx$ (vrai pour toute densité), on retrouve bien :

$$\int_0^1 F^{-1}(t) dt = E(X)$$

3. Soit $a > 0$, on écrit : $\int_0^a t G'(t) dt = \frac{1}{E(X)} \int_0^a t \cdot F^{-1}(t) dt$

Soit, en effectuant le changement de variable $t = F(x)$:

$$\int_0^a t G'(t) dt = \frac{1}{E(X)} \int_0^{F^{-1}(a)} F(x) x \cdot f(x) dx$$

Comme $F(x) x f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} x f(x)$, le fait que X admet une espérance donne la

convergence de $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ donc celle de $\int_0^{+\infty} F(x) x f(x) dx$ et :

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} tG'(t) dt = \frac{1}{E(X)} \int_0^{+\infty} F(x)x.f(x) dx$$

D'autre part, l'équivalent $T(u)f(u) \underset{+\infty}{\sim} f(u)$ donne la convergence de

l'intégrale $\int_0^{+\infty} T(u)f(u) du$ et en procédant à une intégration par parties, directement avec la borne infinie :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} T(u)f(u) du &= [T(u)F(u)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} T'(u)F(u) du \\ &= 1 - \int_0^{+\infty} \frac{1}{E(X)} uf(u)F(u) du \end{aligned}$$

Finalement, la comparaison des deux expressions obtenues donne :

$$E(Y) = 1 - \int_0^{+\infty} T(u)f(u) du$$

Exercice 3.9.

Trois personnes, notées A, B et C entrent simultanément dans un magasin ayant deux bornes d'accueil. A et B occupent immédiatement (à l'instant 0) les deux bornes, C attend et occupe la première borne laissée libre par A ou B (on suppose que le temps de changement de personne est négligeable).

On suppose que les temps passés à une borne par A, B et C sont des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$ et notées respectivement X, Y et Z .

1. On pose $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

a) Déterminer les fonctions de répartition de U et V , ainsi qu'une densité de chacune d'elles.

b) Déterminer l'espérance et la variance de U et V .

2. On note T le temps total passé par C dans le magasin.

a) Déterminer la loi de T .

b) Déterminer l'espérance de T .

Solution :

1. a) U et V prennent leurs valeurs entre 0 et 1, et pour $x \in [0, 1]$, on a par indépendance de X et Y :

$$\star P(U \leq x) = P((X \leq x) \cap (Y \leq x)) = P(X \leq x)P(Y \leq x) = x^2.$$

$$\star P(V > x) = P((X > x) \cap (Y > x)) = P(X > x)P(Y > x) = (1 - x)^2$$

Donc :

$$F_U(x) = x^2 \text{ et } F_V(x) = 1 - (1 - x)^2$$

Par dérivation, on peut donc prendre pour densité sur $[0, 1]$:

$$f_U(x) = 2x \text{ et } f_V(x) = 2(1 - x)$$

$$\text{b) } \star E(U) = \int_0^1 x \times 2x \, dx = \left[\frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$E(V) = \int_0^1 x \times 2(1 - x) \, dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\star E(U^2) = \int_0^1 x^2 \times 2x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$E(V^2) = \int_0^1 x^2 \times 2(1 - x) \, dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

et donc :

$$V(U) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}, \quad V(V) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

2. a) Puisque C prend la place laissée libre par le premier de A et de B qui a fini, on a :

$$C = \inf(X, Y) + Z = V + Z$$

Comme V et Z sont indépendantes, on obtient par convolution, et en notant f_T une densité de T :

$$f_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t)f_Z(x-t) \, dt = \int_0^1 f_V(t)f_Z(x-t) \, dt$$

Il n'y a du grain à moudre que si $x - t$ est compris entre 0 et 1, et comme t est aussi compris entre 0 et 1, on distingue plusieurs cas :

\star Si $0 \leq x \leq 1$, l'intégration porte en fait sur le segment $[0, x]$ et :

$$f_T(x) = \int_0^x 2(1-t) \times 1 \, dt = 2x - x^2$$

\star Si $1 \leq x \leq 2$, l'intégration porte en fait sur le segment $[x-1, 1]$ et :

$$f_T(x) = \int_{x-1}^1 2(1-t) \times 1 \, dt = (x-2)^2$$

\star Si $x > 2$ ou si $x < 0$, alors $0 \leq t \leq 1$ est incompatible avec $0 \leq x - t \leq 1$ et $f_T(x) = 0$.

b) On a donc $E(T) = \int_0^1 t(2t - t^2) dt + \int_1^2 t(t - 2)^2 dt$ et le calcul s'achève sans peine :

$$E(T) = \frac{5}{6}$$

Exercice 3.10.

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. On note alors :

$$V_n = (U_n)^n \text{ et } V = \sup\{V_n, n \geq 1\}$$

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que V_n est une variable aléatoire à densité et préciser $E(V_n)$.
2. Pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq 1$ et tout entier n tel que $n \geq 1$, montrer l'inégalité : $1 - x \leq n(1 - x^{1/n})$.
3. Pour x réel tel que $0 \leq x \leq 1$ et n entier tel que $n \geq 1$, on pose $A_n(x) = [V_n \geq x]$. Calculer $P(A_n(x))$.
4. Soit x réel tel que $0 \leq x < 1$. Montrer que la série $\sum P(A_n(x))$ diverge.
5. On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant (lemme de Borel Cantelli) :

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements indépendants d'un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$ diverge, alors, presque sûrement, une infinité d'événements A_n se réalisent.

- a) Montrer que pour tout réel x tel que $0 \leq x < 1$, on a $P([V \geq x]) = 1$.
- b) En déduire, en utilisant le théorème de la limite monotone, que $P([V = 1]) = 1$.

Solution :

1. Notons F_n la fonction de répartition de V_n . On a :

$$\forall t < 0, F_n(t) = 0, \forall t > 1, F_n(t) = 1$$

et pour $t \in [0, 1]$, on a :

$$F_n(t) = P(U_n \leq t^{1/n}) = t^{1/n}$$

Ainsi F_n est continue sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, donc V_n est une variable aléatoire à densité, de densité $f_n(t) = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}$, sur $]0, 1[$.

On a alors :

$$E(V_n) = \int_0^1 \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1+1} dt = \left[\frac{1}{n} \frac{t^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \right]_0^1 = \frac{1}{1+n}$$

2. Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - x - n(1 - x^{1/n})$, φ est dérivable sur $]0, 1[$, et on a :

$$\varphi'(x) = -1 + x^{\frac{1}{n}-1} = -1 + e^{(\frac{1}{n}-1)\ln x} \geq 0$$

Donc φ croît et comme $\varphi(1) = 0$, φ est négative sur $[0, 1]$

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - x \leq n(1 - x^{1/n})$$

3. Pour $x \in [0, 1]$:

$$P(A_n(x)) = P(V_n \geq x) = 1 - F_n(x) = 1 - x^{1/n}$$

4. Pour $x \in [0, 1[$, on écrit : $P(A_n(x)) \geq \frac{1}{n}(1-x)$ et comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série de terme général $P(A_n(x))$.

5. a) L'indépendance des variables aléatoires U_n donne l'indépendance des événements $A_n(x)$. Par conséquent, d'après le lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement une infinité d'événements $A_n(x)$ se produisent lorsque $x \in [0, 1[$.

Donc :

$$P(V \geq x) = P(\sup\{V_n, n \geq 1\} \geq x) = 1$$

b) Par le théorème de la limite monotone, on a :

$$\begin{aligned} P(V = 1) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(V \geq 1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n=1}^N \left(V \geq 1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(V \geq 1 - \frac{1}{N}\right) = 1 \end{aligned}$$

Exercice 3.11.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. Soit U une variable aléatoire discrète, à valeurs dans \mathbb{N} , admettant un moment d'ordre deux.

a) Démontrer la formule : $E(U) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(U \geq j)$, ($E(\cdot)$ désignant l'espérance).

b) Exprimer de même la somme $\sum_{j=1}^{+\infty} jP(U \geq j)$ en fonction de $E(U^2)$ et $E(U)$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes, à valeurs dans \mathbb{N} , indépendantes, de même loi.

