3

PROBABILITÉS

Exercice 3.01.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X la variable aléatoire à densité, de densité f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

1. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire T_n par :

$$T_n = \frac{\max(X_1, \ldots, X_n)}{\sqrt{n}}.$$

a) Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire T.

b) Vérifier que T est une variable aléatoire à densité et donner une densité de T.

2. On considère une variable aléatoire N, indépendante des X_k, qui suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$, avec $0 < q < 1$.

On définit la variable aléatoire U par : pour tout $\omega \in \Omega$, $U(\omega) = \min\big(X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega)\big)$.

a) Montrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a : $P(U > x) = \dfrac{1-q^2}{x^2 - q^2}$.

b) Établir l'existence de l'espérance de la variable aléatoire U, notée $E(U)$.

c) Établir l'égalité suivante :

$$E(U) = 1 + \int_1^{+\infty} P\big([U > x]\big)dx.$$

d) Calculer $E(U)$.

Solution :

1.a) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sauf en 1 et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ valant 1.

La fonction de répartition de X est donc : $F_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit x réel. On a : $F_{T_n}(x) = P\big([T_n \leqslant x]\big) = P\big([\sup(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x\sqrt{n}]\big)$, soit encore,

$$F_{T_n}(x) = P\big([X_1 \leqslant x\sqrt{n}] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant x\sqrt{n}]\big) = \big(F_X(x\sqrt{n})\big)^n = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x\sqrt{n} > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Si $x \leqslant 0$, on a $F_{T_n}(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = 0$.
- Si $x > 0$, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $x\sqrt{n} > 1$.

Soit $n \geqslant n_0$; on a alors $F_{T_n}(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$ et, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = e^{-1/x^2}$.

b) On vérifie facilement que F_T est bien une fonction de répartition et qui plus est, d'une variable à densité.

Une densité de T est :

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t^3}\, e^{-1/t^2} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.a) Soit $([N = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne :

$$P\big([U > x]\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([U > x] \cap [N = n]\big)$$

Or $P\big([U > x] \cap [N = n]\big) = P\big([U_n > x] \cap [N = n]\big)$. Comme les variables X_k et la variable N sont indépendantes, le lemme des coalitions permet d'affirmer que U_n et N sont indépendantes. On a donc :

$$\begin{aligned} P\big([U > x]\big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([U_n > x]\big) \times P\big([N = n]\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{2n}}(1 - q^2)q^{2n-2} \\ &= \frac{1 - q^2}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{q^2}{x^2}\right)^{n-1} = \frac{1 - q^2}{x^2 - q^2} \end{aligned}$$

b) Pour tout $x > 1$, une densité de U est $f_U(x) = 2(1-q^2)\dfrac{x}{(x^2-q^2)^2}$ et $0 \leqslant x f_U(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ d'intégrale convergente. Donc $E(U)$ existe.

c) Pour $A > 1$, une intégration par parties donne :

$$\int_1^A t f_U(t)dt = \Big[-t\big(1-F_U(t)\big)\Big]_1^A + \int_1^A \big(1-F_U(t)\big)dt$$

Il reste à vérifier grâce à l'expression de $1-F_U$ trouvée ci dessus, que $\lim\limits_{A\to+\infty} A\big(1-F_U(A)\big) = 0$ et à passer à la limite lorsque A tend vers $+\infty$. Il vient :

$$E(U) = \int_1^{+\infty} t f_U(t)dt = 1 + \int_1^{+\infty} P\big([U>t]\big)dt$$

d) Une décomposition classique donne :

$$\frac{1}{x^2-q^2} = \frac{1}{2q}\left[\frac{1}{x-q} - \frac{1}{x+q}\right]$$

et

$$E(U) = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1-q^2}{x^2-q^2}dx = 1 + \frac{1-q^2}{2q}\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x-q} - \frac{1}{x+q}\right]dx = 1 + \frac{1-q^2}{2q}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right).$$

Exercice 3.02.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des U_i et X et Y les variables aléatoires définies par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} U_i(\omega) \quad \text{et} \quad Y = N - X$$

1. Vérifier que pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, $\quad P([X=k]\cap[Y=\ell]) = \dbinom{k+\ell}{k} p^k(1-p)^\ell P(N=k+\ell)$.

2. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

3. On suppose que X et Y sont indépendantes et que N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose également que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) \neq 0$ et que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $P(Y=\ell) \neq 0$.

a) Vérifier que pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$(k+1)P(X=k+1)P(Y=\ell)(1-p) = (\ell+1)P(X=k)P(Y=\ell+1)p$$

b) En déduire la loi suivie par X puis celle suivie par Y.

c) Justifier que N suit une loi de Poisson. Préciser son paramètre.

Solution :

1. L'événement $[X = k \cap Y = \ell]$ est égal à l'événement $[X = k \cap N = k + \ell]$. En utilisant les probabilités conditionnelles, on a :

$$P([X = k \cap Y = \ell]) = P([X = k \cap N = k + \ell]) = P([X = k | N = k + \ell])P(N = k + \ell)$$

Or lorsque $N = k + \ell$, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(k + \ell, p)$. Ainsi :

$$P([X = k \cap Y = \ell]) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell P(N = k + \ell)$$

2. Si $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, il vient :

$$P([X = k \cap Y = \ell]) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} = p^k (1-p)^\ell e^{-\lambda} \frac{\lambda^k \lambda^\ell}{k!\ell!}$$

La loi marginale de X se calcule par :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} P([X = k \cap Y = \ell]) \\ &= p^k \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1-p)^\ell \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$. On montre de la même façon que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}((1-p)\lambda)$.

3.a) Notons $p_k = P(X = k)$ et $q_\ell = P(Y = \ell)$. On sait que :

$$\begin{cases} p_{k+1} q_\ell = P\big([X = k + 1] \cap [Y = \ell]\big) = \dbinom{k+\ell+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^\ell P(N = k + \ell + 1) \\ p_k q_{\ell+1} = P\big([X = k] \cap [Y = \ell + 1]\big) = \dbinom{k+\ell+1}{k} p^k (1-p)^{\ell+1} P(N = k + \ell + 1) \end{cases}$$

On termine cette question en remarquant que : $(k+1)\dbinom{k+\ell+1}{k+1} = (\ell+1)\dbinom{k+\ell+1}{k}$.

b) On prend $\ell = 0$ dans la relation précédente. Il vient :

$$p_{k+1} = \frac{1}{k+1} \frac{pq_1}{(1-p)q_0} p_k = \alpha \frac{p_k}{k+1}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $p_k = \alpha^k \dfrac{p_0}{k!}$ avec $\alpha = \dfrac{pq_1}{(1-p)q_0}$.

Or, $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k \Rightarrow p_0 = e^{-\alpha}$. Ainsi X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$.

De façon symétrique, en prenant $k = 0$ dans la relation, il vient :

$$P(Y = \ell + 1) = \frac{p_1(1-p)}{p_0 p} \frac{P(Y = \ell)}{\ell + 1}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $\beta = \dfrac{p_1(1-p)}{p_0 p}$, on a : $q_\ell = \beta^\ell \dfrac{q_0}{\ell!}$. Or, $1 = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} q_\ell \Rightarrow q_0 = e^{-\beta}$.

Ainsi Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\beta)$.

c) Par stabilité de la loi de Poisson pour deux variables indépendantes, N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha + \beta)$.

Exercice 3.03.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $p_n \in]0, 1[$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des points distincts du plan.

On construit une figure géométrique aléatoire admettant ces points pour sommets de la façon suivante :

pour i différent de j, on dessine une arête entre les points A_i et A_j avec la probabilité p_n et on ne dessine pas d'arête reliant A_i et A_j avec la probabilité $1 - p_n$.

L'objet de cet exercice est d'évaluer la probabilité d'avoir au moins un sommet isolé, c'est-à-dire un sommet qui n'est relié à aucun autre sommet par une arête.

On définit des variables aléatoires X_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$ par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } A_i \text{ est isolé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer la loi de X_1. En déduire l'espérance de S_n.

2. En déduire un majorant de la probabilité d'avoir au moins un sommet isolé.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $p_n = c\,\dfrac{\ln n}{n}$ avec $c > 0$.

3. Dans cette question, on suppose que $c > 1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = 1$.

4. Dans cette question, on suppose que $c < 1$.

a) Montrer que pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a :

$$P(Y = 0) \leqslant \frac{V(Y)}{E^2(Y)}$$

b) Calculer $E(X_i X_j)$ pour $i \neq j$ puis $E(S_n^2)$.

c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(S_n = 0)$.

Solution :

1. Le point A_1 est isolé signifie qu'il n'y a aucune arête le liant aux $(n-1)$ autres points. Les liaisons étant indépendantes, $P(X_1 = 1) = (1-p_n)^{n-1}$. La variable aléatoire suit une loi de Bernoulli et $E(X_1) = (1-p_n)^{n-1}$.

2. La variable S_n représente le nombres de points isolés. On a $E(S_n) = n(1-p_n)^{n-1}$.

Par l'inégalité de Markov : $P(S_n \neq 0) = P(S_n \geqslant 1) \leqslant E(S_n) = n(1-p_n)^{n-1}$.

3. On a

$$\begin{aligned}(n-1)\ln(1-p_n) &= (n-1)\ln\left(1-c\frac{\ln n}{n}\right) = -c\frac{n-1}{n}\ln n + \frac{c^2}{2}\frac{n-1}{n^2}\ln^2 n + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\\ &= -c\ln n + c\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\end{aligned}$$

Ainsi $(1-p_n)^{n-1} = \dfrac{1}{n^c}\exp\left(c\dfrac{\ln n}{n} + O\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)\right)$ et $E(S_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{c-1}}$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \neq 0) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = 1$

4. a) Le fait que Y est à valeurs positives et l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff donnent

$$P(Y=0) = P(Y \leqslant 0) \leqslant P(Y \leqslant 0) + P(Y \geqslant 2E(Y)) = P(|Y - E(Y)| \geqslant E(Y)) \leqslant \frac{V(Y)}{E^2(Y)}$$

b) On a $E(X_iX_j) = P[(X_i = 1) \cap (X_j = 1)] = P[(X_i = 1)|(X_j = 1)]P(X_j = 1) = (1-p_n)^{n-1}(1-p_n)^{n-2} = (1-p_n)^{2n-3}$. Puis

$$E(S_n^2) = \sum_{i=1}^n E(X_i^2) + \sum_{i\neq j} E(X_iX_j) = n(1-p_n)^{n-1} + (n^2-n)(1-p_n)^{2n-3} \underset{n\to\infty}{\sim} n(1-p_n)^{n-1}$$

car X_i^2 suit la loi de Bernoulli de même paramètre que X_i.
c) Le calcul effectué précédemment montre que $E(S_n) \sim n^{1-c} \to +\infty$. Et

$$\frac{V(S_n)}{E^2(S_n)} = \frac{E(S_n^2)}{E^2(S_n)} - 1 = \frac{n(1-p_n)^{n-1} + (n^2-n)(1-p_n)^{2n-3}}{n^2(1-p_n)^{2n-2}} - 1$$

Donc

$$P(S_n = 0) \leqslant \frac{1}{n(1-p_n)^{n-1}} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{1-p_n} - 1 \sim \frac{1}{n(1-p_n)^{n-1}}$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{1}{1-c\frac{\ln n}{n}} = 1$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = 0$.

Exercice 3.04.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

1. a) Déterminer la fonction de répartition de X.

b) Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

2. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$, indépendantes et de même loi que X.

On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ et } T_n = Z_n - \ln(n).$$

a) Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire T.

b) Vérifier que T est à densité et donner une densité f_T de T.

