EXERCICE 3.2

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit $R \in \mathbb{N}^*$. On dispose de R pièces de monnaie numérotées de 1 à R qui donnent chacune « pile » avec la probabilité p. On effectue une suite de manches avec ces pièces de la manière suivante :

- lors de la première manche, on lance chaque pièce une fois ;
- aux manches suivantes, on ne relance que les pièces qui n'ont pas donné « pile » aux manches précédentes ;
- on s'arrête lorsque toutes les pièces ont donné « pile ».

Pour tout $k \in [\![1, R]\!]$, on note X_k le nombre total de lancers effectués avec la k-ième pièce.
On note Y le nombre de manches effectuées.

1. Déterminer la loi de X_k, son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de Y.

3. Montrer la convergence de la série $\sum_n P(Y > n)$.

On admet alors que Y admet une espérance et que $E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y > n)$.

4. Soit la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - (1 - q^x)^R$.

Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et montrer que : $\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\frac{1}{\ln q}\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{k+1}$.

5. Établir l'encadrement : $-\frac{1}{\ln q}\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{k+1} \leqslant E(Y) \leqslant 1 - \frac{1}{\ln q}\sum_{k=0}^{R}\frac{1}{k+1}$.

En déduire un équivalent de $E(Y)$ lorsque R tend vers $+\infty$.

On pourra admettre sans démonstration que $\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{k+1}$ *est équivalent à* $\ln R$ *lorsque* R *tend vers* $+\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.2

1. La variable aléatoire X_k est le nombre de coups nécessaires pour obtenir le premier « pile » lors d'une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p.
Donc, X_k suit la loi géométrique de paramètre p, d'où $E(X_k) = \frac{1}{p}$ et $V(X_k) = \frac{q}{p^2}$.

2. On reconnaît que $Y = \max(X_1, \dots, X_R)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par indépendance, on a :

$$P(Y \leqslant n) = P(X_1 \leqslant n, \dots, X_R \leqslant n) = \prod_{k=1}^{R} P(X_k \leqslant n) = (1 - q^n)^R.$$

Ceci reste valable pour $n = 0$. Donc : $P(Y = n) = P(Y \leqslant n) - P(Y \leqslant n-1) = (1-q^n)^R - \left(1 - q^{n-1}\right)^R$.

3. Comme $|q| < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Par ailleurs on sait que $(1-x)^R \underset{x\to 0}{=} 1 - Rx + o(x)$, d'où :

$$(1-q^n)^R = 1 - Rq^n + o(q^n)\,, \text{ soit } P(Y > n) = 1 - (1-q^n)^R \underset{n\to+\infty}{\sim} Rq^n$$

Comme la série géométrique $\sum Rq^n$ converge et est à termes positifs, par théorème de comparaison pour les séries, on en déduit que la série $\sum P(Y > n)$ converge.

4. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^A \left(\sum_{k=0}^{R-1} q^x\,(1-q^x)^k\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{R-1}\int_0^A \mathrm{e}^{x\ln q}\left(1-\mathrm{e}^{x\ln q}\right)^k\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^{R-1}\left[-\frac{\left(1-\mathrm{e}^{x\ln q}\right)^{k+1}}{(k+1)\ln q}\right]_0^A = \sum_{k=0}^{R-1} -\frac{\left(1-\mathrm{e}^{A\ln q}\right)^{k+1}}{(k+1)\ln q} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{R-1}\frac{-1}{(k+1)\ln q}.\end{aligned}$$

5. On a : $\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = 1-(1-q^x)^R = 1-(1-\mathrm{e}^{x\ln q})^R$. Comme $\ln q < 0$, on voit que f est décroissante sur $[0,+\infty[$ (composée de fonctions monotones). Par encadrement d'une somme par des intégrales, on en déduit :

$$\int_0^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=0}^{N}\underbrace{f(n)}_{=P(Y>n)} \leqslant \int_0^N f(x)\,\mathrm{d}x + 1.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ dans les inégalités ci-dessus, puisque tous les termes convergent, on obtient :

$$\frac{-1}{\ln q}\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{(k+1)} = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant E(Y) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + 1 = \frac{-1}{\ln q}\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{(k+1)} + 1.$$

Par théorème d'encadrement, grâce à l'indication, on en déduit que $E(Y)$ est équivalent à $\dfrac{-\ln(R)}{\ln q}$ lorsque R tend vers $+\infty$.

Exercice 3.3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit N un entier naturel impair. Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$.

1. Calculer les espérances $m = E(U_1)$ et $E(S_n)$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note : $u_n = P(S_n \leqslant nm)$, $v_n = P(S_n > nm)$ et $w_n = P(S_n = nm)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire $N + 1 - U_n$. En déduire que $u_n = v_n + w_n$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

4. En déduire la convergence et les limites respectives des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

5. Trouver un polynôme Q_N tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, w_n soit le coefficient de degré mn du polynôme $(Q_N)^n$.
(*on pourra calculer* $E(t^{S_n})$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$)

Solution de l'exercice 3.3

1. Par définition de l'espérance : $m = E(U_1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} kP(U_1 = k) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N+1}{2}$.
Par linéarité de l'espérance, on obtient : $E(S_n) = nm$.

2. On trouve facilement que $N + 1 - U_n$ suit aussi la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. Comme la loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes ne dépend que de la loi de ces variables, on en déduit que les variables $U_1 + \cdots + U_n = S_n$ et $(N + 1 - U_1) + \cdots + (N + 1 - U_n) = n(N + 1) - S_n$ suivent la même loi, donc :

$$u_n = P(S_n \leqslant mn) = P(n(N+1) - S_n \leqslant mn) = P(S_n \geqslant n(N+1) - mn) = P(S_n \geqslant mn) = v_n + w_n.$$

3. On reconnaît que $w_n = P(U_n^* = 0)$, où U_n^* est la variable centrée réduite associée aux variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ qui sont indépendantes, de même loi, loi qui possède une espérance et une variance (car le support est fini). D'après le

théorème central limite, on a donc : $\lim_{n\to+\infty} w_n = P(T=0)$, où T suit la loi normale centrée réduite. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}(w_n)=0$, car T est à densité.

4. Comme $u_n+v_n=1$ et $u_n=v_n+w_n$, on en déduit que $u_n=\dfrac{1+w_n}{2}$ et $v_n=\dfrac{1-w_n}{2}$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

5. On peut écrire :

$$\begin{aligned} E\big(t^{S_n}\big) &= E\big(t^{U_1}\cdots t^{U_n}\big) \\ &= E\big(t^{U_1}\big)\cdots E\big(t^{U_n}\big) \text{ (indépendance de } t^{U_1},\dots,t^{U_n}) \\ &= \Big(E\big(t^{U_1}\big)\Big)^n \\ &= \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{t^k}{N}\right)^n \text{ (théorème de transfert).} \end{aligned}$$

Par ailleurs, le théorème de transfert donne aussi directement : $E\big(t^{S_n}\big)=\sum_{k=n}^{nN} t^k P(S_n=k)$. Ainsi :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{t^k}{N}\right)^n=\sum_{k=n}^{nN} t^k P(S_n=k).$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, donc $w_n=P(S_n=nm)$ est le coefficient de degré mn du polynôme $(Q_N)^n$ avec $Q_N=\sum_{k=1}^{N}\dfrac{X^k}{N}$.

Exercice 3.4

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$.
Une variable aléatoire X est dite *symétrique* si X et $-X$ suivent la même loi.

1. Donner un exemple de variable aléatoire discrète symétrique.

2. a) Soit X une variable aléatoire à densité f_X. Montrer que X est symétrique si et seulement si f_X est paire.
b) Donner un exemple de variable aléatoire à densité qui soit symétrique.

On suppose dorénavant que les variables aléatoires considérées sont symétriques et à densité bornée.

3. Soit X et Y deux telles variables aléatoires indépendantes.
Montrer que $X+Y$ et $X-Y$ sont symétriques.

Pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $X_1,X_2,\dots,X_n$ des variables aléatoires à densité bornée, indépendantes, symétriques et de même loi, centrées et de variance σ^2. Pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$, on pose $T_k=X_1+\cdots+X_k$.

4. Pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$, calculer $P(T_n-T_k\geqslant 0)$.

Soit x un réel positif. Pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$, on pose

$$A_k=\left[\max_{i<k} T_i\leqslant x\right]\cap[T_k>x]$$

c'est-à-dire

$$A_k=\begin{cases} (T_1>x) & \text{si } k=1 \\ (T_1\leqslant x)\cap\cdots\cap(T_{k-1}\leqslant x)\cap(T_k>x) & \text{si } k\geqslant 2\end{cases}$$

5. Pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$ comparer les événements suivants :

a) $B = \left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} T_i > x\right)$ et $C = \bigcup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} A_k$.

b) $D = (T_n - T_k \geqslant 0) \cap A_k$ et $E = (T_n > x) \cap A_k$.

6.a) Montrer que $P([T_n - T_k \geqslant 0] \cap A_k) \geqslant \dfrac{1}{2} P(A_k)$.

b) En déduire l'inégalité suivante :

$$P(\max_{1\leqslant i\leqslant n} T_i > x) \leqslant 2P(T_n > x)$$

Solution de l'exercice 3.4

1. Soit X suivant une loi de Rademacher, *i.e.* $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$. Alors, X est symétrique. On peut également citer la variable certaine nulle.

2. a) Soit X une variable aléatoire à densité. La variable aléatoire X est symétrique si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(X \geqslant -x) = 1 - F_X(-x),$$

i.e. si et seulement si $f_X(x) = f_X(-x)$.

b) La loi normale centrée admet une densité paire. Elle est donc symétrique.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme X et Y sont symétriques, alors f_X et f_Y sont paires. Ensuite, comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$f_{X+Y}(-x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(-x-t) f_Y(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f_X(-x+u) f_Y(-u)du = \int_{\mathbb{R}} f_X(x-u) f_Y(u)du = f_{X+Y}(x)$$

Ainsi, $X + Y$ est symétrique.
Comme $-Y$ est symétrique, d'après le calcul précédent, $X + (-Y) = X - Y$ est symétrique.

4. D'après les questions précédentes, $T_n - T_k$ est la somme de variables aléatoires indépendantes symétriques, donc $T_n - T_k$ est symétrique. Ainsi,

$$P(T_k - T_n \geqslant 0) = P(T_n - T_k \leqslant 0)$$

Comme $T_n - T_k$ est à densité, alors $P(T_n - T_k = 0) = 0$ et $P(T_n - T_k \leqslant 0) + P(T_n - T_k \geqslant 0) = 1$. Ainsi, $P(T_n - T_k \geqslant 0) = \frac{1}{2}$.

5. a) Si $\omega \in [\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} T_i > x]$, alors il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $T_i(\omega) > x$. En notant i_0 le plus petit de ces entiers,

$$(T_1(\omega) \leqslant x) \cap \cdots \cap (T_{i_0-1}(\omega) \leqslant x) \cap (T_{i_0} > x)$$

Ainsi, $\omega \in C$ et $B \subset C$.
Réciproquement, si $\omega \in C$, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\omega \in A_k$ et alors $T_k(\omega) > x$. Ainsi, $\omega \in B$.
Finalement, $B = C$.

b) Si $\omega \in D$, alors $\omega \in A_k$ et $T_k(\omega) > x$. Ainsi, $T_n(\omega) \geqslant T_k(\omega) > x$ et $\omega \in E$.
L'inclusion réciproque est fausse car on peut avoir $T_k = 2x$ et alors $T_n - T_k \leqslant 0$.
Finalement, $D \subset E$.

6.a)b) Comme $B \subset C$, et les (A_k) sont deux à deux disjoints, alors

$$P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}(T_i > x)) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Ainsi, comme $P(T_n - T_k \geqslant 0) = 1/2$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}(T_i > x)) &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(T_n - T_k \geqslant 0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap T_n - T_k \geqslant 0), \text{ par indépendance (lemme des coalitions)} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} P((T_n > x) \cap A_k) \\
&\leqslant P(T_n > x),
\end{aligned}$$

car $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset \Omega$ est une réunion disjointe.