On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = P(X_n = k)$ et $F_k = \sum_{j=0}^k p_j$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \sup_{1 \leq i \leq n} (X_i)$.

2. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(M_n \leq k)$ en fonction de F_k et n .

3. On suppose dans cette question que les variables X_n suivent la loi uniforme sur $\mathbb{N}_K = \{1, 2, \dots, K\}$, où K est un entier strictement supérieur à 1.

a) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}_K$, la probabilité $P(M_n = k)$.

b) On jette trois dés équilibrés ; quelle est la probabilité que le plus grand des chiffres obtenus soit 4 ?

4. On suppose maintenant que les variables X_n suivent la loi géométrique sur \mathbb{N}^* de paramètre p (avec $0 < p < 1$) et on note $q = 1 - p$.

a) Calculer $E(M_n)$.

b) Trois joueurs jouent à Pile ou Face avec une pièce équilibrée et s'arrêtent dès qu'ils ont obtenu un Pile. La variable aléatoire M_3 est alors le nombre de jets effectués par le ou les joueurs ayant obtenu Pile en dernier. Calculer $E(M_3)$.

Solution :

1. a) Par la propriété de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} P(U \geq j) &= \sum_{j \geq 1} P\left(\bigcup_{k \geq j} (U = k)\right) = \sum_{j \geq 1} \left[\sum_{k \geq j} P(U = k) \right] \\ &= \sum_{k \geq 1} \left[\sum_{j=1}^k P(U = k) \right] = \sum_{k \geq 1} k P(U = k) \end{aligned}$$

soit :

$$\sum_{j \geq 1} P(U \geq j) = E(U)$$

b) De même, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} j P(U \geq j) &= \sum_{j \geq 1} j P\left(\bigcup_{k \geq j} U = k\right) = \sum_{j \geq 1} \left[\sum_{k \geq j} j P(U = k) \right] \\ &= \sum_{k \geq 1} \left[\sum_{j=1}^k j P(U = k) \right] = \sum_{k \geq 1} \frac{k(k+1)}{2} P(U = k) \end{aligned}$$

soit :

$$\sum_{j \geq 1} jP(U \geq j) = \frac{1}{2}[E(U^2) + E(U)]$$

2. Sachant que : $(M_n \leq k) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq k)$, on en déduit, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(M_n \leq k) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq k) = (F_k)^n$$

3. a) Si μ est la loi uniforme sur \mathbb{N}_K , on a $p_k = \frac{1}{K}$; de plus $F_0 = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_K$, il vient $F_k = \frac{k}{K}$ et :

$$P(M_n = k) = P(M_n \leq k) - P(M_n \leq k-1) = (F_k)^n - (F_{k-1})^n$$

soit :

$$P(M_n = k) = \frac{1}{K^n} [k^n - (k-1)^n]$$

b) Les dés étant équilibrés, μ est la loi uniforme sur \mathbb{N}_6 . D'où :

$$P(M_3 = 4) = \frac{1}{6^3} (4^3 - 3^3) = \frac{37}{216}.$$

4 a) Si μ est la loi géométrique sur \mathbb{N}^* de paramètre p , on a : $F_k = \sum_{j=1}^k pq^{j-1} = 1 - q^k$

et donc : $P(M_n \leq k) = (1 - q^k)^n$.

On a alors $P(M_n \leq 1) = 1$ et pour $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} P(M_n \geq k) &= 1 - P(M_n \leq k-1) = 1 - (1 - q^{k-1})^n \\ &= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j+1} q^{j(k-1)} \end{aligned}$$

Il résulte alors de la première question :

$$\begin{aligned} E(M_n) &= 1 + \sum_{k \geq 2} \left(\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j+1} q^{j(k-1)} \right) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n \left[\binom{n}{j} (-1)^{j+1} \left(\sum_{k \geq 2} q^{j(k-1)} \right) \right] = 1 + \sum_{j=1}^n \left[\binom{n}{j} (-1)^{j+1} \frac{q^j}{1 - q^j} \right] \end{aligned}$$

b) Dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$ et $n = 3$, on obtient $E(M_3) = \frac{22}{7}$.

Exercice 3.12.

On dispose d'une pièce de monnaie donnant « pile » avec la probabilité p et « face » avec la probabilité $q = 1 - p$ (avec $p \in]0, 1[$).

On lance cette pièce, les lancers étant indépendants les uns des autres, et on note N le nombre aléatoire de lancers nécessaires à la première apparition de « pile » (on pose $N = -1$ si « pile » n'apparaît jamais).

Quand « pile » apparaît au bout de n lancers, on effectue une série de n lancers avec cette même pièce et on note X le nombre de « pile » obtenus au cours de cette série.

1. Quelle est la loi de N ?
2. Déterminer la loi du couple (N, X) .
3. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
4. Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $P(X = k)$ sous forme d'une série.
5. Calculer la somme de cette série.

On rappelle que si $|x| < 1$ alors $\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$

6. Déterminer l'espérance de X par deux méthodes : une première fois par calcul direct, une deuxième en utilisant la formule de l'espérance totale. Pourquoi ce résultat est-il raisonnable ?

Solution :

1. La variable aléatoire N représente le temps d'attente du premier « pile » lors de lancers successifs indépendants. N suit donc la loi géométrique de paramètre p et $P(N = -1) = 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X sachant $(N = n)$ est la loi binomiale de paramètres n et p . On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P((N, X) = (n, k)) = P(N = n)P_{(N=n)}(X = k)$$

$$P((N, X) = (n, k)) = P(N = n)P_{(N=n)}(X = k) = (1-p)^{n-1}p \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

ou encore :

$$P((N, X) = (n, k)) = \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1}$$

3. a) On utilise le système quasi-complet d'événements $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour calculer les probabilités des événements liés à X .

On a :

$$P(X = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((N, X) = (n, 0)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} p^{0+1} (1-p)^{2n-0-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{2n-1}$$

On reconnaît une série géométrique de raison $(1-p)^2$ et on obtient :

$$P(X=0) = p(1-p) \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$$

b) De même :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((N, X) = (n, 1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{1} p^{1+1} (1-p)^{2n-1-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} np^2 (1-p)^{2n-2} \end{aligned}$$

ou encore :

$$P(X=1) = p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n [(1-p)^2]^{n-1} = p^2 \frac{1}{[1-(1-p)^2]^2} = \frac{1}{(2-p)^2}$$

4. Selon le même principe, on a :

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1}$$

5. On en déduit :

$$P(X=k) = p^{k+1} (1-p)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} [(1-p)^2]^{n-k}$$

donc :

$$P(X=k) = p^{k+1} (1-p)^{k-1} \frac{1}{[1-(1-p)^2]^{k+1}} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$$

À noter que cette formule est valable pour tout k de \mathbb{N}^* .

6. a) Effectuons le calcul direct. Comme $\frac{1-p}{2-p} \in [0, 1[$, la série de terme général $k \left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1}$ est convergente. Ainsi, $E(X)$ existe. On peut écrire :

$$E(X) = 0 \frac{1-p}{2-p} + \frac{1}{(2-p)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1}$$

donc :

$$E(X) = \frac{1}{(2-p)^2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{2-p}\right)^2} = 1$$

b) Appliquons la formule de l'espérance totale.

- $\forall n \in \mathbb{N}, E(X|N=n) = np$
- Soit $e_n = \sum_{k=0}^n k P_{(N=n)}(X=k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1}$.

Calculons cette somme :

$$e_n = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} n \binom{n-1}{j} p^{j+2} (1-p)^{2n-j-2}$$

$$= np^2 (1-p)^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} = np^2 (1-p)^{n-1}.$$

Ainsi, la série de terme général e_n est convergente car $|1-p| < 1$.

On en déduit que l'espérance de X existe et que :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} E(X|(N=n))P(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1}p$$

$$= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}$$

donc :

$$E(X) = p^2 \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = 1$$

c) Ce résultat est raisonnable dans la mesure où le nombre de lancers effectués dans la deuxième phase *compense* le retard pris dans la première série de lancers : n vaut en moyenne $\frac{1}{p}$, donc np vaut en moyenne 1.