3. On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V admettant chacune f_T pour densité.

À l'aide du changement de variable $y = (1+e^{-x})e^t$, calculer une densité de la variable aléatoire $W = U - V$.

Solution :

1. a) On a donc, pour tout réel x,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

(changement de variable $u = e^{-t}$)

b) Au voisinage de $+\infty$, on a $xf(x) \sim xe^{-x}$. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ est convergente (c'est par exemple l'espérance d'une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1), et que la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est impaire, on en déduit que X possède une espérance et que $E(X) = 0$.

2. a) Soit x un réel. De manière classique :

$$\begin{aligned} P([T_n \leqslant x]) &= P([\sup(X_1,\ldots,X_n) - \ln n \leqslant x]) = P([\sup(X_1,\ldots,X_n) \leqslant x + \ln n]) \\ &= \left(\frac{1}{1+e^{-(x+\ln n)}}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\dfrac{e^{-x}}{n}}\right)^n = e^{-n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)} \end{aligned}$$

Comme $\ln\left(1+\dfrac{e^{-x}}{n}\right) \sim e^{-x}$, une simple composition de limite donne : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = e^{-e^{-x}}$.

b) La fonction $x \longmapsto e^{-e^{-x}}$ vérifie bien les propriétés d'une fonction de répartition : croissante, limite en $-\infty$ égale à 0, limite en $+\infty$ égale à 1, continue à droite en tout point. De plus la fonction possède les propriétés d'une fonction de répartition d'une variable à densité : continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 presque partout.

Enfin pour tout x réel :

$$f_T(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}$$

3. Une densité de $-V$ est $f_{-V}(x) = e^x e^{-e^x}$. En notant h une densité de $W = U - V$, comme les variables aléatoires sont indépendantes, on a :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(x-t)f_{-V}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)}e^{-e^{-(x-t)}}e^t e^{-e^t}dt = e^{-x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}e^{-e^t(1+e^{-x})}dt$$

Le changement de variable proposé, $y = (1+e^{-x})e^t$ est de classe C^1 et est bijectif. On a donc :

$$h(x) = e^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}y^2}{(1+e^{-x})^2} \times \frac{1}{y}dy = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\int_0^{+\infty} e^{-y}ydy = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

En conclusion, W suit la même loi que X.

Exercice 3.05.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit n un entier naturel et $k \in [\![0, n]\!]$.

1. Montrer que :

$$e^{-1} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n-k+1}(1-t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-t}dt$$

2. On pose : $S_{n-k} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}S_{n-k}$. Montrer que l'on a :

$$T_n = e^{-1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^{-t}dt$$

3. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}dt.$

À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre I_n et I_{n-1}.

En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $T_n = 1$.

Dans toute la suite, on note U_n une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ dont la loi est donnée par :

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ P(U_n = k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

4. Vérifier que l'on définit ainsi une loi de probabilité.

Pour toute variable aléatoire T, on appelle *moment factoriel d'ordre* k, pour $k \in \mathbb{N}$, les réels suivants :

$$m_k(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ E(T(T-1)\cdots(T-k+1)) & \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}$$

5. a) Montrer que pour $k \geqslant n+1$, on a $m_k(U_n) = 0$.
b) Montrer que pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a $m_k(U_n) = 1$.

6. On définit une suite $(Q_j)_{j\geqslant 0}$ de polynômes par :

$$Q_j(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ X(X-1)\cdots(X-j+1) & \text{si } j \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
b) En déduire une méthode de calcul des moments $E(U_n^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Solution :

1. La formule de Taylor reste intégral donne $e^{-1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n-k+1}(1-t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-t} dt$.

2. Ainsi

$$\begin{aligned} T_n &= e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{(-1)^{n-k}(1-t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-t} dt \\ &= e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{e^{-t}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t-1)^{n-k} dt = e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt \end{aligned}$$

3. Une intégration par parties donne $I_n = -e^{-1} + nI_{n-1}$. En divisant par $n!$, il vient

$$\frac{I_n}{n!} = -\frac{e^{-1}}{n!} + \frac{I_{n-1}}{(n-1)!}$$

On somme ces égalités pour k de 0 à n. On obtient $\dfrac{I_n}{n!} - \dfrac{I_0}{0!} = -e^{-1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$, et

$$T_n = e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - e^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1 \right) + I_0 = 1$$

4. Il reste à vérifier que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X_n = k) \geqslant 0$, ce qui sera vérifié si pour tout $p \geqslant 0$, $u_p = \displaystyle\sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^j}{j!} \geqslant 0$.

Pour cela on démontre que les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont adjacentes :

• $u_{2p+2} - u_{2p} = \dfrac{1}{(2p+2)!} - \dfrac{1}{(2p+1)!} < 0$

• $u_{2p+1} - u_{2p-1} = \dfrac{1}{(2p)!} - \dfrac{1}{(2p+1)!} > 0$

• $|u_{2p+1} - u_{2p}| \to 0$.

Elles convergent vers la même limite (e^{-1}). La suite (u_{2p+1}) étant la suite croissante, on a pour tout p, $u_p \geqslant u_1 = 0$.

5. a) La variable aléatoire U_n étant à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, on a $U_n(U_n-1)\cdots(U_n-n)=0$ et $m_k(U_n)=0$ si $k \geqslant n+1$.

b) La relation est vérifiée pour $k=0$ par définition de $m_0(T)$. Soit $k \in [\![1,n]\!]$

$$\begin{aligned} m_k(U_n) &= \sum_{i=k}^{n} i(i-1)\cdots(i-k+1)\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{i=k}^{n}\frac{1}{(i-k)!}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(-1)^j}{j!} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k}\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{n-k-i}\frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{i=0}^{n-k} P(U_{n-k}=i) = 1 \end{aligned}$$

6. a) La suite (Q_n) est une suite de polynômes échelonnée en degrés et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg(Q_k)=k$. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ et une base.

b) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, il existe $a_{0,k}, a_{1,k}, \ldots, a_{k,k}$ réels tels que $X^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_{j,k} Q_j$.

Pour déterminer $E(U_n^k)$, il suffit de calculer ces réels. En effet, par linéarité de l'espérance

$$E(U_n^k) = \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} m_k(U_n) = \sum_{j=0}^{k} a_{j,k}$$

Exercice 3.06.

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, où p est un réel de $]0,1[$. On pose de plus $q = 1-p$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

On considère également une variable aléatoire N, à valeur dans $\mathbb{N}^*$, possédant une espérance et indépendante des variables aléatoires X_n.

Pour tout ω de Ω, on pose $S(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$ et *on admet* que $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$ est une variable aléatoire.

Enfin, on rappelle la formule suivante, que l'on pourra utiliser sans la justifier. Pour tous entiers naturels r et s tels que $r \leqslant s$, on a :

$$\sum_{j=r}^{s} \binom{j}{r} = \binom{s+1}{r+1}$$

1. Déterminer $S_n(\Omega)$. Montrer que l'on a :

$$\forall\, k \in S_n(\Omega), \quad P([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

2. Compléter le script *Scilab* suivant pour que x contienne une simulation de la loi de S_3, où p est choisi par l'utilisateur :

```
p=input('entrer la valeur de p'),
t=find(rand(1,100)<p),
x=.......
```

3. a) Vérifier pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'existence de l'espérance conditionnelle $E(S\,|\,[N = k])$ et donner sa valeur.

b) En déduire $E(S)$.

4. On suppose dans cette question que N suit la loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de S.

Solution :

1. Comme on additionne des entiers naturels non nuls, on $S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$.
On montre le résultat demandé par récurrence sur n :
• Pour $n = 1$, la formule proposée devient $P([S_1 = k]) = pq^{k-1}$. Comme $S_1 = X_1$, la formule est vraie pour $n = 1$.
• Supposons que, pour un certain entier naturel n non nul, on ait : $P([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$ et considérons S_{n+1}. Soit k un entier supérieur ou égal à $n+1$ et considérons l'évènement $[S_{n+1} = k]$. Comme $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, on peut écrire :

$$P([S_{n+1} = k]) = \sum_{j=n}^{k-1} P([S_n = j] \cap [X_{n+1} = k - j])$$

Comme les variables (X_k) sont indépendantes, le lemme des coalitions permet alors d'affirmer que S_n et X_{n+1} sont indépendantes.
On a donc : $P([S_{n+1} = k]) = \sum_{j=n}^{k-1} P([S_n = j]) \times P([X_{n+1} = k - j])$.
En remplaçant $P([S_n = j]]$ grâce à l'hypothèse de récurrence :

$$P([S_{n+1} = k]) = \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} p^n q^{j-n} p q^{k-j-1} = p^{n+1} q^{k-(n+1)} \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1}$$

$$= p^{n+1} q^{k-(n+1)} \sum_{j=n-1}^{k-2} \binom{j}{n-1} = p^{n+1} q^{j-(n+1)} \binom{k-1}{n}$$

2. Le vecteur `t` contient les coordonnées du vecteur `rand` qui correspondent à un succès. Il suffit donc de chercher la troisième coodonnée de v qui correspond à la réalisation du troisième succès. Le programme complété est donc :

```
p=input('entrer la valeur de p')
t=find(rand(1,100)<p)
x=t(3)
```

3. a) L'espérance conditionnelle $E(S/[N=k]$ existe si et seulement si la série de terme général $iP_{[N=k]}\big([S=i]\big)$ est absolument convergente. Or, en utilisant le lemme des coalitions, pour S_k et N indépendantes :

$$P_{[N=k]}\big([S=i]\big)=\frac{P\big([S_k=i]\cap[N=k]\big)}{P\big([N=k]}=\frac{P\big([S_k=i]\cap[N=k]\big)}{P\big([N=k]}=\frac{P\big([S_k=i]\big)\times P\big([N=k]\big)}{P\big([N=k]}$$

Il reste donc : $iP_{[N=k]}\big([S=i]\big)=iP\big([S_k=i]\big)$ qui est le terme général de série convergente $E(S_k)=\frac{k}{p}$.

b) On applique alors la formule de l'espérance totale, en vérifiant au passage que toutes les séries considérées convergent :

$$\begin{aligned}E(S)&=\sum_{n=0}^{+\infty}E(S/[N=k])P([N=k])=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{k}{q}P([N=k])\\&=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}kP([N=k])=\frac{1}{p}E(N)=E(X_1)E(N)\end{aligned}$$

4. On a $S(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Pour déterminer la loi de S, on applique la formule des probabilités totales :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad P(S=k)=\sum_{n=1}^{+\infty}P([S=k]\cap[N=n])$$

D'une part : $P([S=k]\cap[N=n])=P([S_n=k]\cap[N=n])$ et comme, d'après le lemme des coalitions, S_k et N sont indépendantes, on obtient

$$P([S=k]\cap[N=n])=P(S_n=k)\times P(N=n)$$

D'autre part : Comme $S_n(\Omega)=[n,+\infty[$, on a $P(S_n=k)=0$ si $k<n$.

Il reste donc : $P(S=k)=\displaystyle\sum_{n=1}^{k}P(S_n=k)\times P(N=n)$.

On applique la formule précédente, en remplaçant $P([N=n])$ par pq^{n-1} et $P([S_n=k])$ par la valeur trouvée précédemment.

On a donc $P([S=k])=\displaystyle\sum_{n=1}^{k}\binom{k-1}{n-1}p^nq^{k-n}pq^{n-1}=q^{k-1}p^2\sum_{n=1}^{k}\binom{k-1}{n-1}p^{n-1}$.

On effectue un changement d'indice : $P([S=k])=q^{k-1}p^2\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\binom{k-1}{n}p^n$.