Exercice 3.5

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

- X_n est à valeurs dans $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\}$;
- $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(X_n = \frac{k}{n}) = \alpha_n \left(e^{\frac{k}{n}} - 1\right)$, où $\alpha_n = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{k/n} - 1\right)}$.

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\alpha_n}$. En déduire un équivalent de α_n.

2. On note F_n la fonction de répartition de X_n.
Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, $F_n(x) = \alpha_n \left[\dfrac{e^{\frac{\lfloor nx\rfloor+1}{n}} - 1}{e^{1/n} - 1} - (\lfloor nx\rfloor + 1)\right]$.

3. Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité X que l'on précisera.

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
a) Déterminer la limite en loi de la suite $\big(f(X_n)\big)_n$.
b) La suite $\big(E(f(X_n))\big)_n$ admet-elle une limite lorsque n tend vers l'infini ?

Solution de l'exercice 3.5

1. La fonction exponentielle étant continue sur $[0, 1]$, d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a :

$$\frac{1}{n\alpha_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{k/n} - 1\right) \to \int_0^1 (e^x - 1)dx = e - 2.$$

Ainsi, $\alpha_n \sim \dfrac{1}{n(e-2)}$.

2. Si $x < 0$, alors $F_n(x) = 0$ et si $x \geqslant 1$, alors $F_n(x) = 1$. Ensuite, si $x \in [0, 1[$;

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \alpha_n \sum_{k/\frac{k}{n}\leqslant x} P(X_n = k/n) \\
&= \alpha_n \sum_{j=0}^{\lfloor nx\rfloor}\left(e^{j/n} - 1\right) \\
&= \alpha_n \left[\frac{e^{(k+1)/n} - 1}{e^{1/n} - 1} - (k+1)\right] \\
&= \alpha_n \left[\frac{e^{\frac{\lfloor nx\rfloor+1}{n}} - 1}{e^{1/n} - 1} - (\lfloor nx\rfloor + 1)\right].
\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, si $x < 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$; si $x > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$ et si $x \in [0,1]$, en utilisant les équivalents classiques, on a

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \frac{1}{(e-2)}\,[e^x - 1 - x] = \int_0^x \frac{e^t-1}{e-2}dt,$$

qui est bien une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont une densité vaut $g : t \mapsto \dfrac{e^t-1}{e-2}\mathbf{1}_{[0,1]}$.

4.a) Le cours assure que $(f(X_n))_n$ converge en loi vers $f(X)$.

b) On revient alors à la définition :

$$E(f(X_n)) = \alpha_n \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(e^{k/n}-1\right) \sim \frac{1}{e-2}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(e^{k/n}-1\right)$$

Ainsi, d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, $(E(f(X_n)))_n$ converge vers

$$\frac{1}{e-2}\int_0^1 f(t)(e^t-1)dt$$

(qui vaut par ailleurs $E\big(f(X)\big)$).

Exercice 3.6

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$ et on suppose que :

$$\forall\,(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \begin{cases} P(X=m) & = & \alpha\, m\, q^{m-1} \\ P_{[X=m]}(Y=n) & = & \begin{cases} \dfrac{1}{m} & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

où α est un réel strictement positif que l'on déterminera par la suite.

1.a) Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y) en fonction de α et q.

b) En déduire la loi de la variable aléatoire Y. Trouver la valeur de α et reconnaître cette loi.

2. Soient $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer $P_{[Y=n]}(X=m)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_n = [Y=n]$.

a) Justifier l'existence de l'espérance conditionnelle $E(X \mid B_n)$ et la calculer. En déduire l'existence de l'espérance de X et la déterminer.

b) On considère la variable aléatoire $Z = X + XY$. Montrer que l'espérance conditionnelle $E(Z \mid B_n)$ existe et la calculer. En déduire que Z admet une espérance et déterminer $E(Z)$.

Solution de l'exercice 3.6

1.a) Avec la formule des probabilités conditionnelles, il vient :
$P(X=m\cap Y=n)=P_{[X=m]}(Y=n)P(X=m)$, d'où $P(X=m\cap Y=n)=\dfrac{1}{m}\alpha mq^{m-1}=\alpha q^{m-1}$ si $n\in[\![1,m]\!]$ et $P(X=m\cap Y=n)=0$ dans le cas contraire.

b) On a :

$$P(Y=j)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(X=i\cap Y=j)=\sum_{i=j}^{+\infty}P(X=i\cap Y=j)=\alpha\sum_{i=j}^{+\infty}q^{i-1}=\alpha\frac{q^{j-1}}{p}.$$

On doit donc avoir $1=\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha\frac{q^{j-1}}{p}$, d'où $\alpha=p^2$. Donc, Y suit une loi géometrique de paramètre p.

2. Avec la formule des probabilités conditionnelles, on obtient :
$P_{[Y=n]}(X=m)=pq^{m-n}$ si $m\geqslant n$ et $P_{[Y=n]}(X=m)=0$ sinon.

3.a) Il est clair que l'espérance conditionnelle $E(X\mid B_n)$ existe puisque la série associée est à termes positifs et est convergente d'après les critères usuels. On a donc :

$$E(X\mid B_n)=\sum_{m=n}^{+\infty}mpq^{m-n}=\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1+n)pq^{k-1}=\sum_{k=1}^{+\infty}kpq^{k-1}+(n-1)\sum_{k=1}^{+\infty}pq^{k-1}=E(Y)+n-1=\frac{1}{p}+n-1$$

en reconnaissant l'espérance et la somme des probabilités d'une loi géometrique de paramètre p . Comme la série à termes positifs $\sum E(X\mid B_n)P(B_n)$ est convergente, la variable aléatoire X admet une espérance et avec la formule de l'espérance totale il vient :

$$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}E(X\mid B_n)P(B_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p}+n-1\right)pq^{n-1}=\frac{1}{p}-1+E(Y)=\frac{2-p}{p}$$

b) Posons $g(x,y)=x+xy$ et $I=(\mathbb{N}^*)^2$. La série $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I}g(i,j)P_{B_n}(X=i\cap Y=j)$ est à termes positifs et converge ; par suite l'espérance conditionnelle $E\left(Z\mid B_n\right)$ existe. De plus, la formule de transfert pour une fonction d'un couple de variable aléatoires discrètes nous conduit à :

$$\begin{aligned}E(Z\mid B_n)&=E(X\mid B_n)+E(XY\mid B_n)=E(X\mid B_n)+nE(X\mid B_n)\\&=(n+1)E(X\mid B_n)=(n+1)\left(\frac{1}{p}+n-1\right)=\frac{(n+1)}{p}+n^2-1\end{aligned}$$

Comme la série à termes positifs $\sum\left(\dfrac{(n+1)}{p}+n^2-1\right)P(B_n)$ converge, on voit avec le théorème de l'espérance totale que l'espérance de Z existe et que :

$$\begin{aligned}E(Z)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(n+1)}{p}+n^2-1\right)pq^{n-1}=\frac{1}{p}E(Y)+\left(\frac{1}{p}-1\right)+E(Y^2)\\&=\frac{1}{p}E(Y)+\left(\frac{1}{p}-1\right)+V(Y)+E(Y)^2\\&=\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}-1+\frac{q}{p^2}=\frac{3}{p^2}-1\end{aligned}$$

Exercice 3.7

On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une fonction f qui est convexe et continue sur $\mathbb{R}$.

On admet que pour tout n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ $(n \geqslant 2)$ de réels et tout n-uplet $(t_1, \cdots, t_n)$ de réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$, la fonction f vérifie :

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n)$$

1. On suppose dans cette question que la variable aléatoire X ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
Montrer que $f(E(X)) \leqslant E(f(X))$.

2. On revient au cas général et on pose : $X(\Omega) = \{(x_k)_{k\geqslant 1}\}$. On suppose que les variables aléatoires X et $f(X)$ admettent une espérance.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit l'événement $A_n = (X = x_1) \cup (X = x_2) \cup \ldots \cup (X = x_n)$. On note X_n la variable aléatoire $\mathbf{1}_{A_n}X$, où $\mathbf{1}_{A_n}$ désigne la variable aléatoire indicatrice de A_n.
a) Étudier la convergence des suites $(E(X_n))_n$ et $(E(f(X_n))_n$.
b) En déduire que $f(E(X)) \leqslant E(f(X))$.

3. On considère n variables aléatoires discrètes X_1, ..., X_n $(n \geqslant 2)$ qui admettent toutes une espérance. On suppose que les espérances des variables e^{tX_k} existent pour tout réel positif t et qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $E(\mathrm{e}^{tX_k}) \leqslant \mathrm{e}^{\alpha t^2}$.
On pose $Y = \max(X_1, \cdots, X_n)$.
a) Montrer que Y admet une espérance.
b) Pour tout $t \geqslant 0$, justifier l'inégalité $\mathrm{e}^{tY} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tX_k}$.
c) Soit $t \geqslant 0$. Montrer que $\mathrm{e}^{tE(Y)} \leqslant n\mathrm{e}^{\alpha t^2}$. En déduire que $E(Y) \leqslant 2\sqrt{\alpha \ln(n)}$.

Solution de l'exercice 3.7

1. Ici $X(\Omega)$ est de la forme $\{x_1, \cdots, x_n\}$. En posant $t_k = P(X = x_k) \geqslant 0$, on a bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$ et la relation de convexité de f admise implique que :

$$f(E(X)) = f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n) = E(f(X))$$

(la dernière égalité provient du théorème de transfert).

2. a) Comme $X_n(\Omega) = \{0, x_1, \cdots, x_n\}$, on voit que :

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} x_kP(X = x_k) \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} x_kP(X = x_k) = E(X)$$

Comme $P\left(\overline{A_n}\right) \longrightarrow 0$, on obtient, avec le théorème du transfert,

$$E(f(X_n)) = f(0)P\left(\overline{A_n}\right) + \sum_{k=1}^{n} f(x_k)P(X = x_k) \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} f(x_k)P(X = x_k) = E(f(X))$$

b) Comme X_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs, avec la question 1, il vient $f(E(X_n)) \leqslant E(f(X_n))$. La continuité de f et la question précédente nous permettent d'obtenir $f(E(X)) \leqslant E(f(X))$ par passage à la limite.

3. a) Les variables X_k admettant des espérances, on a $0 \leqslant |Y| \leqslant |X_1| + \cdots + |X_n|$. La variable aléatoire Y admet donc une espérance par domination.

b) Si $\omega \in \Omega$, on observe que $\mathrm{e}^{tY(\omega)}$ est l'un des $\mathrm{e}^{tX_k(\omega)}$, il est donc inférieur à la somme de termes positifs $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tX_k(\omega)}$.

c) On déduit facilement de l'inégalité précédente que l'espérance de la variable aléatoire positive e^{tY} existe pour tout $t > 0$. On est donc en position pour appliquer l'inégalité obtenue en 2. b). On choisit la fonction f_t en posant $f_t(x) = \mathrm{e}^{tx}$ qui est convexe sur $\mathbb{R}$. On obtient alors $\mathrm{e}^{tE(Y)} \leqslant E(\mathrm{e}^{tY})$, puis $\mathrm{e}^{tE(Y)} \leqslant n\mathrm{e}^{\alpha t^2}$ avec la question 3. b) et les données. On en déduit que $E(Y) \leqslant \dfrac{\ln(n)}{t} + \alpha t$ pour tout $t > 0$. On étudie la fonction g de t, correspondant au membre de droite, sur $]0, +\infty[$. On voit qu'elle admet un minimum global au point $t_0 = \sqrt{\dfrac{\ln(n)}{\alpha}}$. L'inégalité $E(Y) \leqslant g(t_0)$ permet de conclure.

