Chapitre 3

Probabilités

Exercice 3.1

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une urne qui contient trois boules : une blanche, une noire et une rouge.
On effectue des tirages au hasard d'une boule avec remise dans cette urne.

On note X le numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule blanche et Y le numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule noire.

On note également $U = |X - Y|$ et $W = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de W, son espérance et sa variance.
3. Écrire en Scilab une fonction `escp` qui renvoie un vecteur `C` à deux composantes qui simule la valeur du couple (X, Y).
4. À partir de cette question et jusqu'à la question 6, *on admet* que pour $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de U sachant $[W = k]$ est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.
   Que peut-on en déduire sur la loi de U et sur le couple (U, W) ?
5. Que représente la variable aléatoire $U + W$? En déduire une relation linéaire entre U, W, X et Y.
6. En déduire la valeur de la covariance de X et de Y.
   Expliquer de manière probabiliste le signe de la valeur obtenue.
7. Justifier l'affirmation de la question 4, à savoir que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de U sachant $[W = k]$ est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

Solution de l'exercice 3.1

1. Les tirages étant identiques et indépendants $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\Big(\frac{1}{3}\Big),\ E(X) = 3,\ V(X) = 6.}$

2. Pour $W = \min(X, Y)$, c'est la même chose : on effectue des tirages identiques et indépendants jusqu'à obtenir une boule noire ou blanche. Ainsi :
$\boxed{W \hookrightarrow \mathcal{G}\Big(\frac{2}{3}\Big),\ E(W) = \frac{3}{2},\ V(W) = \frac{3}{4}.}$

3.
```
function C=escp()
 n=0;
 X=0;
 Y=0;
while (X==0 or Y==0)
  n=n+1;
  b=grand(1,1,'uin',1,3);
  if b==1 and X==0;
     then X=n;end;
  if b==2 and Y==0
     then Y=n;end;
  end;
  C=[x,y]
endfunction
```

4. Comme la loi conditionnelle de U sachant $[W = k]$ ne dépend pas de k, il vient :
$\boxed{U \text{ et } W \text{ sont indépendantes et } U \hookrightarrow \mathcal{G}\Big(\frac{1}{3}\Big).}$

5. La variable $U + W$ représente le maximum de X et de Y ; en effet :
   - si $X(\omega) < Y(\omega)$, $U(\omega) + W(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) - X(\omega) = Y(\omega)$
   - si $X(\omega) > Y(\omega)$, $U(\omega) + W(\omega) = Y(\omega) + X(\omega) - Y(\omega) = X(\omega)$.

   Par conséquent, $X + Y = \max(X, Y) + \min(X, Y) = (U + W) + W = \boxed{U + 2W.}$

6. Comme U et W sont indépendantes, on a : $V(X) + V(Y) + 2\operatorname{Cov}(X, Y) = V(X + Y) = V(U + 2W) = V(U) + 4V(W)$,
soit $6 + 6 + 2\operatorname{Cov}(X, Y) = 6 + 4 \times \frac{3}{4}$ *i.e.* $\boxed{\operatorname{cov}(X, Y) = -\frac{3}{2}}$
Si X est grand, il y aura peu de boules blanches au début, cela induira une augmentation de boules noires et donc à une baise de Y, *i.e.* X et Y varient en sens contraires, d'où le signe de la covariance.

7. La loi du couple (X, Y) est donnée par :
   - Si $i = j$, $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = 0$.
   - Si $i < j$, $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \dfrac{1}{3^{i-1}} \times \dfrac{1}{3} \times \Big(\dfrac{2}{3}\Big)^{j-i-1} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2^{j-i-1}}{3^j}$.

     En effet, $[X = i] \cap [Y = j] = \Big(\bigcap_{k=1}^{i-1} R_k\Big) \cap B_i \cap \Big(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} \overline{N}_k\Big) \cap N_j$.
   - De même si $i > j$, $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \dfrac{2^{i-j-1}}{3^i}$.

   Donc, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\mathbb{P}_{[W=k]}(U = i) = \frac{\mathbb{P}(U = i \cap W = k)}{\mathbb{P}(W = k)} = \frac{\mathbb{P}(X = k \cap Y = k + i) + \mathbb{P}(Y = k \cap X = k + i)}{\mathbb{P}(W = k)}$$
   Ainsi,
$$\mathbb{P}_{[W=k]}(U = i) = \frac{2 \times \dfrac{2^{i-1}}{3^{i+k}}}{\dfrac{2}{3} \times \Big(\dfrac{1}{3}\Big)^{k-1}} = \frac{2^i.3^k}{2.3^{i+k}} = \frac{1}{2} \times \Big(\frac{2}{3}\Big)^i = \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{i-1}$$
   Et la loi conditionnelle de U sachant $[W = k]$ est bien la $\boxed{\text{loi géométrique de paramètre } \frac{1}{3}.}$

EXERCICE 3.2

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et à valeurs dans $[-1,1]$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $S_n=\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.

1. Montrer que X_1 admet une espérance, ainsi que e^{tX_1}, pour tout $t>0$.
2. Montrer que, pour tout $t>0$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, e^{tnS_n} admet une espérance.
   Exprimer cette espérance en fonction de $E\left(\mathrm{e}^{tX_1}\right)$.

On suppose désormais que X_1 est *centrée.*

3. (a) Montrer que : $\forall t>0,\ \forall x\in[-1,1],\ \mathrm{e}^{tx}\leqslant\dfrac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}$.

   (b) En déduire que : $\forall t>0,\ E\big(\mathrm{e}^{tX_1}\big)\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}}{2}$.
4. (a) Montrer que, pour tout $t>0$, pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :
$$P\big(S_n\geqslant\varepsilon\big)\leqslant\frac{\big(E\big(\mathrm{e}^{tX_1}\big)\big)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

   On admet que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $t>0$ tel que : $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^n\mathrm{e}^{-nt\varepsilon}\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

   (b) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon>0$, la série de terme général $P(|S_n|>\varepsilon)$ converge.
5. (a) Soit $(C_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'événements telle que $P(C_k)=0$ pour tout k.
   Montrer que $P\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*}C_k\right)=0$.

   (b) Pour tout $\varepsilon>0$, et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit l'événement : $B_n(\varepsilon)=\bigcup\limits_{m\geqslant n}\{\omega\in\Omega\ ;\ \ |S_m(\omega)|>\varepsilon\}$.
   Montrer que : $P\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}B_n(\varepsilon)\right)=0$.

   (c) Soit l'évènement $A=\{\omega\in\Omega\ ;\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n(\omega)=0\}$.
   Déduire des questions précédentes que $P(A)=1$.

Solution de l'exercice 3.2

1. D'après le théorème d'existence d'une espérance par majoration, toute variable aléatoire bornée admet une espérance. C'est le cas de X_1 (à valeurs dans $[-1,1]$), donc aussi de e^{tX_1}.
2. Comme les X_i sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, les e^{tX_i} aussi, donc leur produit e^{tnS_n} admet une espérance qui est donnée par : $E\left(\mathrm{e}^{tnS_n}\right) = E\left(\mathrm{e}^{tX_1}\right)\cdots E\left(\mathrm{e}^{tX_n}\right) = \left(E\left(\mathrm{e}^{tX_1}\right)\right)^n$.
3. (a) La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{tx}$ est convexe, donc son graphe est situé sous la sécante entre les points d'abscisse $x=-1$ et $x=1$:
$$\forall p \in [0,1],\ \mathrm{e}^{t(p\times(-1)+(1-p)\times 1)} \leqslant p\mathrm{e}^{-t} + (1-p)\mathrm{e}^{t}.$$
On obtient le résultat voulu en prenant $p = \dfrac{1-x}{2}$ (et alors $1-p = \dfrac{1+x}{2}$ et $-p+(1-p)=x$).

   (b) Comme $X_1(\Omega) \subset [-1,1]$, on en déduit : $\mathrm{e}^{tX_1} \leqslant \dfrac{1-X_1}{2}\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1+X_1}{2}\mathrm{e}^{t} = \dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}X_1$.
D'où, par croissance et linéarité de l'espérance : $E\left(\mathrm{e}^{X_1}\right) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}E(X_1) = \dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}$.
4. (a) L'inégalité de Markov donne : $P\big(S_n \geqslant \varepsilon\big) = P\big(\mathrm{e}^{tnS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\big) \leqslant \dfrac{E\left(\mathrm{e}^{tnS_n}\right)}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}} = \dfrac{\big(E\big(\mathrm{e}^{tX_1}\big)\big)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}$.

   (b) L'événement $[|S_n| \geqslant \varepsilon]$ est égal à $[S_n \geqslant \varepsilon] \cup [-S_n \geqslant \varepsilon]$. En reprenant la même démonstration que précédemment, avec $-X_i$ en lieu de X_i, on obtient $P(-S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\big(E\big(\mathrm{e}^{tX_1}\big)\big)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}$. Ainsi :
$$0 \leqslant P(|S_n| > \varepsilon) = 2P\big(S_n \geqslant \varepsilon\big) \leqslant 2\frac{\big(\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX_1}\big)\big)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}} \leqslant 2\left(\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-nt\varepsilon} \leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}},$$
en choisissant le t dont l'existence est admise. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$ est géométrique, de raison $\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} \in]0,1[$, donc elle est convergente. D'où le résultat voulu par comparaison de séries.
5. (a) Par sous-additivité (inégalité de Boole), on a : $0 \leqslant P\left(\displaystyle\bigcup_{k\leqslant n} C_k\right) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(C_k) = 0$.
Ainsi par continuité croissante, on a : $P\left(\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} C_k\right) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k\leqslant n} C_k\right) = 0$.

   (b) Par continuité décroissante, on a : $P\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B_n(\varepsilon))$.
Or, par sous-additivité, on a : $0 \leqslant P(B_n(\varepsilon)) = P\left(\displaystyle\bigcup_{m\geqslant n} (|S_m| > \varepsilon)\right) \leqslant \displaystyle\sum_{m=n}^{+\infty} P\left(|S_m| > \varepsilon\right)$,
où le majorant est, d'après la question 4b, le reste d'une série convergente, donc tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'où le résultat voulu par théorème d'encadrement.

   (c) D'après la définition, la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) = 0$ est caractérisée par :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ |S_n(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}.$$
Donc : $A = \displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{n_0\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{n\geqslant n_0}\left(|S_n| \leqslant \frac{1}{k}\right) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{n_0\in\mathbb{N}^*}\overline{B_{n_0}\left(\frac{1}{k}\right)} = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{n_0\in\mathbb{N}^*} B_{n_0}\left(\frac{1}{k}\right)}$.
Par suite, $P(A) = 1 - P\left(\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} C_k\right)$ avec $C_k = \displaystyle\bigcap_{n_0\in\mathbb{N}^*} B_{n_0}\left(\frac{1}{k}\right)$.
D'où le résultat d'après les deux questions précédentes.

Exercice 3.3

On considère 6 variables aléatoires $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui sont mutuellement indépendantes. Les variables X_1, X_2 et X_3 suivent la même loi qui est donnée par $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 1/2$ et les variables Y_1, Y_2 et Y_3 suivent des lois géométriques de paramètres respectifs p_1, p_2 et p_3 qui appartiennent à l'intervalle $]0, 1[$. On pose $Z = X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3$.

1. Justifier l'existence de l'espérance de la variable aléatoire Z et celle de sa variance, et les déterminer.
2. Pour $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \Lambda = \{-1, 1\}^3$, on introduit l'événement $A_\varepsilon = [X_1 = \varepsilon_1] \cap [X_2 = \varepsilon_2] \cap [X_3 = \varepsilon_3]$.
   (a) Soit $\varepsilon \in \Lambda$. On note $E_{A_\varepsilon}(|Z|)$ l'espérance de $|Z|$ pour la probabilité conditionnelle P_{A_ε}. Justifier son existence et montrer que :
   $$E_{A_\varepsilon}(|Z|) = E(|\varepsilon_1 Y_1 + \varepsilon_2 Y_2 + \varepsilon_3 Y_3|).$$
   (b) En déduire que :
   $$E(|Z|) = \frac{1}{4}\left[E(|Y_1 + Y_2 + Y_3| + E(|Y_1 + Y_2 - Y_3| + E(|Y_1 - Y_2 + Y_3| + E(|Y_1 - Y_2 - Y_3|\right].$$
3. (a) Soient a et b deux réels. Montrer que :
   $$\max(|a|, |b|) = \frac{|a + b| + |a - b|}{2}.$$
   (b) En déduire que :
   $$E(|Z|) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right).$$
4. Dans cette question, on suppose que $p_1 = p_2 = p_3 = 1/2$.
   (a) Exprimer la variance de $|Z|$ en fonction de $E(|Z|)$.
   (b) Soit r un réel strictement positif. A l'aide du cours et de la question 3.(b), donner une majoration de la probabilité $P\left(||Z| - E(|Z|)| \geqslant r\right)$. À partir de quelle valeur de r cette majoration est-elle significative ?

