CHAPITRE

3

PROBABILITÉS

Sujet n$^{\text{o}}$ 3

On fixe un entier $n \geqslant 1$. On se donne une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ et une suite de variables aléatoires $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui suivent chacune la loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$. On suppose que les variables aléatoires $X_0, U_0, \ldots, U_m, \ldots$ sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qu'elles sont mutuellement indépendantes.

On définit par récurrence la suite de variables aléatoires $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X_{m+1}(\omega) = \begin{cases} X_m(\omega) - 1 & \text{si } U_m(\omega) < X_m(\omega) \\ X_m(\omega) + 1 & \text{si } U_m(\omega) \geqslant X_m(\omega) \end{cases}$$

1. Pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{(X_m=j)}(X_{m+1} = i)$.

2. On note $Y_m = \begin{pmatrix} P(X_m = 0) \\ \vdots \\ P(X_m = n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\ldots & 0 & \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

   Pour tout $m \in \mathbb{N}$, montrer que : $Y_{m+1} = \dfrac{1}{n} A_n Y_m$.

3. **Dans cette question seulement**, on suppose que X_0 suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Montrer que toutes les variables aléatoires X_m suivent cette même loi. En déduire une valeur propre de A_n.

4. Soit f l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = nXP + (1 - X^2)P'$.

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Déterminer la matrice de f dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$.

   (b) Pour $j \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_j = (1 - X)^{n-j}(1 + X)^j$. Calculer $f(P_j)$.
   En déduire que la matrice A_n est diagonalisable.

   (c) La valeur de Y_0 étant supposée connue, comment pourrait-on faire pour trouver la loi de X_m pour tout m entier naturel non nul (*on expliquera juste la démarche sans faire de calculs*).

5. Dans la suite de l'exercice, on suppose que $n \geqslant 2$ et que la variable X_0 est constante, égale à $a \in [\![0, n]\!]$.

   (a) Trouver une relation entre $\mathbb{E}(X_{m+1})$ et $\mathbb{E}(X_m)$.

   (b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathbb{E}(X_m)$.

Solution du sujet n° 3

1. - Si $|i-j| \neq 1$, il est clair que $\mathbb{P}_{[X_m=j]}(X_{m+1}=i)=0$.
   - Si $j=0$, on a $P_{[X_m=0]}(X_{m+1}=-1)=0$.
     Et comme la somme des probabilités vaut 1, on a $P_{[X_m=0]}(X_{m+1}=1)=1$.

   - Si $j=n$, on a de même $P_{[X_m=n]}(X_{m+1}=n+1)=0$ et $P_{[X_m=n]}(X_{m+1}=n-1)=1$.
   - Si $1 \leqslant j \leqslant n-1$:
     $P_{[X_m=j]}(X_{m+1}=j-1)=P_{[X_m=j]}((X_m=j)\cap(U_m<j))=P(0\leqslant U_m\leqslant j-1)=\dfrac{j}{n}$,
     par indépendance de X_m (fonction de $U_0,\dots,U_{m-1}$) et U_m. Et : $P_{[X_m=j]}(X_{m+1}=j+1)=\dfrac{n-j}{n}$.
2. La f. des probabilités totales donne : $P(X_{m+1}=i)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}P_{[X_m=j]}(X_{m+1}=i)\cdot P(X_m=j)=\frac{1}{n}A_nY_m$
   en posant $A_n=\left(nP_{[X_m=j]}(X_{m+1}=i)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, d'où le résultat d'après la question 1.
3. Par récurrence sur $m\geqslant 0$. Initialisation immédiate. Si c'est vrai pour m, alors :
$$Y_{m+1}=\frac{1}{n}A_n\left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{i}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}=\frac{1}{n2^n}\begin{pmatrix}\binom{n}{1}\\ \vdots\\ (n+1-i)\binom{n}{i-1}+(i+1)\binom{n}{i+1}\\ \vdots\\ \binom{n}{n-1}\end{pmatrix},$$
   d'où le résultat puisque pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$, on a :$(n+1-i)\binom{n}{i-1}+(i+1)\binom{n}{i+1}=n\binom{n}{i}$.
   D'où $n\in\mathrm{Sp}\,(A_n)$.
4. (a) On a $f(1)=nX+(1-X^2)0=nX$.
   Pour $j\in[\![1,n]\!]$, il vient $f(X^j)=nX^{j+1}+(1-X^2)jX^{j-1}=(n-j)X^{j+1}+jX^{j-1}$.
   Cela montre que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de matrice A_n dans la base canonique.

   (b) Chaque polynôme P_j est dans $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $j\in[\![0,n]\!]$:
$$\begin{aligned}f(P_j)&=nX(1-X)^{n-j}(1+X)^j+(1-X^2)[j(1-X)^{n-j}(1+X)^{j-1}-(n-j)(1-X)^{n-j-1}(1+X)^j]\\&=(1-X)^{n-j-1}(1+X)^{j-1}\left[nX(1-X)(1+X)+j(1-X^2)(1-X)-(n-j)(1-X^2)(1+X)\right]\\&=(1-X)^{n-j}(1+X)^j\left[nX+j(1-X)-(n-j)(1+X)\right]\\&=(2j-n)(1-X)^{n-j}(1+X)^j=(2j-n)P_j\end{aligned}$$
   Les polynômes P_j étant non nuls, ce sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $2j-n$. On obtient ainsi $n+1$ valeurs propres de f (et donc de A_n). Il n'y en a pas d'autres puisque $A_n\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et A_n est diagonalisable.

   (c) Calculer $Y_m=\left(\frac{1}{n}\right)^m A_n^mY_0$, où A_n^m se calcule en diagonalisant A_n et où Y_0 est de même loi que X_0.
5. On remarque que la définition de l'espérance s'écrit :
$$\mathbb{E}(X_{m+1})=\begin{pmatrix}0&1&\dots&n\end{pmatrix}Y_{m+1}=\begin{pmatrix}0&1&\dots&n\end{pmatrix}\frac{1}{n}A_nY_m.$$
   Or $\begin{pmatrix}0&1&\dots&n\end{pmatrix}A_n=\begin{pmatrix}n&\cdots&i(i-1)+(n-i)(i+1)&\cdots&n(n-1)\end{pmatrix}=\big(i(n-2)+n\big)_{0\leqslant i\leqslant n}$.
   D'où : $\mathbb{E}(X_{m+1})=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(i(n-2)+n)P(X_m=i)=\frac{n-2}{n}\mathbb{E}(X_m)+1$.
6. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Après calculs, on obtient : $\mathbb{E}(X_m)=\dfrac{n}{2}+\left[a-\dfrac{n}{2}\right]\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^m$.
   D'où $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\mathbb{E}(X_m)=\frac{n}{2}$ puisque, pour $n\geqslant 2$, on a $\dfrac{n-2}{n}\in]-1;1[$.

Sujet n° 5

Soit λ un réel strictement positif. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

L'espérance d'une variable aléatoire X, lorsqu'elle existe, est notée $\mathbb{E}(X)$.

1. Quelle est la loi de λS_n ? En déduire que pour $n \geqslant 1$, une densité $f_{n,\lambda}$ de S_n est donnée par :

$$f_{n,\lambda}(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \exp(-\lambda t) & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ possédant une espérance et **uniformément bornée** c'est-à-dire vérifiant :

$$\exists A > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |Y_n| \leqslant A$$

Montrer que si la suite (Y_n) converge en probabilité vers 0, alors on a : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|Y_n|) = 0$.

Dans la suite de cet exercice, f désigne une fonction à valeurs réelles, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout $x > 0$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-xt) f(t)\, dt$ est convergente. On la note $g(x)$.

On admet que la fonction g ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad g^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (-t)^k \exp(-xt) f(t)\, dt$$

4. Pour tout $x > 0$ fixé, trouver une valeur de λ telle que la suite $\left(f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine qui vaut $f(x)$.