Exercice 3.8

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit z_1 et z_2 deux réels distincts strictement positifs. Soit Z une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$Z(\Omega) = \{z_1, z_2\} \text{ et } P([Z = z_1]) = p_1, \quad P([Z = z_2]) = p_2$$

où : $0 < p_1 < 1, \quad 0 < p_2 < 1, \quad p_1 + p_2 = 1, \quad E(Z) = 1$. On pose $V(Z) = \rho^2$, avec $\rho > 0$.

Soit α un paramètre strictement positif inconnu que l'on désire estimer. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que la loi conditionnelle de N sachant $[Z = z_1]$ est la loi Poisson de paramètre αz_1 et la loi conditionnelle de N sachant $[Z = z_2]$ est la loi de Poisson de paramètre αz_2.
On suppose que les paramètres $z_1,\ z_2,\ p_1,\ p_2$ sont connus.

On considère un échantillon $(N_1, \ldots, N_n)$ de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que N et on pose : $\overline{N}_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} N_k$
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on prendra $\Phi(1,96) = 0,975$.

1. a) Donner la loi de N.
b) Calculer $E(N)$.
c) Vérifier que $V(N) = \alpha + \alpha^2 \rho^2$.

2. a) Justifier que, pour n assez grand, on a : $P\left(\alpha \in \left[\overline{N}_n - 1,96\sqrt{\dfrac{V(N)}{n}}, \overline{N}_n + 1,96\sqrt{\dfrac{V(N)}{n}}\right]\right) \geqslant 0,95$.

b) Pourquoi l'inégalité précédente ne suffit-elle pas à déterminer un intervalle de confiance pour α ?

3. a) Montrer que si une suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire W, alors la suite $(W_n + \dfrac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge également en probabilité vers W.

b) Justifier que la suite $\left(\sqrt{\dfrac{V(N)}{\dfrac{1}{n} + \overline{N}_n(1 + \rho^2 \overline{N}_n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 1.

c) On pose, pour tout entier naturel n non nul : $T_n = \sqrt{\dfrac{n}{\dfrac{1}{n} + \overline{N}_n(1 + \rho^2 \overline{N}_n)}} \times \left(\overline{N}_n - \alpha\right)$.

Établir que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

d) En déduire que l'intervalle I suivant est, pour n assez grand, un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 pour α :

$$I = \left[\overline{N}_n - 1,96\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{\overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n)}{n}}, \overline{N}_n + 1,96\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{\overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n)}{n}}\right]$$

Solution de l'exercice 3.8

1. a) En utilisant la formule des probabilités totales et le système complet d'événements $\{[Z=z_1],[Z=z_2]\}$, on a : $P(N=k) = P_{[Z=z_1]}\big([N=k]\big)P([Z=z_1]) + P_{[Z=z_2]}\big([N=k]\big)P([Z=z_2])$.

Soit ici : $P([N=k]) = \dfrac{e^{-z_1\alpha}(z_1\alpha)^k}{k!}p_1 + \dfrac{e^{-z_2\alpha}(z_2\alpha)^k}{k!}p_2$.

b) On utilise la formule de l'espérance totale (on constate que toutes les séries manipulées sont convergentes). On a : $E(N) = E\big(N/[Z=z_1]\big)P([Z=z_1]) + E\big(N/[Z=z_2]\big)P([Z=z_2])$.

Or les lois conditionnelles de N sachant z_1 et z_2 sont des lois de Poisson de paramètres respectifs αz_1 et αz_2. On a donc : $E\big(N/[R=z_i]\big) = \alpha z_i$. D'où : $E(N) = \alpha z_1 p_1 + \alpha z_2 p_2 = \alpha(z_1p_1 + z_2p_2) = \alpha E(Z) = \alpha$.

c) De même : $E(N^2) = E\big(N^2/[Z=z_1]\big)P([Z=z_1]) + E\big(N^2/[Z=z_2]\big)P([Z=z_2])$.

Or, $E\big(N^2/[Z=z_i]\big)$ est le moment d'ordre 2 d'une loi de Poisson de paramètre αz_i, d'où : $E\big(N^2/[Z=z_i]\big) = \alpha z_i + \alpha^2 z_i^2$ et $E(N^2) = (\alpha z_1 + \alpha^2 z_1^2)p_1 + (\alpha z_2 + \alpha^2 z_2^2)p_2 = \alpha + \alpha^2 E(Z^2)$. En conclusion : $V(N) = \alpha + \alpha^2\rho^2$.

2. a) On applique à la variable $\overline{N}_n$ le théorème limite central : $\dfrac{\overline{N}_n - \alpha}{\sqrt{\frac{V(N)}{n}}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$.

En supposant que, pour n assez grand, on puisse approcher le loi précédente par la loi normale centrée réduite, on obtient bien : $P\left(\alpha \in \left[\overline{N}_n - 1,96\sqrt{\frac{V(N)}{n}}, \overline{N}_n + 1,96\sqrt{\frac{V(N)}{n}}\right]\right) \geqslant 0,95$.

b) Comme les bornes de l'intervalle dépendent de $V(N)$, qui dépend de α, l'intervalle précédent n'est pas un intervalle de confiance pour α.

3. a) On écrit : $|W_n + \dfrac{1}{n} - W| \leq |W_n - W| + \dfrac{1}{n}$. On en déduit que, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\big[|W_n + \frac{1}{n} - W| \geqslant \varepsilon\big] \subset \big[|W_n - W| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\big] \cup [\frac{1}{n} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}]$$

En utilisant la croissance de la probabilité et le fait que $P(A\cup B) \leqslant P(A) + P(B)$, on a donc :

$$P\Big(\big[|W_n + \frac{1}{n} - W| \geqslant \varepsilon\big]\Big) \leqslant P\Big(\big[|W_n - W| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\big]\Big) + P([\frac{1}{n} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}])$$

Or, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $P([\dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}]) = 0$. Pour $n \geqslant n_0$, on a donc :

$$P\Big(\big[|W_n + \frac{1}{n} - W| > \varepsilon\big]\Big) \leqslant P\Big(\big[|W_n - W| > \frac{\varepsilon}{2}\big]\Big)$$

Enfin, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(\big[|W_n - W| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\big]\Big) = 0$, on a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(\big[|W_n + \dfrac{1}{n} - W| \geqslant \varepsilon\big]\Big) = 0$.

b) En appliquant la loi faible des grands nombres, on a : $\overline{N}_n \xrightarrow{P} \alpha$. On a alors successivement :

- par continuité : $\overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n) \xrightarrow{P} \alpha(1+\alpha\rho^2)$;
- grâce au résultat démontré à la question précédente : $\dfrac{1}{n} + \overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n) \xrightarrow{P} \alpha(1+\alpha\rho^2)$;
- puis par continuité : $\left(\sqrt{\dfrac{V(N)}{\frac{1}{n} + \overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n)}}\right) \xrightarrow{P} \sqrt{\dfrac{V(N)}{V(N)}} = 1$.

c) On écrit : $T_n = \left(\sqrt{\dfrac{V(N)}{\frac{1}{n} + \overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n)}}\right) \times \dfrac{\overline{N}_n - \alpha}{\sqrt{\frac{V(N)}{n}}}$. Dans le produit précédent, la première des deux variables converge en probabilité vers 1 et la seconde en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Le théorème de

Slutsky permet alors d'affirmer que le produit converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On a donc bien : $T_n \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$.

d) On construit alors un intervalle de confiance pour α au niveau de confiance 0.95 en supposant que n est assez grand pour pouvoir approcher la loi de T_n par une loi normale centrée réduite.

$$\left[\overline{N}_n - 1,96\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{\overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n)}{n}}, \overline{N}_n - 1,96\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{\overline{N}_n(1+\rho^2\overline{N}_n)}{n}}\right]$$

Exercice 3.9

On rappelle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit r un entier naturel non nul. Une variable aléatoire X suit la loi de χ^2 à r degrés de liberté si une densité f_X de X est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(r/2)\,2^{r/2}}\, x^{(r/2)-1}\,\mathrm{e}^{-x/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de χ^2 à r degrés de liberté. On pose $Z = \dfrac{X}{2}$ et $\nu = \dfrac{r}{2}$.

a) Déterminer la loi de Z.

b) En déduire l'espérance et la variance de X.

2. a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathrm{e}^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda} \mathrm{e}^{\lambda - t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

b) Soit Y_λ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit X_{2n} une variable aléatoire suivant la loi de χ^2 à $2n$ degrés de liberté.
Montrer que $P(X_{2n} > 2\lambda) = P(Y_\lambda < n)$.

c) Écrire une fonction Scilab de paramètres n entier et $x > 0$ réel qui retourne la valeur de $P(X_{2n} > x)$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes suivant toute la loi normale centrée réduite.

a) Déterminer la loi de X_1^2.

b) En déduire la loi de $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i^2$.

c) Soit r et s deux entiers vérifiant $2 < r < s$. Soit T_r et T_s deux variables aléatoires qui suivent respectivement la loi de χ^2 à r degrés de liberté et la loi de χ^2 à s degrés de liberté.
Tracer sur un même graphique l'allure des fonctions de répartition de T_r et T_s.

Solution de l'exercice 3.9

1. a) On utilise la fonction de répartition. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(Z \leqslant x) = P(X \leqslant 2x) = F_X(2x)$$

Une densité de Z est donc :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2}{\Gamma(\nu)2^\nu}(2x)^{\nu-1}\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi Z suit la loi $\gamma(\nu)$ ou encore la loi $\gamma(r/2)$.

b) Par le cours et les propriétés de l'espérance et de la variance, on a : $E(X) = 2\nu = r$ et $V(X) = 4\nu = 2r$.

2. a) Il s'agit de la formule de Taylor avec reste intégral, intégrale dans laquelle on effectue le changement de variable $t \to \lambda - t$ (on peut également faire une intégration par parties et une récurrence).

b) On a : $P(X_{2n} > 2\lambda) = P(2Z > 2\lambda) = P(Z > \lambda)$ où $Z = \dfrac{1}{2}X_{2n} \hookrightarrow \gamma(n)$.

Donc, $P(X_{2n} > 2\lambda) = \dfrac{1}{\Gamma(n)}\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}dt$.

Et $P(Y_\lambda < n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!} = 1 - \int_0^\lambda \mathrm{e}^{-t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_\lambda^{+\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}dt$, d'après la question 2.a).

On a bien : $P(X_{2n} > 2\lambda) = P(Y_\lambda < n)$.

c) Une proposition

```
function res=P(n,x)
lambda=x/2
pois=exp(-lambda)
res=pois
for k=1: n-1
  pois=pois*lambda/k
  res=res+pois
end
endfunction
```

3. a) Avec la méthode de la fonction de répartition, on a $X_1^2(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et pour $x \geqslant 0$:

$$F_{X_1^2}(x) = P(X_1^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X_1 \leqslant \sqrt{x}) = F_{X_1}(\sqrt{x}) - F_{X_1}(-\sqrt{x})$$

Une densité est donc :

$$f_{X_1^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}f_{X_1}(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{e}^{-x/2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \geqslant 0$, $f_{X_1^2}(x) = \dfrac{1}{\Gamma(1/2)2^{1/2}}x^{(1/2)-1}\mathrm{e}^{-x/2}$. Donc, X_1^2 suit la loi de χ^2 à 1 degré de liberté. Autrement dit, $Z_1 = \dfrac{1}{2}X_1^2 \hookrightarrow \gamma(1/2)$.

b) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_k$ sont indépendantes et de même loi de χ^2 à 1 degré de liberté ; donc, $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^k X_i^2 \hookrightarrow \gamma(k/2)$, c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{i=1}^k X_i^2$ suit la loi de χ^2 à k degrés de liberté.

c) On a : $T_r = \displaystyle\sum_{i=1}^r X_i^2$ et $T_s = \displaystyle\sum_{i=1}^s X_i^2$ et puisque $r < s$, on a $T_r(\omega) \leqslant T_s(\omega)$. Par suite, pour tout x réel, on a $[T_s \leqslant x] \subset [T_r \leqslant x]$; donc, $F_{T_s}(x) \leqslant F_{T_r}(x)$. Bien entendu, si $x \leqslant 0$, on a $F_{T_s}(x) = F_{T_r}(x) = 0$.