On reconnaît la formule du binôme de Newton, d'où

$$P([S=k])=q^{k-1}p^2(1+p)^{k-1}$$

On a $q = 1 - p$ et donc $q^{k-1}(1+p)^{k-1} = (1-p)^{k-1}(1+p)^{k-1} = (1-q^2)^{k-1}$.

Finalement : $P([S = k]) = (1-p^2)^{k-1}p^2$ et S suit une loi géométrique de paramètre p^2.

Exercice 3.07.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ avec $p_i \in]0,1[$.
Autrement dit, $\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ P(X_i = 1) = p_i$ et $P(X_i = 0) = 1 - p_i$.

On note $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ la variable aléatoire représentant le nombre total de succès et $\mu = E(X)$.

1. Soit un réel $\alpha > 0$.

a) Montrer : $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad 1 + x \leqslant e^x$.

b) En déduire : $E(e^{\alpha(X_i - p_i)}) \leqslant \exp\big(p_i\, e^{\alpha}\big)$.

c) En déduire : $E(e^{\alpha(X-\mu)}) \leqslant \exp\big(\mu e^{\alpha}\big)$.

d) Montrer : $\forall\, r \in \mathbb{R},\ P([X - \mu \geqslant r]) \leqslant \exp\big(\mu e^{\alpha} - \alpha r\big)$.

e) En déduire :

$$\forall\, r > \mu,\ P([X - \mu \geqslant r]) \leqslant \left(\frac{\mu e}{r}\right)^r$$

2. On suppose dans cette question que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $p_i = p \in]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.

a) Montrer que, pour $k \in [\![0,n]\!]$, on a $P([X \geqslant k]) \leqslant \dbinom{n}{k} p^k$.

b) En étudiant la variable aléatoire $Y = n - X$, en déduire, pour $k \in [\![0,n]\!]$:

$$P([X \leqslant k]) \leqslant \binom{n}{k} q^{n-k}$$

Solution :

1. Soit $\alpha > 0$.
a) La fonction $x \mapsto e^x$ étant convexe, elle est au dessus de sa tangente au point d'abscisse 1, la droite $y = x + 1$.
b) Il vient

$$\begin{aligned} E(e^{\alpha(X_i - p_i)}) &= p_i e^{\alpha(1-p_i)} + q_i e^{\alpha(0-p_i)} = p_i e^{\alpha q_i} + q_i e^{-\alpha p_i} \\ &\leqslant p_i e^{\alpha} + 1 \quad (\text{car } \alpha > 0, q_i \leqslant 1, e^{-\alpha p_i} \leqslant 1) \\ &\leqslant e^{p_i e^{\alpha}} \quad (\text{car pour tout } x,\ 1 + x \leqslant e^x) \end{aligned}$$

Donc $E(e^{\alpha(X_i-p_i)}) \leqslant e^{p_i e^\alpha}$.

c) On a : $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i$, et

$$\begin{aligned}
E(e^{\alpha(X-\mu)}) &= \prod_{i=1}^{n} E(e^{\alpha(X_i-p_i)}) \quad \text{(indépendance mutuelle des } X_i \text{ et donc des } e^{\alpha(X_i-p_i)}) \\
&\leqslant \prod_{i=1}^{n} e^{p_i e^\alpha} \quad \text{(d'après la question précédente)} \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} p_i e^\alpha\right) = e^{\mu e^\alpha}
\end{aligned}$$

d) On a

$$\begin{aligned}
P[X-\mu \geqslant r] &= P[e^{\alpha(X-\mu)} \geqslant e^{\alpha r}] \quad \text{(car } \alpha > 0 \text{ et } x \mapsto e^x \text{ est croissante)} \\
&\leqslant E(e^{\alpha(X-\mu)})e^{-\alpha r} \text{(inégalité de Markov pour } e^{\alpha(X-\mu)} \geqslant 0) \\
&\leqslant e^{\mu e^\alpha - \alpha r} \text{(question précédente)}
\end{aligned}$$

e) On étudie la fonction : $\alpha \mapsto e^{\mu e^\alpha - \alpha r}$. Elle admet un minimum pour $\alpha = \ln(\frac{r}{\mu}) > 0$, et

$$\begin{aligned}
P[X-\mu \geqslant r] \leqslant e^{\mu e^\alpha - \alpha r} &\leqslant e^{\mu e^{\ln(\frac{r}{\mu})} - \ln(\frac{r}{\mu}) r} \\
&\leqslant e^{(r - r\ln(\frac{r}{\mu}))} = \left(\frac{\mu e}{r}\right)^r
\end{aligned}$$

2. On sait que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $p_i = p$.

a) Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $[X \geqslant k] = \bigcup_{0 \leqslant i_1, i_2, \cdots i_k \leqslant n} \bigcap_{j=1}^{k} [X_{i_j} = 1]$ d'où

$$P[X \geqslant k] \leqslant \sum_{0 \leqslant i_1, i_2, \cdots i_k \leqslant n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} [X_{i_j} = 1]\right)$$

Or $P(\cup_i A_i) \leqslant \sum_i P(A_i)$. Donc $P[X \geqslant k] \leqslant \text{Card}\{(i_1, i_2, \cdots i_k) \in [|0, n|]\}.p^k$. Les événements $([X_{i_j} = 1])$ étant indépendants il vient

$$P[X \geqslant k] \leqslant \binom{n}{k} p^k$$

b) La variable aléatoire $Y = n - X$ suit une loi binomiale de paramètre $q = 1 - p$, on a :

$$P[X \leqslant k] = P[Y \geqslant n-k] \leqslant \binom{n}{n-k} q^{n-k} = \binom{n}{k} q^{n-k}$$

Exercice 3.08.

On rappelle les résultats suivants :

(i) Soit I un ensemble dénombrable infini indexé par $\mathbb{N}$ sous la forme $I = \{\phi(n)\,,\, n \in \mathbb{N}\}$ où ϕ est une bijection

de $\mathbb{N}$ dans I. Si la série $\sum u_{\phi(n)}$ converge absolument, alors sa somme est indépendante de l'indexation ϕ, et

pourra également être notée $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$. On dit alors que la série $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ converge absolument.

(ii) Dans ce cas, si $I = \displaystyle\bigsqcup_{j\in J} I_j$ (union disjointe) avec J un ensemble dénombrable et I_j des ensembles dénombrables pour tout j, alors pour tout j, $\displaystyle\sum_{k\in I_j} u_k$ converge absolument, et

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left[\sum_{k\in I_j} u_k\right]$$

(iii) Si I et J sont des ensembles dénombrables et si $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ et $\displaystyle\sum_{j\in J} v_j$ sont absolument convergentes, alors $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} \big(u_i\, v_j\big)$ aussi, et

$$\left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} \big(u_i\, v_j\big)$$

On prendra soin de justifier clairement, à l'aide de ces résultats, les calculs de sommes de séries qu'on sera amené à faire ci-dessous.

Soit p et q deux réels de l'intervalle $]0,1[$.

1. Vérifier que : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P\big[(i,j)\big] = p\,q\,(1-p)^i\,(1-q)^j$ définit bien une probabilité P sur $\mathbb{N}^2$.

2.a) Déterminer les lois des variables aléatoires discrètes X et Y définies sur $\big(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2), P\big)$ par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad X(i,j) = i \quad \text{et} \quad Y(i,j) = j$$

et les relier à des lois connues.

b) Calculer $P(X = Y)$ et $P(X > Y)$.

3. Soit Z la variable aléatoire discrète définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad Z(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont pairs} \\ -1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont impairs} \\ 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont de parités différentes} \end{cases}.$$

Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

4. Soit D l'ensemble défini par $D = \{(i,i)\,,\, i \in \mathbb{N}\}$. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{(i,i)\in D} Z(i,i)\,P(i,i)$ est absolument convergente et calculer sa somme.

Solution :

1. On a $P\big[(i,j)\big] \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_i p\,(1-p)^i$ et $\displaystyle\sum_j q\,(1-q)^j$ sont des séries géométriques absolument convergentes, donc d'après (iii), $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} P\big[(i,j)\big]$ est absolument convergente et

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} P\big[(i,j)\big] = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} p\,(1-p)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} q\,(1-q)^j\right) = 1$$

2. a) Calculons les lois marginales : $\{i\}\times\mathbb{N}\subset\mathbb{N}^2$, donc la série $\displaystyle\sum_j P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)$ est absolument convergente d'après (ii) et

$$P(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = p\,(1-p)^i \sum_{j=0}^{+\infty} q\,(1-q)^j = p\,(1-p)^i \quad \text{donc} \quad X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

Le résultat et la démonstration sont analogues pour Y.

b) On a $D\subset\mathbb{N}^2$ donc la série $\displaystyle\sum_i P\big([X=i]\cap[Y=i]\big)$ est absolument convergente d'après (ii) et

$$P(X=Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} P\big[(i,i)\big] = p\,q\sum_{i=0}^{+\infty}\big[(1-p)\,(1-q)\big]^i = \frac{p\,q}{p+q-pq}$$

On a la partition suivante :

$$\Big\{(i,j)\in\mathbb{N}^2\,,\ i>j\Big\} = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}}\big([\![j+1,+\infty[\![\times\{j\}\big)$$

donc d'après (ii),

$$P(X>Y) = p\,q\sum_{j=0}^{+\infty}\left[(1-q)^j\sum_{i=j+1}^{+\infty}(1-p)^i\right] = p\,q\sum_{j=0}^{+\infty}\left[(1-q)^j\,\frac{(1-p)^{j+1}}{p}\right] = \frac{q\,(1-p)}{p+q-pq}$$

3. On a $|Z|\leqslant 1$. La variable aléatoire Z est bornée et donc admet une espérance.

On a : $(2\mathbb{N})^2\subset\mathbb{N}^2$ et d'après (iii), toutes les séries étant absolument convergentes,

$$\sum_{(2\mathbb{N})^2} P(i,j) = \sum_{\mathbb{N}^2}\Big[p\,q\,(1-p)^{2i}\,(1-q)^{2j}\Big] = \left(\sum_{i=0}^{+\infty}\big[p\,(1-p)^{2i}\big]\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\big[q\,(1-q)^{2j}\big]\right)$$
$$= \frac{1}{(2-p)\,(2-q)}$$

De même, $(2\mathbb{N}+1)^2 \subset \mathbb{N}^2$ d'où la convergence absolue et

$$\sum_{(2\mathbb{N}+1)^2} P(i,j) = \sum_{\mathbb{N}^2}\Big[p\,q\,(1-p)^{2i+1}\,(1-q)^{2j+1}\Big] = (1-p)\,(1-q)\sum_{(2\mathbb{N})^2} P(i,j)$$
$$= \frac{(1-p)\,(1-q)}{(2-p)\,(2-q)}$$

Enfin, la partition

$$\mathbb{N}^2 = \Big[(2\mathbb{N})\times(2\mathbb{N})\Big] \sqcup \Big[(2\mathbb{N}+1)\times(2\mathbb{N}+1)\Big] \sqcup \Big[(2\mathbb{N}+1)\times(2\mathbb{N})\Big] \sqcup \Big[(2\mathbb{N})\times(2\mathbb{N}+1)\Big]$$

donne d'après (ii),

$$E(Z) = \sum_{(2\mathbb{N})^2} P(i,j) - \sum_{(2\mathbb{N}+1)^2} P(i,j) + 0 + 0 = \frac{p+q-pq}{(2-p)\,(2-q)}$$

4. Enfin, la partition $\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \sqcup (2\mathbb{N}+1)$, donne, d'après (ii),

$$\sum_{(i,j)\in D}\big[Z(i,j)\,P(i,j)\big] = \sum_{2\mathbb{N}} P(i,i) - \sum_{2\mathbb{N}+1} P(i,i)$$
$$= \Big[1-(1-p)\,(1-q)\Big]\sum_{i=0}^{+\infty}\big[p\,q\,(1-p)^{2i}\,(1-q)^{2i}\big]$$
$$= \Big[1-(1-p)\,(1-q)\Big]\frac{p\,q}{1-(1-p)^2\,(1-q)^2} = \frac{p\,q}{1+(1-p)\,(1-q)}$$

Exercice 3.09.