5. En déduire que :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^n}{(n-1)! x^n} g^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right)$$

Solution du sujet n° 5

1. On sait que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \Longrightarrow \lambda X \hookrightarrow \gamma_1$. Le théorème de stabilité pour la loi γ donne : $\lambda S_n \hookrightarrow \gamma_n$.
   À partir d'une densité de la loi γ_n (censée être connue), on obtient aisément le résultat.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, la formule de l'espérance totale avec le système $(|Y_n| > \varepsilon), (|Y_n| \leqslant \varepsilon)$ donne :
   $$\mathbb{E}(|Y_n|) = \mathbb{E}\big(|Y_n|\big||Y_n| > \varepsilon\big)\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) + \mathbb{E}\big(|Y_n|\big||Y_n| \leqslant \varepsilon\big)\mathbb{P}(|Y_n| \leqslant \varepsilon) \leqslant A \times \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) + \varepsilon \times 1.$$
   Or, par définition de la limite, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{A}$.
   Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\mathbb{E}(|Y_n|) \leqslant 2\varepsilon$. Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|Y_n|) = 0$.
3. L'application $t \mapsto \exp(-xt)f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$; en $+\infty$ on utilise un théorème de comparaison :
   $$|\exp(-xt)f(t)| \leqslant A\exp(-xt) \text{ (si } |f| \leqslant A) \quad \text{avec} \int_0^{+\infty} A\exp(-xt)\,\mathrm{d}t \text{ convergente.}$$
4. On choisit $\lambda = \dfrac{1}{x}$. D'après la loi faible des grands nombres, on a : $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{P} E(X_1) = x$.
   Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $f(\dfrac{S_n}{n}) \xrightarrow{P} f(x)$.
5. D'après la question 4, on a $f\left(\dfrac{S_n}{n}\right) - f(x) \xrightarrow{P} 0$, donc, d'après 2, on a : $\mathbb{E}(|f\left(\dfrac{S_n}{n}\right) - f(x)|) \longrightarrow 0$.
   Comme $\left|\mathbb{E}\left(f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right) - \mathbb{E}(f(x))\right| \leqslant \mathbb{E}(|f\left(\dfrac{S_n}{n}\right) - f(x)|)$, on déduit :
   $$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) \longrightarrow \mathbb{E}(f(x)) = f(x)$$
   .
   Par ailleurs, avec $\lambda = \dfrac{1}{x}$, il vient :
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) &= \int_0^{+\infty} f(t/n) f_{n,\lambda}(t)\,dt \\ &= n\int_0^{+\infty} f(t)\frac{\lambda^n}{(n-1)!}(nt)^{n-1}\exp(-\lambda nt)\,dt \\ &= \frac{n^n}{(n-1)!x^n}\int_0^{+\infty} t^{n-1}\exp\left(-\frac{nt}{x}\right) f(t)\,dt \\ &= \frac{(-1)^{n-1}n^n}{(n-1)!x^n} g^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right).\end{aligned}$$
   D'où le résultat voulu.

Sujet n° 9

Soit un entier $n \geqslant 2$. On considère une urne contenant $n-1$ boules blanches et une boule noire. On vide entièrement cette urne en effectuant des tirages successifs d'une boule. Les tirages de rang impair (premier tirage, troisième tirage,...) se font sans remise tandis que les tirages de rang pair se font avec remise.

Pour tous les tirages, chaque boule de l'urne a la même probabilité d'être tirée.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire réelle égale au rang du premier (respectivement dernier) tirage de la boule noire. Les variables aléatoires X et Y sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. (a) Déterminer des bornes pour $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

   (b) Établir que $P(X=1)=P(X=2)$ et que $P(X=2n-1)=0$.

   (c) Montrer que pour tout entier $j \in [\![2, n]\!]$, on a :

   $$P(X=2j-1)=\frac{n-j}{n(n-1)}$$

   Vérifier que cette formule reste vraie pour $j=1$

   (d) Montrer que pour tout entier $j \in [\![2, n]\!]$, on a : $P(X=2j-1)=P(X=2j)$.

   (e) Établir

   $$E(X)=\sum_{j=1}^{n-1}(4j-1)\frac{n-j}{n(n-1)}$$

   Dans la suite de l'exercice on admet que $E(X)=\dfrac{1}{6}(4n+1)$.

2. Déterminer la loi de Y et son espérance.

   Si nécessaire, on pourra utiliser la formule : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

3. On note Z la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages de la boule noire à la fin des tirages. Justifier que $Z \leqslant Y-X+1$ et montrer que pour tout $n \geqslant 5$:

   $$P(Z \geqslant n) \leqslant \frac{1}{2}$$

Solution du sujet n° 9

1. (a) Une boule part au premier tirage puis une boule part tous les 2 tirages, donc en tout, $1+2(n-1) = 2n-1$ tirages sont nécessaires pour vider l'urne. Ainsi $X(\Omega) = [\![1, 2n-2]\!]$ (la dernière boule tirée l'est 2 fois de suite) et $Y(\Omega) \subset [\![1, 2n-2]\!]$.

   (b) On a $P(X=1) = \dfrac{1}{n}$. L'événement $(X=2)$ peut se décrire BN d'où $P(X=2) = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n}$.
   Pour tirer la boule noire au tirage $2n-1$ il faut commencer par tirer $2n-2 = 1+2(n-2)+1$ boules blanches. Pour cela on enlève nécessairement de l'urne $1+(n-1) = n$ boules blanches, ce qui est impossible, car elle n'en contient que $n-1$. Ainsi $P(X = 2n-1) = 0$.

   (c) Soit j tel que $3 \leqslant j \leqslant n$. L'événement $[X = 2j-1]$ se décompose :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2\ 3 & \cdots & 2j-4 \qquad\qquad 2j-3 & 2j-2 & 2j-1 \\ \underbrace{B} & \underbrace{B\ B} & \cdots & \underbrace{B \qquad\qquad\qquad B} & \underbrace{B} & \underbrace{N} \\ \dfrac{n-1}{n} & (\dfrac{n-2}{n-1})^2 & & (\dfrac{n-j+1}{n-j})^2 & \dfrac{n-j}{n-j+1} & \dfrac{1}{n-j+1} \end{array}$$

   Par la formule des probabilités composées on obtient :

$$P(X = 2j-1) = \frac{n-1}{n} \times \prod_{k=2}^{j-1} (\frac{n-k}{n-k+1})^2 \times \frac{n-j}{n-j+1} \times \frac{1}{n-j+1} = \frac{n-j}{n(n-1)}$$

   Pour $j = 1$, on retrouve la valeur obtenue précédemment et la formule reste vraie.

   (d) soit j tel que $2 \leqslant j \leqslant n$. L'événement $[X = 2j]$ se décompose de la même manière, seule la fin diffère : $\begin{array}{ccccc} 1 & 2\ 3 & \cdots & 2j-2 \qquad\qquad 2j-1 & 2j \\ \underbrace{B} & \underbrace{B\ B} & \cdots & \underbrace{B \qquad\qquad\qquad B} & \underbrace{N} \\ \dfrac{n-1}{n} & (\dfrac{n-2}{n-1})^2 & & (\dfrac{n-j}{n-j+1})^2 & \dfrac{1}{n-j} \end{array}$. Par la formule des probabilités composées on obtient :

$$P(X = 2j) = \frac{n-1}{n} \times \prod_{k=2}^{j} (\frac{n-k}{n-k+1})^2 \times \frac{1}{n-j} = \frac{n-j}{n(n-1)} = P(X = 2j-1)$$

   (e) En regroupant les termes de même probabilité : $P(X = 2j-1) = P(X = 2j)$, il vient :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{2n-2} kP(X=k) = \sum_{j=1}^{n-1} (2j-1+2j)P(X = 2j-1) = \sum_{j=1}^{n-1} (4j-1)\frac{n-j}{n(n-1)} = \frac{1}{6}(4n+1)$$