Solution de l'exercice 3.3

1. On a $|Z| \leqslant Y_1+Y_2+Y_3$. La variable Z admet donc une espérance par domination. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient $Z^2 \leqslant 3\left(Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2\right)$. Comme les variables Y_i admettent un moment d'ordre 2, par domination on en déduit que Z en admet un aussi. Ainsi, la variance de Z existe. Avec l'indépendance des variables considérées, il vient $E(Z)=E(X_1)E(Y_1)+E(X_2)E(Y_2)+E(X_3)E(Y_3)=0$ ($E(X_i)=0$). Le lemme des coalitions nous dit que Z est la somme de trois variables indépendantes. Ceci et la formule de Huygens entraînent que $V(Z)=V(X_1Y_1)+V(X_2Y_2)+V(X_3Y_3)=E(Y_1^2)+E(Y_2^2)+E(Y_3^2)=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{2-p_i}{p_i^2}$.
2. (a) La variable Y_i est indépendante de l'événement A_ε ; l'espérance de Y_i pour la probabilité conditionnelle P_{A_ε} existe et est égale à $E(Y_i)$. L'espérance de Z par rapport à la probabilité conditionnelle P_{A_ε} existe alors par domination puisque $|Z| \leqslant Y_1+Y_2+Y_3$. Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned}
E_{A_\varepsilon}(|Z|) &= \frac{1}{P(A_\varepsilon)}\sum_{n\in|Z|(\Omega)} nP\left([|X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3|=n]\cap A_\varepsilon\right)\\
&= \frac{1}{P(A_\varepsilon)}\sum_{n\in|Z|(\Omega)} nP\left([|\varepsilon_1Y_1+\varepsilon_2Y_2+\varepsilon_3Y_3|=n]\cap A_\varepsilon\right)\\
&= \sum_{n\in|\varepsilon_1Y_1+\varepsilon_2Y_2+\varepsilon_3Y_3|(\Omega)} nP\left(|\varepsilon_1Y_1+\varepsilon_2Y_2+\varepsilon_3Y_3|=n\right)=E(|\varepsilon_1Y_1+\varepsilon_2Y_2+\varepsilon_3Y_3|).
\end{aligned}$$
   (b) Avec la formule de l'espérance totale et la question précédente, il vient $E(|Z|)=\dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{\varepsilon\in\Lambda}E_{A_\varepsilon}(|Z|)=\dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{\varepsilon\in\Lambda}E(|\varepsilon_1Y_1+\varepsilon_2Y_2+\varepsilon_3Y_3|)$. On aboutit à la formule demandée en observant que ε et $-\varepsilon$ donnent la même contribution dans la somme précédente.
3. (a) On remarque que la valeur de l'expression $|a+b|+|a-b|$ est la même si on remplace a par $|a|$. Puis on voit que c'est encore la même valeur si on remplace b par $|b|$. Comme a et b jouent des rôles symétriques, on peut ensuite supposer que $|a| \geqslant |b|$; on trouve alors $2|a|$ et c'est terminé.
   (b) En utilisant la question 3.(a), on trouve :
$$\begin{aligned}
&|Y_1+Y_2+Y_3|+|Y_1+Y_2-Y_3|+|Y_1-Y_2+Y_3|+|Y_1-Y_2-Y_3|\\
&=2\max(Y_1+Y_2,Y_3)+2\max(|Y_1-Y_2|,Y_3)\geqslant 2(Y_1+Y_2+Y_3).
\end{aligned}$$
   On termine en utilisant la question 2.(b), la croissance de l'espérance et le fait que $E(Y_i)=1/p_i$.
4. (a) Avec le formule de Huygens, il vient $V(|Z|)=E(Z^2)-E(|Z|)^2=V(Z)-E(|Z|)^2=18-E(|Z|)^2$.
   (b) Avec la question 3.(b), on obtient $E(|Z|)\geqslant 3$, d'où $V(|Z|)\leqslant 9$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne la majoration $P\left(||Z|-E(|Z|)|\geqslant r\right)\leqslant \dfrac{9}{r^2}$ qui sera significative dès que $r>3$.

Exercice 3.4

Dans tout l'exercice, on considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geqslant 1}$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui sont mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi. On supposera également que N est une variable aléatoire, définie sur le même espace probabilisé, qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et qui est indépendante de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$Y(\omega) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) & \text{si} \quad N(\omega) \geqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad N(\omega) = 0 \end{cases}$$

et $Z(\omega) = N(\omega) - Y(\omega)$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\{\omega \in \Omega; Y(\omega) \leqslant x\} \cap \{\omega \in \Omega; N(\omega) = n\} \in \mathcal{A}$.
   (b) En déduire que Y et Z sont deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
2. Dans cette question, on suppose que chaque X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $q = 1 - p$.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.
   (b) Vérifier que $Z(\omega) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N(\omega)} (1 - X_k(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $N(\omega) \geqslant 1$.
   (c) En déduire la loi de Z.
   (d) Montrer que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.
3. Dans cette question, on suppose que chaque X_n est à valeurs dans un segment $[a, b]$ $(a < b)$ et suit une loi à densité de densité f, et que la variable $N + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $A_n = \{\omega \in \Omega; 0 \leqslant N(\omega) \leqslant n\}$ et $Y_n = \mathbf{1}_{A_n} Y$.
   (*Si $A \in \mathcal{A}$, on désigne par $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire qui vaut 1 sur A et 0 en dehors de A.*)
   (a) Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $|Y| \leqslant cN$. En déduire que Y admet une espérance et une variance.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité : $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{[N=k]} \left(\sum_{i=1}^{k} X_i \right)$.
   (c) Vérifier que $|Y - Y_n| = \mathbf{1}_{A_n^c} |Y|$ (où A_n^c est l'événement contraire de A_n).
   Montrer que la suite $(E(Y_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers $E(Y)$.
   (d) En déduire une expression de $E(Y)$ en fonction de f.

Solution de l'exercice 3.4

1. (a) Si $n \geqslant 1$, on a $A_n = [Y \leqslant x] \cap [N = n] = \left[\sum_{k=1}^{n} X_k \leqslant x\right] \cap [N = n] \in \mathcal{A}$ puisque $\sum_{k=1}^{n} X_k$ et N sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. De plus, $A_0 = \emptyset \in \mathcal{A}$ si $x < 0$ et $A_0 = [N = 0] \in \mathcal{A}$ si $x \geqslant 0$.

   (b) On en déduit que $[Y \leqslant x] = \bigcup_{n \geqslant 0} A_n \in \mathcal{A}$ comme réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$. Par suite Y (et donc Z, par somme de v.a.) est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. (a) On a : $P(Y = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([Y = 0] \cap [N = n]) = P([N = 0]) + \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\left[\sum_{k=1}^{n} X_k = 0\right] \cap [N = n]\right) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda}(e^{\lambda q} - 1) = e^{-\lambda p}$
   Et si $m \geqslant 1$, $P(Y = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([Y = m] \cap [N = n]) = \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^m}{m!}$.
   La variable Y suit donc une loi de Poisson de paramètre λp.

   (b) Si $N(\omega) \geqslant 1$, on a $Z(\omega) = N(\omega) - Y(\omega) = N(\omega) - \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} (1 - X_k(\omega))$.

   (c) Comme $Z(\omega) = 0$ si $N(\omega) = 0$ et que les variables $1 - X_k$ suivent suit la loi de Bernoulli de paramètre $q \in]0, 1[$, on observe que Z joue le rôle de Y si on remplace p par q, d'où $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda q)$.

   (d) On a $P([Y = 0] \cap [Z = 0]) = P([Y = 0] \cap [N = 0]) = P(N = 0) = e^{-\lambda} = e^{-\lambda p} e^{-\lambda q} = P(Y = 0) \times P(Z = 0)$. Si $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, en utilisant l'indépendance des variables concernées il vient :

$$\begin{aligned} P([Y = m_1] \cap [Z = m_2]) &= P\left(\left[\sum_{k=1}^{m_1+m_2} X_k = m_1\right] \cap [N = m_1 + m_2]\right) \\ &= \binom{m_1 + m_2}{m_1} p^{m_1} q^{m_2} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{m_1+m_2}}{(m_1 + m_2)!} = P(Y = m_1) \times P(Z = m_2). \end{aligned}$$

   Les variables Y et Z sont bien indépendantes.

3. (a) Lorsque $N(\omega) \geqslant 1$, on a $|Y(\omega)| \leqslant \sum_{k=1}^{N(\omega)} |X_k(\omega)| \leqslant \max(|a|, |b|)N(\omega)$. On peut donc prendre $c = \max(|a|, |b|)$ puisque $Y(\omega) = 0$ si $N(\omega) = 0$. On a donc $Y^2 \leqslant c^2 N^2$ et par domination, Y admet une espérance et une variance.

   (b) Si $n \geqslant 1$, $Y_n(\omega) = \mathbf{1}_{A_n}(\omega) Y(\omega) = \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{[N=k]}(\omega)\right) Y(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{[N=k]}(\omega) \left(\sum_{i=1}^{k} X_i(\omega)\right)$.

   (c) Si $\omega \in \Omega$, on a $|Y(\omega) - Y_n(\omega)| = |(1 - \mathbf{1}_{A_n}(\omega))Y(\omega)| = \mathbf{1}_{A_n^c}(\omega) |Y(\omega)|$. Par conséquent, en utilisant 3.(a), on voit que $-c\mathbf{1}_{A_n^c}(\omega)N(\omega) \leqslant Y(\omega) - Y_n(\omega) \leqslant c\mathbf{1}_{A_n^c}(\omega)N(\omega)$, d'où $|E(Y) - E(Y_n)| \leqslant cE(\mathbf{1}_{A_n^c} N) = c \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(N = k) \to 0$ lorsque n tend vers l'infini.

   (d) Avec le cours, on sait que les variables $\mathbf{1}_{[N=k]}$ et $\sum_{i=1}^{k} X_i$ sont indépendantes, d'où $E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} E(\mathbf{1}_{[N=k]}) E(\sum_{i=1}^{k} X_i) = E(X_1) \sum_{k=1}^{n} kP(N = k) \to E(X_1)E(N)$, d'où $E(Y) = E(X_1)E(N)$. D'où :

$$E(Y) = \frac{q}{p} \int_a^b t f(t) dt$$

Exercice 3.5

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient α un réel strictement positif et f_α la fonction définie par :

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet sans démonstration le résultat suivant : une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable certaine λ si et seulement si elle converge en loi vers λ.

1. (a) Montrer que f_α définit une densité.

   (b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $]1, +\infty[$ et dont la densité est f_α avec $\alpha > 0$. Pour quelles valeurs de α l'espérance $E(X)$ existe-t-elle ? Calculer $E(X)$ lorsqu'elle existe. Pour quelles valeurs de α la variance $V(X)$ existe-t-elle ?

   Pour la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $]1, +\infty[$ chacune de densité f_α avec $\alpha > 2$. On définit la variable aléatoire $\overline{X_n}$ par :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

2. Étudier la convergence en probabilité de la suite $(\overline{X_n})_{n\geqslant 1}$.

3. (a) Soit $g :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(u) = \dfrac{u}{u-1}$. Étudier les variations de g sur $]1, +\infty[$ et caractériser l'ensemble $g(]1, +\infty[)$. Puis, justifier l'existence et calculer $g(g(u))$ pour $u > 1$. Montrer, ensuite que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera le domaine de définition et l'expression. Enfin, montrer que $g(E(X_1))$ est bien définie et exprimer sa valeur en fonction de α.

   (b) On admet que $g(\overline{X_n})$ est une variable aléatoire. Montrer que $g(\overline{X_n})$ est à valeurs dans $]1, +\infty[$.

   (c) Soit u un réel tel que $1 < u < g(E(X_1))$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\overline{X_n} < g(u)) = 1$.

   (d) Soit u un réel tel que $g((E(X_1)) < u$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\overline{X_n} < g(u)) = 0$.

   (e) Montrer que $(g(\overline{X_n}))_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable certaine $g(E(X_1))$.