Exercice 3.13.

Soit X une variable aléatoire réelle, dont une densité f_X est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

où β désigne un paramètre réel strictement positif. On dira que X suit la loi $\mathcal{P}(\beta)$.

1. On pose $Y = \ln X$. Déterminer une densité f_Y de la variable aléatoire Y .

2. Pour n entier supérieur ou égal à 3, on considère un n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) indépendant, identiquement distribué, de la loi $\mathcal{P}(\beta)$, et on suppose que le paramètre β est inconnu.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Z_n définie par $Z_n = \sum_{i=1}^n \ln X_i$?

(On donnera une densité de probabilité de Z_n .)

b) On pose $\widehat{\beta}_n = \frac{n}{Z_n}$. Calculer l'espérance $E(\widehat{\beta}_n)$ et la variance $V(\widehat{\beta}_n)$ de la variable aléatoire $\widehat{\beta}_n$, après en avoir justifié l'existence.

Quelles conclusions peut-on en tirer à propos de $\widehat{\beta}_n$ en tant qu'estimateur du paramètre β ?

3. On pose $T_n = \sqrt{n} \frac{\widehat{\beta}_n - \beta}{\beta}$, et on admet que la suite $(T_n)_{n \geq 3}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Donner, pour n assez grand, un intervalle de confiance du paramètre β , au risque α donné. On notera b la réalisation de $\widehat{\beta}_n$ sur l'échantillon observé.

4. Soit (X_1^*, \dots, X_m^*) un m -échantillon iid de la loi $\mathcal{P}(\beta)$. Pour m assez grand, on construit un intervalle de confiance du paramètre β au même risque α , et on veut que cet intervalle ait une longueur k fois plus petite (avec $k > 1$) que celle de l'intervalle calculé avec le n -échantillon (X_1, \dots, X_n) . On suppose que la réalisation de $\widehat{\beta}_m = \frac{m}{Z_m}$ sur cet échantillon est encore égale à b .

a) Quelle relation vérifient m et n ?

b) Montrer que le rapport $\frac{m}{n}$ a alors une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite. Interpréter le résultat obtenu.

Solution :

1. On a $Y(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$, et pour $y > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq e^y) = F_X(e^y)$$

Donc

$$f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

La variable aléatoire βY suit la loi exponentielle de paramètre 1, ce qui équivaut à dire que Y suit la loi exponentielle de paramètre β .

2. a) Les variables aléatoires X_i étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires $Y_i = \ln X_i$. D'après le cours, Z_n suit la loi exponentielle de paramètre $n\beta$ et βZ_n suit la loi γ_n . Donc :

$$f_{\beta Z_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

D'où :

$$f_{Z_n}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\beta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

b) On a $\widehat{\beta}_n(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$.

Pour $n \geq 3$, la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-\beta x} dx$ et $\int_0^{+\infty} x^{n-3} e^{-\beta x} dx$, montre, grâce au changement de variable C^1 bijectif $y = \beta x$ que :

$$\int_0^{+\infty} y^{n-2} e^{-\beta y} dy = \frac{\Gamma(n-1)}{\beta^{n-1}}, \int_0^{+\infty} y^{n-3} e^{-\beta y} dy = \frac{\Gamma(n-2)}{\beta^{n-2}}$$

On en déduit l'existence du moment d'ordre 2 de $\widehat{\beta}_n$, par le théorème de transfert.

Il vient :

$$E(\widehat{\beta}_n) = \frac{n\beta}{n-1}, V(\widehat{\beta}_n) = \frac{n^2\beta^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

Ainsi $\widehat{\beta}_n$ est un estimateur asymptotiquement sans biais et convergent de β .

3. Soit U la variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, et soit $u > 0$ tel que $P(U \leq u) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Pour n assez grand, on a $P(-u \leq T_n \leq u) = 1 - \alpha$ et :

$$P(-u \leq \sqrt{n} \frac{\widehat{\beta}_n - \beta}{\beta} \leq u) = 1 - \alpha \Rightarrow P\left(\frac{\widehat{\beta}_n}{1 + u/\sqrt{n}} \leq \beta \leq \frac{\widehat{\beta}_n}{1 - u/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

La réalisation de l'intervalle de confiance pour β au risque α est donc :

$$\left[\frac{b}{1 + u/\sqrt{n}}, \frac{b}{1 - u/\sqrt{n}} \right]$$

4. a) On a $(\text{longueur})_n = \frac{2u\sqrt{n}}{n - u^2} \times b$. On veut donc :

$$\frac{2u\sqrt{n}}{n - u^2} b = k \times \frac{2u\sqrt{m}}{m - u^2} b, \text{ soit } k \sqrt{\frac{m}{n}} \times \frac{n - u^2}{m - u^2} = 1$$

b) Lorsque m et n tendent vers l'infini, on a $k \sqrt{\frac{m}{n}} \times \frac{n}{m} \sim 1$ d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m}{n} = k^2$$

Ainsi, si l'on veut être k fois plus précis, il faut multiplier à peu près par k^2 la taille de l'échantillon.

Exercice 3.14.

Un mobile, initialement posté à l'origine d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) se déplace de la manière suivante : à chaque instant $n = 1, 2, 3, \dots$ il bouge dans une direction quelconque. On modélise ceci de la façon suivante : on considère $(U_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.

On pose alors pour tout $k \geq 1$, $A_k = \cos(U_k)$, $O_k = \sin(U_k)$ et pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{cases} X_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n \\ Y_n = O_1 + O_2 + \dots + O_n \end{cases}$$

1. Écrire un programme en PASCAL prenant en entrée la donnée n (nombre de déplacements) et rendant des nombres aléatoires X_n et Y_n construits comme ci-dessus.

2. Calculer $E(A_k)$ et $E(O_k)$ pour tout $k \geq 1$ puis $E(X_n)$ et $E(Y_n)$ pour tout $n \geq 1$.

3. On définit pour tout $n \geq 1$, $Z_n = X_n^2 + Y_n^2$.

a) Que représente géométriquement la variable aléatoire Z_n ?

b) Montrer que $E(Z_n) = n$. Interpréter ce résultat avec celui de la question 2.

4. a) Montrer que :

$$P(Z_n \leq n) = P\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(U_i - U_j) \leq 0\right)$$

b) Expliquer simplement pourquoi :

$$P\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(U_i - U_j) \leq 0\right) = P\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(U_i - U_j) \geq 0\right)$$

c) En déduire que $P(Z_n \leq n) = \frac{1}{2}$ et interpréter ce résultat.

Solution :

1. Voici une proposition de programme :

```

program exo ;
var k,n : integer ;
    m x,y,u : real ;
Begin
randomize ;
writeln('n?') ; readln(n) ;
x := 0 ; y := 0 ;
for k := 1 to n do begin
    u := random ;
    x := x + cos(2*pi*u) ;
    y := y + sin(2*pi*u)
end ;
writeln(x,y)

```

end ;

2. Par le théorème de transfert :

$$E(A_k) = E(\cos(U_k)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) dt = 0$$

$$E(O_k) = E(\sin(U_k)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) dt = 0$$

Par linéarité de l'espérance, il vient $E(X_n) = E(Y_n) = 0$.

3. a) La variable aléatoire Z_n représente le carré de la distance entre le mobile et l'origine après n déplacements.

b) On calcule :

$$\begin{cases} E(A_k^2) = E(\cos^2(U_k)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} \\ E(O_k^2) = E(\sin^2(U_k)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \frac{1}{2} \end{cases}$$

et :

$$E(Z_n) = E(X_n^2) + E(Y_n^2) = n \frac{1}{2} + n \frac{1}{2} = n$$

En moyenne, après n déplacements, le mobile est à la distance \sqrt{n} de l'origine.