2. La boule noire apparaît pour la dernière fois lorsqu'elle est retirée de l'urne donc pour un tirage de rang impair ; la variable aléatoire Y peut prendre toutes les valeurs impaires comprises entre 1 et $2n-1$. On a $P(Y=1) = \dfrac{1}{n}$. L'événement $[Y = 3]$ est de la forme (BXN), d'où $P(Y=3) = \dfrac{n-1}{n} \times 1 \times \dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n}$.
   Pour le cas général : $(Y = 2j-1)$ $\begin{array}{ccccc} 1 & 2\ 3 & \cdots & 2j-4 \qquad\qquad 2j-3 & 2j-2\ 2j-1 \\ \underbrace{B} & \underbrace{?\ B} & \cdots & \underbrace{? \qquad\qquad\qquad B} & \underbrace{? \qquad\qquad\qquad B} \\ \dfrac{n-1}{n} & 1.\dfrac{n-2}{n-1} & & \dfrac{n-j+1}{n-j+2} & 1 \times \dfrac{1}{n-j+1} \end{array}$
   Par télescopage, $P(Y = 2j-1) = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant 2n-1$: Y suit une loi uniforme.
   Ainsi $E(Y) = \dfrac{1}{n}[1+3+5+\cdots(2n-1)] = \frac{n^2}{n} = n$.
3. La boule noire n'apparaît qu'entre les tirages de rangs X et Y d'où : $Z \leqslant Y - X + 1$.
   Par linéarité : $E(Z) \leqslant E(Y) - E(X) + 1 = n - \frac{1}{6}(4n+1) + 1 = \frac{1}{6}(2n+5) \leqslant \frac{3n}{6}$ dés que $n \geqslant 5$.
   Par l'inégalité de Markov : $P(Z \geqslant n) \leqslant \frac{E(Z)}{n} \leqslant \frac{3n}{6n} = \frac{1}{2}$.

Sujet n° 10

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

2. En déduire que la série $\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ converge pour tout $x \in]-1,1[$.

   On note $f_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.

3. En utilisant la formule du triangle de Pascal, montrer que pour tout $x \in]-1,1[$,
$$f_{k+1}(x) = x f_k(x) + x f_{k+1}(x)$$

4. En déduire, pour tout $x \in]-1,1[$, l'expression de $f_k(x)$ en fonction de k.

5. Soit $p \in]0,1[$; on pose $q = 1-p$. On effectue une suite de lancers avec une pièce truquée qui donne "pile" avec la probabilité p et "face" avec la probabilité q.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de ne jamais obtenir k "pile".
   Pour tout $n \in [\![k, +\infty[\![$ on s'intéressera à l'évènement A_n « obtenir le k-ième "pile" au bout de n lancers exactement ».

Solution du sujet n° 10

1. On sait que $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \sim \dfrac{n^k}{k!}$.
2. Ainsi $\binom{n}{k} x^n \sim \dfrac{1}{k!} n^k x^n$. Or pour $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 n^k x^n = 0$. La série $\sum\limits_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ est donc absolument convergente.
3. On rappelle que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Donc

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n = \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m+1}{k+1} x^{m+1} = x^{k+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m+1}{k+1} x^{m+1} \\ &= x^{k+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty} \left(\binom{m}{k+1} + \binom{m}{k} \right) x^{m+1} = \left(x^{k+1} + \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k} x^{m+1} \right) + \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^{m+1} \\ &= x f_k(x) + x f_{k+1}(x) \end{aligned}$$

4. Comme $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$, par récurrence (ou en reconnaissant une suite géométrique), et la relation précédente, il vient $f_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.
5. Si le dernier "pile" est obtenu au lancer $n \geqslant k$, alors on a obtenu $(k-1)$ "pile" lors des $(n-1)$ lancers précédents. Donc : $P(A_n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$.
   Donc, par union disjointe, la probabilité d'obtenir au moins une fois k "pile" est égale à :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = \frac{p^k}{q^k} \sum_{n=k-1}^{+\infty} \binom{n}{k-1} q^{n+1} = \frac{p^k}{q^{k-1}} f_{k-1}(q) = \frac{p^k}{q^{k-1}} \times \frac{q^{k-1}}{p^k} = 1,$$

   où la sommation est effectuée grâce à la question 4.
   La probabilité de ne jamais obtenir k "pile" est donc nulle.

Sujet n° 15

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une variable aléatoire X, de fonction de répartition F, de densité f continue sur un intervalle $I =]a, b[$, $a < b$, où a et b peuvent être infinis. On suppose la densité f nulle en dehors de I.
On note U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$, indépendante de X et g une fonction continue sur I, à valeurs dans $[0, 1]$. On définit enfin une fonction ψ sur I par : $\forall x \in I, \psi(x) = P([X \leqslant x] \cap [U \leqslant g(X)])$.

1. On fixe un réel x appartenant à I.
   (a) Justifier que pour tout $y \in I$, g admet un maximum sur $[\min(x, y), \max(x, y)]$, que l'on notera $M(x, y)$.
   (b) Montrer que
   $$\lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} M(x, y) = g(x)$$
   On admet que, de même, on a :
   $$\lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} M(x, y) = g(x)$$

   En notant $m(x, y)$ le minimum de f sur $[\min(x, y), \max(x, y)]$, on montrerait de même que
   $$\lim_{y \to x} m(x, y) = g(x)$$

2. Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$.
   (a) Écrire $\psi(y) - \psi(x)$ à l'aide de $[x < X \leqslant y]$ et $[U \leqslant g(X)]$.
   (b) En déduire : $\psi(y) - \psi(x) \leqslant (F(y) - F(x))\, M(x, y)$.
   (c) Montrer que : $(F(y) - F(x))\, m(x, y) \leqslant \psi(y) - \psi(x)$.
3. En déduire que ψ est dérivable sur I, et que $\psi' = f \times g$.
4. Montrer que : $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = P(U \leqslant g(X))$.

Solution du sujet n° 15

1. (a) La fonction g est continue sur le segment $[\min(x,y), \max(x,y)]$, donc elle y admet un maximum.

   (b) Pour x fixé dans I et $y > x$, on a $[\min(x,y), \max(x,y)] = [x,y]$. On note u_y un réel de $[x,y]$ tel que $g(u_y) = M(x,y)$. On a alors, pour tout $y \in]x,b[$, $x \leqslant u_y \leqslant y$, et donc par encadrement :

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} u_y = x \quad \text{d'où} \quad \lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} g(u_y) = g(x) \quad \text{(continuité de } g\text{)}$$

2. (a) $\psi(y) - \psi(x) = P([X \leqslant y] \cap [U \leqslant g(X)]) - P([X \leqslant x] \cap [U \leqslant g(X)]) = P([x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant g(X)])$

   (b) Par définition de $M(x,y)$, on a : $[x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant g(X)] \subset [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x,y)]$.

$$\begin{aligned}\text{d'où } \psi(y) - \psi(x) &= P([x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant g(X)])\\ &\leqslant P([x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x,y)]) \text{ (croissance de } P)\\ &= P(x < X \leqslant y)P(U \leqslant M(x,y)) \ \ (U \text{ et } X \text{ indépentantes})\\ &= (F(y) - F(x)) \times M(x,y) \ \ (\text{loi de } U \text{ puisque } M(x,y) \in [0,1]).\end{aligned}$$

   (c) De même, $[x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant m(x,y)] \subset [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant g(X)]$.
   Donc, par croissance de P et par indépendance de X et U, on a :

$$\psi(y) - \psi(x) \geqslant P[x < X \leqslant y]P[U \leqslant m(x,y)]) = (F(y) - F(x))\, m(x,y).$$

3. Pour $y > x$, on en déduit l'encadrement suivant :

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} m(x,y) \leqslant \frac{\psi(y) - \psi(x)}{y - x} \leqslant \frac{F(y) - F(x)}{y - x} M(x,y)$$

   et, en échangeant x et y dans les questions précédentes, cela reste vrai si $y < x$. Or :

$$\lim_{y\to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} m(x,y) = \lim_{y\to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} M(x,y) = f(x)g(x).$$

   Ainsi, par théorème d'encadrement, on a : $\displaystyle\lim_{y\to x} \frac{\psi(y) - \psi(x)}{y - x} = f(x)g(x)$.
   Ainsi ψ est dérivable en x et $\psi'(x) = f(x)g(x)$ (vrai pour tout $x \in I$).