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega,\mathcal{A},P\big)$.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par :

$$P(X_1 = 1) = p \text{ et } P(X_1 = -1) = 1-p\,.$$

On suppose que $p \in]0,1[$ et que $p > 1-p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $u_n = E(|S_n|)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $E(S_n)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a : $P(S_n < 0) \leqslant E(\exp(-tS_n))$.

3.a) Déterminer pour tout $t \geqslant 0$, $E(\exp(-tS_n))$.

b) En déduire l'existence d'un réel $\mu \in]0,1[$, que l'on exprimera en fonction de p, pour lequel on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_n < 0) \leqslant \mu^n$$

4. a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(u_n - E(S_n)\big) = 0$.

b) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

5. On suppose dans cette question que $p < 1-p$. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Par linéarité, $E(S_n) = nE(X_1) = (2p-1)n$.

2. Soit $t \geqslant 0$. Comme $(S_n < 0) \subset (\exp(-tS_n) \geqslant 1)$, on a $P(S_n < 0) \leqslant P(\exp(-tS_n) \geqslant 1)$.
En utilisant l'inégalité de Markov, on a donc $P(S_n < 0) \leqslant E(\exp(-tS_n))$.

3. a) Par indépendance des $(X_n)_{n\geqslant 0}$, $E(\exp(-tS_n)) = \left(E(\exp(-tX_1))\right)^n = \left(pe^{-t} + (1-p)e^t\right)^n$
b) Au voisinage de 0_+, on a

$$pe^{-t}+(1-p)e^t-1 = p(1+(-t)+o(t))+(1-p)(1+t+o(t))-1 = -(2p-1)t+o(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -(2p-1)t < 0$$

Il existe $t_0 > 0$, tel que $\mu = pe^{-t_0} + (1-p)e^{t_0} \in [0,1[$.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n < 0) \leqslant \mu^n$.

4. a) On remarque tout d'abord que S_n est à valeur dans $[\![-n,n]\!]$. Ainsi, on a

$$0 \leqslant u_n - E(S_n) = -\sum_{k=-n}^{-1} 2kP(S_n = k) \leqslant 2nP(S_n < 0)$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - E(S_n) = 0$.

b) À l'aide de la question 1, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} n(2p-1)$.

5. On trouve le même équivalent, soit $u_n \underset{+\infty}{\sim} (1-2p)n$ en appliquant les questions précédentes à $-S_n$.

Exercice 3.10.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.
Montrer que $\sup\limits_{k\geqslant 0}\big(P(X=k)\big)$ est atteint pour $k = \lfloor \lambda \rfloor$.

2. On admet la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit α un réel strictement positif différent de 1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)e^{-n\alpha}\dfrac{(n\alpha)^n}{n!}$.

Dans la suite de l'exercice, α désigne un réel strictement positif et pour tout entier $n \geqslant 1$, X_n désigne une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(n\alpha)$.

On pose $u_n = P(X_n \leqslant n)$.

3. On suppose $\alpha > 1$. En utilisant les questions 1 et 2, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4. On suppose $\alpha < 1$.

a) Montrer que $u_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{n\alpha}^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

b) Montrer que $P(X_n > n) = \dfrac{(n\alpha)^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-n\alpha t} dt$.

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

5. On suppose dans cette question que $\alpha = 1$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Solution :

1. On étudie le rapport : $\dfrac{P(X = k+1)}{P(X = k)} = \dfrac{\lambda}{k+1}$.

La suite $(P(X = k))_{k \geqslant 0}$ est donc décroissante pour $k + 1 \geqslant \lambda$, et croissante pour $k + 1 \leqslant \lambda$. Comme k est entier, elle atteint son maximum en $\lfloor \lambda \rfloor$.

2. On utilise l'aide proposée. Pour n grand :

$$(n+1)e^{-n\alpha} \frac{(n\alpha)^n}{n!} \sim (n+1)e^{-n\alpha} n^n \alpha^n \times \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n} n^n} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{n(1-\alpha+\ln\alpha)}$$

La concavité de la fonction ln ou une étude rapide de fonction, montre que pour $\alpha > 0$, $1 - \alpha + \ln \alpha \leqslant 0$. Ainsi la limite demandée est nulle si $\alpha \neq 1$.

3. On a $u_n = e^{-n\alpha} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(n\alpha)^k}{k!}$. Comme $\alpha > 1$, la suite $(P(X = k))_k$ est croissante sur $[\![0, n]\!]$. Donc

$$0 \leqslant u_n \leqslant (n+1)e^{-n\alpha} \frac{(n\alpha)^n}{n!} \longrightarrow 0$$

4. a) Une intégration par parties donne

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_{n\alpha}^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \frac{(n\alpha)^n e^{-n\alpha}}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{n\alpha}^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

soit $I_n - I_{n-1} = \dfrac{(n\alpha)^n e^{-n\alpha}}{n!}$. Ainsi

$$I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n} (I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k\alpha)^k e^{-k\alpha}}{k!}$$

Il reste à rajouter I_0 aux deux membres de cette équation pour obtenir le résultat demandé.

b) On sait que $\dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = 1$ (fonction Γ). Donc

$$P(X_n > n) = 1 - P(X \leqslant n) = \frac{1}{n!} \int_0^{n\alpha} t^n e^{-t} dt = \frac{(n\alpha)^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n e^{-n\alpha t} dt$$

en utilisant le changement de variable linéaire $t = n\alpha u$.

c) Une étude de $h : t \to t^n e^{-n\alpha t}$, montre que h' s'annule en $t = 1/\alpha > 1$, et que la fonction h est croissante sur $[0, 1]$. Donc $h(t) \leqslant e^{-n\alpha}$ pour $t \in [0, 1]$.

Ainsi

$$0 \leqslant P(X_n > n) = \frac{(n\alpha)^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n e^{-n\alpha t} dt \leqslant \frac{(n\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-n\alpha} \longrightarrow 0$$

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

5. Pour $\alpha = 1$, on applique le théorème central limite. Ainsi

$$P(X_n \leqslant n) = P\left(\frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)} \leqslant 0\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}$$

Exercice 3.11.

Une urne contient exclusivement des boules rouges et noires indiscernables au toucher.

La proportion de boules rouges est $p \in]0, 1[$ et celle de boules noires est $q = 1 - p$.

On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne jusqu'à obtention d'une boule rouge.

Un maximum de n tirages, avec $n \geqslant 1$, est cependant fixé : on décide de s'arrêter si on n'a pas tiré de boule rouge à l'issue du n-ième tirage.

On note G_n la variable aléatoire égale au rang du tirage d'une boule rouge, si ce rang existe, et qui vaut 0 si aucune boule rouge n'est apparue au cours des n tirages.

1. Dans cette question, n est un entier fixé.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire G_n.

b) En utilisant la fonction $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$, montrer que l'on a : $E(G_n) = \dfrac{1 - q^n(1 + np)}{p}$.

2. a) Déterminer la limite de $(E(G_n)$ quand n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

b) Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires (G_n).

3. Ce processus peut être considéré comme une partie qui est gagnée si une boule rouge est apparue au cours des n tirages.

On mise de la manière suivante : pour jouer une partie, il faut payer 15 euros. Si la partie est gagnée à la $k$ème boule tirée ($k \leqslant n$), le joueur gagne $(20 - k)$ euros. On note B_n le gain aléatoire pour une partie.

a) Exprimer B_n en fonction de G_n, puis déterminer son espérance.

b) On admet que pour tout réel $x \in]0, 1[$ on a $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\ln(1 - x)} < 1$.

Quelle valeur de n doit-on choisir afin de maximiser le gain d'une partie ?

Solution :

1. a) On a ici la loi géométrique tronquée :

$$P(G_n = k) = \begin{cases} q^{k-1}p & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n \\ q^n & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

b) On a alors $E(G_n) = p\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$. Soit la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$. On dérive

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

D'où :

$$E(G_n) = pf'(q) = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} = \frac{1-q^n(1+np)}{p}$$

2. a) On a $n = o(r^n)$ pour $r > 1$, en particulier pour $r = \dfrac{1}{q} > 1$ d'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nq^n = 0$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(G_n) = \frac{1}{p}$ qui est l'espérance d'une loi géométrique.

b) Soit un entier $k \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P[G_n = k] = q^{k-1}p$ (dès que $n > k$) d'où la convergence en loi vers la loi géométrique.

3. a) On a $B_n = (5 - G_n \cdot \mathbf{1}_{G_n \neq 0}) - 15 \cdot \mathbf{1}_{G_n=0}$, ce qui est une variable aléatoire en tant que fonction de la variable aléatoire discrète G_n. Le calcul donne

$$\begin{aligned} E(B_n) &= \sum_{k=1}^{n}(5-k)P[G_n = k] - 15P[G_n = 0] = 5(1 - P[G_n = 0]) - E(G_n) - 15P[G_n = 0] \\ &= 5 - E(G_n) - 20P[G_n = 0] \\ &= 5 - \frac{1-q^n(1+np)}{p} - 20q^n \end{aligned}$$

c) Soit g la fonction : $g(x) = 5 - \dfrac{1-q^x(1+xp)}{p} - 20q^x = 5 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{q^x}{p} + xq^x - 20q^x$.

Alors $g'(x) = \left[\dfrac{\ln(q)}{p}) + 1 + x\ln(q) - 20\ln(q)\right] q^x$, et

$$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{\ln(q)} + x - 20 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 20 - \frac{1}{p} - \frac{1}{\ln(q)}$$

Ainsi le maximum est obtenu pour $x = 20 - \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{\ln(q)}$ or on a vu : $0,5 < \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\ln(q)} < 1 \Rightarrow$ $19 < x < 19.5$.

Finalement $n = 19$ est la valeur entière la plus proche du maximum.

Exercice 3.12.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit a un réel. Soit X une variable aléatoire discrète réelle et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi que X.

On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Montrer que $P(X \geqslant a) = 0$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(S_n \geqslant na) = 0$.

2. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

a) Montrer que les variables aléatoires $(S_{n+m} - S_m)$ et S_n ont même loi.

b) Soit b un nombre réel. Montrer que $P\big(S_{m+n} \geqslant (n+m)b\big) \geqslant P(S_n \geqslant nb)P(S_m \geqslant mb)$.

On admet le résultat suivant :

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $u_{n+m} \geqslant u_m + u_n$.

On suppose que l'ensemble $\left\{\dfrac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est majoré et on note s sa borne supérieure.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = s$.

3. On suppose dans cette question que $P(X \geqslant a) > 0$.

Montrer que la suite $\left(\dfrac{\ln\left(P(S_n \geqslant na)\right)}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et admet une limite $\gamma_a \leqslant 0$ vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, P(S_n \geqslant na) \leqslant \exp\left(n\gamma_a\right)$$

Solution :

1. Si tous les X_i sont supérieurs à a, alors S_n est supérieur à na.

Ainsi, $(X_1 \geqslant a) \cap \cdots \cap (X_n \geqslant a) \subset (S_n \geqslant na)$, donc $P((X_1 \geqslant a) \cap \cdots \cap (X_n \geqslant a)) \leqslant P(S_n \geqslant na)$, et par indépendance mutuelle des $X_i \sim X$, on a donc $P(X_1 \geqslant a)^n \leqslant P(S_n \geqslant na)$.