4. a) On a $P([Z_n \leq n]) = P([X_n^2 + Y_n^2 \leq n])$. Or :

$$X_n^2 + Y_n^2 = \sum_{k=1}^n (A_k^2 + O_k^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A_i A_j + O_i O_j)$$

Comme $A_k^2 + O_k^2 = \cos^2(U_k) + \sin^2(U_k) = 1$, et $A_i A_j + O_i O_j = \cos(U_i - U_j)$, il vient

$$\begin{aligned} P([Z_n \leq n]) &= P(n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(U_i - U_j) \leq n) \\ &= P(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(U_i - U_j) \leq 0) \end{aligned}$$

b) Lorsque $i < j$, la variable aléatoire $\cos(U_i - U_j)$ est symétrique sur $[-1, 1]$. Il en est de même pour $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(U_i - U_j)$. Par conséquent

$$P(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(U_i - U_j) \leq 0) = P(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(U_i - U_j) \geq 0)$$

c) La somme des deux derniers réels étant égale à 1 (le cas de l'égalité est quasi-impossible) , il vient $P([Z_n \leq n]) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, à l'issue de n déplacements, le mobile a autant de chances de se trouver à l'intérieur du disque $D(0, \sqrt{n})$ qu'à l'extérieur.

Exercice 3.15.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur (Ω, \mathcal{T}, P) , suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $M_n = \inf(U_1, U_2, \dots, U_n)$.

1. a) Montrer que M_n est une variable aléatoire.
- b) Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.
- c) Etudier la convergence en probabilité de la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2. On définit les variables aléatoires U et V par :

$$U = \inf(U_1, 1 - U_1) \text{ et } V = \sup(U_1, 1 - U_1).$$

Enfin on pose $Q = \frac{V}{U}$.

- a) Déterminer la loi de Q .
 - b) Etudier l'existence de l'espérance de Q .
3. Pour tout n de \mathbb{N}^* , soit X_n la variable aléatoire définie sur Ω par : $X_n(\omega) = \sqrt{n}$ si $U_1(\omega) \leq \frac{1}{n}$ et $X_n(\omega) = 0$ si $U_1(\omega) > \frac{1}{n}$
 - a) Montrer que X_n est effectivement une variable aléatoire.

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge « vélocement » vers Z si pour tout $\alpha > 0$, la série de terme général $P(\{\omega \in \Omega / |Z_n(\omega) - Z(\omega)| > \alpha\})$ converge.

- b) En utilisant la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, comparer la convergence en probabilité et la convergence « véloce ».

Solution :

1. a) M_n est une variable aléatoire puisque, pour tout réel a :

$$M_n^{-1}([a, +\infty[) = \bigcap_{k=1}^n U_k^{-1}([a, +\infty[) \in \mathcal{T}$$

- b) Un raisonnement et un calcul classiques montrent que si f désigne une densité de la loi uniforme sur $[0, 1]$ et F sa fonction de répartition, alors, pour tout réel t de $[0, 1]$:

$$f_{M_n}(t) = nf(t)(1 - F(t))^{n-1} = n(1 - t)^{n-1}$$

D'où :

$$E(1 - M_n) = n \int_0^1 (1-t)(1-t)^{n-1} dt = \frac{n}{n+1},$$

$$E(1 - M_n^2) = n \int_0^1 (1-t)^2(1-t)^{n-1} dt = \frac{n}{n+2}$$

Ce qui donne :

$$E(M_n) = \frac{1}{n+1}, V(M_n) = V(1 - M_n) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

c) La suite (M_n) tend en probabilité vers 0 car, pour $\varepsilon > 0$:

$$P(|M_n| < \varepsilon) = P(M_n < \varepsilon) = 1 - (1 - \varepsilon)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

2. a) Pour $t > 1$, on a :

$$F_Q(t) = \begin{cases} P\left(\frac{1-U_1}{U_1} \leq t\right) & \text{si } U_1 \leq \frac{1}{2} \\ P\left(\frac{U_1}{1-U_1} \leq t\right) & \text{si } U_1 > \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} P(U_1 \geq \frac{1}{t+1}) & \text{si } U_1 \leq \frac{1}{2} \\ P(U_1 < \frac{t}{t+1}) & \text{si } U_1 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$F_Q(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ P\left(\frac{1}{t+1} < U_1 \leq \frac{1}{2}\right) + P\left(\frac{1}{2} < U_1 \leq \frac{t}{t+1}\right) = \frac{t-1}{t+1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

b) En dérivant :

$$f_Q(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ \frac{2}{(t+1)^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Comme $tf_Q(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{t}$, la règle de Riemann assure que Q n'a pas d'espérance.

3. a) Il suffit de remarquer que :

$$X_n^{-1}(\sqrt{n}) = \{\omega \in \Omega \mid U_1(\omega) \leq \frac{1}{n}\} = U_1^{-1}([-\infty, 1/n]) \in \mathcal{T}$$

et :

$$X_n^{-1}(0) = \{\omega \in \Omega \mid U_1(\omega) > \frac{1}{n}\} = U_1^{-1}(]1/n, +\infty]) \in \mathcal{T}$$

b) Le terme général d'une série convergente tendant vers 0, la convergence vélocé implique la convergence en probabilité.

La réciproque est fausse. En effet, soit $0 < \varepsilon < 1/2$. On a :

$$\bigcup_{m=n}^{+\infty} (|X_m| > \varepsilon) = \bigcup_{m=n}^{+\infty} (U_1 \in [0, 1/m]) = (U_1 \in [0, 1/n])$$

d'où $P\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} (|X_m| > \varepsilon)\right) = \frac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série divergente.

Exercice 3.16.

Soit X une variable aléatoire strictement positive admettant une espérance $E(X)$.

On pose, lorsque cela a un sens :

$$K_X = E\left(\frac{X}{E(X)} \ln\left(\frac{X}{E(X)}\right)\right)$$

1. a) Si X est constante égale à c , que vaut K_X ?

b) En supposant que K_X existe, calculer $K_{\lambda X}$ en fonction de K_X .

c) Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \ln^2(t)}$ existe. Le coefficient K_X existe-t-il toujours ?

2. a) La fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par : $f(x) = x \ln(x)$ est-elle convexe ?

b) Si g est une fonction convexe définie sur un intervalle I , montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$ et tout $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a :

$$g\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i g(x_i)$$

c) En déduire que si X est une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (strictement positives), alors K_X existe et qu'il est positif ou nul.

3. a) Soit m un réel strictement supérieur à 1.

Soit X une variable aléatoire à densité, dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \frac{m}{x^{m+1}} \text{ si } x \geq 1, \text{ et } f(x) = 0 \text{ sinon,}$$

calculer K_X .

b) Soit r un réel de \mathbb{R}^+ ; existe-t-il une variable aléatoire Z telle que $K_Z = r$?

Solution :

1. a) Si X est une variable aléatoire constante, on a $E(X) = X$ et donc en raison de la présence du logarithme $K_C = 0$.

b) Par linéarité de l'espérance, clairement, $K_{\lambda X} = K_X$.

c) * La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2 \ln^2(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$. Pour $t > e$, on a $\frac{1}{t^2 \ln^2(t)} \leq \frac{1}{t^2}$ ce qui assure la convergence de l'intégrale proposée.

★ Soit alors f la fonction définie par : $f(t) = \begin{cases} \frac{C}{t^2 \ln^2(t)} & \text{si } t \geq 2 \\ 0 & \text{si } t < 2 \end{cases}$ (où la constante C est choisie de façon à ce que f soit une densité).

Soit X une variable aléatoire de densité f . Alors :

→ $E(X)$ existe, puisque $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2(t)} = \frac{1}{\ln 2}$, (intégration «à vue»).

→ K_X n'existe pas, car sinon, en notant a l'espérance de X , on aurait par le théorème de transfert :

$$K_X = \int_2^{+\infty} \frac{t \ln(t/a)}{at^2 \ln^2(t)} dt = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(t/a)}{at \ln^2(t)} dt$$

Or : $\frac{\ln(t/a)}{at \ln^2(t)} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{at \ln t}$ et une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est $t \mapsto \ln |\ln t|$ qui est de limite infinie en $+\infty$, d'où la contradiction.