Solution de l'exercice 3.5

1. (a) f_α est positive sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty,1]$ et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. En 1^+, l'intégrale converge car $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$. De plus, $f_\alpha(x)=\alpha x^{-(1+\alpha)}$ en $+\infty$ avec $\alpha>0$, donc l'intégrale de f_α converge sur $\mathbb{R}$. Enfin, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}\alpha x^{-(\alpha+1)}\mathrm{d}x=[-x^{-\alpha}]_1^{+\infty}=1$. On conclut que f_α est une densité.

   (b) $x\mapsto xf_\alpha(x)$ et $x\mapsto x^2f_\alpha(x)$ sont positives sur $\mathbb{R}$, nulles sur $]-\infty,1]$, continues sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et admettent 1 comme limite en 1^+. On a $xf_\alpha(x)=\alpha x^{-\alpha}$ et $x^2f_\alpha(x)=\alpha x^{(1-\alpha)}$ en $+\infty$. Donc, par théorème du transfert, $E(X)$ et $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ existent respectivement pour $\alpha>1$ et pour $\alpha>2$. Enfin, pour $\alpha>1$, on a $E(X)=\displaystyle\int_1^{\infty}\alpha x^{-\alpha}\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{\alpha-1}$.

2. Pour $\alpha>2$, $E(X_n)=E(X_1)$ et $V(X_n)=V(X_1)$ existent pour $n\geqslant 1$ (cf. 1)(b)) et les X_n sont indépendantes, donc d'après la loi faible des grands nombres, $\overline{X_n}\to E(X_1)$ en probabilité.

3. (a) Pour $u>1$, $g'(u)=-1/(u-1)^2<0$, donc g est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ et de plus, elle est continue sur cet intervalle. D'après le théorème de la bijection, g est inversible de $]1,+\infty[$ vers $g(]1,+\infty[)=]1,+\infty[$. Ainsi on a pour $u>1$, $g(u)>1$ et donc $g(g(u))$ est bien définie. Un petit calcul donne $g(g(u))=u$ pour $u>1$ et donc $g=g^{-1}$ sur $]1,+\infty[$. Enfin, comme $\alpha>2$, d'après 1)b), $E(X_1)=g(\alpha)>1$, donc $g(E(X_1))$ est bien définie et $g(E(X_1))=g(g(\alpha))=\alpha$.

   (b) Pour tout $n\geqslant 1$, X_n est à valeurs dans $]1,+\infty[$, donc $\overline{X_n}$ est aussi à valeurs dans $]1,+\infty[$. Ainsi comme d'après 4)(a), $g(]1,+\infty[)=]1,+\infty[$, on a $g(\overline{X_n})$ qui est à valeurs dans $]1,+\infty[$.

   (c) Soit $1<u<g(E(X_1))$. D'après 4) (a), $g=g^{-1}$ est une bijection de $]1,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$ qui est strictement décroissante. On en déduit que $E(X_1)<g(u)$ et qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que $E(X_1)+\varepsilon<g(u)$. On obtient donc l'encadrement suivant : $F_{\overline{X_n}}(E(X_1)+\varepsilon)=P(\overline{X_n}\leqslant E(X_1)+\varepsilon)\leqslant P(\overline{X_n}<g(u))\leqslant 1$. Comme $\alpha>2$, nous savons que la suite $(\overline{X_n})_{n\geqslant 1}$ converge vers $E(X_1)$ en probabilité (cf. question 3)). Elle tend donc également en loi vers $E(X_1)$ d'après la question 2). La fonction de répartition de $E(X_1)$ est donnée par $F_{E(X_1)}(u)=0$ si $u<E(X_1)$ et $F_{E(X_1)}(u)=1$ si $u\geqslant E(X_1)$. Son seul point de discontinuité est $u=E(X_1)$. Ainsi, il résulte de la convergence en loi de $\overline{X_n}$ vers $E(X_1)$ que $F_{\overline{X_n}}(E(X_1)+\varepsilon)\to F_{E(X_1)}(E(X_1)+\varepsilon)=1$. On conclut de l'encadrement que $P(\overline{X_n}<g(u))\to 1$ quand $n\to+\infty$.

   (d) Soit $g((E(X_1))<u$. Comme $g=g^{-1}$ est une bijection de $]1,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$ qui est strictement décroissante, on a alors $g(u)<E(X_1)$. Il vient donc, $0\leqslant P(\overline{X_n}<g(u))\leqslant P(\overline{X_n}\leqslant g(u))=F_{\overline{X_n}}(g(u))$. A l'instar de 4)(b), on déduit de la convergence en loi de $\overline{X_n}$ vers $E(X_1)$ que $F_{\overline{X_n}}(g(u))\to F_{E(X_1)}(g(u))=0$ (car $g(u)<E(X_1)$). Donc avec l'encadrement précédent, on a $P(\overline{X_n}<g(u))\to 0$.

   (e) En $u=g(E(X_1))$ la fonction de répartition $F_{g(E(X_1))}$ est discontinue. Étudions donc la convergence sur tous les autres points. Il y a 3 cas à étudier. Tout d'abord, si $u\leqslant 1$, comme $g(\overline{X_n})$ est à valeurs dans $]1,+\infty[$ (d'après 4)(a)), il vient : $F_{g(\overline{X_n})}(u)=0\to 0=F_{g(E(X_1))}(u)$ pour $n\to+\infty$. Puis, pour $1<u<g(E(X_1))$, on a $F_{g(\overline{X_n})}(u)=P(g(\overline{X_n})\leqslant u)=P(g(u)\leqslant\overline{X_n}))$ car $g=g^{-1}$ définie de $]1,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$ est strictement décroissante. Il en résulte que $F_{g(\overline{X_n})}(u)=1-P(\overline{X_n}<g(u))$ et donc avec 4)(c) que $F_{g(\overline{X_n})}(u)\to 0=F_{g(E(X_1))}(u)$ pour $n\to+\infty$. Enfin si $g(E(X_1))<u$, on a : $F_{g(\overline{X_n})}(u)=P(g(\overline{X_n})\leqslant u)=P(g(u)\leqslant\overline{X_n})$ et il vient avec 4)(d) : $F_{g(\overline{X_n})}(u)=1-P(\overline{X_n}<g(u))\to 1=F_{g(E(X_1))}(u)$. La suite $(g(\overline{X_n}))_{n\geqslant 1}$ converge donc en loi vers $g(E(X_1))$.

Exercice 3.6

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes dont les lois de probabilité sont définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([X = n]) = (\mathrm{e} - 1)\mathrm{e}^{-n}, \qquad \text{et} \qquad P([Y = n]) = \frac{1}{(\mathrm{e} - 1)n!}$$

Soit $(U_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

On suppose enfin que les variables aléatoires U_i, X et Y sont indépendantes.

1. Reconnaître la loi de la variable aléatoire X.
2. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $M_n = \max(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.
   Déterminer la fonction de répartition de M_n.
3. On pose, pour tout ω de Ω, $M(\omega) = \max(U_1(\omega), U_2(\omega), \ldots, U_{Y(\omega)}(\omega))$ et on admet que M est bien une variable aléatoire.
   (a) Calculer F_M la fonction de répartition de M.
   (b) Calculer l'espérance de M.
   (c) On pose $Z = X - M$. Pour tout réel x, calculer $P([Z > x])$ et en déduire la loi de Z.

Solution de l'exercice 3.6

1. • Pour X : en écrivant $P(X=n) = \left(1-\dfrac{1}{e}\right)\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}$, on constate que X suit la loi géométrique de paramètre $1-\dfrac{1}{e}$. C'est donc une variable aléatoire.

   • Pour Y : les termes sont positifs et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P([Y=n]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(e-1)n!} = \frac{1}{e-1}(e-1) = 1.$

2. On a classiquement : $F_{M_n}(x) = F_{U_1}(x)^n$. D'où : $F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ x^n \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x>1 \end{cases}$.

3. (a) On considère le système complet d'événements : $\{[Y=n], n\in\mathbb{N}^*\}$. On a donc, pour tout réel x :

   $$[M \leqslant x]\cap[Y=n] = [M_n \leqslant x]\cap[Y=n]$$

   Par indépendance, $P([M_n \leqslant x]\cap[Y=n]) = P([M_n \leqslant x] \times P([Y=n])$. Ainsi

   $$P([M\leqslant x]) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([M_n \leqslant x]\big)\times\big([Y=n]\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{1}{(e-1)n!},\ \forall x\in[0,1]$$

   Finalement : $F_M(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ \dfrac{e^x-1}{e-1} \text{ si } 0\leq x\leq 1 \\ 1 \text{ si } x>1 \end{cases}$.

   (b) Ainsi M est à densité, donc par th. de transfert : $E(M) = \displaystyle\int_0^1 x\frac{e^x-1}{e-1}\,\mathrm{d}x$,
   soit, après intégration par parties : $E(M) = \frac{1}{e-1}$.

4. On commence par remarquer que $Z(\Omega) = \mathbb{R}^+$. On utilise à nouveau la formule des probabilités totales, avec comme système complet d'événements $\{[X=n], n\in\mathbb{N}^*\}$.

   On a donc, pour tout réel x positif : $P([Z>x]) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P\big([Z>x]\cap[X=n]\big)$.

   Mais, $[Z>x]\cap[X=n] = [X-M>x]\cap[X=n] = [M<n-x]\cap[X=n]$.

   Comme X et M sont indépendantes, on obtient : $P([Z>x]) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P([M<n-x])\times P([X=n])$.

   Comme $M(\Omega) = [0,1]$, il faut distinguer trois cas :
   • Si $n-x\leqslant 0$, c'est-à-dire si $n\leqslant\lfloor x\rfloor$, on a $P([M<n-x]) = 0$.
   • Si $0\leqslant n-x\leq 1$, c'est-à-dire si $n = \lfloor x\rfloor+1$, on a $P([M<n-x]) = \dfrac{e^{n-x}-1}{e-1}$.
   • Enfin, si $n-x>1$, c'est-à-dire si $x\geq\lfloor x\rfloor+2$, on a $P([M<n-x]) = 1$. Finalement :

   $$P([Z>x]) = \frac{e^{\lfloor x\rfloor+1-x}-1}{e-1}\times(e-1)e^{-(\lfloor x\rfloor+1)} + \sum_{n=\lfloor x\rfloor+2}^{+\infty}(e-1)e^{-n}$$

   Après simplification, il reste finalement : $P([Z>x]) = \begin{cases} e^{-x} \text{ si } x>0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$.

   On constate que Z suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 3.7

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère un réel θ appartenant à $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et la densité f_θ définie par :

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\theta}{2} \text{ si } x \in [-1, 0[\\ \\ \dfrac{1+\theta}{2} \text{ si } x \in [0, 1] \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note X une variable aléatoire admettant f_θ comme densité et $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un $n-$échantilllon de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X.

1. On pose $F_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Déterminer la valeur du réel c pour que $\widehat{F_n} = cF_n$ soit un estimateur sans biais de θ.
   (b) Montrer que la suite $(\widehat{F_n})_n$ converge en probabilité vers θ.
2. On note, pour $k \in [\![1, n]\!]$, Y_n le nombre de variables parmi les variables X_k qui ont pris une valeur positive ou nulle.
   (a) Montrer que Y_n suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
   (b) On note $\widehat{\theta}_n$ la variable aléatoire définie par : $\widehat{\theta}_n = \dfrac{2}{n} Y_n - 1$.
   Montrer que $(\widehat{\theta}_n)$ est un estimateur sans biais de θ.
   (c) Montrer que la suite $(\widehat{\theta}_n)_n$ converge en probabilité vers θ.
3. (a) Montrer qu'il existe un réel λ strictement positif tel que :

$$|\sqrt{1 - \widehat{\theta}_n^2} - \sqrt{1 - \theta^2}| \leqslant \lambda |\widehat{\theta}_n - \theta|$$

   (b) Montrer que la suite $(\sqrt{1 - \widehat{\theta_n}^2})_n$ converge en probabilité vers $\sqrt{1 - \theta^2}$.
   (c) Montrer que la suite $(\sqrt{n} \dfrac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{1 - \theta^2}})_n$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Solution de l'exercice 3.7

1. (a) On a : $E(X) = \displaystyle\int_{-1}^{0} t\frac{1-\theta}{2}dt + \int_{0}^{1} t\frac{1+\theta}{2}dt = \frac{\theta}{2} \Longrightarrow E(F_n) = \frac{\theta}{2} \Longrightarrow \hat{F}_n = 2F_n$.

   (b) Comme $\hat{F}_n$ est sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance. Or $E(X^2) = \dfrac{1}{3}$ et $V(X) = \dfrac{4-3\theta^2}{12} \Longrightarrow V(F_n) = \dfrac{4-3\theta^2}{12n}$, par indépendance.