En conséquence, si $P(S_n \geqslant na) = 0$, alors $P(X_1 \geqslant a)^n = 0$, et donc $P(X_1 \geqslant a) = 0$.

Réciproquement, on a $(S_n \geqslant na) \subset (X_1 \geqslant a) \cup \cdots \cup (X_n \geqslant a)$, d'où :

$$P(S_n \geqslant na) \leqslant P((X_1 \geqslant a) \cup \cdots \cup (X_n \geqslant a)) \leqslant P(X_1 \geqslant a) + \cdots + P(X_n \geqslant a) = nP(X \geqslant a)$$

Ainsi, si $P(X_1 \geqslant a) = 0$, alors $P(S_n \geqslant na) = 0$.

2. a) On pose $X(\Omega) = \{x_n, n \in J \subset \mathbb{N}\}$ et $Y = \{x_1 + x_2 + ... + x_n, (x_1, x_2, ..., x_n) \in X(\Omega)^n\}$.

L'ensemble Y est dénombrable car $X(\Omega)^n$ est dénombrable. Soit $y \in Y$.
On pose $\mathcal{C} = \{(x_1, ..., x_n) \in X(\Omega)^n, x_1 + ... + x_n = y\}$.

$$\begin{aligned}
P(S_{n+m} - S_m = y) &= P(X_{m+1} + ... + X_{m+n} = y) \\
&= \sum_{\mathcal{C}} P(X_{m+1} = x_1, X_{m+2} = x_2, ..., X_{m+n-1} = x_{n-1}, X_{m+n} = x_n) \\
&= \sum_{\mathcal{C}} P(X_{m+1} = x_1) ... P(X_{m+n} = x_n) \text{ (avec l'indépendance)} \\
&= \sum_{\mathcal{C}} P(X_1 = x_1) ... P(X_n = x_n) = P(X_1 + ... + X_n = y)
\end{aligned}$$

Ainsi $S_{m+n} - S_m$ et S_n ont la même loi.
b) On a

$$\begin{aligned}
P(S_n \geqslant nb)P(S_m \geqslant mb) &= P(S_{m+n} - S_m \geqslant nb)P(S_m \geqslant mb) \\
&= P\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant nb\right) P\left(\sum_{k=1}^{m} X_k \geqslant mb\right)
\end{aligned}$$

Par le lemme des coalitions, $\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ et $\sum_{k=1}^{m} X_k$ sont indépendantes, donc

$$P(S_n \geqslant nb)P(S_m \geqslant mb) = P\left(\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant nb\right) \cap \left(\sum_{k=1}^{m} X_k \geqslant mb\right)\right)$$

Comme $\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant nb\right) \cap \left(\sum_{k=1}^{m} X_k \geqslant mb\right) \subset \left(\sum_{k=1}^{m+n} X_k \geqslant nb + mb\right)$, on peut conclure que,

$$P(S_n \geqslant nb)P(S_m \geqslant mb) \leqslant P(S_{n+m} \geqslant (n+m)b)$$

3. D'après la question 2 et l'hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n \geqslant na) > 0$; par suite, son logarithme est bien défini et donc la suite aussi.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\left(P(S_n \geqslant nb)\right)$.
La suite $(u_n)_{n \geqslant \mathbb{N}^*}$ vérifie l'inégalité du début de l'exercice, par la question 2.b.
Ainsi, on pose $\gamma_a = \sup\left\{\frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, qui existe, puisque $\left\{\frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est majorée par 0.
On conclut avec la question admise. Donc, la suite $\left(\frac{\ln(P(S_n \geqslant na))}{n}\right)$ converge vers $\gamma_a \leqslant 0$.
Enfin par croissance de l'exponentielle et par définition de la borne supérieure, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \; P(S_n \geqslant na) \leqslant \exp(n\gamma_a)$$

Démonstration de la question admise

1. Une récurrence évidente sur $q \in \mathbb{N}^*$ montre que $u_{mq} \geqslant qu_m$. On en déduit que si $n = mq + r$, avec $(q, m, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, alors $u_n \geqslant u_{mq} + u_r \geqslant qu_m + u_r$.

2. Supposons $n \geqslant m$. Il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, m-1]\!]$ tel que $n = mq + r$. On pose $M = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant m-1} |u_k|$.

Selon la question 1, on a, à l'aide d'une inégalité triangulaire,

$$\frac{u_m}{m} - \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_m}{m} - \frac{qu_m + u_r}{n} = \frac{ru_m - mu_r}{mn} \leqslant \frac{r|u_m| + m|u_r|}{mn} \leqslant \frac{|u_m| + M}{n}$$

Le majorant obtenu tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il est donc inférieur ou égal à ε pour n supérieur à un entier N convenable, que l'on peut supposer supérieur ou égal à m. Finalement, $\dfrac{u_m}{m} - \dfrac{u_n}{n} \leqslant \varepsilon$ pour tout $n > N$.

3. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $s = \sup\left\{\dfrac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\dfrac{u_{m_0}}{m_0} \geqslant s - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour ce m_0, il existe $N > m_0$ tel que pour tout $n > N$, $\dfrac{u_n}{n} \geqslant \dfrac{u_{m_0}}{m_0} - \dfrac{\varepsilon}{2} \geqslant s - \varepsilon$. Puisque pour tout $n > N$, $\dfrac{u_n}{n} \leqslant s$, on a donc pour tout $n > N$, $s - \varepsilon \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant s$. On en déduit le résultat, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n} = s$.

Exercice 3.13.

Une pièce truquée donne Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On propose l'expérience suivante pour « rééquilibrer » la pièce.

L'expérience est constituée d'une suite de parties consécutives.

Chaque partie consiste à lancer la pièce *deux fois de suite*.

- Si à l'issue d'une partie on obtient deux fois le même résultat (2 Pile ou 2 Face), on refait une partie ;
- Si à l'issue d'une partie on obtient deux résultats différents, alors on arrête l'expérience et on rend le résultat du dernier lancer.

L'expérience est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que l'expérience se termine.

1. Écrire un script *Scilab* qui simule la variable aléatoire T.

2. Donner l'ensemble des valeurs prises par T. En déduire $P(T = 2k + 1)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3. a) Calculer $P(T = 2k)$, pour $k \in \mathbb{N}$ (on pourra s'intéresser à l'événement $A = [X_1 = X_2]$, où X_1, X_2 sont les deux variables aléatoires donnant les résultats des deux premiers lancers).

b) En déduire que l'expérience se termine presque sûrement.

c) Calculer l'espérance de T.

4. Soit R la variable aléatoire donnant le résultat de l'expérience. Donner la loi de R.

Solution :

1. Le processus proposé se déroule tant que deux lancers consécutifs de la pièce donnent le même résultat. Il s'arrête sinon. Voici une proposition de script :

```
u=rand(), v= rand()
n=2
while (u<=p and v<=p) or (u>p and v>p)
      u=rand() ; v=rand()
      n=n+2
      end
disp(n)
```

2. L'ensemble des valeurs prises pris par T est $2\mathbb{N}^*$. En effet on effectue à chaque fois un couple de deux lancers. Donc $P(T = 2k+1) = 0$.

3. a) Soit X la variable aléatoire donnant le résultat d'un lancer de la pièce :

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = q$$

Soit $A = [X_1 = X_2]$ et $B = [X_1 \neq X_2]$. On a

$P(A) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) + P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = p^2 + q^2$ et $P(B) = 1 - P(A) = 2pq$

Ainsi

$P(T = 2k) = P([X_1 = X_2] \cap [X_3 = X_4] \cap \ldots \cap [X_{2k-3} = X_{2k-2}] \cap [X_{2k-1} \neq X_{2k}]) = (p^2+q^2)^{k-1} 2pq$

b) Évaluons

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(T = 2k) = 2pq \sum_{k=1}^{+\infty} (p^2 + q^2)^{k-1} = \frac{2pq}{1 - p^2 - q^2} = 1$$

Ainsi le processus s'arrête presque sûrement.

c) La variable aléatoire Y définie par $P(Y = k) = (p^2 + q^2)^{k-1} 2pq$ suit la loi géométrique de paramètre $2pq$ et $E(T) = 2E(Y) = \dfrac{1}{pq}$.

4. Pour calculer la loi de R, on utilise le système complet d'événements $([T = 2k])_{k \geqslant 1}$. Ainsi

$$\begin{aligned} P(R = \text{ Pile}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 = X_2] \cap [X_3 = X_4] \cap \ldots \cap [X_{2k-3} = X_{2k-2}] \\ &\qquad \cap [X_{2k-1} \neq X_{2k}] \cap [X_{2k} = \text{ Pile}]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (p^2 + q^2)^{k-1} pq = \frac{pq}{1 - p^2 - q^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Et donc $P(R = \text{ Face}) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.14.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$P[X_k = -1] = P[X_k = 1] = \frac{1}{2}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Calculer les moments centrés d'ordre $k \geqslant 1$ de chaque variable aléatoire X_i, puis l'espérance et la variance de S_n.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$.

Dans la suite, on pose, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \text{ et } \mathcal{Z}_n = \{\omega \in \Omega, \exists\, k \geqslant n,\, U_k(\omega) \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\}$$

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$P\left[U_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \leqslant \frac{3}{n^{3/2}}$$

4. Montrer que $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \geqslant 1$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.

5. Soit $\mathcal{Z} = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} \mathcal{Z}_n$, montrer que l'on a :

$$P(\mathcal{Z}) = 0 \text{ et } \forall\, \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$$

Solution :

1. On obtient $E(X_i^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

On a $E(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i) = 0$.

Par indépendance mutuelle des X_i, $V(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i^2) - E(X_i)^2 = n$.

2. On montre $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
- vérifié pour $n = 1$: $E(S_1^4) = E(X_1^4) = 1$.
- $S_{n+1}^4 = (S_n + X_{n+1})^4 = S_n^4 + 4S_n^3 X_{n+1} + 6S_n^2 X_{n+1}^2 + 4S_n X_{n+1}^3 + X_{n+1}^4$. Ainsi, comme S_n et X_{n+1} sont indépendantes et $E(X_{n+1}) = E(X_{n+1}^3) = 0$, $E(X_{n+1}^2) = E(X_{n+1}^4) = 1$, il vient :

$$E(S_{n+1}^4) = E(S_n^4) + 0 + 6E(S_n^2).1 + 0 + 1 = E(S_n^4) + 6V(S_n) + 1$$

On termine avec l'hypothèse de récurrence $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ on obtient le résultat attendu.

3. Soit $n \geqslant 1$. La variable aléatoire $U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4$ est positive et admet une espérance (car cette variable est finie). On applique l'inégalité de Markov pour $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$. Il vient

$$P[U_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}] \leqslant E(U_n).\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{n^4}E(S_n^4) = \frac{(3n-2)\sqrt{n}}{n^3} \leqslant \frac{3}{n^{3/2}}$$

4. Soit $n \geqslant 1$, on a : $\mathcal{Z}_n = \bigcup_{k \geqslant n} [U_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}] \in \mathcal{A}$ car U_k est une variable aléatoire et $\mathcal{A}$ est stable pour la réunion dénombrable.

On a $0 \leqslant P(\mathcal{Z}_n) \leqslant \sum_{k \geqslant n} P[U_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}] \leqslant \sum_{k \geqslant n} \frac{3}{k^{3/2}}$. Cette quantité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ comme limite du reste d'une série convergente.
D'où, par théorème d'encadrement : $\lim_{n \to +\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.