Exercice 3.10

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit f la fonction définie sur $D =]0,1[\times]0,1[$ par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[\times]0,1[,\ f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

a) Montrer que f est de classe C^1 sur D.

b) Déterminer les éventuels extremums locaux de f sur D.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ \dfrac{1}{\alpha \times 3^t} & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

a) Déterminer le réel α pour que g soit une densité d'une variable aléatoire Y.

b) Déterminer la loi de $Z = \lfloor Y \rfloor$.

3. Une urne contient des boules blanches en proportion b, des boules vertes en proportion v et des boules rouges en proportion r. On suppose $0 < b < 1, 0 < v < 1, 0 < r < 1$ et $b + v + r = 1$.

On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

a) Déterminer la loi de X.

b) Déterminer l'espérance $E(X)$ de X.

c) Que peut-on déduire de la question 1 pour $E(X)$?

d) Comparer la loi de Z à celle de X lorsque $b = v = r = 1/3$.

Solution de l'exercice 3.10

1. a) La fonction f est de classe C^1 sur l'ouvert D comme somme de fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas.

On calcule le gradient de f :

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2}, \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} \right)$$

b) Les points critiques sont donnés par : $\begin{cases} (1-x)^2 = (x+y)^2 \\ (1-y)^2 = (x+y)^2 \end{cases}$. Par positivité de x et y, il vient $x = y = 1/3$.

Pour vérifier si c'est un minimim ou pas, on utilise la Hessienne. Il vient

$$r = t = 27/2, s = 27/4 \Rightarrow s^2 - rt < 0$$

Ainsi, $(1/3, 1/3)$ est un minimum local de f sur D.

2. a) La fonction g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Elle est positive si $\alpha > 0$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t\ln 3}}{\alpha} dt = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{9\ln 3}$$

b) On a $Z(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ et pour tout $k \geqslant 2$:

$$P(Z = k) = \int_{k}^{k+1} g(t)dt = \frac{2}{3^{k-1}}$$

3. On a $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. Notons pour tout $i \geqslant 1$, B_i (resp. V_i et R_i) l'événement « le i-ième tirage a amené une boule blanche (resp. verte ou rouge) ». Alors :

$$[X = k] = \left[\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i \cap \overline{B_k}\right] \cup \left[\bigcap_{i=1}^{k-1} V_i \cap \overline{V_k}\right] \cup \left[\bigcap_{i=1}^{k-1} R_i \cap \overline{R_k}\right]$$

Ces événements sont disjoints. Par indépendance des tirages, il vient :

$$P(X = k) = b^{k-1}(1 - b) + v^{k-1}(1 - v) + r^{k-1}(1 - r)$$

b) Le calcul de l'espérance de X se fait en utilisant la dérivée de la série géométrique. Il vient :

$$\begin{aligned} E(X) &= (1-b) \times \left(\frac{1}{(1-b)^2} - 1\right) + (1-v) \times \left(\frac{1}{(1-v)^2} - 1\right) + (1-r) \times \left(\frac{1}{(1-r)^2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-v} + \frac{1}{1-r} - 2 \end{aligned}$$

c) D'après la question 1, $E(X) = f(b, r) - 2$ (car $1 - v = b + r$) et $E(X)$ est minimale pour $b = r = v = 1/3$.

d) Lorsque $b = v = r = 1/3$, la loi de X est celle de Z.

Exercice 3.11

Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel k vérifiant $0 < k < 1$ tel que :

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y| \qquad (*)$$

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 = x \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite λ qui vérifie $f(\lambda) = \lambda$ (λ s'appelle un point fixe de f).

c) Montrer que f admet un unique point fixe.

2. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à densité définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} = f(T_n)$$

où la fonction f vérifie la propriété $(*)$.

Soit λ le point fixe de f et $\varepsilon > 0$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $A_n = [k^n |T_0 - \lambda| > \varepsilon]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$.

b) En déduire que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à λ.

c) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers λ (on pourra distinguer les valeurs de la variable $x \in \mathbb{R}$ selon que $x > \lambda$ ou $x < \lambda$).

3. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires définie par T_0 et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \omega \in \Omega,\ T_{n+1}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{T_n(\omega)} \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\, \mathrm{d}t\,.$$

Étudier les convergences en probabilité et en loi de la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.11

1. a) Par récurrence, on montre que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$.

b) Comme $0 < k < 1$, la série $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente, donc convergente. Par télescopage, la suite $(u_n)_n$ admet une limite λ.
Ce réel vérifie $f(\lambda) = \lambda$ par continuité de f (d'après $(*)$) car $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lambda$.

c) Soit λ et λ' deux réels distincts tels que $f(\lambda) = \lambda$ et $f(\lambda') = \lambda'$. On a $|f(\lambda) - f(\lambda')| = |\lambda - \lambda'| \leqslant k\,|\lambda - \lambda'|$ si et seulement si $k \geqslant 1$, ce qui contredit l'hypothèse $0 < k < 1$. Donc, λ est unique.

2.a) On a $P(A_n) = P(k^n|T_0 - \lambda| > \varepsilon) = 1 - F_{T_0}\Big(\lambda + \dfrac{\varepsilon}{k^n}\Big) + F_{T_0}\Big(\lambda - \dfrac{\varepsilon}{k^n}\Big)$, en notant F_{T_0} la fonction de répartition de T_0. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\varepsilon}{k^n} = +\infty$ $(0 < k < 1)$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{T_0}\Big(\lambda + \dfrac{\varepsilon}{k^n}\Big) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{T_0}\Big(\lambda - \dfrac{\varepsilon}{k^n}\Big) = 0$.
Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(k^n|T_0 - \lambda| > \varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 1 - 1 + 0 = 0$.

b) Soit λ l'unique solution de l'équation $f(x) = x$. On a : $|T_{n+1}(\omega) - \lambda| = |f\big(T_n(\omega)\big) - f(\lambda)| \leqslant k\,|T_n(\omega) - \lambda|$.

Par suite, $|T_n(\omega) - \lambda| \leqslant k^n|T_0(\omega) - \lambda|$ et donc $[\,|T_n - \lambda| > \varepsilon\,] \subset [\,k^n|T_0 - \lambda| > \varepsilon\,] = A_n$.

Il en résulte que $0 \leqslant P(|T_n - \lambda| > \varepsilon) \leqslant P(A_n)$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|T_n - \lambda| > \varepsilon) = 0$.

Finalement, la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à λ.

c) • Si $x > \lambda$, on pose $x = \lambda + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

On a $1 \geqslant P(T_n \leqslant x) = P(T_n \leqslant \lambda + \varepsilon) = P(T_n - \lambda \leqslant \varepsilon) \geqslant P(|T_n - \lambda| \leqslant \varepsilon)$. Or, la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers λ, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|T_n - \lambda| \leqslant \varepsilon) = 1$ et par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \leqslant x) = 1$.

• Si $x < \lambda$, on pose $x = \lambda - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

On a $0 \leqslant P(T_n \leqslant x) = P(\lambda - T_n \geqslant \varepsilon) = 1 - P(\lambda - T_n \leqslant \varepsilon) \leqslant 1 - P(|\lambda - T_n| \leqslant \varepsilon)$. La convergence en probabilité de la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers λ se traduit par l'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\lambda - T_n| \leqslant \varepsilon) = 1$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \leqslant x) = 0$.

Il est inutile d'étudier le cas $x = \lambda$ car c'est un point de discontinuité de la fonction de répartition de la variable certaine λ.

• Bilan : en notant F_{T_n} la fonction de répartition de T_n, on a : $\forall\, x \in \mathbf{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \lambda \\ 0 & \text{si } x < \lambda \end{cases}$.

Donc, la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers la variable certaine λ.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x \exp\Big(-\dfrac{t^2}{2}\Big)\,\mathrm{d}t$. En notant Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a : $\forall\, x \in \mathbf{R},\ f(x) = \Phi(x) - \dfrac{1}{2}\cdot$ Les propriétés de Φ permettent de dire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante. En particulier, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\dfrac{x^2}{2}\Big)$.

Par suite, $\forall\, x \in \mathbf{R},\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} < 1$ et l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ est $\lambda = 0$.

L'inégalité des accroissements finis permet d'écrire $\forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$ avec $k = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ par exemple.
D'après les questions 2. b) et 2. c), on peut déduire que la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi et en probabilité vers la variable certaine nulle.

EXERCICE 3.12

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à densité indépendantes de même loi, positives telles que $E(X_1) = 1$ et admettant une variance non nulle.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

1. a) Montrer que $E(\sqrt{X_1})$ existe et appartient à $]0,1[$.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} E(\sqrt{X_i}) = 0$.

c) Montrer que la suite (Y_n) converge en probabilité vers 0.

2. On note $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice d'un événement A.
Soit X une variable aléatoire positive, à densité, admettant un moment d'ordre 2 non nul. Soit $\theta \in]0,1[$.
a) Montrer que $E(X\mathbf{1}_{[X\leqslant\theta E(X)]}) \leqslant \theta E(X)$.
b) Montrer que $E(X\mathbf{1}_{[X\geqslant\theta E(X)]}) \leqslant \sqrt{E(X^2)}\sqrt{P(X \geqslant \theta E(X))}$.
c) En déduire que $P\big(X \geqslant \theta E(X)\big) \geqslant \dfrac{(1-\theta)^2\big(E(X)\big)^2}{E(X^2)}$.

3. Déduire de la question précédente que

$$P\left(\sqrt{Y_n} \geqslant \frac{1}{2}E(\sqrt{Y_n})\right) \geqslant \frac{1}{4}(E(\sqrt{X_1}))^{2n}$$

4. Dans cette question, on suppose que $E(\sqrt{X_1}) \geqslant 1$ (et donc on ne suppose plus que $E(X_1) = 1$). Montrer que la suite (Y_n) ne converge pas en probabilité vers 0.

Solution de l'exercice 3.12

1. a) Comme $E(X_1)$ existe, la variable aléatoire $\sqrt{X_1}$ admet un moment d'ordre 2, donc un moment d'ordre 1. De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $0 \leqslant E(\sqrt{X_1}) \leqslant E(X_1)^{1/2} = 1$.

- Comme $\sqrt{X_1} \geqslant 0$, si $E(\sqrt{X_1}) = 0$, alors $X_1 = 0$ presque sûrement en contradiction avec $V(X_1) \neq 0$.
- Si $E(\sqrt{X_1}) = 1$, comme $E(X_1) = 1$, il vient $V(\sqrt{X_1}) = 0$ et $\sqrt{X_1} = 1$ presque sûrement et $V(X_1) = 0$.

b) Evident par la question précédente et l'indépendance des variables aléatoires en jeu.

c) Par l'inégalité de Markov, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(Y_n \geqslant \varepsilon) = P(\sqrt{Y_n} \geqslant \sqrt{\varepsilon}) \leqslant \frac{E(\sqrt{Y_n})}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} E(\sqrt{X_i})}{\sqrt{\varepsilon}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. a) Comme X est positive, on a : $X\mathbf{1}_{[X\leqslant\theta E(X)]} \leqslant \theta E(X)$, puis l'on prend l'espérance.

b) On utilise l'inégalité de Cauchy Schwarz, ce qui donne :

$$E(X\mathbf{1}_{[X\geqslant\theta E(X)]}) \leqslant E(X^2)^{1/2}(E(\mathbf{1}^2_{[X\geqslant\theta E(X)]}))^{1/2} = E(X^2)^{1/2}(P(X \geqslant \theta E(X)))^{1/2}$$

c) Il reste à écrire que $E(X) = E(X\mathbf{1}_{[X\leqslant\theta E(X)]}) + E(X\mathbf{1}_{[X\geqslant\theta E(X)]})$ et à utiliser les deux questions précédentes (Inégalité de Paley-Zigmund).