   Enfin, $V(\hat{F}_n) = 4V(F_n) = \dfrac{4-3\theta^2}{3n}$. On applique alors la loi faible des grands nombres à $\hat{F}_n$.

2. (a) $\mathbf{1}_{[X_k>0]}$ est une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1+\theta}{2}$. Ainsi, Y_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \dfrac{1+\theta}{2})$.

   On a alors : $E(Y_n) = n\dfrac{1+\theta}{2}$ et $V(Y_n) = n\dfrac{1-\theta^2}{4}$.

   (b) On a, toujours par linéarité de l'espérance, $E(\hat{\theta}_n) = \dfrac{2}{n}E(Y_n) - 1 = \theta$.

   (c) On a $V(\hat{\theta}_n) = \dfrac{4}{n^2}V(Y_n) = \dfrac{1-\theta^2}{n}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à $\hat{\theta}_n$ donne :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leqslant P\big(|\hat{\theta}_n - \theta| \geqslant \varepsilon\big) \leq \frac{1-\theta^2}{n\varepsilon^2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P\big(|\hat{\theta}_n - \theta| \geqslant \varepsilon\big) = 0$$

3. (a) On multiplie par l'expression conjuguée. Comme $|\sqrt{1-\widehat{\theta}_n^2} + \sqrt{1-\theta}^2| \geq \sqrt{1-\theta}^2 \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, il vient $|\sqrt{1-\widehat{\theta}_n^2} - \sqrt{1-\theta}^2| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Comme $\widehat{\theta_n}$ prend toutes ses valeurs entre -1 et 1 et comme θ appartient à $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$, on a : $|\widehat{\theta}_n + \theta| \leqslant \dfrac{3}{2}$ et $|\sqrt{1-\widehat{\theta}_n^2} - \sqrt{1-\theta}^2| \leq \sqrt{3}|\widehat{\theta}_n - \theta|$.

   (b) On a donc, pour tout ω de Ω, $|\sqrt{1-\widehat{\theta}_n^2(\omega)} - \sqrt{1-\theta}^2| \geqslant \varepsilon \Rightarrow \sqrt{3}|\widehat{\theta}_n(\omega) - \theta| \geqslant \varepsilon$, et

$$P\big(|\sqrt{1-\widehat{\theta}_n^2} - \sqrt{1-\theta}^2| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant P\big(|\widehat{\theta}_n - \theta| \geqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\big) \to 0$$

   (c) On applique le TLC à Y_n : $E(Y_n) = n\dfrac{1+\theta}{2}$ et $V(Y_n) = n\dfrac{1-\theta^2}{4}$. La suite $\left(\dfrac{Y_n - n\frac{1+\theta}{2}}{\sqrt{n\frac{1-\theta^2}{4}}}\right)_n$ converge en loi vers une variable T qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. En arrangeant, on conclut : $\left(2\sqrt{n}\dfrac{\frac{Y_n}{n} - \left(\frac{1+\theta}{2}\right)}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)_n$ converge en loi vers T. Comme $Y_n = \dfrac{n\widehat{\theta}_n}{2} + \dfrac{n}{2}$, on obtient : $\left(\sqrt{n}\dfrac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)_n$ converge en loi vers T.

EXERCICE 3.8

On considère deux réels λ et θ strictement positifs et une variable aléatoire X dont une densité f_X est donnée par :

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\theta}\left(\dfrac{\theta}{t}\right)^{\lambda+1} & \text{si } t > \theta \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables indépendantes suivant toutes la loi de X, où θ est connu et λ un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer.
On pose :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], Y_k = \ln\left(\frac{X_k}{\theta}\right), \quad \overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \text{ et } \widehat{\lambda}_n = \frac{1}{\overline{Y}_n}$$

1. (a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (b) Étudier l'existence de l'espérance et de la variance de X et en cas d'existence les calculer.
2. (a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, Y_k suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.
   (b) En déduire les valeurs de $E(\overline{Y}_n)$ et de $V(\overline{Y}_n)$.
   (c) Écrire une instruction en **Scilab** qui permet de simuler 100 réalisations de X lorsque λ et θ sont connus.
3. Justifier les deux convergences suivantes :
   (a) la suite $\left(\lambda\sqrt{n}\left(\overline{Y}_n - \dfrac{1}{\lambda}\right)\right)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$
   (b) La suite $\left(\lambda\overline{Y}_n\right)_n$ converge en probabilité vers 1.
4. En remarquant que l'on peut écrire :
$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n - \lambda)}{\lambda} = \frac{\lambda\sqrt{n}\left(\dfrac{1}{\lambda} - \overline{Y}_n\right)}{\lambda\overline{Y}_n}$$
   montrer que la suite $\left(\dfrac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n - \lambda)}{\lambda}\right)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
5. En approchant la loi de $\dfrac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n - \lambda)}{\lambda}$ par $\mathcal{N}(0,1)$, déterminer, un intervalle de confiance au niveau de confiance $0,95$ pour λ.
   Rappel : si Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a $\Phi(1,96) = 0,975$.

Solution de l'exercice 3.8

1. (a) On vérifie facilement que f est un densité de probabilité et on trouve :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\theta}{x}\right)^\lambda & \text{si } x > \theta \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(b) On a $tf_X(t) = \lambda\theta^\lambda \dfrac{1}{t^\lambda}$ donc $\mathbb{E}(X)$ existe si et seulement si $\lambda > 1$ et dans ce cas $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\theta\lambda}{(\lambda-1)}$. De même : $t^2 f_X(t) = \lambda\theta^\lambda \dfrac{1}{t^{\lambda-1}}$. Donc $E(X^2)$ et $V(X)$ existent si et seulement si $\lambda > 2$ et dans ce cas : $E(X^2) = \dfrac{\theta^2\lambda}{\lambda-2}$ et $V(X) = \dfrac{\theta^2}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)}$.

2. (a) On a donc : $Y = \ln\left(\frac{X}{\theta}\right)$. D'où :

$$F_Y(y) = P\left(\ln\left(\frac{X}{\theta}\right) \leqslant y\right) = P(\frac{X}{\theta} \leqslant e^y) = P(X \leqslant \theta e^y) = F_X(\theta e^y)$$

On a donc, pour tout réel y : $F_Y(y) = F_X(\theta e^y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} \text{ si } y > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

soit $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

(b) On trouve donc, par linéarité $E(\overline{Y}_n) = \dfrac{1}{\lambda}$ et, par indépendance $V(\overline{Y}_n) = \dfrac{1}{n\lambda^2}$.

(c) On a donc $X = \theta e^Y$ où Y suit la loi exponentielle de paramètre λ, or on sait simuler une loi exponentielle. On écrit donc :

```
x=theta*exp(grand(1,100,'exp',1/lambda))
```

3. (a) Il suffit d'appliquer à $(\overline{Y}_n)$ le théorème limite central : $\dfrac{\overline{Y}_n - E(\overline{Y}_n)}{\sqrt{V(\overline{Y}_n)}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$, ce qui donne bien :

$$\lambda\sqrt{n}\left(\overline{Y}_n - \frac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$$

(b) En appliquant à $(\overline{Y}_n)$ la LFGN, il vient $(\overline{Y}_n) \xrightarrow{P} \dfrac{1}{\lambda}$. On en déduit que $(\lambda\overline{Y}_n) \xrightarrow{P} 1$.

4. On a donc : $\dfrac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n - \lambda)}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{Y}_n} - \lambda\right)}{\lambda} = \dfrac{\lambda\sqrt{n}\left(\frac{1}{\lambda} - \overline{Y}_n\right)}{\lambda\overline{Y}_n} = \lambda\sqrt{n}\left(\dfrac{1}{\lambda} - \overline{Y}_n\right) \times \dfrac{1}{\lambda\overline{Y}_n}$.

Or : $(\lambda\overline{Y}_n) \xrightarrow{P} 1$, donc, par continuité, $\dfrac{1}{\lambda\overline{Y}_n} \xrightarrow{P} 1$ et $\lambda\sqrt{n}\left(\overline{Y}_n - \dfrac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow{L} Z$, où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On a donc, là aussi par continuité :

$$\lambda\sqrt{n}\left(\frac{1}{\lambda} - \overline{Y}_n\right) \xrightarrow{L} -Z \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$$

On applique alors le lemme de Slutsky : $\lambda\sqrt{n}\left(\dfrac{1}{\lambda} - \overline{Y}_n\right) \times \dfrac{1}{\lambda\overline{Y}_n} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$. D'où : $\dfrac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda}_n - \lambda)}{\lambda} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$.

5. On trouve, pour n assez grand, $P\left(\lambda \in \left[\dfrac{\widehat{\lambda}_n}{1 + \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}}, \dfrac{\widehat{\lambda}_n}{1 - \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}}\right]\right) \geqslant 0{,}95$.

Exercice 3.9

Soit $p \in]0,1[$. On considère une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.

On pose $q = 1-p$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $\Pi_n = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}(1-q^j)$.

1. (a) Montrer que $P(X_1 = X_2) = \dfrac{p}{2-p}$.

   (b) En déduire $P(X_1 < X_2)$ en fonction de p seulement.

Dans la suite de cet exercice, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note A_n l'événement :

$$A_n = (X_1 < X_2 < \cdots < X_n),$$

et, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note $B_{n,k}$ l'événement :

$$B_{n,k} = A_n \cap (X_1 = k)$$

On note aussi $u_n = P(A_n)$ et $v_{n,k} = P(B_{n,k})$.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$\forall k \geqslant 1,\ v_{n,k} = pq^{k-1}\sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j}$$

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe un entier α_n que l'on déterminera tel que :

$$\forall k \geqslant 1,\ v_{n,k} = \frac{1}{\Pi_{n-1}}p^n q^{n(k-1)} q^{\alpha_n}$$

4. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{p^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\Pi_n}$.
5. Montrer que la suite $(\Pi_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite α.
   En déduire un équivalent de u_n, qui dépend de α, lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 3.9

1. (a) En utilisant le système complet $(X_1 = k)_{k\geqslant 1}$, puis par indépendance, on obtient :

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_1 = X_2) \cap (X_1 = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_1 = k) \cap (X_2 = k))$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2(k-1)} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q} = \boxed{\frac{p}{2-p}}.$$

(b) Comme $P(X_1 < X_2) = P(X_2 < X_1)$ par symétrie et comme $(X_1 = X_2), (X_1 < X_2), (X_1 > X_2)$ forment un système complet, on a : $P(X_1 < X_2) = \dfrac{1 - P(X_1 = X_2)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{p}{2-p}\right) = \boxed{\dfrac{1-p}{2-p}}.$

2. La formule des probabilités totales avec le système $(X_2 = j)_{j\geqslant 1}$, puis l'indépendance, donnent :

$$v_{n,k} = \sum_{j=1}^{+\infty} P\big((X_1 < \cdots < X_n) \cap (X_1 = k) \cap (X_2 = j)\big) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} P\big((X_1 = k) \cap (X_2 = j) \cap (X_2 < \cdots < X_n)\big)$$
$$= pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j} \quad \text{car } P\big((X_2 = j) \cap (X_2 < X_3 < \cdots < X_n)\big) = v_{n-1,j} \text{ par symétrie.}$$

3. On opère par récurrence sur $n \geqslant 2$:

$$v_{2,k} = P(A_2 \cap (X_1 = k)) = P((k < X_2) \cap (X_1 = k)) = P(k < X_2)P(X_1 = k) \text{ par indépendance}$$
$$= q^k pq^{k-1} = pq^{2k-1} = \frac{1}{p} p^2 q^{2(k-1)} q^1 = \frac{1}{\Pi_1} p^2 q^{2(k-1)} q^{\alpha_2} \text{ avec } \boxed{\alpha_2 = 1.}$$

Soit $n \geqslant 3$; on suppose le résultat vrai pour $n-1$; alors, comme $|q^{n-1}| < 1$, on obtient :

$$v_{n,k} = pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j} = pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{1}{\Pi_{n-2}} p^{n-1} q^{(n-1)(j-1)} q^{\alpha_{n-1}} = \frac{1}{\Pi_{n-2}} p^n q^{k-1} q^{\alpha_{n-1}} \sum_{j=k+1}^{+\infty} (q^{n-1})^{j-1}$$
$$= \frac{1}{\Pi_{n-2}} p^n q^{k-1} q^{\alpha_{n-1}} \frac{q^{(n-1)k}}{1-q^{n-1}} = \frac{1}{\Pi_{n-1}} p^n q^{n(k-1)} q^{\alpha_n} \text{ si } \boxed{\alpha_n = \alpha_{n-1} + n - 1.}$$

On en déduit que $\alpha_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ d'où $v_{n,k} = \dfrac{p^n q^{n(k-1)} q^{n(n-1)/2}}{\Pi_{n-1}}$.