2. a) On a $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ et la fonction f est convexe.

b) Cette question est équivalente à la définition de la convexité. Elle se démontre par récurrence sur n à l'aide de la notion de barycentre partiel.

c) Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors, en posant $p_i = P(X = x_i)$, il vient :

$$K_X = \sum_{i=1}^n p_i f\left(\frac{x_i}{E(X)}\right) \geq f\left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i x_i}{E(X)}\right) = f(1) = 0$$

3. a) On vérifie aisément que la fonction proposée est effectivement une densité de probabilité. Ceci fait, des calculs simples donnent :

$$E(X) = \frac{m}{m-1}, \text{ et } K_X = \ln\left(\frac{m-1}{m}\right) + \frac{1}{m-1}$$

b) La fonction $K_X : x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}$ définie précédemment est continue sur $]1, +\infty[$, d'image \mathbb{R}^{+*} .

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure lorsque $r > 0$, et la question 1.a, lorsque $r = 0$.

Exercice 3.17.

1. Démontrer que deux variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

2. Soit n un entier tel que $2 \leq n$. Une urne contient des boules rouges et des blanches en proportions respectives r et b , avec $0 < r < 1$ et $b = 1 - r$.

Un joueur effectue n tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise de la boule obtenue à chaque étape du tirage.

Pour $k \geq 2$, le joueur gagne 1 point au $k^{\text{ème}}$ tirage si la couleur de la boule obtenue à ce tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Sinon, son gain à ce rang du tirage est nul.

Soit G la variable aléatoire égale au nombre de points gagnés par le joueur au cours des n tirages.

a) Pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on définit la variable aléatoire X_k égale au gain du joueur pour le tirage de rang k .

Préciser la loi de X_k et calculer la covariance $\text{Cov}(X_k, X_{k+1})$, pour $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$.

b) Calculer l'espérance et la variance de G .

c) Peut-on choisir r et b pour que G suive une loi binomiale ?

3. On reprend le jeu précédent et on définit la variable aléatoire T_n par : si $G \geq 1$, T_n est égal au rang du tirage amenant le premier point et sinon, T_n vaut $n+1$.

a) Déterminer la loi de T_n .

b) Dans cette question, $r = b = \frac{1}{2}$.

Comparer la loi de $T_n - 1$ avec la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

En déduire une estimation de $E(T_n)$ quand n est grand.

Solution :

1. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant respectivement les lois de Bernoulli $\mathcal{B}(a)$ et $\mathcal{B}(b)$. On sait que pour tout couple (X, Y) on a :

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \implies \text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Réciproquement, supposons $\text{Cov}(X, Y) = 0$. La variable XY suit une loi de Bernoulli puisque $XY(\Omega) = \{0, 1\}$. Son paramètre est $E(XY)$ et par hypothèse ici :

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \implies E(XY) = E(X)E(Y) = ab.$$

Ainsi : $ab = P(XY = 1) = P((X, Y) = (1, 1))$, d'où

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) = P(X = 1) \times P(Y = 1).$$

Or on sait que si A et B sont des événements indépendants il en est de même des événements \bar{A} et B , ainsi que des événements \bar{A} et \bar{B} et enfin que des événements A et \bar{B} .

Comme ici $\overline{(X = 1)} = (X = 0)$ et $\overline{(Y = 1)} = (Y = 0)$, le tour des possibles est fait et X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

2. Les variables introduites sont liées par $G = \sum_{k=2}^n X_k$.

a) X_k suit une loi de Bernoulli et les expériences qui constituent l'événement $(X_k = 1)$ sont de la forme suivante : $(\dots R_{k-1} B_k \dots)$ ou $(\dots B_{k-1} R_k \dots)$.

Ainsi :

$$P(X_k = 1) = rb + br = 2rb, \text{ et } X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(2rb)$$

La variable $X_k X_{k+1}$ suit encore une loi de Bernoulli et les expériences qui constituent l'événement $(X_k X_{k+1} = 1)$, *i.e.* l'événement $(X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 1)$ sont de la forme suivante :

$$(\dots R_{k-1} B_k R_{k+1} \dots) \text{ ou } (\dots B_{k-1} R_k B_{k+1} \dots).$$

Donc :

$$P(X_k X_{k+1} = 1) = r^2 b + r b^2 = rb(r + b) = rb.$$

On en déduit que

$$\text{Cov}(X_k, X_{k+1}) = E(X_k X_{k+1}) - E(X_k)E(X_{k+1}) = rb - 4r^2 b^2.$$

b) Par linéarité de l'espérance : $E(G) = \sum_{k=2}^n E(X_k) = 2(n - 1)rb$.

$$\text{On a : } V(G) = \sum_{k=2}^n V(X_k) + 2 \sum_{2 \leq k < h \leq n} \text{Cov}(X_k, X_h).$$

Les variables X_k et X_h sont indépendantes quand $k + 2 \leq h$ parce que les 4 tirages concernés sont distincts.

Il ne reste donc que : $V(G) = \sum_{k=2}^n V(X_k) + 2 \sum_{2 \leq k < n} \text{Cov}(X_k, X_{k+1})$, et :

$$V(G) = 2(n - 1)br(1 - 2br) + 2(n - 2)rb(1 - 4br)$$

c) On voit que si $1 - 4br = 0$ alors $\text{Cov}(X_k, X_{k+1}) = 0$ et d'après la question 1. on peut dire que X_k et X_{k+1} sont indépendantes.

G est alors somme de $n - 1$ variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $2rb = \frac{1}{2}$: G suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n - 1, 1/2)$.

Pour que deux réels r et b vérifient à la fois $r + b = 1$ et $rb = \frac{1}{4}$ il faut et il suffit que r et b soient les racines du polynôme $X^2 - X + \frac{1}{4} = (X - \frac{1}{2})^2$.

On a donc montré :

$$r = b = \frac{1}{2} \implies G \hookrightarrow \mathcal{B}(n - 1, 1/2)$$

[On peut démontrer que ce sont les seules valeurs de r et b qui permettent que G suive une loi binomiale]

3. La variable aléatoire T_n est à valeurs dans $\{2, 3, \dots, n + 1\}$.

a) Pour $k \leq n$, $(T_n = k) = \{(R_1 R_2 \dots R_{k-1} B_k \dots), (B_1 B_2 \dots B_{k-1} R_k \dots)\}$.
Ainsi :

$$P(T_n = k) = r^{k-1}b + b^{k-1}r = br(r^{k-2} + b^{k-2}).$$

$(T_n = n+1) = (G=0) = \{(R_1 R_2 \dots R_n), (B_1 B_2 \dots B_n)\}$:

$$P(T_n = n+1) = r^n + b^n.$$

b) On a $r = b = \frac{1}{2}$. On a :

$$P(T_n = k) = \frac{1}{2^{k-1}} \text{ pour } 2 \leq k \leq n \text{ et } P(T_n = n+1) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Considérons S une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(1/2)$:

On a $P(S = k) = P(T_n - 1 = k) = \frac{1}{2^k}$ pour $1 \leq k \leq n-1$ et $P(S = k) = \frac{1}{2^k}$ pour $k \geq n$.

On sait que $E(S) = 2$. Donc :

$$E(T_n - 1) = E(S) + \frac{n}{2^{n-1}} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2 + \frac{n}{2^{n-1}} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Ce dernier terme est le reste d'indice $n-1$ d'une série convergente donc il tend vers 0 quand n tend vers l'infini. De même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0$, d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n - 1) = E(S) = 2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n) = 3.$$

Exercice 3.18.

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a + b < 1$.

Un interrupteur admet deux positions que l'on note 0 et 1.

Si, à l'instant n , il est en position 0, il sera encore en position 0 à l'instant $n+1$ avec la probabilité $1-a$ et passera en position 1 avec la probabilité a .

De même, s'il est en position 1, il y restera l'instant suivant avec la probabilité $1-b$ et basculera en position 0 avec la probabilité b .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit X_n la position de l'interrupteur à l'instant n .

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} P([X_{n+1} = 0]) \\ P([X_{n+1} = 1]) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} P([X_n = 0]) \\ P([X_n = 1]) \end{pmatrix}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$.

2. Si l'on suppose que X_0 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a+b}$, déterminer la loi de la variable X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Dans le cas général, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi de Bernoulli dont on déterminera le paramètre p_n .

4. Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la covariance entre les variables X_n et X_{n+1} . Quelle est la limite de la suite $(\text{Cov}(X_n, X_{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$?

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule des probabilités totales nous donne, pour $x \in \{0, 1\}$:

$$P(X_{n+1} = x) = P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = x)P(X_n = 0) + P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = x)P(X_n = 1)$$

En utilisant les données de l'énoncé concernant les probabilités conditionnelles, on trouve :

$$\begin{cases} P(X_{n+1} = 0) = (1 - a)P(X_n = 0) + bP(X_n = 1) \\ P(X_{n+1} = 1) = aP(X_n = 0) + (1 - b)P(X_n = 1) \end{cases}$$

D'où la relation matricielle annoncée.

2. On remarque que le vecteur $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, il en est donc de même du vecteur $\begin{pmatrix} b/(a+b) \\ a/(a+b) \end{pmatrix}$.

Par conséquent si X_0 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a+b}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n est la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a+b}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$, donc X_n suit une loi de Bernoulli.

Déterminons son paramètre $p_n = P(X_n = 1)$.

D'après la relation matricielle trouvée à la première question, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = a(1 - p_n) + (1 - b)p_n = a + (1 - a - b)p_n$$

Donc la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

La solution de l'équation $x = a + (1 - a - b)x$ est $\frac{a}{a+b}$ donc la suite $(p_n - \frac{a}{a+b})_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1 - a - b$.

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{a}{a+b} + (1 - a - b)^n (p_0 - \frac{a}{a+b})$$

où p_0 est le paramètre de la loi de X_0 .

4. Comme $a + b < 1$, on déduit de la question précédente que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{a}{a+b}$$

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc en loi vers une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a+b}$.

5. On a :

$$E(X_n X_{n+1}) = P(X_n X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)$$

Soit : $E(X_n X_{n+1}) = p_n(1-b)$, et donc :

$$\text{Cov}(X_n, X_{n+1}) = p_n(1-b) - p_n p_{n+1} = (1-b-a)p_n(1-p_n)$$

et on déduit de la question 3. que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Cov}(X_n, X_{n+1}) = \frac{ab(1-b-a)}{a+b}$$

Exercice 3.19.

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^+ , définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{B}, P) , suit une loi de Weibull, $\mathcal{W}(a, b)$ de paramètres a et b réels strictement positifs si :

$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Soit X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires réelles indépendantes suivant une loi $\mathcal{W}(1, b)$.

a) Montrer que $\tilde{X}_n = \inf(X_1, \dots, X_n)$ suit une loi $\mathcal{W}(1, \frac{b}{n})$.

b) Pour chaque $\omega \in \Omega$, on range $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ dans l'ordre décroissant. On note $\tilde{X}_k(\omega)$ le $k^{\text{ème}}$ de ces nombres. On définit ainsi une variable aléatoire \tilde{X}_k .

Montrer que la fonction de répartition de \tilde{X}_k est :

$$\tilde{F}_k(x) = \sum_{r=n-k+1}^n \binom{n}{r} (1 - e^{-\frac{x}{b}})^r (e^{-\frac{x}{b}})^{n-r}$$

2. On suppose que la variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{W}(a, b)$.

a) Soient s, t réels. Comparer, selon les valeurs du paramètre a :

$$P_{[X \geq t]}([X \geq s+t]) \text{ et } P([X \geq s]).$$

b) Montrer que l'espérance de X est $E(X) = b\Gamma(1 + \frac{1}{a})$.

3. On considère une unité centrale d'ordinateur constituée de n composants tels que la panne d'un seul d'entre eux provoque la panne de l'ensemble. On suppose que les n composants ont des durées de vie T_1, \dots, T_n indépendantes suivant toutes la même loi $\mathcal{W}(a, b)$.

Exprimer la durée de vie T de l'unité centrale. Quelle est la loi de T lorsque $a = 1$?

Solution :

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[\tilde{X}_n > x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i > x]$. On en déduit :

$$P(\tilde{X}_n \leq x) = 1 - P(\tilde{X}_n > x) = 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(X \leq x))$$

$$P(\tilde{X}_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (e^{-\frac{x}{b}})^n = 1 - e^{-\frac{nx}{b}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donc $\tilde{X}_n \hookrightarrow \mathcal{W}(1, \frac{b}{n})$.

b) On a, $\tilde{X}_1 \geq \tilde{X}_2 \geq \dots \geq \tilde{X}_k \geq \dots \geq \tilde{X}_n$.

L'événement $[\tilde{X}_k \leq x]$ est réalisé si, et seulement si, au moins $n - k + 1$ des événements $[X_i \leq x]$ sont réalisés.

Or on réalise exactement r des événements $(X_i \leq x)$ avec la probabilité :

$$\binom{n}{r} [F_X(x)]^r [1 - F_X(x)]^{n-r}$$

(phénomène binomial, la probabilité du succès à chaque épreuve valant $F_X(x)$, où F_X désigne la fonction de répartition de la loi de chaque X_i , les variables en présence étant indépendantes)

Par disjonction des différents cas possibles, on a donc :

$$\begin{aligned} P(\tilde{X}_k \leq x) &= \sum_{r=n-k+1}^n \binom{n}{r} (F(x))^r (1 - F(x))^{n-r} \\ &= \sum_{r=n-k+1}^n \binom{n}{r} (1 - e^{-\frac{x}{b}})^r (e^{-\frac{x}{b}})^{n-r} \end{aligned}$$

2. a) On a :

$$P(X \geq s + t | X \geq t) = \frac{P(X \geq s + t)}{P(X \geq t)} = \frac{e^{-\left(\frac{s+t}{b}\right)^a}}{e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^a}} = e^{-\left(\frac{s+t}{b}\right)^a + \left(\frac{t}{b}\right)^a}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(X \geq s + t | X \geq t) \geq P(X \geq s) &\iff -\left(\frac{s+t}{b}\right)^a + \left(\frac{t}{b}\right)^a \geq -\left(\frac{s}{b}\right)^a \\ &\iff s^a + t^a \geq (s+t)^a \end{aligned}$$

Une étude rapide de la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $t \mapsto (s+t)^a - s^a - t^a$ montre que l'on a :

- $P(X \geq s + t | X \geq t) > P(X \geq s)$ si $a < 1$.
- $P(X \geq s + t | X \geq t) = P(X \geq s)$ si $a = 1$.

- $P(X \geq s+t | X \geq t) < P(X \geq s)$ si $a > 1$.

b) On obtient une densité de X par dérivation, puis en effectuant le calcul directement avec la borne $+\infty$, puisque les arguments de négligeabilités classiques prouvent la convergence :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \frac{at}{b} \left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^a} dt = a \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{b}\right)^a e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^a} dt$$

Le changement de variable $u = \left(\frac{t}{b}\right)^a$ est légitime et donne alors :

$$E(X) = b \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{a}} e^{-u} du = b\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

3. L'événement $[T > t]$ est réalisé si et seulement si chacun des événements $[T_i > t]$, $i = 1, \dots, n$ est réalisé. On a, puisque les composants sont indépendants les uns des autres, et que leurs durées de vie suivent toutes la même loi :

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F(t)) = 1 - e^{-n\left(\frac{t}{b}\right)^a}$$

Donc, si $a = 1$, $T \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{b}{n}\right)$.

Exercice 3.20.

1. Montrer que la fonction \tan définit une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur \mathbb{R} . On note Arc tan sa fonction réciproque. Quelle est la fonction dérivée de la fonction Arc tan ?

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Déterminer le réel k de telle sorte que la fonction $f_{(\alpha, \beta)} : x \mapsto \frac{k}{\alpha^2 + (x - \beta)^2}$ soit une densité de probabilité.

On dit alors qu'une variable aléatoire réelle de densité $f_{(\alpha, \beta)}$ suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$.

3. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$.

a) Étudier l'existence des moments de Y .

b) Expliciter la fonction de répartition F_Y de Y .

c) Pour tout réel $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = aY + b$.