3. On prend $X = \sqrt{Y_n}$ et $\theta = 1/2$. Il vient :

$$P\left(\sqrt{Y_n} \geqslant \frac{1}{2}E(\sqrt{Y_n})\right) \geqslant \frac{1}{4}\frac{(\prod_{i=1}^{n} E(\sqrt{X_i}))^2}{1} = \frac{1}{4}\prod_{i=1}^{n}(E(\sqrt{X_i}))^2 = \frac{1}{4}(E(\sqrt{X_1}))^{2n}$$

4. Si $E(\sqrt{X_1}) \geqslant 1$, alors $E(\sqrt{Y_n}) \geqslant 1$. Donc, d'après la question précédente :

$$P(\sqrt{Y_n} \geqslant \frac{1}{2}) \geqslant P(\sqrt{Y_n} \geqslant \frac{1}{2}E(\sqrt{Y_n})) \geqslant \frac{1}{4}.$$

Ainsi, pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$, la probabilité $P(|\sqrt{Y_n} - 0| \geqslant \varepsilon)$ ne peut tendre vers 0.

Exercice 3.13

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$R_n(\omega) = \operatorname{card}\{X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$$

On admet que R_n est une variable aléatoire.

1.a) Soit $a \in \mathbb{N}^*$. En séparant les variables aléatoires X_i telles que $X_i(\omega) < a$ de celles X_j telles que $X_j(\omega) \geqslant a$, montrer que :

$$R_n \leqslant a + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[X_i \geqslant a]}.$$

b) Montrer que R_n admet une espérance.

c) Déduire du 1.a) que $E(R_n) = o(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

On suppose désormais que $E(X_1)$ existe.

2. Montrer que $P(X_1 \geqslant m) = o\left(\dfrac{1}{m}\right)$ quand l'entier m tend vers $+\infty$.

3. Montrer que $E(R_n) = o(\sqrt{n})$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.
Indication : pour $\varepsilon > 0$ donné, on pourra choisir $m = \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor$.

Solution de l'exercice 3.13

1.a) Comme proposé par l'énoncé, on écrit :

$$R_n(\omega) = \operatorname{card}\left(\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\} \cap [\![0, a[\![\right) + \operatorname{card}\left(\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\} \cap [\![a, +\infty[\![\right).$$

Ainsi :

$$R_n(\omega) \leqslant a + \operatorname{card}\{i \in [\![1, n]\!] / X_i(\omega) \geqslant a\} = a + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[X_i \geqslant a]}(\omega).$$

b) Comme R_n est bornée (par 1 et n) et qu'elle est positive, elle admet une espérance.
c) Les questions précédentes donnent :

$$E(R_n) \leqslant a + \sum_{i=1}^{n} P([X_i \geqslant a]) = a + nP(X_1 \geqslant a) \quad (\star)$$

Ainsi : $0 \leqslant \dfrac{E(R_n)}{n} \leqslant \dfrac{a}{n} + P(X_1 \geqslant a)$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, en choisissant a assez grand, on a $P(X_1 \geqslant a) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, et pour ce a fixé, pour n assez grand ($n \geqslant n_0$), on a $\dfrac{a}{n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left|\frac{E(R_n)}{n}\right| \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(R_n)}{n} = 0$.

2. On a :

$$mP(X_1 \geqslant m) = m\sum_{k=m}^{+\infty} P(X_1 = k) \leqslant \sum_{k=m}^{+\infty} kP(X_1 = k)$$

qui représente le reste d'une série convergente et qui tend donc vers 0.
Remarque : l'inégalité de Markov ne donne que : $P(X_1 \geqslant m) = O\left(\dfrac{1}{m}\right)$ ou $P(X_1 \geqslant m) = o\left(\dfrac{1}{m^2}\right)$, et à condition qu'il existe un moment d'ordre 2.

3. On sait que $E(X_1)$ existe. On choisit $m = \lfloor \varepsilon\sqrt{n}\rfloor$ et on reprend l'inégalité $(\star)$ avec $a = m$.

$$0 \leqslant E(R_n) \leqslant m + nP(X_n \geqslant m) = \lfloor \varepsilon\sqrt{n}\rfloor + n\, o\left(\frac{1}{\lfloor \varepsilon\sqrt{n}\rfloor}\right) = \lfloor \varepsilon\sqrt{n}\rfloor + o(\sqrt{n}).$$

En effet, par encadrement, on a facilement : $\lfloor \varepsilon\sqrt{n}\rfloor \sim \varepsilon\sqrt{n}$.
Pour n assez grand, on a $o(\sqrt{n}) \leqslant \varepsilon\sqrt{n}$. On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow |E(R_n)| \leqslant 2\varepsilon\sqrt{n}$$

c'est-à-dire : $E(R_n) = o(\sqrt{n})$.

EXERCICE 3.14

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Pour toute partie finie S de $\mathbb{N}$, on note $|S|$ ou $\mathrm{card}(S)$ son cardinal.
Soit un entier $m \geqslant 2$ et $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme discrète sur $[\![1, m]\!]$.
Pour tout $n \geqslant 1$, on note U_n la variable aléatoire égale au nombre de valeurs distinctes prises par les variables $X_1, \dots, X_n$, c'est à dire :

$$\forall \omega \in \Omega, U_n(\omega) = \mathrm{card}(\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\})$$

1. a) Préciser $U_n(\Omega)$ en fonction de n et m.

b) Calculer la probabilité $P(U_n = 1)$.

c) Calculer la probabilité $P(U_n = n)$ en fonction de n et m.

2. Expliquer ce qu'affiche le script Scilab suivant :

```
m=100
n=50
x=grand(1,n,'uin',1,m)
T=[]
for k=1: n
  z=members(x(k),T) // z est un entier donnant le nombre de fois où x(k) est dans T
  if z==0 then
    T=[T,x(k)]
  end
end
disp(gsort(T,'lc','i')) // gsort permet de trier un vecteur
```

3. a) Montrer que $P([X_1 \neq X_n] \cap [X_2 \neq X_n] \cap \dots \cap [X_{n-1} \neq X_n]) = \left(\dfrac{m-1}{m}\right)^{n-1}$.

b) On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties non vides de $[\![1, m]\!]$. Pour $S \in \mathcal{P}$, on pose :

$$A_S = \{\omega \in \Omega / \{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\} = S\}$$

Montrer que :

$$P([X_1 \neq X_n] \cap [X_2 \neq X_n] \cap \cdots \cap [X_{n-1} \neq X_n]) = \sum_{S \in \mathcal{P}} P(A_S) \left(\frac{m - |S|}{m} \right)$$

4. a) En déduire une expression de $E(U_{n-1})$ en fonction de n et m.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(U_n)$. Expliquer le résultat.

c) Déterminer $\lim\limits_{m \to +\infty} E(U_n)$. Expliquer le résultat.

Solution de l'exercice 3.14

1. a) $U_n(\Omega) = [\![1, \min(n, m)]\!]$.

b) On a : $[U_n = 1] = \bigcup\limits_{k=1}^{m} ([X_1 = k] \cap \cdots \cap [X_n = k])$. Par incompatibilité puis par indépendance des (X_i), on en déduit : $P(U_n = 1) = m \left(\dfrac{1}{m} \right)^n$.

c) • si $n > m$, l'événement $[U_n = n]$ est impossible, donc $P(U_n = n) = 0$.

• si $n \leqslant m$, l'événement $[U_n = n]$ correspond à tirer n valeurs distinctes parmi les m valeurs proposées. Ainsi de manière analogue au 1.b), on a : $P(U_n = n) = \dbinom{m}{n} \left(\dfrac{1}{m} \right)^n$.

2. Ce script simule le tirage de $X_1, \ldots, X_n$ et renvoie la liste des valeurs prises par U_n, sans répétition (la boucle permet d'ajouter au vecteur T une valeurs qui n'apparaît pas auparavant dans T), triées par ordre croissant.

3. a) Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet $(X_n = a)_{a \in [\![1, m]\!]}$:

$$\begin{aligned} P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) &= \sum_{a=1}^{m} P\Big((X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) \Big/ X_n = a \Big) P(X_n = a) \\ &= \sum_{a=1}^{m} P(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a) P(X_n = a) \quad \text{(indépendance)} \\ &= \sum_{a=1}^{m} \left(\frac{m-1}{m} \right)^{n-1} \times \frac{1}{m} = \left(\frac{m-1}{m} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

b) On a $(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) = \bigcup\limits_{S \in \mathcal{P}} \Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S \Big) \cap (X_n \notin S)$ (réunion disjointe). Donc,

$$\begin{aligned} P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n) &= \sum_{S \in \mathcal{P}} P\Big((\{X_1, \ldots, X_{n-1} = S) \cap (X_n \notin S) \Big) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{P}} P\Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S \Big) P\Big((X_n \notin S) \Big) \quad \text{(indépendance)} \\ &= \sum_{S \in \mathcal{P}} P\Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S \Big) \Big(\frac{m - |S|}{m} \Big) \end{aligned}$$

4. a) On partitionne $\mathcal{P}$ en réunion disjointe de sous-ensembles de cardinal k.
En remarquant que $\sum\limits_{S \in \mathcal{P}, |S| = k} P(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S) = P(U_{n-1} = k)$, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{P}} P\Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S \Big) \Big(\frac{m - |S|}{m} \Big) &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{S \in \mathcal{P}, |S| = k} P\Big(\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} = S \Big) \Big(\frac{m-k}{m} \Big) \\ &= \sum_{k=1}^{m} P(U_{n-1} = k) \Big(\frac{m-k}{m} \Big) = 1 - \frac{1}{m} E(U_{n-1}) \end{aligned}$$

Ainsi, $E(U_{n-1}) = m(1 - P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n)) = m\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{m}\right)^{n-1}\right)$.

b) La suite $((1 - \dfrac{1}{m})^n)$ est géométrique de raison $q \in]0,1[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} E(U_n) = m$. Si n est très grand par rapport à m, alors pour chaque valeur de $[\![1, m]\!]$ la famille des X_i prendra toutes les valeurs de $[\![1, m]\!]$ et on aura $U_n = m$ presque sûrement à chaque tirage.

c) De l'équivalent $1 - (1 - x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$, on déduit que $E(U_n) \underset{m\to+\infty}{\sim} m \times \dfrac{n}{m}$. On en conclut : $\lim\limits_{m\to+\infty} E(U_n) = n$. Si m est très grand face à n, les $X_1, \ldots, X_n$ se placeront sur n valeurs du grand intervalle $[\![1, m]\!]$ et ces valeurs seront presque sûrement deux à deux distinctes.

Exercice 3.15

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall\, x > 0,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

On admet sans démonstration que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma''(x) > 0$.

Dans tout l'exercice, on note X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
On pose : $Y = |X|$ et $T = \sqrt{Y} = \sqrt{|X|}$.

1.a) Montrer que la variable aléatoire Y est à densité et déterminer une densité f_Y de Y.

b) Justifier que Y admet une espérance et une variance que l'on calculera.

2.a) Justifier que T admet une espérance et une variance.

b) Calculer $E(T)$ à l'aide du théorème de transfert et du changement de variable $t = \dfrac{x^2}{2}$.

Montrer que $V(T) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\Big(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Big(\Gamma\Big(\dfrac{3}{4}\Big)\Big)^2\Big)$.

3.a) Établir l'existence et l'unicité d'un réel $\alpha \in]1, 2[$ pour lequel on a $\Gamma'(\alpha) = 0$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Justifier l'encadrement : $1 < \Gamma\Big(\dfrac{3}{4}\Big) < \pi^{\frac{1}{4}}$.