4.
   - Pour tout $(x,y) \in I^2$, $\displaystyle\int_x^y f(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_x^y \psi'(t)\mathrm{d}t = [\psi(t)]_x^y = \psi(y) - \psi(x)$.
   - Par ailleurs, pour tout $x \in I$, $0 \leqslant P([X \leqslant x] \cap [U \leqslant g(X)]) \leqslant P(X \leqslant x) = F(x)$, et $F(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ donc par encadrement, $P([X \leqslant x] \cap [U \leqslant g(X)]) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire : $\psi(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
   - On remarque que $P(U \leqslant g(X)) = P([X \leqslant y] \cap [U \leqslant g(X)]) + P([X > y] \cap [U \leqslant g(X)]$,
   donc $\psi(y) = P(U \leqslant g(X)) - P([X > y] \cap [U \leqslant g(X)]$.
   Or, $0 \leqslant P([X > y] \cap [U \leqslant g(X)]) \leqslant P(X > y)$ et $P(X > y) = 1 - F(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} 0$
   donc, par encadrement, $P([X > y] \cap [U \leqslant g(X)]) \underset{y\to b}{\longrightarrow} 0$, ainsi :

$$\lim_{y\to b} \psi(y) = P(U \leqslant g(X)), \quad \text{c'est-à-dire} \quad P(U \leqslant g(X)) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

Sujet n° 17

On rappelle que pour tout $\alpha > 1$, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ est convergente. On note alors $S(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

On admet que $S(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. Déterminer des réels a, b et c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)^2} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{(n+1)^2}$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)^2}$.

   Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$P((X = n) \cap (Y = k)) = \frac{\lambda}{(n+1)^{k+3}}$$

3. (a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P(X = n)$. En déduire la valeur de λ.
   (b) Calculer $E(X)$ et montrer que X n'admet pas de variance.
   (c) Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k)$ à l'aide de la fonction S.
   (d) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (S(k) - 1) = 1$.

4. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x = 1$.
   (b) En déduire un équivalent de $P(Y = k)$ lorsque k tend vers $+\infty$.

Solution du sujet n^o 17

1. Par calcul, $a = 1, b = -1$ et $c = -1$.
2. Pour tout $N > 0$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2}$$

Soit $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{N+1} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2}$. En prenant la limite, lorsque N tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

3. (a) On a :

$$P(X=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=n)\cap(Y=k)) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k+3}} = \frac{\lambda}{(n+1)^3} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \frac{\lambda}{n(n+1)^2}$$

Donc $\lambda = \frac{1}{2 - \pi^2/6} = \frac{1}{2 - S(2)}$.

(b) On a $E(X) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \lambda\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$. Par contre $E(X^2)$ n'existe pas car $\frac{n^2}{n(n+1)^2} \sim \frac{1}{n}$.

(c) De la même manière,

$$P(Y=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((X=n)\cap(Y=k)) = \lambda \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+3}} = \lambda(S(k+3)-1)$$

(d) Ainsi,

$$1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k) = \frac{1}{2-S(2)} \sum_{k=0}^{+\infty} (S(k+3)-1) \Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} (S(k)-1) = 1$$

Ceci montre également qu'au voisinage de $+\infty$, $S(k) \sim 1$ car $\lim_{k\to+\infty} \big(S(k)-1\big) = 0$.

4. (a) On a vu que $\lim_{k\to+\infty} S(k) = 1$. D'autre part, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^x}{n^x} = 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^x}{n^x}$.

Utilisons une comparaison série/intégrale. La fonction $t \to \left(\frac{2}{t}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln(2/t)}$ est positive, décroissante sur $[2, +\infty[$ et tend vers 0. La méthode de comparaison série/intégrale donne

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x \leqslant \int_3^{+\infty} \mathrm{e}^{x\ln(2/t)}dt \leqslant \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x$$

Or

$$\int_3^{+\infty} \mathrm{e}^{x\ln(2/t)}dt = \mathrm{e}^{x\ln 2} \int_3^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\ln t}dt = \mathrm{e}^{x\ln 2} \times \frac{1}{x} \int_{x\ln 3}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u(1-1/x)}du = \frac{\mathrm{e}^{x\ln 2} \times \mathrm{e}^{-(x-1)\ln 3}}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(b) Finalement $\lim_{x\to+\infty} 2^x(S(x)-1) = 1$ et $S(x) - 1 \sim \frac{1}{2^x}$ et $P(Y=k) \sim \frac{\lambda}{2^{k+3}}$.

Sujet n° 19

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big)$.

On considère une suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* , \quad \mathbb{P}(R_k = -1) = \mathbb{P}(R_k = 1) = \frac{1}{2}$$

et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} R_k$.

1. (a) Justifier la convergence de l'intégrale :

   $$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t \, .$$

   On admet que sa valeur est $\pi/2$.

   (b) En déduire, pour tout x réel, la valeur de l'intégrale :

   $$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x\,u)}{u^2} \mathrm{d}u$$

   On note $F(x)$ cette intégrale.

2. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
3. Soit S et T deux variables aléatoires réelles indépendantes, telles que T et $-T$ aient la même loi. Montrer que :

   $$\mathbb{E}\big[\cos(S+T)\big] = \mathbb{E}\big[\cos(S)\big]\,\mathbb{E}\big[\cos(T)\big]$$

4. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

   $$\mathbb{E}\big[\cos(S_n\,t)\big] = (\cos t)^n$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

   $$\mathbb{E}\big(|S_n|\big) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2} \mathrm{d}t$$

   On pourra utiliser l'expression trouvée en 1.b).

Solution du sujet n° 19

1. (a) $f : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, tend vers $1/2$ en 0 et vérifie $f(t) = O(1/t^2)$ en $+\infty$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

   (b) Pour $x = 0$, on a $F(0) = 0$. Sinon, le changement de variable $u \mapsto |x|\,u = t$ donne :

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\,|x|\,I = |x|$$

2. Par linéarité, $\mathbb{E}(S_n) = 0$, et par indépendance, $\mathbb{V}(S_n) = n$.
3. T et $-T$ ayant même loi, on a $\mathbb{E}(\sin T) = 0$; puis par linéarité et lemme des coalitions,

$$\mathbb{E}\big[\cos(S+T)\big] = \mathbb{E}\big[\cos(S)\big]\,\mathbb{E}\big[\cos(T)\big]$$

4. Par récurrence, lemme des coalitions, théorème de transfert et 3. on a :

$$\mathbb{E}\big[\cos(S_{n+1}t)\big] = \mathbb{E}\big[\cos(S_n t)\big]\,\mathbb{E}\big[\cos(R_{n+1}t)\big] = \mathbb{E}\big[\cos(S_n t)\big]\left[\frac{1}{2}\,\cos(t) + \frac{1}{2}\,\cos(-t)\right] = (\cos t)^{n+1}$$

5. Par théorème de transfert, permutation de somme finie d'intégrales convergentes et 4. on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(|S_n|\big) &= E(F(S_n)) \qquad \text{(cf. 1.b)} \\
&= \sum_{s\in S_n(\Omega)} \left[\mathbb{P}(S_n = s)\,\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{t^2}\Big(1 - \sum_{s\in S_n(\Omega)} \mathbb{P}(S_n = s)\,\cos(st)\Big)\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{t^2}\Big(1 - \mathbb{E}\big(\cos(S_n\,t)\big)\right]\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Sujet n° 23

Un boulanger vend du pain chaque jour.