4. La formule des probabilités totales avec le système complet $(X_1 = k)_{k\geqslant 1}$ donne :

$$u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} v_{n,k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\Pi_{n-1}} p^n q^{n(k-1)} q^{\alpha_n} = \frac{1}{\Pi_{n-1}} p^n q^{\alpha_n} \frac{1}{1-q^n} = \boxed{\frac{p^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\Pi_n}}.$$

5. On a $\ln(\Pi_n) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \ln(1-q^j)$; or $\ln(1-q^j) \underset{j\to+\infty}{\sim} -q^j$ qui est le terme général d'une série convergente ; l'équivalent étant de signe constant, la série $\sum \ln(1-q^j)$ converge et donc la suite $(\ln(\Pi_n))$ converge vers un réel ℓ. Il en résulte que la suite $(\Pi_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\alpha = \exp(\ell) > 0$. Alors, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha} p^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Exercice 3.10

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$. Soit $q \in]0,1[$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Déterminer la limite en probabilité de la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \ln(1 - p + p\,\mathrm{e}^t)$.

   Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a $f''(t) \leqslant \dfrac{1}{4}$ et en déduire que : $\forall\, t \geqslant 0,\ \ f(t) \leqslant p\,t + \dfrac{t^2}{8}$.

   On suppose dans la suite que $p < q$.
3. Montrer que :
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{S_n}{n} - p\right|\right) = P\left(S_n \geqslant n\,\frac{p+q}{2}\right)$$
4. (a) Montrer que pour tout $t > 0$, on a :
$$P\left(S_n \geqslant n\,\frac{p+q}{2}\right) \leqslant \exp\left(-n\Big(\frac{p+q}{2}t - f(t)\Big)\right)$$
   (b) Établir la relation : $\forall\, t \geqslant 0,\ \ \dfrac{p+q}{2}\,t - f(t) \geqslant -\dfrac{1}{8}\,t^2 + \dfrac{1}{2}(q-p)t.$

   (c) En déduire l'inégalité :
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{S_n}{n} - p\right|\right) \leqslant \exp\left(-n\frac{(q-p)^2}{2}\right)$$

Solution de l'exercice 3.10

1. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff, (ou la loi faible des grands nombres), la suite (S_n/n) tend en probabilité vers p.

2. La fonction f est de classe $C^\infty(\mathbb{R}_+)$. On a $f'(t) = \dfrac{p\mathrm{e}^t}{1-p+p\,\mathrm{e}^t}$ et $f''(t) = (1-p)\dfrac{p\,\mathrm{e}^t}{(1-p+p\,\mathrm{e}^t)^2}$.

   En posant $a = 1-p$ et $b = p\,\mathrm{e}^t$, on obtient :
$$f''(t) = \frac{ab}{(a+b)^2} \leqslant \frac{1}{4}$$
   En intégrant : $f'(t) - f'(0) \leqslant \dfrac{t}{4}$, soit $f'(t) - p \leqslant \dfrac{t}{4}$, puis en intégrant de nouveau :
$$f(t) - p\,t - 0 \leqslant \frac{t^2}{8}$$
   Autre idée : par la formule de Taylor avec reste intégrale.

3.
$$\left|\frac{S_n}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{S_n}{n} - p\right| \iff \left(\frac{S_n}{n} - q\right)^2 \leqslant \left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2 - 2\frac{S_n}{n}(q-p)+q^2-p^2 \leqslant 0 \iff \frac{S_n}{n} \geqslant \frac{p+q}{2} \text{ car } p < q$$

4. (a) Pour $t > 0$, par croissance de la fonction exponentielle, on a l'égalité suivante entre les événements :
$$[S_n \geqslant n\frac{p+q}{2}] = [tS_n \geqslant nt\frac{p+q}{2}] = [\mathrm{e}^{tS_n} \geqslant \mathrm{e}^{nt\frac{p+q}{2}}]$$
   Par l'inégalité de Markov, on obtient :
$$P([S_n \geqslant n\frac{p+q}{2}]) \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{tS_n})}{\mathrm{e}^{nt\frac{p+q}{2}}}$$
   Or, par indépendance des (X_k), et théorème de transfert, on a :
$$E(\mathrm{e}^{tS_n}) = E\left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tX_k}\right) = (E(\mathrm{e}^{tX}))^n = (1-p+p\,\mathrm{e}^t)^n$$
   soit
$$P([S_n \geqslant n\frac{p+q}{2}]) \leqslant \frac{(1-p+p\,\mathrm{e}^t)^n}{\mathrm{e}^{nt\frac{p+q}{2}}} = \mathrm{e}^{-n(\frac{p+q}{2}t - f(t))}$$
   (b) Il suffit d'utiliser l'inégalité établie dans la question 2 pour parvenir au résultat.

   (c) L'inégalité précédente étant valable pour tout $t \geqslant 0$, il vient :
$$P([S_n \geqslant n\frac{p+q}{2}]) \leqslant \min_{t\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n(-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{2}(q-p)t)} = \mathrm{e}^{-n\frac{(q-p)^2}{2}}$$

Exercice 3.11

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$ et $D_n = Y_n(\Omega)$.

1. Montrer par récurrence que $D_n = \{k/2^n \ ; \ 0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1\}$.
2. Soit $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}$ et $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{2^k}$, où $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n$.
   Montrer que $x = y$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!], x_k = y_k$.
3. (a) En déduire la loi de Y_n.
   (b) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi et préciser la loi limite.
4. On admet le résultat suivant : soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, telle que :
   - pour tout $t \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = g(t)$, avec g continue sur $[0,1]$;
   - il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \in [0,1], |g_n(t)| \leqslant C$.

   Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(u)du = \int_0^1 g(u)du$.

   À l'aide des questions précédentes et du résultat admis, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

   (on pourra considérer $\displaystyle\int_0^1 E(t^{Y_n})dt$)

Solution de l'exercice 3.11

1. On montre par récurrence sur n que $D_n = \{k/2^n \ ; \ 0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1\}$.
   - Si $n = 1$, $Y_1 = \dfrac{X_1}{2}$ donc $D_1 = \{0, 1/2\}$.
   - Supposons le résultat vrai pour n. On a $Y_{n+1} = Y_n + \dfrac{X_{n+1}}{2^{n+1}}$. Donc :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D_n \cup \left\{ \frac{1}{2^{n+1}} \right\} + x ; x \in D_n\} = \left\{ \frac{k}{2^n} ; 0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1 \right\} \cup \left\{ \frac{2k+1}{2^{n+1}} ; 0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1 \right\} \\ &= \{k/2^{n+1} \ ; \ 0 \leqslant k \leqslant 2^{n+1} - 1\} \end{aligned}$$

2. Un sens est évident. Supposons donc que $(x_1, \ldots, x_n) \neq (y_1, \ldots, y_n)$. Soit p le premier indice pour lequel $x_p \neq y_p$ et supposons que $x = y$. On peut supposer que $x_p = 1$ et $y_p = 0$. Ainsi :

$$\frac{1}{2^p} + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{x_k}{2^k} = \sum_{k=p+1}^{n} \frac{y_k}{2^k} \leqslant \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^p} \left(1 - (1/2)^{n-p}\right) < \frac{1}{2^p}$$

   Ceci est impossible, même si $x_k = 0$, pour $k \in [\![p+1, n]\!]$. Donc $x \neq y$.

3. (a) Soit $\frac{k}{2^n} \in D_n$. Comme la fonction de $\{0,1\}^n$ dans D_n : $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2^j}$ est injective, et comme les ensembles de départ et d'arrivée ont le même cardinal, elle est surjective, donc on peut écrire $\frac{k}{2^n} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2^j}$ d'où : $P\left(Y_n = \dfrac{k}{2^n}\right) = P\left(\displaystyle\bigcap_{j;a_j=1} (X_j = 1) \cap \bigcap_{j;a_j=0} (X_j = 0) \right) = \dfrac{1}{2^n}$.

   Ainsi Y_n suit la loi uniforme sur D_n.

   (b) Pour tout $x = \dfrac{k}{2^n} \in D_n$, on a : $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} P(Y_n = \frac{j}{2^n}) = \frac{k+1}{2^n} = x + \frac{1}{2^n}$.

   Donc, pour tout $x \in D_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = x$.

   Soit $x \in [0, 1[\setminus D_n$. En utilisant la partie entière de $2^n x$, il existe $k \in [\![0, 2^{n-1}]\!]$ tel que $\dfrac{k}{2^n} < x < \dfrac{k+1}{2^n}$.
   Par croissance de la fonction de répartition, on obtient :

$$x + \frac{1}{2^n} \leqslant F_n(x) \leqslant x + \frac{3}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = x$$

   Le raisonnement pour $x = 1$ est identique.
   Ainsi la la suite (Y_n) convergee en loi vers le loi uniforme sur $[0, 1]$.

4. On a $E(t^{Y_n}) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}} t^{k/2^n}$. Donc $\displaystyle\int_0^1 E(t^{Y_n}) dt = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\frac{k}{2^n} + 1}$.

   Comme sous-suite d'une somme de Riemann, $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 E(t^{Y_n}) dt = \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \ln 2$.

   Par ailleurs, en posant $g_n(t) = E(t^{Y_n})$, par le théorème de transfert, $\lim\limits_{n \to +\infty} E(t^{Y_n}) = \lim\limits_{n \to +\infty} E(f(Y_n)) = \displaystyle\int_0^1 t^x dx = \frac{t-1}{\ln t}$.
   Cette dernière fonction est continue sur $[0, 1[$ et admet un prolongement par continuité en $t = 1$ (on utilise les équivalents).
   De plus, comme $Y_n \geqslant 0$, $t^{Y_n} = \mathrm{e}^{Y_n \ln(t)} \leqslant 1$ sur $[0, 1]$. Par croissance de l'espérance, $0 \leqslant E(t^{Y_n}) \leqslant 1$.
   Ainsi, par le résultat admis : $\ln 2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 E(t^{Y_n}) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

Exercice 3.12

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Le temps d'attente d'un patient chez le dentiste suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$, où le réel $\theta > 0$ est un paramètre inconnu propre à chaque dentiste. Un nouveau dentiste s'installe dans votre voisinage. Vous voulez estimer son paramètre θ. A cette fin, vous interrogez ses patients sur leur temps d'attente. On modélise les temps d'attentes des patients par une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta > 0$.

1. (a) On définit la variable aléatoire Y_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2X_k.$$

Montrer que Y_n est un estimateur sans biais et convergent de θ.

   (b) Calculer le risque quadratique $r_\theta(Y_n)$ pour $n \geqslant 1$.

   (c) Étudier la convergence en loi de la suite $\big(\sqrt{n}(Y_n - \theta)\big)_{n\geqslant 1}$.

   (d) En déduire un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$.

2. (a) Soit $Z_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ pour $n \geqslant 1$. Calculer pour $n \geqslant 1$, la fonction de répartition de Z_n.

   (b) Montrer que Z_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ et calculer le risque quadratique $r_\theta(Z_n)$ de Z_n pour $n \geqslant 1$.

   (c) Lequel des estimateurs Z_n ou Y_n a le plus petit risque quadratique pour de grandes valeurs de n ? Que peut-on alors conjecturer sur la vitesse de convergence de ces estimateurs ?

   (d) Étudier la convergence en loi de la suite $\big(-n(Z_n - \theta)\big)_{n\geqslant 1}$.

Solution de l'exercice 3.12

1. (a) On a $Y_n = \varphi(X_1, \dots, X_n)$ avec $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} 2x_k/n$, donc Y_n est un estimateur de θ. Une densité g de la loi uniforme est donnée par $g(x) = 0$ on $\mathbb{R}\backslash]0, \theta[$ et $g(x) = 1/\theta$ sur $[0, \theta]$. On a alors $E(X_1) = \theta/2$ et $E(Y_n) = \theta$. Ainsi, Y_n est sans biais. La suite $(2X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes (par le lemme des coalitions) admettant la même espérance $E(2X_1) = \theta$ et la même variance $V(2X_1) = 4V(X_1) = \theta^2/3$. Par la loi faible des grands nombres, la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $E(2X_1) = \theta$. L'estimateur Y_n est donc convergent.

   (b) La variance $V(Y_n)$ existe. De plus, l'estimateur Y_n est sans biais donc $r_\theta(Y_n) = V(Y_n)$. Par indépendance des variables $2X_k$, on a alors $r_\theta(Y_n) = \theta^2/(3n)$ pour $n \geqslant 1$.