5. On observe que $\mathcal{Z}_{n+1} \subset \mathcal{Z}_n$ d'où : $P(\mathcal{Z}) = P\left(\bigcap_{n \geqslant 1} \mathcal{Z}_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.

Ainsi $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}$ entraîne $\omega \in \overline{\mathcal{Z}}$ ce qui entraîne $\omega \in \bigcup_{n \geqslant 1} \overline{\mathcal{Z}_n}$. Donc il existe $n_0 \geqslant 1, \omega \in \overline{\mathcal{Z}_{n_0}}$ ce qui entraîne qu'il existe $n_0 \geqslant 1, \forall k \geqslant n_0, U_k(\omega) < \frac{1}{\sqrt{k}}$.
Ainsi

$$\lim_{k \to +\infty} U_k(\omega) = 0 \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{S_k(\omega)}{k}\right)^4 = \lim_{n \to +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$$

Exercice 3.15.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \in [0, 1[\\ -\frac{1}{6}(x-4) & \text{si } x \in [1, 4] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de la fonction f et montrer que f est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui admet f comme densité. On note F sa fonction de répartition.

2. Calculer l'espérance de X.

3. Soit W et Z deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que W suit la loi normale $\mathcal{N}(3,1)$ et que Z suit la loi gamma $\gamma(3)$.
On suppose que X, W et Z sont mutuellement indépendantes.
Soit T la variable aléatoire telle que : $T = \dfrac{XW}{Z}$.
Justifier que T est définie presque sûrement. Calculer son espérance et justifier qu'elle admet une variance.

4. Montrer que F est bijective de $[0,4]$ sur $[0,1]$ et que sa réciproque G est donnée par :

$$G(y) = \begin{cases} \sqrt{4y} & \text{si } y \in \left[0, \frac{1}{4}\right[\\ 4 - \sqrt{12 - 12y} & \text{si } y \in \left[\frac{1}{4}, 1\right] \end{cases}.$$

5. Soit la variable aléatoire $Y = F(X)$. Déterminer la loi de Y. En déduire le rôle de la fonction *Scilab* suivante :

```
function x=mystere()
  y=rand() ;
  if y<1/4
   then x=sqrt(4*y) ;
   else x=4-sqrt(12-12*y),
  end
endfunction
```

6. On donne la fonction Scilab suivante :

```
function E=mysterebis(n)
E=0 ;
for i=[1..n],
 x=mystere() ;
 E=E+x
end
E=E/n ;
endfunction
```

Que dire de la valeur qui sera renvoyée par l'instruction `mysterebis(1000)` ?

Solution :

1. La fonction f est positive, continue sur $\mathbb{R}$, et son intégrale vaut 1 (c'est l'aire d'un triangle dont la base est de longueur 4 et dont la hauteur est de longueur $\frac{1}{2}$). Donc f est bien une densité.

2. Par le théorème de transfert, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\, \mathrm{d}x + \int_1^4 -x \frac{1}{6}(x-4)\, \mathrm{d}x = \frac{5}{3}.$$

3. La variable T est définie presque sûrement car $P(Z=0)=0$, puisque Z est à densité. Par indépendance, et le théorème de transfert

$$E(T)=E(X)\,E(W)\,E\left(\frac{1}{Z}\right)=\frac{5}{3}\times 3\times\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\frac{x^2e^{-x}}{\Gamma(3)}\,\mathrm{d}x=5\times\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}xe^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}$$

Comme X est à valeurs dans $[0,4]$, elle admet un moment d'ordre 2. D'après le cours, il en est de même de W. Et par théorème de transfert comme précédemment, $E\left(\dfrac{1}{Z^2}\right)$ existe. Donc, par indépendance, on a l'existence de $E(T^2)=E\left(X^2\right)E\left(W^2\right)E\left(\dfrac{1}{Z^2}\right)$, donc celle de $V(T)$.

4. Le calcul donne :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ \displaystyle\int_0^x\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{4} & \text{si } x\in[0,1[\\ \displaystyle\int_0^1\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t+\int_1^x-\frac{1}{6}(t-4)\,\mathrm{d}t=1-\frac{(x-4)^2}{12} & \text{si } x\in[1,4[\\ 1 & \text{si } x\geqslant 4\end{cases}$$

Donc, pour tout $x\in[0,1[$, on a : $y=F(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}y\in\left[0,\frac{1}{4}\right[\\ x=\sqrt{4y}\end{cases}$.

Et pour tout $x\in[1,4[$, on a : $y=F(x)\Leftrightarrow y=1-\dfrac{(x-4)^2}{12}\Leftrightarrow\begin{cases}y\in\left[\frac{1}{4},1\right[\\ x=4-\sqrt{12(1-y)}\end{cases}$

Donc, par recollement de bijections entre des ensembles disjoints au départ et à l'arrivée, F est bijective de $[0,4]$ sur $[0,1]$ de réciproque G.

5. Comme F est à valeurs dans $[0,1]$, on a $Y(\Omega)\subset[0,1]$, et comme G est strictement croissante puisque F l'est, pour tout $y\in[0,1]$, on a :

$$P(Y\leqslant y)=P(F(X)\leqslant y)=P(G(F(X)\leqslant G(y))=P(X\leqslant G(y))=F(G(y))=y.$$

Donc Y suit la loi uniforme sur $[0,1]$. La relation $Y=F(X)$ s'écrit aussi $X=G(Y)$. On reconnaît donc que la fonction `mystere()` simule la valeur de la variable aléatoire X.

6. On reconnaît que la fonction `mysterebis` simule la variable aléatoire $\bar{X}_n=\dfrac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$, où $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes et de même loi que X. Comme X admet une variance , d'après la loi faible des grands nombres, la suite $(\bar{X}_n)$ tend en probabilité vers $E(X)$, donc `mysterebis(1000)` devrait renvoyer une valeur proche de $E(X)=\dfrac{5}{3}$.

Exercice 3.16.

1. Soit α un réel strictement positif.

Donner un équivalent de $S_n = \sum_{j=1}^{n} j^\alpha$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $(X_j)_{j\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle d'entiers $[\![1, n]\!]$.

Soit k un entier fixé avec $k \geqslant 2$. On dit que X_k est un *sommet* si pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X_{k-1}(\omega) < X_k(\omega)$ et $X_{k+1}(\omega) < X_k(\omega)$.

2. Déterminer les probabilités des événements suivants :

a) « X_k est un sommet ». Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_k \text{ est un sommet})$.

b) « X_k et X_{k+1} sont des sommets ».

c) « X_k et X_{k+3} sont des sommets ». Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_k \text{ et } X_{k+3} \text{ sont des sommets})$.

d) « X_2 et X_4 sont des sommets ». Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_2 \text{ et } X_4 \text{ sont des sommets})$.

Solution :

1. On peut utiliser une comparaison série/intégrale.

La fonction $t \to t^\alpha$ est croissante sur $[1, +\infty[$.
Si $t \in [k, k+1]$, on a $k^\alpha \leqslant t^\alpha \leqslant (k+1)^\alpha$. En intégrant, puis en sommant, il vient

$$k^\alpha \leqslant \int_k^{k+1} t^\alpha dt \leqslant (k+1)^\alpha \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha \leqslant \int_1^n t^\alpha dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^\alpha$$

ou

$$S_n - n^\alpha \leqslant \frac{1}{\alpha+1}\left(n^{\alpha+1} - 1\right) \leqslant S_n - 1$$

Ce qui montre que $S_n \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Ou utiliser les sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1}$$

2. a) On a X_k est un sommet si et seulement si $\max(X_{k-1}, X_{k+1}) < X_k$.

La loi du $\max(X_{k-1}, X_{k+1})$ est donnée par, pour $j \in [\![0, n]\!]$

$$P(\max(X_{k-1}, X_{k+1}) \leqslant j) = P((X_{k-1} \leqslant j) \cap (X_{k+1} \leqslant j)) = P(X_{k-1} \leqslant j)^2 = \frac{j^2}{n^2}$$

On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(\max(X_{k-1}, X_{k+1}) < X_k) = \sum_{j=1}^{n} P(\max(X_{k-1}, X_{k+1}) \leqslant j-1) P(X_k = j)$$

soit

$$P(\max(X_{k-1}, X_{k+1}) < X_k) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j^2}{n^2} \times \frac{1}{n} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

La limite demandée est donc $\frac{1}{3}$.

b) La probabilité que X_k et X_{k+1} soient des sommets est nulle, ce qu'on vérifie aisément.

c) On a X_k et X_{k+3} sont des sommets si et seulement si $\max(X_{k-1}, X_{k+1}) \leqslant X_k$ et $\max(X_{k+2}, X_{k+4}) \leqslant X_{k+3}$.
Par indépendance

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_k \text{ et } X_{k+3} \text{ sont des sommets }) = \frac{1}{9}$$

d) L'événement « X_2 et X_4 sont des sommets » correspond à

$$[X_1 < X_2] \cap [X_5 < X_4] \cap [X_3 < \min(X_2, X_4)]$$

En utilisant le système complet d'événements $([X_2 = i] \cap [X_4 = j])_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$, il vient :

$$\begin{aligned}
&P([X_1 < X_2] \cap [X_5 < X_4] \cap [X_3 < \min(X_2, X_4)]) = \\
&\quad = P(([X_1 < X_2] \cap [X_5 < X_4] \cap [X_3 < \min(X_2, X_4)]) | ([X_2 = i] \cap [X_4 = j])) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times P([X_2 = i] \cap [X_4 = j]) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P(X_1 < i) P(X_5 < j) P(X_3 < \min(i,j)) P(X_2 = i) P(X_4 = j) \\
&\quad = \frac{1}{(n+1)^5} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} i \times j^2 + \frac{1}{(n+1)^5} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} i^2 \times j \\
&\quad = \frac{1}{(n+1)^5} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2(i+1)(2i+1)}{6} + \frac{1}{(n+1)^5} \sum_{i=1}^{n} i^2 \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \right)
\end{aligned}$$

En regardant les termes dominants, la première somme donne

$$\frac{1}{(n+1)^5} \sum_{i=1}^{n} i^2(i+1)(2i+1) \sim \frac{1}{3} \frac{n^5}{5(n+1)^5} \sim \frac{1}{15}$$

et la seconde somme

$$\frac{1}{(n+1)^5} \sum_{i=1}^{n} i^2 \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \right) \sim \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{6(n+1)^5} \sim \frac{1}{15}$$

Exercice 3.17.

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et sont à valeurs dans un sous-ensemble fini $[\![0, n]\!]$ de $\mathbb{N}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour tout réel t, on pose :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)t^k.$$

On note $X \sim Y$ lorsque deux variables aléatoires X et Y suivent la même loi.

1. Montrer que $G_X = G_Y$ si et seulement si $X \sim Y$.

2. Montrer que si G_Y est une fonction constante, alors Y est une variable nulle presque sûrement.

On dit que la variable aléatoire X est *décomposable* s'il existe deux variables aléatoires Y et Z indépendantes, non presque sûrement constantes et telles que $X \sim Y + Z$.

3. On suppose que $X \sim Y + Z$ et que Y et Z sont indépendantes. Montrer que $G_X = G_Y \times G_Z$.

4. On suppose que X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, où $p \in]0, 1[$. Montrer que X n'est pas décomposable.

5. On suppose que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
Montrer que X est décomposable si et seulement si $n \geqslant 2$.

Solution :

1. On suppose que X et Y suivent la même loi. On a donc $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$. De plus, pour tout réel t :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} t^k P(Y = k) = G_Y(t).$$

Réciproquement, on suppose que $G_X = G_Y$. Les fonctions G_X et G_Y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynomiales. Ainsi, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$,

$$G_X = G_Y \quad \Rightarrow \quad G_X^{(k)}(0) = G_Y^{(k)}(0).$$

La formule de Taylor pour les polynômes donne :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{G_X^k(0)}{k!} t^k$$

Par identification sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, on trouve :

$$P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} = \frac{G_Y^{(k)}(0)}{k!} = P(Y = k).$$

On en déduit que X et Y suivent la même loi.