- La quantité de pain produite chaque jour est une quantité fixée Q choisie par le boulanger, Q étant exprimée en kilogramme.
- La demande de pain de la part des clients est une variable aléatoire X strictement positive, toujours exprimée en kilogramme.
- On suppose que la variable X admet une densité f strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}$ et on note F la fonction de répartition de X.
- Le coût de fabrication par kilogramme est c euros et le prix de vente est v euros par kilogramme.
- On note B la variable aléatoire égale au bénéfice quotidien.
- La variable indicatrice d'un événement A est notée $\mathbb{1}_A$.
- On suppose que $0 < c < v$.

Si la demande de pain X est inférieure à l'offre Q, le boulanger ne vend que la quantité X (le pain invendu un jour donné n'est pas remis en vente le lendemain !) ; si la demande est supérieure à l'offre, il ne vend que la quantité Q.

Dans ces conditions, on cherche la quantité optimale à produire, c'est-à-dire la quantité Q_0 qui maximise l'espérance de B.

1. Établir la relation suivante :
$$B = v\big[Q + (X - Q)\mathbb{1}_{[X<Q]}\big] - cQ$$
2. Montrer que la variable $X\mathbb{1}_{[X<Q]}$ admet une espérance et donner son expression sous forme d'intégrale.
3. En déduire l'égalité suivante :
$$\mathbb{E}(B) = (v - c)Q + v\left[\int_0^Q tf(t)\mathrm{d}t - QF(Q)\right]$$
4. Exprimer Q_0 à l'aide de F, de v et de c.
   Le boulanger cherche à prévoir sa demande journalière. La demande aléatoire X_n qui va s'exprimer le jour n n'est pas connu à l'avance mais le boulanger fait l'hypothèse que la demande ne variera pas beaucoup d'un jour à l'autre et que :
$$X_{n+1} = X_n + U_{n+1}$$
   où :
   - X_0 est une constante strictement positive fixée.
   - Les U_k sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance nulle et de variance σ^2 non nulle.
5. (a) Exprimer X_n en fonction des U_i et de X_0.
   (b) Montrer que la suite $\left(\dfrac{X_0}{n}\right)$ converge en probabilité vers 0.
   (c) Montrer que si deux suites de variables aléatoires (A_n) et (B_n) convergent en probabilité respectivement vers des variables aléatoires a et b, alors la suite $(A_n + B_n)$ converge en probabilité vers $a + b$.
   (d) En déduire que $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers une variable que l'on précisera.
   (e) Montrer que la suite $\left(\dfrac{X_0}{n}\right)$ converge en loi vers 0.
   (f) Montrer que la suite $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)$ converge en loi et préciser la loi limite.

Solution du sujet n° 23

1. La quantité de pain vendue chaque jour est : $Z = (X - Q)\mathbb{1}_{[X<Q]} + Q$.
   La vente rapporte donc $v\Big[(X-Q)\mathbb{1}_{[X<Q]} + Q\Big]$ et le bénéfice est $B = v\big[Q + (X-Q)\mathbb{1}_{[X<Q]}\big] - cQ$.
2. On a $X\mathbb{1}_{[X<Q]} \leqslant Q\mathbb{1}_{[X<Q]}$.
   Or $\mathbb{1}_{[X<Q]}$ est une variable indicatrice (ou de Bernoulli) qui admet une espérance.
   On en déduit, par domination que $X\mathbb{1}_{[X<Q]}$ admet une espérance.
   D'autre part, le théorème de transfert donne : $\mathbb{E}\big(X\mathbb{1}_{[X<Q]}\big) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathbb{1}_{[t<Q]} f(t)dt = \int_0^Q tf(t)dt$.
3. Par linéarité : $\mathbb{E}(B) = v\mathbb{E}\Big((X-Q)\mathbb{1}_{[X<Q]}\Big) + (v-c)Q = v\mathbb{E}\Big(X\mathbb{1}_{[X<Q]}\Big) - vQ\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{[X<Q]}\Big) + (v-c)Q$.
   Or : $\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{[X<Q]}\Big) = P(X<Q) = \displaystyle\int_0^Q f(t)dt = F(Q)$ et $\mathbb{E}\big(X\mathbb{1}_{[X<Q]}\big) = \displaystyle\int_0^Q tf(t)dt$.
   En remplaçant et en arrangeant : $\mathbb{E}(B) = (v-c)Q + v\left[\displaystyle\int_0^Q tf(t)\mathrm{d}t - QF(Q)\right]$.
4. Si on pose : $h(Q) = (v-c)Q + v\left[\displaystyle\int_0^Q tf(t)\mathrm{d}t - QF(Q)\right]$, on cherche la valeur Q_0 qui maximise cette fonction.
   On a : $h'(Q) = v - c + v[Qf(Q) - F(Q) - Qf(Q)] = v - c - vF(Q)$, d'où $h'(Q) = 0 \Longleftrightarrow F(Q) = 1 - \dfrac{c}{v}$.
   On a bien $0 \leqslant 1 - \dfrac{c}{v} < 1$ et comme F est continue et strictement croissante, elle réalise une bijection, d'où : $Q_0 = F^{-1}\left(1 - \dfrac{c}{v}\right)$.
5. (a) On a : $X_{k+1} - X_k = U_{k+1}$, d'où $X_n = X_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^n U_k$, par télescopage.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. On a : $\exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ P\big(\dfrac{X_0}{n} > \varepsilon\big) = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\big(\dfrac{X_0}{n} > \varepsilon\big) = 0$

   (c) On considère un réel $\varepsilon > 0$. On a : $|(A_n + B_n) - (a+b)| \leqslant |A_n - a| + |B_n - b|$.
   On en déduit : $\Big[|(A_n + B_n) - (a+b)| \geqslant \varepsilon\Big] \subset \Big[|A_n - a| + |B_n - b| \geqslant \varepsilon\Big]$.
   Or : $\Big[|A_n - a| + |B_n - b| \geqslant \varepsilon\Big] \subset \Big[|A_n - a| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\Big] \bigcup \Big[|B_n - b| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\Big]$.
   On utilise alors la croissance de la probabilité et le fait que $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$ et on obtient :
   $$0 \leqslant P\Big(|A_n - a| + |B_n - b| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant P\Big(|A_n - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big) + P\Big(|B_n - b| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$
   Comme $A_n \xrightarrow{P} a$ et $B_n \xrightarrow{P} b$, on en déduit bien que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\Big(|(A_n + B_n) - (a+b)| \geqslant \varepsilon\Big) = 0$.

   (d) $\left(\dfrac{X_0}{n}\right) \xrightarrow{P} 0$ et, d'après la loi faible des grands nombres, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n U_k \xrightarrow{P} \mathbb{E}(U_k) = 0$.
   En appliquant le résultat précédent, on en déduit que $(\dfrac{X_n}{n})$ converge en probabilité vers 0.

   (e) Soit Z_n la « variable aléatoire »définie par $Z_n = \dfrac{X_0}{n}$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$,
   qui est la fonction de répartition de la variable certaine nulle.

   (f) On a donc : $\dfrac{X_n}{n} = \dfrac{X_0}{n} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n U_k$ avec $\dfrac{X_0}{n} \xrightarrow{L} 0$ et $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n U_k \xrightarrow{P} 0$.
   D'après le théorème de Slutsky, $(\dfrac{X_n}{n})$, converge en loi vers 0.

Sujet n° 25

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout événement A, on note $\mathbb{1}_A$ sa variable aléatoire indicatrice.

Soit q, r deux réels de $]0,1[$. Deux joueurs jouent à lancer chacun une pièce qui peut faire Pile (P) ou Face (F). Le joueur G joue avec une pièce avec laquelle la probabilité de faire Pile est $1-q$; le joueur R joue avec une pièce avec laquelle la probabilité de faire Pile est $1-r$. Ils lancent simultanément chacun leur pièce (de façon indépendante), et répètent l'expérience (de façon indépendante).