4. Le programme *Scilab* suivant renvoie le réel 1.2251307. Que représente ce réel ? Justifier votre réponse.

```
n=100000
S=sum((grand(1,n,'exp',1).^(- 0.25)))/n
```

Solution de l'exercice 3.15

1.a) On a $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$, donc $F_Y(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. De plus si $x > 0$, en notant Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on a :

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(|X| \leqslant x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1.$$

Ainsi F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$, donc Y est à densité et une densité f_Y est donnée par $f_Y(x) = 0$ si $x \leqslant 0$, et par $f_Y(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ si $x > 0$.

b) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^r \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$ est assurée par le critère de Riemann car $x^r e^{-\frac{x^2}{2}} = o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ quand x tend vers $+\infty$. En particulier pour $r = 1, 2$, on a l'existence de $E(Y)$ et $V(Y)$. On a :

$E(Y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \Big[- e^{-\frac{x^2}{2}} \Big]_0^{+\infty} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot$

D'autre part, $V(Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2 = E(X^2) - \big(E(Y)\big)^2 = 1 - \dfrac{2}{\pi} = \dfrac{\pi - 2}{\pi}\cdot$

2.a) On a $T(\Omega) = \mathbb{R}_+$. La variable aléatoire T admet un moment d'ordre 2, puisque $T^2 = Y$ et que $E(Y)$ existe. Par suite, T admet un moment d'ordre 1.

b) $E(T) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$. Le changement de variable $t = \dfrac{x^2}{2} \Longrightarrow x = 2^{\frac12}\, t^{\frac12} \Longrightarrow dx = 2^{-\frac12}\, t^{-\frac12}\, dt$.

Par suite, $E(T) = \dfrac{2^{\frac12}}{\pi^{\frac12}} \displaystyle\int_0^{+\infty} 2^{\frac14} t^{\frac14} 2^{-\frac12}\, t^{-\frac12}\, e^{-t}\, dt = \dfrac{2^{\frac14}}{\pi^{\frac12}} \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-\frac14}\, e^{-t}\, dt = \dfrac{2^{\frac14}}{\sqrt{\pi}} \times \Gamma\Big(\dfrac34\Big).$

D'autre part, $V(T) = E(T^2) - \big(E(T)\big)^2 = E(Y) - \big(E(T)\big)^2 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\,\Gamma^2\Big(\dfrac34\Big) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\Big(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma^2\Big(\dfrac34\Big)\Big).$

3.a) La fonction Γ est continue sur $[1, 2]$ et dérivable sur $]1, 2[$. De plus, $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$. Or, $\forall x > 0,\ \Gamma''(x) > 0$ (Γ est convexe), donc la fonction Γ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puisqu'il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$, la stricte croissance de $\Gamma' \Longrightarrow \alpha$ est le seul point qui annule Γ'.

b) Il en résulte que sur $]0, \alpha[$, on a $\Gamma'(x) < 0$ et Γ décroissante, et sur $]\alpha, +\infty[$, $\Gamma'(x) > 0$ et Γ croissante.

c) $1 < \alpha < 2$ et $\dfrac34 < 1 \Longrightarrow \Gamma\Big(\dfrac34\Big) > \Gamma(1) = 1$. D'autre part, $V(T) > 0 \Longrightarrow \Gamma\Big(\dfrac34\Big) < \pi^{\frac14}$, d'où l'encadrement.

4. Le programme renvoie une valeur approchée de $\Gamma\Big(\dfrac34\Big) = E(U^{-\frac14})$ par une méthode de Monte-Carlo.

Il s'agit de la moyenne de 100000 réalisations de $U^{-\frac14}$ où U est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 3.16

1. Soit U une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. On pose $X = U^2$ et on admet que X est une variable aléatoire à densité.

a) Montrer qu'une densité de X est la fonction f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}} & \text{si } x > 0 \\[2ex] 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X possède un moment d'ordre n que l'on notera m_n.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre m_{n+1} et m_n. En déduire la valeur de m_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$ converge et la calculer (on posera le changement de variable $u = \cos v$).

b) Soit x un réel strictement positif. Déduire de la question précédente la valeur de $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x - t)}}$.

c) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Déterminer la densité de $S = X_1 + X_2$.

3. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire S possède un moment d'ordre n, noté μ_n, que l'on calculera.

b) À l'aide d'une seconde expression de $E(S^n)$ déterminée à partir de l'égalité $S^n = (X_1 + X_2)^n$, établir l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

Solution de l'exercice 3.16

1. a) La variable aléatoire X est à valeurs positives, donc en notant F_X sa fonction de répartition, $F_X(x) = 0$ si $x \leqslant 0$, par continuité de cette fonction. Par ailleurs, si $x > 0$, $F_X(x) = P(U^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant U \leqslant \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$. On obtient :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\Phi'(\sqrt{x}) = \dfrac{e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \to x^n f_X(x)$ est nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et est positive et négligeable devant $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de 0^+, $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{C}{\sqrt{x}}$ dont l'intégrale converge.

c) Pour $A > 0$ on note $m_n(A) = \displaystyle\int_0^A x^n f_X(x)dx$. Une intégration par parties puis en faisant tendre A vers $+\infty$, il vient : $m_{n+1} = (2n+1)m_n$.

On a $m_0 = E(1) = 1$. La récurrence précédente donne :

$$m_n = (2n-1)(2n-3)\cdots 1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

2. a) La fonction cosinus définit une bijection strictement décroissante de classe C^1 de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$. L'intégrale donnée et celle obtenue par changement de variable sont de même nature. Il vient :

$$\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{\pi} \frac{\sin v\, dv}{\sqrt{1-\cos^2 v}} = \int_0^{\pi} dv = \pi$$

b) Le changement de variable affine $u = \dfrac{2t}{x} - 1$ donne :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi$$

c) On effectue un produit de convolution :

$$f_S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x-t)dt = 0 \text{ si } x \leqslant 0$$

et pour $x > 0$

$$f_S(x) = \int_0^x \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} \frac{e^{-(x-t)/2}}{\sqrt{2\pi(x-t)}} dt = \frac{e^{-x/2}}{2\pi} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}} = \frac{e^{-x/2}}{2}$$

La fonction f_S ainsi définie est une densité de probabilité de loi exponentielle $\mathcal{E}(1/2)$.

3. a) Le changement de variable affine $x = 2t$ donne :

$$\mu_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x/2}\, \mathrm{d}x = 2^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, \mathrm{d}t = 2^n\Gamma(n+1) = 2^n n!.$$

b) Par la formule du binôme et en utilisant la linéarité de l'espérance et l'indépendance de X_1 et X_2 :

$$E((X_1+X_2)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E(X_1^k)E(X_2^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(2k)!}{(2^k k!)} \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}(n-k)!}$$

soit

$$2^n n! = \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \frac{(2n-2k)!}{((n-k)!)^2}$$

En simplifiant par $n!$ et en passant le 2^n de droite à gauche, on reconnaît l'égalité demandée.

Exercice 3.17

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et indépendantes. On suppose que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2, 1/3)$ et Y suit la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. On pose :

$$Z = 8(X+Y), \quad W = 12XY.$$

1. Déterminer $Z(\Omega)$ et $W(\Omega)$.

2. Calculer $P(Z \in \mathbb{N})$ ainsi que $P(W \in \mathbb{N})$.

3.a) Montrer que $P(Z > W) = 1$.

b) En déduire une comparaison entre les fonctions de répartition de Z et de W sans les calculer.

4. Déterminer la fonction de répartition de Z. Les variables aléatoires Z et W sont-elles à densité ?

5. Compléter le programme Scilab ci-dessous pour vérifier le résultat du calcul de $P(Z > W)$ effectué dans la question 3.a) à l'aide du résultat de N simulations de chacune des variables aléatoires Z et W. `N=input('N');`

```
x=grand(1,N,'bin',2,1/3);
y=grand(1,N,'unf',0,1);
z=....
w=....
.........
.........
```

Solution de l'exercice 3.17

1. On a $Z(\Omega) = W(\Omega) = [0, 24]$.

2. Soit k un entier naturel. En utilisant le système complet d'événements $[X=0], [X=1], [X=2]$, on aura :

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= P(Z=k, X=0) + P(Z=k, X=1) + P(Z=k, X=2) \\ &= P(Y=k/8) \times P(X=0) + P(Y=k/8-1) \times P(X=1) + P(Y=k/8-2) \times P(X=2) \end{aligned}.$$

Or Y est une variable à densité ; on en déduit que $P(Z=k) = 0$ et $P(Z \in \mathbb{N}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z=k) = 0$.

De même, $P(W \in \mathbb{N}) = P(W=0) = P(X=0) = 4/9$.

3. a) On a :

$$\begin{aligned} P(Z>W) &= P\big((Z>W) \cap (X=0)\big) + P\big((Z>W) \cap (X=1)\big) + P\big((Z>W) \cap (X=2)\big) \\ &= P(8Y>0)P(X=0) + P(8(Y+1) > 12Y)P(X=1) + P(8(Y+2) > 24Y)P(X=2) \\ &= P(Y>0) \times P(X=0) + P(2>Y) \times P(X=1) + P(1>Y) \times P(X=2) \\ &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $P(Z > W) = 1$.

b) On en déduit l'inégalité presque partout : $Z > W$. Ainsi, pour tout x réel, on a presque sûrement l'inclusion $[W \geqslant x] \subset [Z \geqslant x]$.
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(W \geqslant x) \leqslant P(Z \geqslant x)$, ce qui entraîne que $F_Z(x) \leqslant F_W(x)$.

4. Soit x un réel, on a :

$$\begin{aligned} P(Z \leqslant x) &= P\big((Z \leqslant x) \cap (X = 0)\big) + P\big((Z \leqslant x) \cap (X = 1)\big) + P\big((Z \leqslant x) \cap (X = 2)\big) \\ &= P(Y \leqslant x/8)P(X = 0) + P(Y \leqslant x/8 - 1)P(X = 1) + P(Y \leqslant x/8 - 2)P(X = 2) \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(Z \leqslant x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x/18 & \text{si} \quad x \in [0, 16[\\ x/72 + 2/3 & \text{si} \quad x \in [16, 24[\\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 24 \end{array} \right.$$

La fonction de répartition de Z est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 16, 24\}$. On en conclut que Z est une variable aléatoire à densité. Par contre W n'est pas à densité puisque $P(W = 0) = 4/9 \neq 0$.

5. On propose un script pour calculer la fréquence notée f où $Z > W$.

```
N=input('N');
x=grand(1,N,'bin',2,1/3);y=grand(1,N,'unf',0,1);
z=8*(x+y)
w=12 *x.*y
a=find(z>w)
f=length(a)/N // (ou f=mean(a))
disp(f)
```

Si on ne connaît pas la fonction `find`, on peut également faire une boucle.

Exercice 3.18

Deux amis A et B peuvent se donner rendez-vous dans trois lieux possibles numérotés $0, 1$ et 2. Chacun choisit un endroit au hasard. S'ils ne se retrouvent pas, ils recommencent en choisissant de nouveau un des trois lieux et ainsi de suite. Tous les choix sont indépendants. On note T le nombre d'étapes qu'il faut pour que les amis se retrouvent. On modélise cette situation en considérant deux suites $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$.
Pour chaque $n \geqslant 1$, X_n (resp. Y_n) représente le choix de A (resp. de B) à la n-ième étape.

Soit T la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n(\omega) \neq Y_n(\omega) \\ \min\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } X_n(\omega) = Y_n(\omega)\} & \text{sinon} \end{array} \right.$$

On note F l'événement : « les deux amis se rencontrent en un nombre fini d'étapes ».