2. Si G_Y est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, toutes les dérivées de G_Y sont nulles. En particulier, pour tout $k \geqslant 1$, on a $P(Y = k) = \dfrac{G_Y^{(k)}(0)}{k!} = 0$. Ainsi, la variable Y est nulle presque sûrement.

3. On commence par remarquer que la formule de transfert donne :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)t^k = E(t^X)$$

où E désigne l'opérateur espérance. Comme X et $Y+Z$ suivent la même loi, elles ont même fonction génératrice :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^*, \qquad G_X(t) = G_{Y+Z}(t) = E(t^{Y+Z}) = E(t^Y t^Z) = E(t^Y)E(t^Z) = G_Y(t)G_Z(t)$$

par indépendance des variables t^Y et t^Z (lemme des coalitions). (On vérifie aussi l'égalité pour le cas $t=0$).

4. On raisonne par l'absurde en supposant X décomposable. Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim Y+Z$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = q + pt$ en posant $q = 1-p$. Il en résulte que G_X est un

polynôme de degré 1. On doit de plus avoir, d'après la question 3, $G_X = G_Y G_Z$, donc G_Y ou G_Z est de degré 0, ce qui signifie que G_Y ou G_Z est constant. Mais, d'après la question 2, cela implique que Y ou Z est nulle presque sûrement. On aboutit à une contradiction.

5. La question précédente donne déjà le sens direct : si $n < 2$, X n'est pas décomposable. Donc, par contraposée,

si X est décomposable, alors $n \geqslant 2$. Étudions la réciproque. On suppose $n \geqslant 2$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k q^{n-k} = (pt+q)^n$ en posant $q = 1-p$.

Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. On pose Y et Z deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}(n-k,p)$ et $\mathcal{B}(k,p)$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = G_Y(t)G_Z(t) = G_{Y+Z}(t)$.

D'après la question 1 , X suit alors la même loi que $Y+Z$. Or, d'après la question 2, les variables aléatoires Y et Z ne sont pas presque sûrement constantes, ce qui prouve que X est décomposable.

Exercice 3.18.

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$.

Soit X une variable aléatoire à densité et f une densité de X, supposée continue sur $\mathbb{R}$. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$ et *on admet* que Y est une variable aléatoire.

1. a) Exprimer la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de celle de X, notée F_X.

b) En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité φ de Y.

2. Montrer que Y admet une espérance si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{f(t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ sont convergentes, et qu'on a alors :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{0} \frac{f(t)}{t}dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$$

On pourra utiliser le changement de variable $t = \dfrac{1}{y}$.

3. a) Déterminer le réel α pour que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = \dfrac{\alpha}{1+t^2}$ soit une densité de probabilité.

b) Soit alors U une variable aléatoire de densité u. Préciser une densité de $U' = \dfrac{1}{U}$.
Les variables aléatoires U et U' admettent-elles une espérance ?

4. Soit V une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Déterminer une densité de $V' = \dfrac{1}{V}$.
Les variables aléatoires V et V' admettent-elles une espérance ?

5. Peut-on déterminer une densité w telle que si W est une variable aléatoire de densité w et $W' = \dfrac{1}{W}$, alors W et W' admettent toutes les deux une espérance ?

Solution :

1. a) On évalue $F_Y(y) = P(Y \leqslant y)$ selon les valeurs de y :
- si $y < 0$, $Y \leqslant y \Leftrightarrow 1/X \leqslant y < 0 \Leftrightarrow 1/y \leqslant X < 0$, donc $F_Y(y) = F_X(0) - F_X(1/y)$;
- si $y = 0$, $Y \leqslant 0 \Leftrightarrow 1/X \leqslant 0 \Leftrightarrow X < 0$ et $F_Y(y) = F_X(0)$;
- si $y > 0$, $Y \leqslant y \Leftrightarrow 1/X \leqslant y \Leftrightarrow (1/X \leqslant 0 \text{ ou } 0 < 1/X \leqslant y) \Leftrightarrow (X \leqslant 0 \text{ ou } 1/y \leqslant X)$; les deux événements étant incompatibles, on a $F_Y(y) = F_X(0) + 1 - F_X(1/y)$.

Ainsi :

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(0) - F_X(1/y) & \text{si } y < 0 \\ F_X(0) & \text{si } y = 0 \\ F_X(0) + 1 - F_X(1/y) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

b) La fonction F_Y continue sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 car

$$\lim_{y\to 0^-} F_Y(y) = F_X(0) - \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = F_X(0) \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0^+} F_Y(y) = F_X(0) + 1 - \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = F_X(0)$$

donc $\lim\limits_{y\to 0^-} F_Y(y) = \lim\limits_{y\to 0^+} F_Y(y) = F_Y(0) = F_X(0)$.

La fonction F_Y est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ sauf en un nombre fini de points car F_X l'est, donc elle l'est aussi sur $\mathbb{R}$.

Par dérivation, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$,

$$F_Y'(y) = \Big[- F_X\Big(\frac{1}{y}\Big)\Big]' = \frac{1}{y^2} F_X'\Big(\frac{1}{y}\Big) = \frac{1}{y^2} f\Big(\frac{1}{y}\Big) \quad \text{d'où} \quad \varphi(y) = \frac{1}{y^2} f\Big(\frac{1}{y}\Big)$$

2. Si f est continue sur $\mathbb{R}$, φ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et Y admet une espérance si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} y\,\varphi(y)dy$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} y\,\varphi(y)dy$ convergent.

Le changement de variable $t = 1/y$ donne :

$$\int_{-\infty}^{0} y\,\varphi(y)dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{y}\,f\Big(\frac{1}{y}\Big)dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t}\,f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_{0}^{+\infty} y\,\varphi(y)dy = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t}\,f(t)dt$$

3. a) Ainsi :

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{1+t^2}dt = \alpha\,\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\pi}$$

b) D'après la question 1, une densité de $U' = 1/U$ est :

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^2}\,u\Big(\frac{1}{t}\Big) = \frac{1}{\pi\,(1+t^2)} = u(t)$$

et au voisinage de $+\infty$, $t\,u(t) \sim 1/(\pi\,t)$ d'intégrale divergente en $+\infty$. Il n'existe donc pas d'espérance.

4. Une densité ψ de V' est donnée par $\psi(t) = \dfrac{1}{t^2}\,v\Big(\dfrac{1}{t}\Big) = \dfrac{e^{-1/(2t^2)}}{\sqrt{2\pi}\,t^2}$, éventuellement prolongée par continuité par $\psi(0) = 0$.

Ainsi V a une espérance nulle ; mais $t\,\psi(t) \sim 1/\big(\sqrt{2\pi}\,t\big)$, au voisinage de $+\infty$, d'intégrale divergente en $+\infty$, donc V' n'a pas d'espérance.

5. On peut proposer $w(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$, qui est une fonction positive, continue, d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}$, (égale au moment d'ordre 2 d'une variable suivant la loi normale centrée réduite) valant 1.

On a, au voisinage de $+\infty$, $t\,w(t) \sim \dfrac{t^3}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$, donc W admet une espérance (c'est le moment d'ordre 3 d'une loi normale centrée réduite).

D'autre part, une densité ω de $W' = 1/W$ est donnée par $\omega(t) = \dfrac{1}{t^2}\,w\Big(\dfrac{1}{t}\Big) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,t^4}\,e^{-1/(2t^2)}$

et $t\,\omega(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,t^3}$ d'intégrale convergente en $+\infty$ donc W' admet une espérance.

Exercice 3.19.

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

À toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_{x}^{x+1} f(t)dt.$$

1. Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose, dans cette question, que f est la densité d'une variable aléatoire X. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de loi uniforme sur $[-1, 0]$. Montrer que g est une densité de probabilité de $X + Y$.

3. On suppose, dans cette question, que f est une fonction positive différente de la fonction nulle et que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge. On note I la valeur de cette intégrale.

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge et montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = I$.

4. On suppose, dans cette question, que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt$ converge.

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt$ converge et montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt$.

Solution :

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f(x+1) - f(x)$.
Elle est a fortiori continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et suivant la loi uniforme sur $[-1, 0]$. On note f_Y une densité de Y. Déterminons une densité h de $X+Y$. Comme X et Y sont indépendantes, h est donnée, sous réserve de convergence, par l'intégrale $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x-t)f(t)dt$ avec :

$$f_Y(x-t) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x-t \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant t \leqslant x+1.$$

Si $t \notin [x, x+1]$, $f_Y(x-t) = 0$, ce qui résout le problème de convergence de l'intégrale et donne :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt = g(x).$$

3. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation de Chasles donne : $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x+1} f(t)dt - \int_{\infty}^{x} f(t)dt$.
Ainsi, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0.$$

b) La fonction $\dfrac{f}{I}$ est une densité de probabilité. Par la question précédente, $g(x) = \dfrac{1}{I}\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt$ est une densité de probabilité. Par suite, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = I$$

4. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur $[x, x+1]$ en posant $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_x^{x+1} u(t)v(t)dt$. On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les fonctions $u = f$ et $v : t \to 1$. Cela donne :

$$|\langle f,1\rangle|^2 \leqslant \|f\|^2\|1\|^2 \quad \Rightarrow \quad |\int_x^{x+1} f(t)dt|^2 \leqslant \|f\|^2\|1\|^2 \quad \Rightarrow \quad |g(x)|^2 \leqslant \int_x^{x+1} f^2(t)dt.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on écrit $\displaystyle\int_x^{x+1} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{x+1} f(t)dt - \int_{\infty}^{x} f(t)dt.$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\int_x^{x+1} f^2(t)dt\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = 0$. On conclut, par comparaison, que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

b) Soit A et B deux réels tels que $B < 0 < A$. Par croissance de l'intégrale, l'inégalité précédente donne :

$$\int_B^A g^2(x)dx \leqslant \int_B^A\Big(\int_x^{x+1} f^2(t)dt\Big)dx$$

Par la question 3 appliquée à la fonction f^2, on obtient :

$$\lim_{A\to+\infty, B\to-\infty}\Big(\int_B^A\Big(\int_x^{x+1} f^2(t)dt\Big)dx\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx$$

La fonction g^2 est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $B < 0 < A$, on a :

$$\int_B^A g^2(x)dx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx$$

On conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt$ converge et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt.$

Exercice 3.20.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi de Poisson de paramètre 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\displaystyle S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

1. Rappeler la loi de S_n, son espérance et sa variance. Déterminer l'espérance et la variance de S_n^*.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle e^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{e^{n-t}t^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle P(S_n^* \leqslant 0) = \frac{1}{n!}\int_n^{+\infty} e^{-t}t^n\,\mathrm{d}t.$

4. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(S_n^* \leqslant 0) - P(S_{n+1}^* \leqslant 0) = \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

5. En déduire que la suite $(P(S_n^* \leqslant 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite monotone qui converge vers une limite $\ell \in [0, 1[$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t > 0$, on pose : $G_{S_n}(t) = E(t^{S_n})$.

a) Donner une expression simple de $G_{S_n}(t)$.

b) Vérifier que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, la variable aléatoire $t^{S_n^*}$ admet une espérance telle que :

$$E(t^{S_n^*}) = \frac{1}{t^{\sqrt{n}}} G_{S_n}\left(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right).$$

c) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(E(t^{S_n^*})\big)$.