On note T_G (respectivement T_R) la variable aléatoire égale au rang du premier lancer où G (respectivement R) fait Pile ; on considère les événements :

$$A_1 = \big(T_G < T_R\big), \quad A_2 = \big(T_R < T_G\big), \quad A = \big(T_G \neq T_R\big).$$

On note T la variable aléatoire égale au rang du premier lancer où apparaît au moins un Pile et J la variable aléatoire $J = \mathbb{1}_{A_1} + 2 \times \mathbb{1}_{A_2}$.

1. (a) Préciser les lois de T_G et T_R, puis calculer la probabilité $p = \mathbb{P}\big(A_1\big)$.
   (b) Que vaut p si $q = r$? si $q = r = 1/2$?
2. (a) Déterminer la loi conditionnelle de T_G sachant A_1.
   (b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}_{A_1}\big[(T_G > k)\big]$.

   On suppose dans la suite que $q = r$. On note $\mathbb{P}_A$ la probabilité conditionnelle sachant A. Soit $k \in \mathbb{N}$.
3. (a) Que représente la variable aléatoire J ?
   (b) Calculer $\mathbb{P}\big[A \cap (J = 1) \cap (T > k)\big]$.
   (c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}_A\big[(J = 1) \cap (T > k)\big]$.
   (d) Que vaut $\mathbb{P}_A(J = 1)$?
   (e) Comparer $\mathbb{P}_A\big[(J = 1) \cap (T > k)\big]$ et $\mathbb{P}_A\big[(J = 2) \cap (T > k)\big]$, et en déduire la valeur de $\mathbb{P}_A(T > k)$.
   (f) Montrer que les variables aléatoires T et J sont indépendantes pour la probabilité $\mathbb{P}_A$.

Solution du sujet n° 25

1. (a) Comme loi du temps d'attente du premier succès dans un schéma de Bernoulli, $T_G \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q)$ et $T_R \hookrightarrow \mathcal{G}(1-r)$. Par σ-additivité et indépendance,

$$\mathbb{P}(T_G < T_R) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\mathbb{P}(T_G = n)\sum_{m=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(T_R = m)\right] = (1-q)(1-r)\sum_{n=1}^{+\infty}\left[q^{n-1}\sum_{m=n+1}^{+\infty}r^{m-1}\right]$$
$$= (1-q)(1-r)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{n-1}r^n}{1-r}, \text{ soit } p = \frac{(1-q)r}{1-qr}$$

(b) Si $q = r$, on a $p = \dfrac{q}{1+q}$ et si $q = r = \dfrac{1}{2}$, alors $p = \dfrac{1}{3}$.

2. (a) $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, par indépendance de T_G et T_R et reste de série géométrique, on a :

$$\mathbb{P}_{A_1}\big[(T_G = k)\big] = \frac{\mathbb{P}(T_G = k)\mathbb{P}(T_R > k)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{(1-q)q^{k-1}r^k}{(1-q)r/(1-qr)} = (qr)^{k-1}(1-qr)$$

Ainsi la loi conditionnelle de T_G sachant A_1 est la loi $\mathcal{G}(1-qr)$.

(b) D'où $\mathbb{P}_{A_1}\big[(T_G > k)\big] = (qr)^k$.

3. (a) J vaut 1 (resp. 2) si le premier joueur G (resp. le second joueur R) fait Pile en premier, et vaut 0 si les deux joueurs font Pile pour la première fois en même temps (ou jamais).

(b) $(J = 1) = A_1 \subset A$, et $T = \min(T_G, T_R)$ vaut T_G sur A_1, donc pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\big[A \cap (J=1) \cap (T > k)\big] = \mathbb{P}\big[A_1 \cap (T_G > k)\big] = \mathbb{P}_{A_1}\big[(T_G > k)\big]\mathbb{P}(A_1) = \frac{q^{2k+1}}{1+q}$$

(c) Par symétrie, $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$; donc $\mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(A_1)$. Alors

$$\mathbb{P}_A\big[(J=1) \cap (T > k)\big] = \frac{\mathbb{P}\big[A \cap (J=1) \cap (T > k)\big]}{\mathbb{P}(A)} = \frac{q^{2k}}{2}$$

(d) $\mathbb{P}_A(J = 1) = \dfrac{\mathbb{P}\big[(J=1) \cap A\big]}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{1}{2}$.

(e) Par définition, $A \cap (J = 0) = \emptyset$; comme T_G et T_R suivent la même loi, ces probabilités sont égales. Alors

$$\mathbb{P}_A(T > k) = 2\,\mathbb{P}_A\big[(J=1) \cap (T > k)\big] = q^{2k}$$

(f) On a alors $\mathbb{P}_A(J=1) = \mathbb{P}_A(J=2) = 1/2$, $\mathbb{P}_A(J=0) = 0$ et les calculs ci-dessus montrent que, pour tous $j \in \{0,1,2\}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_A\big[(J=j) \cap (T > k)\big] = \mathbb{P}_A(J=j) \times \mathbb{P}_A(T > k)$$

ce qui prouve que T et J sont indépendantes pour la probabilité $\mathbb{P}_A$.

Sujet n° 29

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

Dans la suite, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose :

$$Z_{n,1} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[1-\frac{1}{n}\leqslant X_i\leqslant 1]} \text{ et } Z_{n,2} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[1-\frac{2}{n}\leqslant X_i\leqslant 1-\frac{1}{n}[},$$

où, pour tout événement A, on a noté $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice de cet événement.

1. Donner les lois de $Z_{n,1}$ et de $Z_{n,2}$.
2. On pose $T_n = Z_{n,1} + Z_{n,2}$.
   (a) Donner la loi de T_n.
   (b) En déduire la valeur de $\operatorname{Cov}\big(Z_{n,1}, Z_{n,2}\big)$.
   Les variables aléatoires $Z_{n,1}$ et $Z_{n,2}$ sont-elles indépendantes ?
   (c) Étudier la convergence en loi de T_n.
3. Déterminer la loi du couple $(Z_{n,1}, Z_{n,2})$.
4. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction f_n par :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f_n(s,t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} P([Z_{n,1} = i \cap Z_{n,2} = j])s^i t^j$$

   (a) Calculer explicitement $f_n(s,t)$ en fonction de n, de s et de t.
   (b) Calculer $\partial_{1,2} f_n(1,1)$ et retrouver la valeur de $\operatorname{Cov}\big(Z_{n,1}, Z_{n,2}\big)$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(s,t)$.