1. Déterminer la loi de T et en déduire l'espérance et la variance de T.

2. Montrer que F est un événement quasi certain.

3. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 3. On généralise maintenant la situation précédente : les deux amis peuvent se donner rendez-vous dans p lieux possibles. On note T_p le nombre d'étapes qu'il faut pour se retrouver.

a) Modéliser cette situation.

b) Montrer que l'événement : « les deux amis se rencontrent en un nombre fini d'étapes » est quasi certain.

c) On ne suppose plus que l'entier p est fixé. Étudier la convergence en loi de la suite $(T_p/p)_p$ lorsque p tend vers $+\infty$.

d) Compléter le script Scilab ci-dessous pour simuler la variable aléatoire T_p.

```
p=input('p');
X=grand(1,1,'uin',0,p-1);
Y=
n=
while
  n=
  X=
  Y=
end
disp(n)
```

Solution de l'exercice 3.18

1. Soit n un entier naturel non nul. On a : $P(T=n) = P(X_1 \neq Y_1, \cdots, X_{n-1} \neq Y_{n-1}, X_n = Y_n)$. Par indépendance des variables aléatoires, on obtient :

$$P(T=n) = P(X_1 \neq Y_1) \cdots P(X_{n-1} \neq Y_{n-1}) P(X_n = Y_n),$$

Les variables aléatoires suivant la même loi, on note $a = P(X_1 = Y_1)$ et on a :

$$P(T=n) = a(1-a)^{n-1}.$$

Par ailleurs :

$$a = P(X_1 = 0, Y_1 = 0) + P(X_1 = 1, Y_1 = 1) + P(X_1 = 2, Y_1 = 2) = 1/3.$$

Par conséquent, T suit la loi géométrique de paramètre $1/3$. Donc $E(T) = 3$ et $V(T) = 6$.

2. On a $P(F) = P(T \neq 0) = 1$, donc F est un événement quasi certain.

3. a) On modélise cette situation en considérant deux suites $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléaltoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![0, p-1]\!]$. On note T_p la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T_p(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n(\omega) \neq Y_n(\omega) \\ \min\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } X_n(\omega) = Y_n(\omega)\} & \text{sinon} \end{cases}$$

b) On note F_p l'événement : « les deux individus se rencontrent en un nombre fini d'étapes ».
Soit n un entier naturel non nul. On a : $P(T_p = n) = P(X_1 \neq Y_1, \cdots, X_{n-1} \neq Y_{n-1}, X_n = Y_n)$.
Par indépendance des variables aléatoires, on obtient :

$$P(T_p = n) = P(X_1 \neq Y_1) \cdots P(X_{n-1} \neq Y_{n-1}) P(X_n = Y_n),$$

Les variables aléatoires suivant la même loi, on note $a_p = P(X_1 = Y_1)$ et on a :

$$P(T_p = n) = a_p(1-a_p)^{n-1}.$$

Par ailleurs :

$$a_p = P(X_1 = 0, Y_1 = 0) + P(X_1 = 1, Y_1 = 1) + \cdots P(X_1 = p-1, Y_1 = p-1) = 1/p.$$

Par conséquent, T_p suit une loi géométrique de paramètre $1/p$.

c) Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} P\left(\frac{T_p}{p} \leqslant x\right) &= 1 - P(T_p > px) = 1 - (1-1/p)^{\lfloor px \rfloor} \\ &= 1 - \exp(\lfloor px \rfloor \ln(1-1/p)) \end{aligned}$$

Or
$$\frac{px-1}{p} < \frac{\lfloor px \rfloor}{p} \leqslant x \Rightarrow \lim_{p\to+\infty} \lfloor px \rfloor \ln\left(1-\frac{1}{p}\right) = -x$$
On en déduit que la limite de $P(T_p/p \leqslant x)$ lorsque p tend vers $+\infty$ est $1-e^{-x}$. On conclut que la suite $(T_p/p)_p$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre 1.

d) On propose
```
p=input('p');
X=grand(1,1,'uin',0,p-1);
Y=grand(1,1,'uin',0,p-1);
n=1
while X<> Y
  n=n+1
  X=grand(1,1,'uin',0,p-1);
  Y=grand(1,1,'uin',0,p-1);
end
disp(n)
```

Exercice 3.19

Les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Dans une urne sont placées deux boules, une noire N et une rouge R. On effectue une suite de tirages d'une boule au hasard selon les modalités suivantes :
- si la boule tirée est noire : on ne la remet pas dans l'urne (et la boule rouge sera nécessairement tirée au prochain tirage),
- si la boule tirée est rouge : on remet l'urne dans l'état initial, avec 2 boules, la noire et la rouge.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note : N_n (respectivement R_n) l'événement : « la n-ième boule tirée est noire (respectivement rouge) ».

1. Écrire un script Scilab qui modélise le tirage des r premières boules obtenues ($r \geqslant 1$).

2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = P(N_n)$ et $b_n = P(R_n)$.

a) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

b) En déduire que $b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$ ainsi que les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

3. On note X la variable aléatoire égale au rang de la première boule noire tirée. Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance et sa variance.

4. Soit n un entier donné supérieur ou égal à 1. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées lors des n tirages consécutifs.
a) Calculer l'intervalle $[\![m_n, M_n]\!]$ des valeurs prises par Z. Calculer ensuite $P(Z = m_n)$ et $P(Z = M_n)$.

b) On note $b_{n,k}$ le nombre de tirages de n boules dont exactement k sont noires et se terminent par le tirage d'une boule rouge (l'événement R_n est réalisé).
Exprimer successivement la probabilité $P(R_n \cap (Z = k))$ puis la probabilité $P(R_n)$ en fonction des $b_{n,k}$.

Solution de l'exercice 3.19

1. Une proposition :

```
r=10
Y=[] //(liste des r boules)
for i=1:r
  if i>1 & Y(i-1)=="N" then Y(i)="R"
    else if grand(1,1,"uin",1,2)==1 then Y(i)="N"
    else Y(i)="R"
  end
end
end
```

2. a) On a avec un système complet d'événements évident : $N_{n+1} = (N_n \cap N_{n+1}) \cup (R_n \cap N_{n+1})$, donc $a_{n+1} = 0 + \frac{1}{2}b_n$.
De la même manière : $R_{n+1} = (N_n \cap R_{n+1}) \cup (R_n \cap R_{n+1}) \Rightarrow b_{n+1} = 1a_n + \frac{1}{2}b_n$.

b) Ainsi $b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1}$, qui est une suite linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est $\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} = 0$. Les racines sont 1 et $-\frac{1}{2}$ d'où : $b_n = K_1 + K_2(-\frac{1}{2})^n$.
On détermine les deux constantes K_1 et K_2 en prenant $n = 1$ et $n = 2$ et en calculant b_1, b_2. Après calculs $K_1 = \frac{2}{3}$ et $K_2 = \frac{1}{3}$ et

$$\begin{cases} b_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n = 1 - a_n \\ a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n \end{cases}$$

3. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. L'événement «tirer une première boule noire au n-ème tirage» correspond à la suite : $R_1R_2\cdots R_{n-1}N_n$ En utilisant les probabilités composées, on obtient :

$$P(X = n) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)\cdots P_{R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_{n-1}}(N_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ainsi, X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{1}{2})$ d'où $E(X) = V(X) = 2$.

4.a) On a $Z(\Omega) = [\![m_n = 0, M_n = \lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor]\!]$.
L'événement $(Z = 0)$ est égal à l'événement $(R_1R_2\cdots R_n)$. Donc $P(Z = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- si $n = 2p+1$ est impair, on a $M_n = p+1$ pour $[Z = N_1R_2N_3\cdots R_{2p}N_{2p+1}]$ et $P(Z = M_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{M_n}$.
- si $n = 2p$ est pair, alors $M_n = p$ et on différencie les tirages selon la couleur de la dernière boule :
  - ◇ un seul finit par une rouge : $N_1R_2\cdots N_{2p-1}R_{2p}$,
  - ◇ p finissent par une noire : un est alterné et les $p-1$ autres contiennent 2 Rouge contiguës :

$$\begin{aligned}(R_1N_2R_3N_4\cdots \quad & R_{2p-1}N_{2p}) \cup (N_1\mathbf{R_2R_3}N_4R_5\cdots R_{2p-1}N_{2p}) \\ & \cup(N_1R_2N_3\mathbf{R_4R_5}N_6\cdots R_{2p-1}N_{2p}) \cup \cdots \cup (N_1R_2N_3\cdots \mathbf{R_{2p-2}R_{2p-1}}N_{2p})\end{aligned}$$

D'où : $P(Z = M_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^p + p\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} = \left(2 + \frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}$

b) On a $P([Z = k] \cap R_n) = b_{n,k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times 1^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k} = b_{n,k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$, car tous les tirages finissant par une boule rouge ont tous la même probabilité. Donc :

$$R_n = \bigcup_{k=m_n}^{M_n} (R_n \cap [Z = k]) \Rightarrow P(R_n) = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2})\rfloor} b_{n,k}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

Exercice 3.20

1. On considère deux variables aléatoires Y et Z indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et que Z suit la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.

a) Donner une densité de $-Y$.

b) Donner une densité de $Z - Y$.

c) Déterminer la probabilité $P(Y \leqslant Z)$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère des variables aléatoires $X_1, \ldots X_n$ définies sur $(\Omega.\mathcal{A}, P)$, indépendantes, telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, X_i suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_i > 0$.
On pose $M_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Montrer que M_n est une variable aléatoire.

b) Déterminer la loi de M_n.

3.a) Déduire des questions précédentes la valeur de $P(X_i = M_n)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

b) Pour $i \in [\![1, n]\!]$ donné, la variable aléatoire $X_i - M_n$ est-elle à densité ?

4. On considère le script Scilab suivant :

```
n=input('entrer une valeur de n : ')
c=0
for k=1:10 000
      X=[]
      for i=1:n
            X=[X,grand(1,1,'exp',1/i)]
      end
      m=min(X)
      if X(1)==m then c=c+1            end
      end
disp(c/10000)
```

De quelle valeur le réel affiché est-il proche ?

Solution de l'exercice 3.20

1. a) On a $-Y(\Omega) = \mathbb{R}^-$ et par le cours, une densité de $-Y$ est $f_Y(-x)$. Soit :

$$f_{-Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) On effectue un produit de convolution. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) f_{-Y}(x-t)dt$ sera une densité de $Z - Y$ si cette intégrale converge.

Or $f_Z(t) \neq 0 \Leftrightarrow t \geqslant 0$ et $f_{-Y}(x-t) < 0 \Leftrightarrow x - t \leqslant 0$. Ce qui donne :

- si $x \leqslant 0$:

$$f_{Z-Y}(x) = \int_0^{+\infty} f_Z(t) f_{-Y}(x-t)dt = \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu t} \lambda e^{\lambda(x-t)} dt = \lambda\mu e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} dt = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\lambda x}$$

- si $x \geqslant 0$:

$$f_{Z-Y}(x) = \int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu t} \lambda e^{\lambda(x-t)} dt = \lambda\mu e^{\lambda x} \int_x^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} dt = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\mu x}$$

c) On a $P(Y \leqslant Z) = P(Z - Y \geqslant 0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_{Z-Y}(t)dt = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

2. a) L'événement $(M_n \geqslant x)$ est égal à $\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \geqslant x]$ qui appartient à la tribu $\mathcal{A}$.

b) Par indépendance, on a :

$$P(M_n \geqslant x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geqslant x) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} = e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x}$$

Ainsi, M_n suit la loi exponentielle de paramètre $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

3.a) On a l'égalité des événements $[X_i = M_n]$ et $[X_i \leqslant \min(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)]$. Or la loi de $\min(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ est la loi exponentielle de paramètre $\sum_{j \neq i} \lambda_j$. Donc, d'après 1.c) :

$$P(X_i = M_n) = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j}$$

b) La variable aléatoire $X_i - M_n$ n'est pas à densité car $P(X_i - M_n = 0) \neq 0$.