4. Si U est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 1]$, montrer que la relation : $X = \tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right)$, définit une variable aléatoire de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1, 0)$.

5. En déduire un programme Pascal de simulation d'une loi $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$.

6. Un point M est pris au hasard sur le demi-cercle unité (demi-cercle situé dans le demi-plan des « x positifs») avec la loi de probabilité uniforme sur ce demi-cercle. On note U et V les coordonnées du point M .

Montrer que $\frac{V}{U}$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Cauchy dont on déterminera les paramètres.

Solution :

1. La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est définie, continue et dérivable sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$, avec pour tout x , $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$.

Cette fonction est continue strictement croissante, donc réalise une bijection de I sur $\tan(I) = \mathbb{R}$.

On dérive alors la bijection réciproque arctan et pour tout y de \mathbb{R} :

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \frac{1}{1 + y^2}$$

2. • $\forall \alpha, \beta, f_{(\alpha, \beta)}$ est positive si et seulement si $k \geq 0$.

• $\forall \alpha, f_{(\alpha, \beta)}$ est continue sur \mathbb{R} .

• Enfin :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\alpha, \beta)}(x) dx = \frac{k}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (\frac{x-\beta}{\alpha})^2} dx = \frac{k}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{k\pi}{\alpha}$$

(on a effectué le changement de variable : $u = \frac{x - \beta}{\alpha}$).

Ainsi, $f_{(\alpha, \beta)}$ est une densité de probabilité si et seulement si $k = \frac{\alpha}{\pi}$.

3. a) On a $xf_{(\alpha, \beta)}(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{k}{x}$, comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est d'intégrale divergente sur $[1, +\infty[$ la variable aléatoire Y n'a pas d'espérance. A fortiori Y n'a aucun moment d'ordre p avec $p \geq 1$.

b) $F_Y(x) = \int_{-\infty}^x f_{(\alpha, \beta)}(t) dt = \frac{1}{\alpha\pi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{1 + (\frac{t-\beta}{\alpha})^2} dt$

Donc :

$$F_Y(x) = \frac{1}{\pi} [\arctan(\frac{x - \beta}{\alpha}) + \frac{\pi}{2}]$$

c) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, la loi de la variable aléatoire : $Z = aY + b$ est donnée par, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F_Z(x) = P(aY + b \leq x) = P(Y \leq \frac{x - b}{a}) = F_Y(\frac{x - b}{a})$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x-b}{a} - \beta\right) + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x-b-a\beta}{a\alpha}\right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

Donc :

$$X = aY + b \hookrightarrow \mathcal{C}(a\alpha, b + a\beta)$$

4. On suppose que $U \hookrightarrow U([0, 1])$ et on pose $X = \tan[\pi(U - \frac{1}{2})]$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(\tan[\pi(U - \frac{1}{2})] \leq x) = P(\pi(U - \frac{1}{2}) \leq \arctan(x)) \\ &= P(U \leq \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d'où $X \hookrightarrow \mathcal{C}(1, 0)$.

5. Proposition d'un programme Pascal de simulation d'une loi $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$.

```

program Loi_Cauchy ;
Var a,b : integer ; U,X : real ;
Begin
readln(a) ; readln(b) ;
U := random ;
X:=a*tan ( PI *(U- 0.5)) + b ;
writeln(X) ;
End.
```

6. Si on note θ l'angle au centre, on a : $\frac{V}{U} = \tan(\theta)$, et la loi de θ est la loi uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

Soit $x \in \mathbb{R}$; $\tan(\theta) \leq x \iff -\frac{\pi}{2} < \theta \leq \arctan x$.

Donc $F_{V/U}(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2}$ et la loi de V/U est la loi $\mathcal{C}(1, 0)$.

Exercice 3.21.

Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N , avec $N \geq 3$.

On effectue une succession de tirages, en choisissant à chaque fois au hasard une boule, que l'on remplace dans l'urne avant le tirage suivant.

Pour $n \geq 2$ et $n \leq N$, on note X_n le nombre aléatoire de tirages justes nécessaires pour obtenir n numéros distincts.

1. Quelle est la loi de $X_2 - 1$? Déterminer espérance et variance de X_2 .

Pour $n \geq 3$, on pose $Y_n = X_n - X_{n-1}$

2. Donner une interprétation de Y_n , déterminer sa loi, son espérance et sa variance.

3. Déterminer l'espérance et la variance de X_n .

4. On suppose N pair et on pose $N = 2m$. Etudier la convergence des suites $(\frac{E(X_m)}{m})_{m \geq 2}$ et $(\frac{V(X_m)}{m})_{m \geq 2}$.

Solution :

1. La variable aléatoire Y_2 représente le temps à attendre pour obtenir un numéro différent du premier numéro obtenu, une fois celui-ci obtenu.

Soit Z le numéro du premier numéro obtenu. On a :

$$P(Y_2 = k) = \sum_{i=1}^n P(Y_2 = k/Z = i)P(Z = i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \times \frac{1}{n}$$

$$= \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

Ainsi Y_2 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{N-1}{N}$. (ce que l'on pouvait dire directement en remarquant que le résultat du premier tirage est sans intérêt!). Ainsi :

$$E(X_2) = E(Y_2) + 1 = \frac{2N-1}{N-1}, V(X_2) = V(Y_2) = \frac{N}{(N-1)^2}$$

2. La variable Y_n représente le temps d'attente pour obtenir un numéro différent des $(n-1)$ numéros distincts déjà obtenus et ce à partir du moment où l'on obtient ces $(n-1)$ numéros distincts.

A chaque tirage la probabilité de conclure vaut donc $1 - \frac{n-1}{N}$ et celle de ne pas conclure vaut $\frac{n-1}{N}$. L'indépendance des résultats des tirages effectués montre alors que Y_k suit la loi géométrique de paramètre $1 - \frac{n-1}{N}$ et :

$$P(Y_n = k) = \left(\frac{n-1}{N}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{n-1}{N}\right)$$

$$E(Y_n) = \frac{N}{N-n+1}, V(Y_n) = \frac{N(n-1)}{(N-n+1)^2}$$

3. Par sommation et indépendance pour le calcul de la variance, il vient :

$$E(X_n) = N \sum_{k=1}^n \frac{1}{N-k+1}, V(X_n) = N \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{(N-k+1)^2}$$

$$4. \star E\left(\frac{X_m}{m}\right) = \sum_{k=1}^m \frac{2}{2m-k+1} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{2}{2 - \frac{k-1}{m}}$$

On reconnaît une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \frac{2}{2-x}$, pour une subdivision régulière de $[0, 1]$ et :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E\left(\frac{X_m}{m}\right) = \int_0^1 \frac{2 dx}{2-x} = 2 \ln 2$$

★ De même $\frac{1}{m} V(X_m) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{2^{\frac{k-1}{m}}}{(2 - \frac{k-1}{m})^2}$

On reconnaît une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \frac{2x}{(2-x)^2}$ toujours sur le segment $[0, 1]$ pour une subdivision régulière. Donc :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{V(X_m)}{m} = \int_0^1 \frac{2 dx}{(2-x)^2} = 2(1 - \ln 2)$$

Exercice 3.22.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et k un entier tel que $2 \leq k \leq n$. Une urne contient n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n . Un joueur tire en une seule fois k boules de l'urne.

X_1 et X_k sont les variables aléatoires égales respectivement au plus petit et au plus grand numéro tiré.

1. Dans cette question, $k = 2$.

- a) Déterminer la loi de X_1 et calculer son espérance.
- b) Déterminer la loi de X_2 , comparer X_1 et $n+1-X_2$, puis calculer $E(X_2)$.

2. On revient au cas général : $2 \leq k \leq n$.

a) Déterminer la loi de X_1 .

b) Le joueur note les numéros des boules sorties et range ces nombres dans l'ordre croissant : $x_1 < x_2 < \dots < x_k$.

Pour j appartenant à $\llbracket 1, k \rrbracket$, soit X_j la variable aléatoire égale au $j^{\text{ème}}$ numéro obtenu dans l'ordre croissant, donc égal à x_j et on pose :

$$D_1 = X_1, D_2 = X_2 - X_1, \dots, D_k = X_k - X_{k-1}.$$

On pose de plus $D_{k+1} = n+1 - X_k$.