   (c) La suite $(2X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. Par le théorème limite central $\sqrt{n}(Y_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où X suit une loi $\mathcal{N}(0, \theta^2/3)$.

   (d) On pose $t_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$. D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(- t_\alpha \leqslant \sqrt{3n}\, \dfrac{Y_n - \theta}{\theta} \leqslant t_\alpha \Big) = 1 - \alpha$,

   soit encore $\lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(\dfrac{\sqrt{3n}}{\sqrt{3n} + t_\alpha} Y_n \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\sqrt{3n}}{\sqrt{3n} - t_\alpha} Y_n \Big) = 1 - \alpha$.

2. (a) On a $F_{Z_n}(t) = P(Z_n \leqslant t) = P\big(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant t) \big)$, pour $t \in \mathbb{R}$. Comme les X_k sont indépendantes et de même loi, on a $F_{Z_n}(x) = \big(P(X_1 \leqslant t)\big)^n$. Il vient : $F_{Z_n}(t) = 0$ si $t < 0$, $F_{Z_n}(t) = (t/\theta)^n$ si $t \in [0, \theta]$ et $F_{Z_n}(t) = 1$ si $t > \theta$.

   (b) Pour $n \geqslant 1$, une densité de Z_n est donnée par $f_{Z_n}(t) = \dfrac{n}{\theta}\Big(\dfrac{t}{\theta}\Big)^{n-1}$ pour $0 \leqslant t \leqslant \theta$ et 0 ailleurs.

   On en déduit aisément $E(Z_n) = \dfrac{n}{n+1}\theta$, $V(Z_n) = \dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2$ et

   $r_\theta(Z_n) = \big(E(Z_n) - \theta\big)^2 + V(Z_n) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Z_n) = \theta$, donc, l'estimateur Z_n est asymptotiquement sans biais.

   (c) On a $r_\theta(Z_n)/r_\theta(Y_n) = 6n/[(n+1)(n+2)] \leqslant 6/n$, ainsi pour $n > 6$, $r_\theta(Z_n) < r_\theta(Y_n)$. Comme le risque quadratique estime la vitesse de convergence de l'estimateur, on peut conjecturer que Z_n converge plus vite que Y_n vers θ.

   (d) Soit $W_n = -n(Z_n - \theta)$ pour $n \geqslant 1$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $F_{W_n}(t) = P(-n(Z_n - \theta) \leqslant t)$,
   et donc $F_{W_n}(t) = P(Z_n \geqslant \theta - t/n) = 1 - P(Z_n < \theta - t/n) = 1 - P(Z_n \leqslant \theta - t/n)$ (car Z_n est à densité).
   On a donc si $t \leqslant 0$: $F_{W_n}(t) = 1 - 1 = 0 \to 0$ (car $\theta - t/n \geqslant \theta$).
   Pour $t > 0$, on a pour n suffisamment grand, $\theta - t/n > 0$ et

   $$F_{W_n}(t) = 1 - (\theta - t/n)^n/\theta^n = 1 - (1 - t/(n\theta))^n = 1 - e^{n \ln(1 - t/(n\theta))} = 1 - e^{-t/\theta + o(1)} \to 1 - e^{-t/\theta}$$

   Ainsi, $(W_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la loi exponentielle de paramètre $1/\theta$.

EXERCICE 3.13

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que, pour tout réel $t \in [-1,1]$, la série $\sum_{n \geqslant 0} P(X=n)t^n$ converge. On note alors G_X la fonction définie sur $[-1,1]$ par :
$$\forall t \in [-1,1], G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n.$$
Déterminer une expression de G_X lorsque X suit la loi de Poisson de paramètre λ, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
On admet que la fonction G_X caractérise la loi de X, c'est-à-dire que si deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifient $G_X = G_Y$, alors X et Y ont la même loi.

2. Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que si A et B sont des événements, alors : $|P(A) - P(B)| \leqslant P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$.
   (b) En déduire que, pour tout $t \in [-1,1]$, on a : $|G_X(t) - G_Y(t)| \leqslant 2P(X \neq Y)$.

3. Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que la série $\sum_{i \geqslant 1} P(U_i \neq 0)$ converge.
On admet sans démonstration que pour toute suite d'événements $(A_i)_{i \geqslant 1}$ et pour tout les entiers n et N tels que $N \geqslant n$, on a :
$$P\left(\bigcup_{i=n}^{N} A_i\right) \leqslant \sum_{i=n}^{N} P(A_i).$$
   (a) En déduire que le nombre de variables aléatoires U_i prenant une valeur non nulle est presque sûrement fini.
   Ainsi, il existe un événement A tel que $P(A) = 1$ et pour tout $\omega \in A$, la série $\sum_{i \geqslant 1} U_i(\omega)$ est convergente. On admet qu'il existe alors une variable aléatoire S à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que :
$$\forall \omega \in A, \ S(\omega) = \sum_{i=1}^{+\infty} U_i(\omega).$$
   On note aussi $S = \sum_{i=1}^{+\infty} U_i$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$.
   (b) Montrer que, pour tout $t \in [-1,1]$, on a : $\lim_{n \to +\infty} G_{S_n}(t) = G_S(t)$.

4. Soit $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} \lambda_i$ une série convergente à termes strictement positifs. On note $\lambda = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i$.
Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre λ_i.
   (a) Montrer que la série $\sum_{i \geqslant 0} P(X_i \neq 0)$ converge.
   D'après la question 3.a), on en déduit que l'on peut définir la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{+\infty} X_i$.
   (b) Montrer que X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Solution de l'exercice 3.13

1. Par théorème de comparaison car $|P(X=n)t^n| \leqslant P(X=n)$, comme la série $\sum\limits_n P(X=n)$ converge, la série $\sum\limits_n P(X=n)t^n$ converge absolument.

   Si X suit la loi de Poisson, on trouve : $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}t^n = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{(t-1)\lambda}$.

2. (a) La formule des probabilités totales donne :
$$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap \bar{B}) \quad \text{et} \quad P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap \bar{A}),$$
donc par différence : $P(A) - P(B) = P(A\cap\bar{B}) - P(B\cap\bar{A}) \leqslant P(A\cap\bar{B}) + P(B\cap\bar{A})$.
En échangeant A et B, on a de même : $P(B) - P(A) \leqslant P(A\cap\bar{B}) + P(B\cap\bar{A})$. D'où le résultat.

   (b) Par inégalité triangulaire et comme $|t| \leqslant 1$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{N} P(X=n)t^n - \sum_{n=0}^{N} P(Y=n)t^n\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{N} |P(X=n) - P(Y=n)|\,|t|^n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N} P((X=n)\cap(Y\neq n)) + P((Y=n)\cap(X\neq n)) \quad \text{cf. 2.a)}\end{aligned}$$
D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X=n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :
$$P(X\neq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((X=n)\cap(X\neq Y)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((X=n)\cap(Y\neq n)).$$
Et $P(X\neq Y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P((Y=n)\cap(X\neq n))$, d'où le résultat avec $N\to+\infty$ dans la majoration.

3. (a) L'événement A « le nombre de variables U_i qui prennent une valeur non nulle est fini », vaut $A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\bigcap\limits_{i=n}^{+\infty}(U_i = 0)$. En prenant $A_i = (U_i \neq 0)$, l'inégalité admise donne : $P\left(\bigcup\limits_{i=n}^{N}(U_i\neq 0)\right) \leqslant \sum\limits_{i=n}^{N} P(U_i\neq 0)$. Quand $N\to+\infty$, par continuité croissante, on en déduit : $P\left(\bigcup\limits_{i=n}^{+\infty}(U_i\neq 0)\right) \leqslant \sum\limits_{i=n}^{+\infty} P(U_i\neq 0)$.
Le membre de droite est le reste d'une série convergente, donc tend vers 0 quand $n\to+\infty$.
Par encadrement, on en déduit bien que $P(\bar{A}) = 0$.

   (b) Pour tout $t\in[-1,1]$, on a : $|G_S(t) - G_{S_n}(t)| \leqslant 2P(S_n\neq S)$.
D'où le résultat voulu par encadrement car les U_i sont à valeurs positives. Donc, on a :
$$(S_n = S) = \bigcap_{i=n+1}^{+\infty}(U_i = 0) \text{ d'où } P(S_n\neq S) = P\left(\bigcup_{i=n+1}^{+\infty}(U_i\neq 0)\right) \leqslant \sum_{i=n+1}^{+\infty} P(U_i\neq 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. (a) Par théorème de comparaison car la série $\sum \lambda_i$ converge et que :
$$P(X_i\neq 0) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_i} \underset{i\to+\infty}{\sim} \lambda_i \quad \text{car } \lambda_i \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (la série } \textstyle\sum \lambda_i \text{ converge).}$$

   (b) Par stabilité de la loi de Poisson, S_n suit la loi $\mathcal{P}(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$, donc $G_{S_n}(t) = \mathrm{e}^{(t-1)(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}$, donc $G_{S_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{(t-1)\lambda}$, soit $G_S(t) = \mathrm{e}^{(t-1)\lambda}$.
Comme G_S caractérise la loi de S, on en déduit que S suit loi la de Poisson de paramètre λ .

EXERCICE 3.14

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(\ln x)^2} & \text{si } x \geqslant \mathrm{e} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est une densité de probabilité.
   Soit X une variable aléatoire de densité f.

   (b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

   (c) Montrer que la variable aléatoire X n'admet aucun moment.

On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X.

2. Pour tout entier $n \geqslant 3$ et pour tout $\omega \in \Omega$, on note $Y_n(\omega)$ le « deuxième plus petit » des nombres $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$, c'est-à-dire le deuxième lorsqu'ils sont classés par ordre croissant (au sens large).
   On admet que l'on définit ainsi une variable aléatoire Y_n pour tout $n \geqslant 3$.

   (a) Exprimer la fonction de répartition G_n de Y_n.

   (b) En déduire que Y_n est une variable à densité et montrer qu'une densité de Y_n est la fonction g_n donnée par :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)}{x(\ln x)^n}\left(1 - \dfrac{1}{\ln x}\right) & \text{si } x \geqslant \mathrm{e} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

   (c) Montrer que la variable aléatoire $Z_n = \ln(Y_n)$ admet une espérance et calculer sa valeur.

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire :

$$T_n = \big(\max(X_1, \dots, X_n)\big)^{\frac{1}{n}}.$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition H_n de T_n.

   (b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi.

Solution de l'exercice 3.14

1. (a) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{\mathrm{e}\}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{\ln x}\Big]_{\mathrm{e}}^{+\infty} = 1$.

   (b) Le calcul donne : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \mathrm{e} \\ 1 - \dfrac{1}{\ln x} & \text{si } x \geqslant \mathrm{e}. \end{cases}$

   (c) Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, par croissances comparées, on a : $x \times x^r f(x) = \dfrac{x^r}{(\ln x)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   Donc $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^r f(x)\right)$ et tout est positif ; donc par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge (en $+\infty$). Donc, par théorème de transfert, X^r n'a pas d'espérance, donc X n'admet aucun moment.

2. (a) Il est clair que Y_n est à valeurs dans $[\mathrm{e}, +\infty[$, donc $G_n(x) = 0$ si $x < \mathrm{e}$.
   Pour tout $x \geqslant \mathrm{e}$, soit U_x la variable aléatoire qui compte le nombre de variables X_i qui prennent une valeur inférieure ou égal à x. Alors U_x suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ avec $p = P(X \leqslant x) = F(x)$. Donc :

$$\begin{aligned} G_n(x) &= 1 - P(Y_n > x) = 1 - P(U_x \leqslant 1) = 1 - P(U_x = 0) - P(U_n = 1) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{\ln x}\right)^n - n\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{n-1} = 1 - \frac{n}{(\ln x)^{n-1}} + \frac{n-1}{(\ln x)^n}. \end{aligned}$$

   (b) La fonction G_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{\mathrm{e}\}$ et le raccordement est continu en e, donc Y_n est une variable à densité. D'où une densité par dérivation (et valeur arbitraire en $x = \mathrm{e}$), donnée par $g_n(x) = 0$ si $x < \mathrm{e}$ et :

$$\forall x \geqslant \mathrm{e},\ g_n(x) = \frac{n(n-1)}{x(\ln x)^n} - \frac{(n-1)n}{x(\ln x)^{n+1}} = \frac{n(n-1)}{x(\ln x)^n}\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right).$$

   (c) La densité g_n de Y_n est nulle en dehors de $[\mathrm{e}, +\infty[$ et la fonction ln est continue sur cet intervalle. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire Z_n admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} (\ln x) g_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, ce qui est le cas car :

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} (\ln x) g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{n}{n-2}\, g_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n-2}.\ \text{ Donc : } E(Z_n) = \frac{n}{n-2}.$$

3. (a) Pour tout $x < \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, on a $H_n(x) = 0$ et pour $x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, par indépendance des X_k, on a :

$$H_n(x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant x^n)\right) = F(x^n)^n = \left(1 - \frac{1}{\ln(x^n)}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n\ln x}\right)^n.$$

   (b) Si $x \leqslant 1$, alors $x < \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$ pour tout n, donc $H_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(x) = 0$.
   Si $x > 1$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = 1$, alors pour n assez grand, on a $x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$. Alors , quand $n \to +\infty$:

$$H_n(x) = \exp\big(n\ln(1 - 1/\ln x)\big) = \exp\big(n(-1/n\ln x + \mathrm{o}(1/n)\big) = \exp\big(-1/\ln x\big) \times \mathrm{e}^{\mathrm{o}(1)}.$$

   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(x) = \exp\big(-1/\ln x\big)$, qui se dérive en $x \mapsto 1/x(\ln x)^2\exp(-1/\ln x)$.