Solution du sujet n° 29

1. On note succès l'événement $[1-\frac{1}{n}\leqslant X_i\leqslant 1]$ est réalisé. La variable $Z_{n,1}$ compte le nombre de succès dans une succession d'épreuves indépendantes dont la probabilité de succès est $\dfrac{1}{,}n$. Donc $Z_{n,1}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\dfrac{1}{n}\right)$. De même $Z_{n,2}\hookrightarrow\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{n}\right)$.
2. (a) On constate que $Z_{n,1}+Z_{n,2}$ comptabilise le nombre de variables X_i qui sont comprises entre $1-\dfrac{2}{n}$ et 1.
   On en déduit que la variable $Z_{n,1}+Z_{n,2}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\dfrac{2}{n}\right)$.
   (b) On utilise alors la formule suivante : $\mathbb{V}(Z_{n,1}+Z_{n,2})=\mathbb{V}(Z_{n,1})+\mathbb{V}(Z_{n,2)})+2\operatorname{Cov}(Z_{n,1},Z_{n,2})$.
   Or : $\mathbb{V}(Z_{n,1}+Z_{n,2})=n\times\dfrac{2}{n}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$ et $\mathbb{V}(Z_{n,1})=\mathbb{V}(Z_{n,2})=n\times\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.
   Après calcul : $\operatorname{Cov}(Z_{n,1},Z_{n,2})=-\dfrac{1}{n}$.
   Comme la covariance n'est pas nulle, les variables ne sont pas indépendantes.
   (c) La variable T_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\dfrac{2}{n}\right)$, d'où T_n converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$.
   Remarque : la formule des probabilités composées ne permet pas d'aboutir.
3. Soit i et j deux entiers naturels appartenant à $[\![0,n]\!]$ avec $j\leqslant n-i$.
   On a alors : $P\big([Z_{n,1}=i]\cap[Z_{n,2}=j]\big)=\dbinom{n}{i}\left(\dfrac{1}{n}\right)^i\dbinom{n-i}{j}\left(\dfrac{1}{n}\right)^j\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n-i-j}$.
4. (a) En remplaçant la loi conjointe par sa valeur :
   $$\mathbb{E}\big(s^{Z_{n,1}}t^{Z_{n,2}}\big)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}s^it^j\binom{n}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^i\binom{n-i}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^j\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-i-j}$$
   En arrangeant : $\mathbb{E}\big(s^{Z_{n,1}}t^{Z_{n,2}}\big)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{s}{n}\right)^i\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}\left(\frac{t}{n}\right)^j\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-i-j}$. On reconnaît dans la seconde somme la formule du binôme de Newton et on obtient :
   $$\mathbb{E}\big(s^{Z_{n,1}}t^{Z_{n,2}}\big)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{s}{n}\right)^i\left(\frac{t}{n}+1-\frac{2}{n}\right)^{n-i}$$
   On reconnaît à nouveau une formule du binôme, d'où : $f_n(s,t)=\left(1+\dfrac{s+t-2}{n}\right)^n$.
   (b) En partant de la définition : $\partial_{1,2}f_n(s,t)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}is^{i-1}jt^{j-1}P\big([Z_{n,1}=i]\cap[Z_{n,2}=j]\big)$.
   Donc : $\partial_{1,2}f_n(1,1)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}ijP\big([Z_{n,1}=i]\cap[Z_{n,2}=j]\big)=\mathbb{E}\big(Z_{n,1}Z_{n,2}\big)$.
   On calcule donc $\partial_{1,2}f_n(1,1)$ à partir de l'expression $f_n(s,t)=\left(1+\dfrac{s+t-2}{n}\right)^n$.
   On a : $\partial_{1,2}f_n(s,t)=\dfrac{n-1}{n}\left(1+\dfrac{s+t-2}{n}\right)^{n-2}\Longrightarrow\partial_{1,2}f_n(1,1)=\dfrac{n-1}{n}$.
   On en déduit que : $\mathbb{E}\big(Z_{n,1}Z_{n,2}\big)=\dfrac{n-1}{n}$. Or : $\operatorname{Cov}(Z_{n,1},Z_{n,2})=\mathbb{E}\big(Z_{n,1}Z_{n,2}\big)-\mathbb{E}\big(Z_{n,1}\big)\mathbb{E}\big(Z_{n,2}\big)$.
   En remplaçant, on retrouve : $\mathbb{E}\big(Z_{n,1}Z_{n,2}\big)=\dfrac{n-1}{n}$.
   (c) On obtient (classiquement) : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f_n(s,t)=\mathrm{e}^{(s+t-2)}$.

Sujet n° 32

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p $(0 < p < 1)$.
Soit U une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ $(\sigma > 0)$.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
On suppose que les variables X et U sont indépendantes.
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X et une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que U.
On suppose que, pour tout $k \geqslant 1$ et pour tout $j \geqslant 1$, les variables aléatoires X_k etU_j sont indépendantes.
Soit a un paramètre réel non nul ; on note Y (resp. Y_i, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$) la variable aléatoire définie par $Y = aX + U$ (resp. $Y_i = aX_i + U_i$)

1. (a) Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de la fonction de répartition F_U de U, puis en fonction de Φ.

   (b) Vérifier que Y est à densité et donner une densité de Y.

2. (a) Calculer $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(XY)$.
   On admet que XY possède une variance et qu'elle n'est pas nulle et on pose $\alpha = V(XY)$.

   (b) *On admet les résultats suivants : Si (A_n) et (B_n) sont deux suites de variables aléatoires qui convergent en probabilité respectivement vers les variables A et B et (ε_n) une suite réelle de limite nulle, alors la suite $(A_n + \varepsilon_n)$ converge en probabilité vers A et, si B et les B_n ne s'annulent pas, $\left(\dfrac{A_n}{B_n}\right)$ converge en probabilité vers $\dfrac{A}{B}$*
   On pose, pour tout entier naturel n non nul :
   $$\widehat{a}_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i X_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}}$$
   Montrer que la suite $(\widehat{a}_n)$ converge en probabilité vers a.

3. Montrer que la suite $\left(\sqrt{n}(\widehat{a}_n - a)\right)$ converge en loi vers $\mathcal{N}\left(0, \dfrac{\sigma 2}{p}\right)$.

SOLUTION DU SUJET N° 32

1. (a)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P([Y \leqslant y] \cap [X=0]) + P([Y \leqslant y] \cap [X=1]) \\ &= P([U \leqslant y] \cap [X=0]) + P([U \leqslant y-a] \cap [X=1]). \end{aligned}$$

Par indépendance de U et X : $F_Y(y) = (1-p)F_U(y) + pF_U(y-a) = (1-p)F_U(y) + pF_U(y-a)$.

En centrant et en réduisant : $F_Y(y) = (1-p)\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right) + p\Phi\left(\frac{y-a}{\sigma}\right)$.

(b) La fonction Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc Y est bien à densité et $f_Y(y)\frac{1-p}{\sigma}\varphi\left(\frac{y}{\sigma}\right) + \frac{p}{\sigma}\varphi\left(\frac{y-a}{\sigma}\right)$.

2. (a) On a $\mathbb{E}(X^2) = p$ et $\mathbb{E}(XY) = a\mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(U) = ap$.

(b) On écrit $\widehat{a}_n = \dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_iX_i}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2}}$.

On applique alors la loi faible des grands nombres : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_iX_i \xrightarrow{P} ap$ et $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} p$.

Comme la suite $(\frac{1}{n^2})$ tend vers 0, on obtient : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{P} p$, puis $\widehat{a}_n \xrightarrow{P} a$.

3. On a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_iX_i = \sum_{i=1}^{n}(aX_i + U_i)X_i = a\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} U_iX_i$. D'où

$$\sqrt{n}(\widehat{a}_n - a) = \sqrt{n}\left(\frac{a\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}} - a + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} U_iX_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}}\right) = -\frac{\frac{a}{n}}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{n}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} U_iX_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}}$$

• Pour le deuxième terme : $\sqrt{n}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} U_iX_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{n}\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} U_iX_i}{\sigma\sqrt{p}} \times \dfrac{\sigma\sqrt{p}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2}}$.

D'après le théorème limite central : $\sqrt{n}\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} U_iX_i}{\sigma\sqrt{p}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$

• D'autre par : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{P} p$ d'où : $\dfrac{\sigma\sqrt{p}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{P} \dfrac{\sigma}{\sqrt{p}}$. Ainsi avec SLUTSKY :

$$\sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} U_iX_i}{\sigma\sqrt{p}} \times \frac{\sigma\sqrt{p}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{p}\right)$$

• Pour le premier terme, en utilisant les résultats précédents, on a : $-\dfrac{\frac{a}{n}}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{P} 0$.

En utilisant à nouveau le théorème de SLUTSKY $\sqrt{n}(\widehat{a}_n - a) \xrightarrow{L} \mathcal{N}\left(0, \dfrac{\sigma^2}{p}\right)$.