Préciser la loi du vecteur aléatoire $(D_1, D_2, \dots, D_{k+1})$, et expliquer pourquoi les variables $(D_j)_{1 \leq j \leq k+1}$ suivent toutes la même loi.

b) En déduire les espérances de X_1 et de X_k , puis la formule :

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} i \binom{n-i}{k-1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (*)$$

Solution :

Pour modéliser ce jeu on choisit Ω égal à l'ensemble des parties decardinal k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, et on fait l'hypothèse d'équiprobabilité.

1. Ici $\text{card}(\Omega) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

a) $X_1(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $(X_1 = i)$ est l'ensemble des parties contenant i ainsi qu'un autre entier entre $(i+1)$ et n . Cet ensemble est de cardinal $n-i$. Donc :

$$P(X_1 = i) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

On a :

$$E(X_1) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right)$$

$$E(X_1) = n - \frac{2n-1}{3} = \frac{n+1}{3}$$

b) De même $X_2(\Omega) = \llbracket 2, n \rrbracket$ et pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $P(X_2 = j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}$.

Posons $Y = n+1 - X_2$. On a : $Y(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a :

$$P(Y = i) = P(X_2 = n+1-i) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}.$$

Ainsi $n+1 - X_2$ a même loi que X_1 et :

$$E(X_2) = n+1 - \frac{n+1}{3} = \frac{2}{3}(n+1)$$

2. Ici $\text{card}(\Omega) = \binom{n}{k}$.

a) Il vient $X_1(\Omega) = \llbracket 1, n-k+1 \rrbracket$ et pour $i \in \llbracket 1, n-k+1 \rrbracket$, $(X_1 = i)$ est l'ensemble des parties contenant i et $k-1$ entiers entre $i+1$ et n . Donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-k+1 \rrbracket P(X_1 = i) = \frac{\binom{n-i}{k-1}}{\binom{n}{k}}$$

b) Notons $\mathcal{D} = (D_1, D_2, \dots, D_{k+1})$. $\mathcal{D}(\Omega)$ est formé de tous les $(k+1)$ -uplets $(d_1, d_2, \dots, d_{k+1}) \in (\mathbb{N}^*)^{k+1}$ qui vérifient $\sum_{i=1}^{k+1} d_i = n+1$.

Il y a bijection entre Ω et $\mathcal{D}(\Omega)$ puisque :

$$\begin{cases} d_1 = x_1 \\ d_2 = x_2 - x_1 \\ \dots \\ d_k = x_k - x_{k-1} \\ d_{k+1} = n+1 - x_k \end{cases} \iff \left(\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, x_j = \sum_{i=1}^j d_i \right)$$

\mathcal{D} suit donc une loi uniforme avec :

$$\forall (d_1, d_2, \dots, d_{k+1}) \in \mathcal{D}(\Omega), P(\mathcal{D} = (d_1, d_2, \dots, d_{k+1})) = \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Pour tout $(d_1, d_2, \dots, d_{k+1}) \in \mathcal{D}(\Omega)$, si on effectue une permutation sur les composantes du $(k+1)$ -uplet $(d_1, d_2, \dots, d_{k+1})$ on obtient un autre $(k+1)$ -uplet de $\mathcal{D}(\Omega)$, donc les lois marginales du vecteur \mathcal{D} sont égales.

En particulier, comme $\sum_{i=1}^{k+1} D_i = n+1$:

$$E(D_1) = E(D_2) = \dots = E(D_{k+1}) = \frac{n+1}{k+1}$$

c) Ici $X_1 = D_1$, donc $E(X_1) = \frac{n+1}{k+1}$.

$X_k = n+1 - D_{k+1}$, donc $E(X_k) = (n+1)(1 - \frac{1}{k+1}) = (n+1)\frac{k}{k+1}$.

Reprenons la loi de X_1 : $E(X_1) = \sum_{i=1}^{n-k+1} i \frac{\binom{n-i}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{k+1}$

Du fait que $\binom{n}{k} \times \frac{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ on a bien :

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} i \binom{n-i}{k-1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Exercice 3.23.

On considère un tournoi de n participants ($n \geq 2$) où le vainqueur est le joueur qui a obtenu le plus de points. On note X_i la variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} qui est égale au nombre de points obtenus par le joueur i à l'issue du jeu.

On suppose que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition F .

On note V_n l'événement : « il existe un unique vainqueur ».

1. Écrire V_n comme la réunion de n événements disjoints.

2. En déduire que $P(V_n) = n \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 = k) F(k-1)^{n-1}$.

3. On suppose que X_1 ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(V_n) = 0$.

Commenter le résultat.

4. On suppose que X_1 suit la loi uniforme sur l'ensemble d'entiers $\{0, \dots, m\}$ ($m \in \mathbb{N}$).

- a) Donner alors l'expression de $P(V_n)$.
 b) À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que quand m tend vers l'infini, on a : $\sum_{k=0}^m k^{n-1} \sim \frac{m^n}{n}$.
 c) En déduire $\lim_{m \rightarrow +\infty} P(V_n)$. Commenter le résultat.

Solution :

1. Notons G_i l'événement « le joueur i gagne ». Alors :

$$V_n = \bigcup_{i=1}^n (\overline{G_1} \cap \dots \cap \overline{G_{i-1}} \cap G_i \cap \overline{G_{i+1}} \cap \dots \cap \overline{G_n})$$

2. Par incompatibilité :

$$\begin{aligned} P(V_n) &= \sum_{k=1}^n P(\overline{G_1} \cap \dots \cap \overline{G_{i-1}} \cap G_i \cap \overline{G_{i+1}} \cap \dots \cap \overline{G_n}) \\ &= nP(G_1 \cap \overline{G_2} \cap \dots \cap \overline{G_n}) \end{aligned}$$

par symétrie du problème.

En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = k)_{k \geq 0}$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(V_n) &= n \sum_{k=0}^{+\infty} P_{(X_1=k)}(G_1 \cap \overline{G_2} \cap \dots \cap \overline{G_n}) P(X_1 = k) \\ &= n \sum_{k=0}^{+\infty} P((X_2 \leq k-1) \cap \dots \cap (X_n \leq k-1)) P(X_1 = k) \\ &= n \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_2 \leq k-1) \dots P(X_n \leq k-1) P(X_1 = k). \end{aligned}$$

Les variables étant identiquement distribuées, on a bien :

$$P(V_n) = n \sum_{k=0}^{+\infty} [F(k-1)]^{n-1} P(X_1 = k)$$

3. Par hypothèse, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $P(X_1 = K) > 0$ et pour tout $k \geq K + 1$, $P(X_1 = k) = 0$. Dans ce cas :

$$P(V_n) = n \sum_{k=0}^K [F(k-1)]^{n-1} P(X_1 = k).$$

Or, pour tout $k \in [0, K]$, $F(k-1) \in [0, 1[$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n[F(k-1)]^{n-1} = 0$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(V_n) = 0$$

Quand le nombre de joueurs devient très grand, il y a très peu de chances pour qu'il y ait, dans ce cadre, un unique vainqueur.

4. a) On a $P(V_n) = n \sum_{k=0}^m \left(\frac{k}{m+1}\right)^{n-1} \frac{1}{m+1} = \frac{n}{(m+1)^n} \sum_{k=0}^m k^{n-1}$.

b) On écrit : $\sum_{k=0}^m k^{n-1} = m^n \times \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left(\frac{k}{m}\right)^{n-1}$.

On reconnaît alors une somme de Riemann et :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left(\frac{k}{m}\right)^{n-1} = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^m k^{n-1} \underset{(m \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{m^n}{n}$$

c) Donc : $P(V_n) \underset{(m \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{n}{(m+1)^n} \times \frac{m^n}{n} \underset{(m \rightarrow \infty)}{\sim} 1$. Soit :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(V_n) = 1$$

Quand le nombre de points que peut marquer un joueur, dans ce cadre, devient grand, la probabilité qu'il y ait un unique vainqueur est proche de 1.