   Or, $h(x) = \begin{cases} 1/x(\ln x)^2\exp(-1/\ln x) & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$ est une densité. Elle est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\exp\big(-1/\ln x\big)\Big]_1^{+\infty} = 1$.
   Donc la suite (T_n) converge en loi vers une variable aléatoire T à densité dont une densité est h.

Exercice 3.15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\sin(2\pi \ln(x))}{x\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\ln^2(x)/2}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel k, on a :

$$\int_0^{+\infty} x^k f(x) dx = 0.$$

   On pourra effectuer un changement de variable $u = \ln x - k$ en le justifiant.
2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $X = \mathrm{e}^Y$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\ln^2(x)/2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Soit a un réel tel que $|a| \leqslant 1$. On considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_a(x) = \begin{cases} (1 + a\sin(2\pi \ln(x))) \times g(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que f_a est une densité.
4. Soit Y_a une variable aléatoire à densité de densité f_a. Montrer que pour tout entier naturel k, on a :

$$E(Y_a^k) = E(X^k).$$

   En déduire qu'il existe une infinité de lois distinctes qui ont les mêmes moments de tout ordre.

Solution de l'exercice 3.15

1. L'application qui à x associe $x^k f(x)$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$. On applique le changement de variable $x \mapsto \ln x - k$ qui est une fonction strictement croissante et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. On obtient que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\, f(x)dx$ est de même nature que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{k(u+k)}\, \frac{\sin(2\pi(u+k))}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(u+k)^2/2} du$$
soit
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi u))}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(u^2-k^2)/2} du$$
Or en $+\infty$, la fonction sous l'intégrale est en valeur absolue négligeable devant $1/u^2$ d'où l'absolue convergence donc la convergence de l'intégrale en $+\infty$. De plus, la fonction $u \mapsto \dfrac{\sin(2\pi u))}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(u^2-k^2)/2}$ est impaire ; on en conclut que l'intégrale est convergente et vaut 0, d'où le résultat.
2. On a $X(\Omega) = \mathbb{R}_*^+$. On détermine la fonction de répartition de X. Pour $x > 0$, on a :
$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(Y \leqslant \ln x) = \Phi(\ln x)$$
où Φ est la fonction de répartition de Y. Par conséquent,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} \Phi(\ln x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On en déduit que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc X est une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction g.
3. La fonction f_a est positive sur $\mathbb{R}$. En effet pour x négatif, la fonction est nulle et si x est positif, le sinus étant en valeur absolue inférieur à 1 et puisque $|a| \leqslant 1$, on a $1 + a\sin(2\pi \ln(x)) \geqslant 0$. Comme la fonction g, en tant que densité, est positive, il en résulte que f_a est positive. De plus, f_a est continue sur $\mathbb{R}^*$. Enfin $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)dx$ revient à $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)dx$, soit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(g(x) + af(x)\big)dx$. Or, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ sont convergentes ; par linéarité on obtient :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)dx = \int_0^{+\infty} g(x)dx + a\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1.$$
Par conséquent, f_a est une densité.
4. $E(Y_a^k)$ existe si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_a(x)dx$ existe. En utilisant la linéarité des intégrales convergentes, on obtient :
$$E(Y_a^k) = \int_0^{+\infty} x^k g(x)dx + a\int_0^{+\infty} x^k f(x)dx = E(X^k).$$
Par conséquent, X et Y_a ont les mêmes moments et pourtant n'ont pas la même loi.

Exercice 3.16

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante de limite 0. Soit la suite (S_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

1. Montrer que les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont adjacentes de limite S et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S - S_n| \leqslant u_{n+1}$ et en déduire la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n$.

   Quelle est sa somme ?

   Les membres d'un groupe de n personnes (avec $n \geqslant 2$) veulent se faire des cadeaux mutuels. Pour cela, chacun achète un cadeau, et le met dans un paquet, les paquets étant indiscernables. Les cadeaux sont mis dans un pot commun, puis chacune des n personnes choisit au hasard un cadeau dans le pot commun. On note a_n le nombre de façons possibles d'attribuer les n cadeaux sans que personne ne reçoive son propre cadeau.
3. Calculer a_2 et a_3.
4. On admet provisoirement la relation : pour tout $n \geqslant 4$, $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a :

   $$a_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

   (b) Calculer la probabilité p_n qu'une répartition aléatoire des n cadeaux donne une répartition où chaque personne reçoit bien le cadeau d'une autre personne.

   (c) A quelle condition sur n peut-on dire que $\frac{1}{\mathrm{e}}$ est une approximation de p_n à 10^{-3} près ?
5. Établir la relation admise dans la question précédente, c'est-à-dire :

$$\forall\, n \geqslant 4,\ a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$$

Solution de l'exercice 3.16

1. La décroissance de la suite (u_n) entraîne :
   - $S_{2n+1} - S_{2n-1} = -u_{2n+1} + u_{2n} \geqslant 0$ donc $(S_{2n-1}))$ est croissante.
   - $S_{2n} - S_{2n-2} = u_{2n} - u_{2n+1} \leqslant 0$ donc (S_{2n}) est décroissante.
   - $|S_{2n} - S_{2n-1}| = u_{2n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

   Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes ; elles convergent vers la même limite S et on a :
   $$S_{2n-1} \leqslant S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$
2. On en déduit :
   - $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \Rightarrow S_{2n+1} - S_{2n} \leqslant S - S_{2n} \leqslant 0 \Rightarrow |S_{2n} - S| \leqslant u_{2n+1}$.
   - $S_{2n-1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \Rightarrow 0 \leqslant S - S_{2n-1} \leqslant S_{2n} - S_{2n-1} \Rightarrow |S_{2n-1} - S| \leqslant u_{2n}$.

   donc pour tout $n \in \mathbb{N},\ |S - S_n| \leqslant u_{n+1}$
3. On a : $a_2 = 1$ $((x, y) \to (y, x))$ et $a_3 = 2$ $((x, y, z) \to (y, z, x)$ ou $(z, x, y))$.
4. (a) Par récurrence double sur $n \geqslant 2$, on montre $a_n = n!S_n$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   - pour $n = 2$, on bien $a_2 = 1 = 2!(1 - 1 + \frac{1}{2}) = 2!S_2$.
   - pour $n = 3$, on bien $a_3 = 2 = 3!S_3 = 2$.
   - On suppose : $a_{n-1} = (n-1)!S_{n-1}$ et $a_{n-2} = (n-2)!S_{n-2}$. Alors :
   $$\begin{aligned} a_n &= (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) = (n-1)[(n-1)!S_{n-1} + (n-2)!S_{n-2}] \\ &= (n-1)(n-1)![\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + S_{n-2}] + (n-1)!S_{n-2} \\ &= (n-1)(-1)^{n-1} + n!S_{n-2} \\ &= (n-1)(-1)^{n-1} + n![S_n - \frac{(-1)^n}{n!} - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}] \\ &= (n-1)(-1)^{n-1} + n!S_n - (n-1)(-1)^{n-1} \\ &= n!S_n \end{aligned}$$

   (b) Il y a $n!$ répartitions de n personnes (permutations) parmi lesquelles a_n sont des répartitions où chaque personne reçoit bien le cadeau d'une autre personne, soit $p_n = \dfrac{a_n}{n!}$.

   (c) On reconnaît en $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ la somme de la série exponentielle qui vaut $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. On peut appliquer les résultats de la question 2 à la suite $(u_n) = \left(\dfrac{1}{n!}\right)$. On a $p_n = S_n$ et on obtient : $\left|\dfrac{1}{\mathrm{e}} - p_n\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$.
   Donc, pour que $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ approche p_n à 10^{-3} près il suffit de prendre $n \geqslant 6$ (car $6! = 720 < 10^3 < 7!$).
5. Le problème proposé possède plusieurs formes équivalentes. Ils se modélisent tous de la façon suivante : déterminer le nombre a_n de permutations sans point fixe dans l'ensemble des permutations sur $[\![1, n]\!]$.
   Soit $n \geqslant 2$ et σ une permutation sans points fixe de $[\![1, n]\!]$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $j = \sigma(i)$.
   On distingue deux cas :
   - $\sigma(j) = i$. Les $(n-2)$ autres éléments de la permutations réalisent une permutation sans point fixe de $[\![1, n-2]\!]$. Il y en a a_{n-2}.
   - sinon $\sigma(j) = k \neq i$. Si on retire j, tout se passe comme si j était absent et que $\sigma(i) = k$. Il y a alors a_{n-1} permutations sans point fixe.

   Dans les deux cas, il y a $n-1$ choix de j on a donc $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$.

Exercice 3.17

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in]0,1[$ tel que $p \neq \dfrac{1}{2}$; on pose $q = 1-p$. Soit $(X_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de $n+1$ variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $Y_k = f(|X_k - X_{k+1}|)$.
   Déterminer la loi de Y_k. Donner son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que la covariance de Y_k et Y_{k+1} est donnée par : $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = pq(1-4pq)$.
3. Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Étudier l'indépendance de Y_i et Y_j.
4. Exprimer en fonction de $a = 2pq(1-2pq)$ et $b = pq(1-4pq)$ la matrice de covariance C définie par :
$$C = \left(\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}.$$
5. Pour $n = 2$, diagonaliser la matrice C.

Solution de l'exercice 3.17

1. La variable $Y_k = f(|X_k - X_{k+1}|)$ prend les valeurs $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(Y_k = 1) = 2pq$. Et, par incompatibilité puis indépendance :
$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}((X_k = 0) \cap (X_{k+1} = 1)) \cup ((X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 0)) = 2pq.$$
Ainsi, $\mathbb{E}(Y_k) = 2pq$ et $V(Y_k) = 2pq(1 - 2pq)$.
2. Par Koenig-Huyghens, on a : $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = \mathbb{E}(Y_k Y_{k+1}) - \mathbb{E}(Y_k)\mathbb{E}(Y_{k+1})$.
Or, $T_k = Y_k Y_{k+1}$ prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$, donc :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_k) &= \mathbb{P}(T_k = 1) = \mathbb{P}((Y_k = 1) \cap (Y_{k+1} = 1))\\ &= \mathbb{P}\Big(\big((X_k = 0) \cap (X_{k+1} = 1) \cap (X_{k+2} = 0)\big) \cup \big((X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 0) \cap (X_{k+2} = 1)\big)\Big)\\ &= p^2q + q^2p = pq.\end{aligned}$$
Ainsi, $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = pq(1 - 4pq)$.
3.
   - Si $|j - i| \geqslant 2$, le lemme des coalitions donne l'indépendance de Y_i et Y_j.
   - Sinon, par symétrie de la covariance, on peut supposer que $j > i$ et alors $j = i + 1$.
   Dans ce cas, d'après la question précédente, il n'y a pas indépendance car
   $$\operatorname{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = pq(1 - 4pq) \neq 0 \text{ car } p, q \neq 0 \text{ et } pq \neq \frac{1}{4}.$$
   En effet, par l'étude de la fonction $p \mapsto p(1 - p)$, on a : $p(1 - p) = \dfrac{1}{4} \iff p = \dfrac{1}{2}$.
4. On a $V(Y_k) = 2pq(1 - 2pq) = a$ et $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = pq(1 - 4pq) = b$. Donc, la matrice C est une matrice tridiagonale à $n + 1$ lignes et $n + 1$ colonnes, avec des a sur sa diagonale principale, des b juste au-dessus et juste au-dessous, et des 0 partout ailleurs.
5. Pour $n = 2$, on a : $C = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$.
Ainsi, C est diagonalisable en base orthonormée, car elle est symétrique réelle.
Comme $b \neq 0$, les valeurs propres de C sont les réels λ tels que le système suivant admette d'autres solutions que la solution nulle :
$$\begin{cases} (a - \lambda)x + by & = 0 \\ bx + (a - \lambda)y + bz & = 0 \\ by + (a - \lambda)z & = 0 \end{cases}$$
Donc soit $\lambda = a$ et $y = 0$ et $x + z = 0$, soit $\lambda \neq a$ et $z = x = -\dfrac{by}{a - \lambda}$ avec :
$$-2\frac{b^2}{a - \lambda} + (a - \lambda) = 0 \iff (a - \lambda)^2 = 2b^2 \iff \lambda = a \pm b\sqrt{2} \neq a.$$
Comme $b \neq 0$, on a donc $\operatorname{Sp}(C) = \{a - b\sqrt{2}, a, a + b\sqrt{2}\}$.
et : $E_a = \operatorname{Vect}(1, 0, -1)$, $E_{a-b\sqrt{2}} = \operatorname{Vect}(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, $E_{a+b\sqrt{2}} = \operatorname{Vect}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$.
D'où une base orthonormée : $w_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $w_2 = (-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2})$, $w_3 = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2})$
(les vecteurs de base initiaux étaient déjà deux à deux orthogonaux car les sous-espaces propres le sont ; et cela reste valable si $b = 0$).