Solution :

1. Par stabilité de la loi de Poisson, on a $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$, d'où $E(S_n) = V(S_n) = n$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $E(S_n^*) = 0$ et d'après la formule $V(aX + b) = a^2 V(X)$ on a $V(S_n^*) = 1$.

2. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $f = \exp$ qui de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec les bornes $a = 0$ et $b = n$. On effectue ensuite le changement de variable $t = n - u$.

3. Ainsi

$$P(S_n^* \leqslant 0) = e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = 1 - \int_0^n \frac{e^{-t}t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}t^n}{n!}\,\mathrm{d}t - \int_0^n \frac{e^{-t}t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}t^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

4. D'après la question précédente, par relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}
P(S_n^* \leqslant 0) - P(S_{n+1}^* \leqslant 0) &= \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t - \int_{n+1}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t + \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t - \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t + \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!} - \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

(on a effectué une intégration par parties dans la dernière intégrale)

5. Si $f_n(t) = e^{-t}\dfrac{t^n}{n!}$, on a $f_n'(t) = \dfrac{e^{-t}t^{n-1}}{n!}(n - t)$.

La fonction f_n positive, est croissante sur $[0, n]$ puis décroissante Ainsi la fonction f_{n+1} est croissante sur $[n, n + 1]$ donc, pour tout $t \in [n, n + 1]$, $f_{n+1}(t) \geqslant f_{n+1}(n)$ donc, en intégrant sur $[n, n + 1]$, par croissance de l'intégration, on a :

$$\int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_n^{n+1} f_{n+1}(n)\ \mathrm{d}t = f_{n+1}(n)$$

Donc : $P(S_n^* \leqslant 0) - P(S_{n+1}^* \leqslant 0) = \displaystyle\int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\ \mathrm{d}t - f_{n+1}(n) \geqslant 0.$

Ainsi la suite $(P(S_n^* \leqslant 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Par ailleurs elle est minorée par 0 (suite de probabilités) donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite ℓ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \ell \leqslant P(S_n^* \leqslant 0) \leqslant P(S_1^* \leqslant 0) = 1 - \int_0^1 f_1(t)\ \mathrm{d}t < 1$$

d'où, à la limite : $\ell \in [0, 1[$.

6.a) Par le théorème de transfert, avec une série exponentielle :

$$G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-n}\frac{(nt)^k}{k!} = e^{n(t-1)}.$$

b) On a : $t^{S_n^*} = (t^{\frac{1}{\sqrt{n}}})^{S_n - n} = \dfrac{1}{t^{\sqrt{n}}}\left(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^{S_n}$, d'où $E(t^{S_n^*}) = \dfrac{G_{S_n}\left(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)}{t^{\sqrt{n}}}$.

c) D'après les deux questions précédentes, on a :

$$E(t^{S_n^*}) = \frac{\exp\left(n(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)\right)}{t^{\sqrt{n}}} = \exp\left(n(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1) - \sqrt{n}\ln t\right)$$

On a, au voisinage de 0, $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$; or $u = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln t \to 0$, donc :

$$t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln t} = 1 + \frac{\ln t}{\sqrt{n}} + \frac{(\ln t)^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où $n(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1) = \sqrt{n}\ln t + \dfrac{(\ln t)^2}{2} + o(1)$. D'où : $E(t^{S_n^*}) = \exp\left(\dfrac{(\ln t)^2}{2} + o(1)\right)$.

Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} E(t^{S_n^*}) = \exp\left(\frac{(\ln t)^2}{2}\right)$$

Exercice 3.21.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{A}$.
Établir l'inégalité :

$$|P(A) - P(B)| \leqslant P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$$

2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. Sous réserve d'existence, on pose :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n \text{ et } G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n)t^n$$

a) Montrer que les fonctions G_X et G_Y sont définies sur l'intervalle $[-1, 1]$.

b) Montrer que pour $t \in [-1, 1]$, on a

$$|G_X(t) - G_Y(t)| \leqslant 2\, P(X \neq Y)$$

3. Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} P(U_n \neq 0)$ converge. On pose :

$$C_n = \big\{\omega \in \Omega \,/\, \exists\, i \geqslant n \text{ tel que } U_i(\omega) \neq 0\big\}$$

a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 0$.

b) En déduire que l'ensemble $\big\{i \in \mathbb{N}^* \,/\, U_i \neq 0\big\}$ est presque sûrement fini.

4. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} U_i(\omega)$ et $S(\omega) = \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega)$.

a) Montrer que $P(\{\omega \in \Omega / S(\omega) \text{ existe }\}) = 1$.
On admet que S est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[-1,1]} |G_{S_n}(t) - G_S(t)| = 0$.

Solution :

1. On utilise les systèmes complets d'événements $(A, \overline{A})$ et $(B, \overline{B})$ pour écrire

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \text{ et } P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

En faisant la différence, il vient :

$$|P(A) - P(B)| = |P(A \cap \overline{B}) - P(\overline{A} \cap B)| \leqslant P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$$

2. a) Comme pour $t \in [-1, 1]$, $|P(X = n)t^n| \leqslant P(X = n)$ et comme la série $\sum P(X = n)$ converge, G_X est bien définie sur $[-1, 1]$.

b) Par la première question, pour tout n on a

$$|P(X = n) - P(Y = n)| \leqslant P(X = n \cap Y \neq n) + P(X \neq n \cap Y = n)$$

On somme les inégalités :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P(X=n)-P(Y=n)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}(P(X=n\cap Y\neq n)+P(X\neq n\cap Y=n))$$

Les événements $(X=n)\cap(Y\neq n)$ sont indépendants et tous inclus dans $(X\neq Y)$. Il en est de même des événements $(X\neq n)\cap(Y=n)$. Le majorant est donc plus petit que $2P(X\neq Y)$. Ceci justifie les existences (car on somme des quantités positives) et donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P(X=n)-P(Y=n)| \leqslant 2P(X\neq Y)$$

Pour $t\in[-1,1]$, on a $|P(X=n)t^n-P(Y=n)t^n| \leqslant |P(X=n)-P(Y=n)\|$ qui est le terme général d'une série convergente avec ce qui précède.
On a donc $\sum((P(X=n)t^n-P(Y=n))t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge et est de somme en module inférieure à $2P(X\neq Y)$.

3.a) On remarque que $C_{n+1}\subset C_n$. Comme $C_n=\bigcup_{i=n}^{+\infty}(U_i\neq 0)$ et comme $\sum(P(U_i\neq 0))$ converge, on en déduit (reste de série convergente) que

$$0\leqslant P(C_n)\leqslant \sum_{i=n}^{+\infty}P(U_i\neq 0)\to 0$$

b) Ainsi l'ensemble des ω pour lesquels il existe une infinité de i tels que $U_i(\omega)\neq 0$ est de probabilité nulle.

4. a) Notons A l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels qu'il n'existe qu'un nombre fini de i pour lesquels $U_i(\omega)\neq 0$. Si $\omega\in A$ alors $S(\omega)$ existe (comme somme finie). S est définie au moins sur A qui est de probabilité 1 par la question précédente.

b) Avec les questions précédentes, on a

$$\forall t\in[-1,1],\ |G_{S_n}(t)-G_S(t)|\leqslant 2P(S_n\neq S)$$

On en déduit que

$$\|G_{S_n}-G_S\|_{\infty,[-1,1]}\leqslant 2P(S_n\neq S)$$

La suite d'événements $((S_n\neq S))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante car les U_i sont à valeurs positives. Le théorème de la limite monotone donne

$$\lim_{n\to+\infty}P(S_n\neq S)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(S_n\neq S)\right)=P(\overline{A})=0$$

Exercice 3.22.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que les variables aléatoires X_n sont indépendantes et suivent toutes la même loi d'espérance m et d'écart type σ. On définit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$Y_0 = \frac{X_0}{2} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = \frac{X_{n+1} + Y_n}{2}$$

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a $Y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n+1-k}} X_k$. En déduire que Y_n admet une espérance et une variance.

2. Déterminer $E(Y_n)$. Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

3. Calculer $V(Y_n)$ et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit i et j deux entiers positifs tels que $i < j$. Prouver qu'il existe une constante c indépendante de i et de j pour laquelle on a :

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) \leqslant c\, \frac{1}{2^{j-i}}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

a) Justifier l'existence de l'espérance et de la variance de S_n. Déterminer la limite ℓ de la suite $(E(S_n))_{n\geqslant 1}$.

b) *On admet* que

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)\Big)$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V(S_n) = 0$.

c) Justifier l'inégalité $E(|X|) \leqslant \sqrt{E(X^2)}$ pour toute variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P\left(|S_n - \ell| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\sqrt{V(S_n)} + |E(S_n) - \ell|.\right)$$

En déduire que la suite (S_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à ℓ.

6. On suppose dans cette question que les variables aléatoires X_n sont indépendantes et suivent toutes la loi normale centrée réduite.

a) Déterminer la loi de Y_n.

b) Montrer que la suite (Y_n) converge en loi et préciser la loi limite.

Solution :

1. La propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons la vraie au rang n, alors il vient

$$Y_{n+1} = \frac{X_{n+1} + Y_n}{2} = \frac{X_{n+1}}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n+2-k}} X_k = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^{(n+1)+1-k}} X_k.$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$. La deuxième partie se justifie facilement avec le cours.

2. Avec la formule précédente, on trouve

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n+1-k}} E(X_k) = \frac{m}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = m\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \to m.$$

3. Comme les variables X_k sont indépendantes, on a

$$V(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^{n+1-k}} V(X_k) = \frac{\sigma^2}{4} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{\sigma^2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right).$$

La suite $(V(Y_n))$ converge donc vers $\dfrac{\sigma^2}{3}$.

4. Soient i et j tels que $i < j$. En utilisant l'indépendance des variables (X_k), on obtient

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} \frac{\mathrm{Cov}(X_k, X_l)}{2^{i+j+2-(k+l)}} = \sum_{k=0}^{i} \frac{V(X_i)}{2^{i+j+2-2k}} = \frac{\sigma^2}{2^{j-i+2}} \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{4^k} \leqslant \frac{1}{3} \frac{\sigma^2}{2^{j-i}}.$$

5. a) La justification se fait avec le cours. A l'aide de la question 2, on trouve

$$E(S_n) = \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) = m - \frac{m}{2n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \to m$$

b) En utilisant ce qui précède, il vient

$$\begin{aligned} 0 \leqslant V(S_n) &= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(Y_i, Y_j)\right] \\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\left[n\frac{\sigma^2}{3} + 2c\sigma^2 \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{2^{j-i}}\right)\right] \leqslant \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{1}{3} + 2c\right] \to 0. \end{aligned}$$

c) La justification se fait avec la formule de Koenig-Huygens. En utilisant l'inégalité de Markov, on obtient alors

$$\begin{aligned} P\left(|S_n - m| \geqslant \varepsilon\right) &\leqslant \frac{E(|S_n - m|)}{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left[E(|S_n - E(S_n)|) + |E(S_n) - m|\right] \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{var(S_n)} + |E(S_n) - m|\right] \end{aligned}$$

La variable S_n converge donc en probabilité vers m.

6. a) La variable X suit une loi normale centrée réduite, alors pour tout $a > 0$, la variable aX suit une loi normale $\mathcal{N}(0, a^2)$. Comme les variables X_k sont indépendantes, la stabilité de la loi normale et les questions 1 et 2 nous permettent d'affirmer que Y_n suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}\right))$.

b) Notons Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée (qui est continue). On a alors

$$F_{Y_n}(x) = \Phi\left(\left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} x\right) \to \Phi(\sqrt{3}x).$$

La suite (Y_n) converge donc en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{3})$.