4. La variable c contient le nombre de fois, sur les 10000 expériences réalisées, où on a pris la plus petite valeur parmi les variables $X_1, \ldots, X_n$, c'est-à-dire le nombre de fois où l'événement $[X_1 = M_n]$ est réalisé. En divisant par 10000, la variable $c/10000$ contient donc une valeur approchée de la probabilité de cet événement, c'est-à-dire, d'après la question 3, une valeur approchée de $\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} i} = \dfrac{2}{n(n+1)}$.

Exercice 3.21

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = P(X = n)$.
On appelle *fonction génératrice* de X la fonction d'une variable réelle t définie par :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \, t^n.$$

1. a) Justifier que la fonction G_X est définie pour tout $t \in [0, 1]$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On admet que si la série $\sum_{n \geqslant r} p_n \times n(n-1) \cdots (n-r+1) t^{n-r}$ converge en un point $t_0 \in [0, 1]$, alors G_X est dérivable r fois sur $[0, t_0]$ et l'on a

$$\sum_{n=r}^{+\infty} p_n \times n(n-1) \cdots (n-r+1) t_0^{n-r} = G_X^{(r)}(t_0)$$

où $G_X^{(r)}(t_0)$ représente la dérivée r-ième de G_X en t_0.

b) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si la série dérivée terme à terme $\sum_n n p_n t^{n-1}$ converge pour $t = 1$. Exprimer $E(X)$ en fonction de G_X.

2. a) Déterminer la fonction génératrice G_Z d'une variable aléatoire Z suivant une loi géométrique de paramètre $p \in \,]0, 1[$.

b) Retrouver à l'aide de G_Z la valeur de l'espérance de Z.

c) Pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1[$, déterminer la valeur de la somme :

$$\Sigma_r(x) = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}.$$

3. On considère un schéma de Bernoulli de probabilité de succès $p \in]0, 1[$, et le jeu suivant (en notant S pour succès, E pour échec et $q = 1 - p$).

On mise une somme M. On réalise les épreuves de Bernoulli indépendantes successives et on gagne une somme (en Euros) R égale à la longueur de la première séquence opposée au premier résultat s'il y en a une, et zéro sinon ; par exemple si les résultats des premières épreuves sont $SSSEEEEESS\dots$, le premier résultat est un succès, donc R vaut la longueur de la première séquence d'échecs consécutifs, soit ici $R = 5$.

a) Déterminer la loi de R.

b) On cherche la mise minimale M_0 pour que le casino organisateur du jeu ne perde pas d'argent en moyenne. Déterminer la fonction génératrice de R, calculer l'espérance de R et conclure.

c) Retrouver ce résultat en calculant directement l'espérance de R

Solution de l'exercice 3.21

1. a) Pour tout $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant p_n t^n \leqslant p_n$, terme général d'une série convergente (vers 1), donc $\sum_{n \geqslant 0} p_n t^n$ converge pour tout $t \in [0, 1]$.

b) La variable X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 0} n p_n$ converge (absolument) si et seulement si la série dérivée terme à terme $\sum_{n \geqslant 0} n p_n t^{n-1}$ converge en $t_0 = 1$, et on a alors $E(X) = G'_X(1)$.

2. a) Si $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a pour $|t| < \dfrac{1}{q}$, donc au moins sur $[-1, 1]$:

$$G_Z(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p\, q^{k-1} t^k = p\, t \sum_{k=1}^{+\infty} (q\, t)^{k-1} = \frac{p\, t}{1 - q\, t}$$

b) On a alors :

$$G'_Z(t) = \frac{p}{(1 - q\, t)^2} \Rightarrow G'_Z(1) = \frac{p}{(1 - q)^2} \quad \text{soit} \quad E(Z) = \frac{1}{p}$$

c) En dérivant terme à terme r fois la série de somme $G_Z(t)$, on trouve

$$\sum_{k \geqslant r} \left[p\, q^{k-1} t^k\right]^{(r)} = p\, q^{r-1} \sum_{k \geqslant r} k\,(k-1)\dots(k-r+1)\,(q\, t)^{k-r}$$

qui converge pour $t \in [0, 1/q[$ car

$$0 \leqslant k\,(k-1)\dots(k-r+1)\,(q\, t)^{k-r} \sim k^r\,(q\, t)^{k-r} = o\big(1/k^2\big)$$

par croissances comparées. Alors (par récurrence), on a :

$$\begin{aligned} G_Z^{(r)}(t) &= \left[\frac{p}{(1 - q\, t)^2}\right]^{(r-1)} = \frac{r!\, p\, q^{r-1}}{(1 - q\, t)^{r+1}} \\ &= p\, q^{r-1} \sum_{k=r}^{+\infty} \Big[k\,(k-1)\dots(k-r+1)\,(q\, t)^{k-r}\Big] = r!\, p\, q^{r-1} \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} (q\, t)^{k-r} \end{aligned}$$

soit, en posant $x = q\, t \in [0, 1[$,

$$\Sigma_r(x) = \frac{1}{(1 - x)^{r+1}}$$

3. a) On a $R(\Omega) = \mathbb{N}$; en notant L la longueur de la première séquence (qui peut être constituée de succès ou d'échecs), pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a à l'aide du système complet d'événements $\{L = k,\, k \in \mathbb{N}^*\}$:

$$P(R = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\Big((R = n) \cap (L = k)\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big[p^k\, q^n\, p + q^k\, p^n\, q\Big] = \frac{q^n\, p^2}{1-p} + \frac{p^n\, q^2}{1-q} = p^2\, q^{n-1} + q^2\, p^{n-1}$$

De plus, $R = 0$ si et seulement si on n'obtient que des succès ou que des échecs, événements de probabilité nulle (par limite monotone), donc $P(R = 0) = 0$.

b) • Pour $t \in [-1, 1]$ (au moins),

$$G_R(t) = E\big(t^R\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[P(R = n)\, t^n\Big] = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[p^2\, q^{n-1}\, t^n + q^2\, p^{n-1}\, t^n\Big] = \frac{p^2\, t}{1 - q\, t} + \frac{q^2\, t}{1 - p\, t}$$

• La fonction G_R dérivable en 1 car $0 < p, q < 1$, et

$$E(R) = G_R'(1) = \left[\frac{p^2}{1 - q\, t} + \frac{p^2\, q\, t}{(1 - q\, t)^2} + \frac{q^2}{1 - p\, t} + \frac{q^2\, p\, t}{(1 - p\, t)^2}\right]_{t=1} = p + q + q + p = 2$$

donc $E(R) = 2$ et la mise minimale est $M_0 = 2$.

c) Par dérivation d'une série géométrique convergente, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big[n\, p^2 q^{n-1}\big] = \frac{p^2}{(1-q)^2} = 1$$

d'où $M_0 = E(R) = 2$.

Exercice 3.22

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. a) Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit un réel $s \geqslant 0$. Montrer que :

$$\forall\, t \in [a, b],\ \mathrm{e}^{st} \leqslant \frac{b-t}{b-a}\mathrm{e}^{sa} + \frac{t-a}{b-a}\mathrm{e}^{sb}$$

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$ telle que $E[X] = 0$. Montrer pour tout $s \geqslant 0$, l'existence de $E(\mathrm{e}^{sX})$ et que l'on a :

$$\forall\, s \geqslant 0,\ E(\mathrm{e}^{sX}) \leqslant \frac{b}{b-a}\mathrm{e}^{sa} - \frac{a}{b-a}\mathrm{e}^{sb} = f(s)$$

c) On pose $g = \ln \circ f$. Montrer que g est bien définie.

d) Montrer que $\forall\, s \geqslant 0,\ g(s) = \displaystyle\int_0^s (s-u)\, g''(u) du.$

e) En déduire que :

$$\forall\, s \geqslant 0,\ E(\mathrm{e}^{sX}) \leqslant \exp\left(\frac{s^2(b-a)^2}{8}\right).$$

2. Soit $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ des réels tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!], a_i < b_i$. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = [a_i, b_i]$.
On pose : $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
a) Montrer que le résultat de la question 1. e) reste valide si X admet une espérance non nulle.

b) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$P(S_n - E(S_n) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{2t^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right).$$

Solution de l'exercice 3.22

1. a) Par convexité de la fonction $t \in [a, b] \mapsto \mathrm{e}^{st}$, on a :

$$\mathrm{e}^{st} \leqslant \frac{b-t}{b-a}\mathrm{e}^{sa} + \frac{t-a}{b-a}\mathrm{e}^{sb}$$

b) $E(\mathrm{e}^{sX})$ existe car e^{sX} est bornée. En passant à l'espérance,

$$E(\mathrm{e}^{sX}) \leqslant \frac{b}{b-a}\mathrm{e}^{sa} + \frac{-a}{b-a}\mathrm{e}^{sb},$$

car $E(X) = 0$.

c) Notons $g(s) = \ln\left(\frac{b}{b-a}\mathrm{e}^{sa} + \frac{-a}{b-a}\mathrm{e}^{sb}\right)$. La fonction g est bien définie sur $[a, b]$ continue et de classe C^∞ sur $]a, b[$.

d) On calcule les dérivées :

$$g'(s) = \frac{ab(\mathrm{e}^{sa} - \mathrm{e}^{sb})}{b\mathrm{e}^{sa} - a\mathrm{e}^{sb}} \quad \text{et} \quad g''(s) = -ab\frac{(b-a)^2\mathrm{e}^{s(a+b)}}{(b\mathrm{e}^{sa} - a\mathrm{e}^{sb})^2}.$$

Or, par la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$g(s) = g(0) + g'(0)s + \int_0^s (s-u)g''(u)du.$$

Remarquons alors que $g(0) = g'(0) = 0$. On obtient ainsi le résultat annoncé.

e) On a :

$$g''(u) = -(b-a)^2\frac{ab\mathrm{e}^{u(a+b)}}{(b\mathrm{e}^{ua} - a\mathrm{e}^{ub})^2} = +(b-a)^2\frac{xy}{(x+y)^2} = (b-a)^2\left(\frac{x}{x+y}\right)\left(1 - \frac{x}{x+y}\right) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$

avec $x = b\mathrm{e}^{ua} \geqslant 0$ et $y = -a\mathrm{e}^{ub} \geqslant 0$ (en effet on a $a \leqslant 0 \leqslant b$ car $E[X] = 0$). Donc :

$$|g(s)| \leqslant \int_0^s |g''(u)(s-u)|du \leqslant \frac{(b-a)^2 s^2}{8},$$

ce qui donne le résultat souhaité.

2.a)b) On va utiliser une méthode assez classique en probabilité : on passe à l'exponentielle avec un facteur s de chaque côté dans la probabilité, puis on applique l'inégalité de Markov et enfin on optimise en s.
Commençons par remarquer qu'on peut remplacer X_i par $\tilde{X}_i = X_i - E[X_i]$, ce qui change a_i et b_i en $\tilde{a}_i = a_i - E[X_i]$ et $\tilde{b}_i = b_i - E[X_i]$ mais on a toujours $b_i - a_i = \tilde{b}_i - \tilde{a}_i$: cela montre que l'on peut supposer sans perte de généralité que $E[X_i] = 0$. Pour $s \geqslant 0$, on a, par l'inégalité de Markov :

$$P(S_n \geqslant t) = P(\mathrm{e}^{sS_n} \geqslant \mathrm{e}^{st}) \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{sS_n})}{\mathrm{e}^{st}}$$

On a alors, par indépendance et en appliquant la question 1 :

$$E(\mathrm{e}^{sS_n}) = \prod_{i=1}^{n} E(\mathrm{e}^{sX_i}) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{s^2(b_i - a_i)^2}{8}\right)$$

On a donc montré que :

$$P(S_n \geqslant t) \leqslant \exp\left(-st + \frac{s^2}{8}\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2\right).$$

Finalement, on cherche la valeur de s qui minimise cette expression et c'est :

$$s = \frac{4t}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2},$$

qui donne le résultat.