EXERCICE 3.18

Soit une suite réelle (u_n) vérifiant $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0,1]$. On définit alors la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \prod_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Montrer que la suite (v_n) est décroissante, positive et convergente.
   Donner un encadrement de sa limite ℓ.
2. Montrer que s'il existe $k \in]0,1[$, tel qu'à partir d'un certain rang, on ait : $u_n \leqslant k$, alors $\ell = 0$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que Y_0 est la variable certaine égale à 1 et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable Y_n suit une loi de BERNOULLI dont le paramètre est noté r_n (avec $r_n \in]0,1[$). On pose également $r_0 = 1$. On suppose encore que :

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}_{(Y_n=0)}\left(Y_{n+1} = 1\right) = 0.$$

On pose alors $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \mathbb{P}_{(Y_{n-1}=1)}\left(Y_n = 1\right).$$

3. Pour tout entier naturel n, exprimer r_n en fonction de v_n.
4. Dans cette question seulement on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{1}{n}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_k$.

   Calculer la limite de la suite $(E(S_n))_n$.
5. Pour tout entier naturel $n_0 \geqslant 1$, à quelle condition nécessaire et suffisante sur la suite (u_n), les variables aléatoires Y_{n_0} et Y_{n_0-1} sont-elles indépendantes ?
6. Soit l'événement $A = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Y_n = 1)$. Exprimer $\mathbb{P}(A)$ en fonction de ℓ.

Solution de l'exercice 3.18

1. Comme $u_n \in [0,1]$, on obtient $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 1$ (par récurrence évidente).
Ainsi, la suite (v_n) est décroissante et positive, donc converge d'après le théorème de la limite monotone.
De plus, en passant à la limite dans l'inégalité $0 \leqslant v_n \leqslant 1$, on a $\ell \in [0,1]$.
2. Si $0 \leqslant u_n \leqslant k$ avec $k \in]0,1[$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors par récurrence évidente, on a :
$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant v_n \leqslant k^{n-n_0} v_{n_0}.$$
Donc, par théorème d'encadrement, la suite (v_n) converge vers 0.
3. Montrons récurrence sur $n \geqslant 0$ la relation $r_n = v_n$.
   - On a $r_0 = 1 = u_0$ dans l'énoncé.
   - Soit n tel que $r_n = v_n$. Alors, par la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \mathbb{P}(Y_{n+1}=1) = \mathbb{P}_{[Y_n=1]}(Y_{n+1}=1)\,\mathbb{P}([Y_n=1]) + \mathbb{P}_{[Y_n=0]}(Y_{n+1}=1)\,\mathbb{P}(Y_n=0) \\ &= u_{n+1}v_n + 0 = v_{n+1}. \end{aligned}$$
4. Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} E(Y_k) = \sum_{k=0}^{n} v_k$.
Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$, alors $v_n = \dfrac{1}{n!}$ pour $n \geqslant 0$.
Donc $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \to \mathrm{e}$, lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Comme Y_{n_0} et Y_{n_0-1} suivent des lois de Bernoulli, elles sont indépendantes si et seulement si les évènements $(Y_{n_0}=1)$ et $(Y_{n_0-1}=1)$ le sont, soit :
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(Y_{n_0-1}=1)}(Y_{n_0}=1) = \mathbb{P}(Y_{n_0}=1) \\ \iff & u_{n_0} = v_{n_0} \\ \iff & u_{n_0} = v_{n_0-1}u_{n_0} \\ \iff & v_{n_0-1} = 1 \text{ ou } u_{n_0} = 0 \\ \iff & u_0 = \cdots = u_{n_0-1} = 1 \text{ ou } u_{n_0} = 0. \end{aligned}$$
6. Comme A est l'intersection décroissante des événements $B_n = \displaystyle\bigcap_{k=0}^{n} [Y_k = 1]$ alors, d'après le théorème de continuité décroissante, on a : $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.
Or l'hypothèse $\mathbb{P}_{(Y_k=0)}(Y_{k+1}=1) = 0$ signifie que $P((Y_k=0)\cap(Y_{k+1}=1)) = 0$,
soit $(Y_{k+1}=1) \subset \overline{(Y_k=0)} = (Y_k=1)$ presque sûrement. Ainsi $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(Y_n=1)$.
Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(B_n) = v_n$ et donc $\mathbb{P}(A) = \ell$

Exercice 3.19

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.
Au départ, (instant $t = 0$), le mobile se trouve sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant $t = n$ (avec $n \geqslant 1$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisses $0, 1, \ldots, n$.
Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).

On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que (X_n) est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la loi de X_n ainsi que son espérance et sa variance.
2. On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $[Y = n]$ à l'aide des variables aléatoires (X_i).
   (b) En déduire la loi de Y.
   (c) Vérifier que l'on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1$.
   (d) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?
3. On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Déterminer pour tout couple (i, j) d'entiers, la probabilité $P_{[Y=i]}(Z = j)$.
   (b) Écrire, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, la probabilité $P(Z = j)$ comme une somme finie.
   (c) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance ?

Solution de l'exercice 3.19

1. D'après l'énoncé, X_n suit la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n\}$. On sait que $E(X_n) = \dfrac{n}{2}$ et $V(X_n) = \dfrac{n(n+2)}{12}$.
2. (a) Le mobile revient au point d'abscisse 0 pour la première fois à l'instant n si, et seulement si, il ne s'y trouve pas pendant les $n-1$ premiers déplacements puis s'il se déplace sur l'origine lors de son n-ième déplacement. On a donc $[Y = n] = [X_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [X_{n-1} \neq 0] \cap [X_n = 0]$.

   (b) L'énoncé indique que les variables (X_i) sont mutuellement indépendantes (c'est normal puisque la position du mobile à un instant quelconque ne dépend pas de sa position aux instants précédents). On a donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$P(Y = n) = \prod_{i=1}^{n-1} P(X_i \neq 0) P(X_n = 0) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

   (c) On écrit $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ et en passant aux sommes partielles, on montre le résultat demandé.

   (d) Comme $nP(Y = n) \sim \dfrac{1}{n}$, la variable aléatoire Y n'a pas d'espérance.
3. (a) Le deuxième retour à l'origine a lieu strictement après le premier, donc $P_{[Y=i]}(Z = j) = 0$ si $j \leqslant i$.
   - On a $P_{[Y=i]}(Z = i+1) = P(X_{i+1} = 0) = \dfrac{1}{i+2}$.
   - pour $i \leqslant j - 2$,

$$P_{[Y=i]}(Z = j) = \frac{P((X_{i+1} \neq 0) \cap \ldots \cap (X_{j-1} \neq 0) \cap (X_j = 0) \cap (Y = i))}{P(Y = i)}$$

   et, par indépendance des variables aléatoires en jeu :

$$P_{[Y=i]}(Z = j) = \prod_{k=i+1}^{j-1} P(X_k \neq 0) \times P(X_j = 0) = \frac{i+1}{j(j+1)}$$

   Ce dernier résultat reste valable pour $P_{[Y=i]}(Z = i+1)$.

   (b) Il faut au moins deux déplacements pour se trouver pour la deuxième fois à l'origine, donc $Z(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.
   Pour tout entier naturel $j \geqslant 2$, la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(Y = i)_{i \geqslant 1}$ s'écrit :

$$P(Z = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P_{[Y=i]}(Z = j) P(Y = i) = \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i}$$

   (c) Comme Y n'a pas d'espérance, Z ne possède pas d'espérance car $0 < Y < Z$.

Exercice 3.20

On note E l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2$ converge.

Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on pose : $u = (u_n)$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel.
2. (a) Soit $((a_n)_{n\geqslant 0}, (b_n)_{n\geqslant 0})$ deux suites de E. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ est absolument convergente.

   (b) Soit φ l'application qui à tout couple de suites $((a_n), (b_n))$ de E^2, associe le réel $\varphi(a, b) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$.

   Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

   Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire X définie sur cet espace vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si :
   - $X(\Omega) = \mathbb{N}$ avec, pour tout $k \in \mathbb{N}, u_k = P(X = k) > 0$;
   - X admet un moment d'ordre 2 ;
   - la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(u_k - u_{k-1})^2}{u_k}$ converge, avec $u_{-1} = 0$ et on note $I(X)$ la somme de cette série.
3. Montrer que si X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors X vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
   Calculer $I(X)$ et comparer $I(X)V(X)$ et 1, où $V(X)$ désigne la variance de X.
4. Soit X une variable aléatoire vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.

   (a) Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} (u_k - u_{k-1})(k - E(X))$ converge et calculer sa somme.

   (b) Montrer que $1 \leq I(X)V(X)$.

Solution de l'exercice 3.20

1. L'ensemble E contient la suite nulle et si a et b sont deux suites de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, (a_n+\lambda b_n)^2 = a_n^2 + 2\lambda a_n b_n + \lambda^2 b_n^2$ et $(|a_n| - |b_n|)^2 \geq 0$ donne $|a_n b_n| \leqslant \dfrac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$.
   Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $a_n b_n$ est absolument convergente. Par suite, $a + \lambda b$ est bien dans E, de même que la suite nulle.
2. (a) On vient de démontrer ce résultat à la question précédente.
   (b) Ainsi, φ est bien définie. Elle est symétrique, bilinéaire et définie positive. Vérification immédiate.
3. Si X suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. Les deux premières propriétés sont vérifiées et $E(X) = V(X) = \lambda$. Ensuite pour $k \geqslant 1$, $\dfrac{(u_k - u_{k-1})^2}{u_k} = u_k - 2u_{k-1} + \dfrac{u_{k-1}^2}{u_k}$.
   Et
   $$\frac{u_{k-1}^2}{u_k} = \frac{\lambda^{k-2}\mathrm{e}^{-\lambda}k}{(k-1)!} = \frac{\lambda^{k-2}\mathrm{e}^{-\lambda}(k-1)}{(k-1)!} + \frac{\lambda^{k-2}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-1)!}$$
   Ainsi $\dfrac{u_{k-1}^2}{u_k}$ est la somme de deux séries convergentes. La troisième propriété est donc vérifiée. De plus, $S = I(X) = 1 - 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-1)!} = 1 - 2 + 1 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$.
   Donc, $I(X)V(X) = 1$.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k-1})(k - E(X)) = \sum_{k=0}^{n}(ku_k - (k-1)u_{k-1} - u_{k-1}) - E(X)\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k-1})$$
   Puis, $S_n = nu_n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k - E(X)u_n$. Or, X admet une espérance donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nu_n$ converge.
   Donc, la suite (nu_n) tend vers 0. De même, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et sa somme vaut 1.
   Donc, la suite (u_n) tend vers 0. Ainsi, la suite (S_n) a pour limite -1.
   Par suite, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k - u_{k-1})(k - E(X)) = -1$.
   (b) $V(X) = E((X - E(X))^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(k - E(X))^2$, par le théorème de transfert.
   En posant pour tout $k \in \mathbb{N}, a_k = \dfrac{u_k - u_{k-1}}{\sqrt{u_k}}$ et $b_k = \sqrt{u_k}(k - E(X))$, on sait que (a_n) et (b_n) sont dans E donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
   $$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k^2\right)$$
   ou $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k - u_{k-1})(k - E(X))\right)^2 \leqslant I(X)V(X)$. Donc, $1 \leqslant I(X)V(X)$.