Sujet n° 35

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un $n-$échantillon de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ inconnu.
On cherche dans cet exercice à estimer $e^{-\lambda}$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note Y_k la fonction indicatrice de l'événement $[X_k = 0]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

1. (a) Déterminer la loi de Y_k.
   (b) Montrer que $\overline{Y_n}$ est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.
   (c) $\overline{Y_n}$ est-il un estimateur convergent de $e^{-\lambda}$?
2. Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi(j) = P_{[S_n=j]}(X_1 = 0)$. Calculer $\varphi(j)$.
3. On pose à présent $T_n = \varphi(S_n)$.
   (a) Montrer que T_n est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.
   (b) T_n est-il un estimateur convergent de $e^{-\lambda}$?
4. Comparer les risques quadratiques des deux estimateurs T_n et $\overline{Y}_n$.

SOLUTION DU SUJET N° 35

1. (a) La variable aléatoire Y_k suit la loi de BERNOULLI de paramètre :

$$P(X_k = 0) = P(Y_k = 1) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}.$$

(b) Chaque Y_k suit la loi BERNOULLI de paramètre $e^{-\lambda}$. Donc $E\left(\overline{Y_n}\right) = e^{-\lambda}$ et $\overline{Y_n}$ est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.

(c) Puisque les X_k sont mutuellement indépendantes, il en est de même des Y_k. Et donc

$$V\left(\overline{Y_n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} e^{-\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right) = \frac{e^{-\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et donc en particulier, $\overline{Y_n}$ est un estimateur convergent de $e^{-\lambda}$.

2. Par définition, on a $\varphi(j) = \dfrac{P([X_1=0]\cap[S_n=j])}{P(S_n=j)}$.

Mais $[X_1=0]\cap[S_n=j] = [X_1=0]\cap\left[\sum_{k=2}^{n} X_k = j\right]$.

Par stabilité des lois de POISSON, $\sum_{k=2}^{n} X_k$ suit la loi de POISSON de paramètre $(n-1)\lambda$ et par le lemme des coalitions, est indépendante de X_1. Par conséquent,

$$\begin{aligned} P([X_1=0]\cap[S_n=j]) =& P\left([X=1=0]\cap\left[\sum_{k=2}^{n} X_k = j\right]\right) = P(X_1=0)\,P\left(\sum_{k=2}^{n} X_k = j\right) \\ &= e^{-\lambda}e^{-(n-1)\lambda}\frac{((n-1)\lambda)^j}{j!} \end{aligned}$$

D'autre part, S_n suit une loi de POISSON de paramètre $n\lambda$ et donc $P(S_n=j) = e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^j}{j!}$. Ainsi

$$\varphi(j) = \frac{e^{-\lambda}e^{-(n-1)\lambda}\frac{((n-1)\lambda)^j}{j!}}{e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^j}{j!}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^j$$

3. (a) Utilisons le théorème de transfert pour calculer $E(T_n)$. On a, en utilisant la définition de $\varphi(j)$

$$E(T_n) = \sum_{j=0}^{+\infty}\varphi(j)P(S_n=j) = \sum_{j=0}^{+\infty} P([X_1=0]\cap[S_n=j]) = P(X_1=0) = e^{-\lambda}$$

Donc T_n est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.

(b) D'après la formule de Huygens, on a $V(T_n) = E(T_n^2) - e^{-2\lambda}$. Par le théorème de transfert :

$$E(T_n^2) = \sum_{j=0}^{+\infty}\varphi(j)^2 P(S_n=j) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2j}\mathrm{e}^{-n\lambda\frac{(n\lambda)^j}{j!}} = \mathrm{e}^{\frac{-2n+1}{n}\lambda}$$

Donc $V(T_n) = \mathrm{e}^{-2\lambda}(e^{\frac{\lambda}{n}}-1) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et T_n est un estimateur convergent de $e^{-\lambda}$.

4. Puisque $\overline{Y_n}$ et T_n sont des estimateurs sans biais de $e^{-\lambda}$, leurs risques quadratiques sont égaux à leurs variances. On a alors $\dfrac{V\left(\overline{Y_n}\right)}{V(T_n)} = \dfrac{e^{-\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right)\frac{1}{n}}{e^{-2\lambda}\left(e^{\lambda/n}-1\right)} = \dfrac{e^{\lambda}-1}{n(e^{\lambda/n}-1)} \leqslant 1$,

d'après la convexité de exp qui donne : $\exp(\frac{1}{n}\times\lambda + (1-\frac{1}{n})\times 0) \leqslant \frac{1}{n}\exp(\lambda) + (1-\frac{1}{n})\exp(0)$.

On en déduit que T_n est un meilleur estimateur que $\overline{Y_n}$ (variance plus petite).

Sujet n° 37

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\lambda_n = \dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n^2}$.

1. (a) Déterminer un équivalent de $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que la série de terme général λ_n converge.

   Dans la suite de l'exercice, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \geqslant 1}$ définies sur cet espace, indépendantes et telles que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre λ_n.

2. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} P(X_n \neq 0)$ converge.
   (b) Soit $(E_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} P\left(\bigcup_{n \geqslant N} [X_n \neq 0]\right) = 0$.
   (d) En déduire que $P\left(\displaystyle\bigcup_{N \geqslant 1} \Big(\bigcap_{n \geqslant N} [X_n = 0]\Big)\right) = 1$
   (e) On note $B = \left\{\omega \in \Omega \mid \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} X_n(\omega) \text{ converge}\right\}$.
   Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} X_n$ converge presque sûrement, c'est-à-dire que $P(B) = 1$.

On suppose désormais que $B = \Omega$.
Ainsi la fonction $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ est définie sur Ω. On admet que c'est une variable aléatoire.

3. Déterminer la limite en loi de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
4. Déterminer la limite en probabilité de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$.

SOLUTION DU SUJET N° 37

1. (a) Par définition pour tout x réel, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x <$. Ainsi $\lfloor x \rfloor \sim x$. Donc $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \sim \sqrt{n}$.

   (b) On a $0 \leqslant \lambda_n \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$; donc $\sum \lambda_n$ converge par comparaison avec une série de RIEMANN convergente.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(X_n \neq 0) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - e^{-\lambda_n}$ qui est équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ à λ_n car $\lambda_n \to 0$. Comme $\sum\limits_{n \geqslant 1} \lambda_n$ converge, il est en de même pour $\sum\limits_{n \geqslant 1} P(X_n \neq 0)$.

   (b) C'est quasiment du cours. Se démontre par récurrence.

   (c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$P(\bigcup_{n=N}^{N+p} [X_n \neq 0]) \leqslant \sum_{n=N}^{N+p} P(X_n \neq 0) \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} P(X_n \neq 0)$$

   En faisant tendre p vers $+\infty$, le théorème de la limite monotone donne :

$$0 \leqslant P(\bigcup_{n=N}^{+\infty} [X_n \neq 0]) \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} P(X_n \neq 0)$$

   Enfin, on fait tendre N vers $+\infty$, le reste de la série convergente de terme général $P(X_n \neq 0)$ tend vers 0 et par suite, $P(\bigcup\limits_{n=N}^{+\infty} [X_n \neq 0])$ aussi.

   (d) Pour tout N de $\mathbb{N}^*$, on pose $A_N = \bigcup\limits_{n \geqslant N} [X_n \neq 0]$. La suite (A_N) est une suite décroissante d'événements, donc

$$0 = \lim_{N \to +\infty} P(A_N) = P(\bigcap_{N=0}^{+\infty} A_N) = P(\bigcap_{N=0}^{+\infty} \bigcup_{n \geqslant N} [X_n \neq 0])$$

   (e) En passant au complémentaire, on a : $P(\bigcup\limits_{N=0}^{+\infty} \bigcap\limits_{n \geqslant N} [X_n = 0]) = 1$; ceci signifie que presque sûrement il existe un rang à partir duquel la suite (X_n) est nulle et donc que presque sûrement, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} X_n$ converge.

3. Par indépendance, on sait que S_n suit la loi de POISSON de paramètre $\mu_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \mu_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k = \mu.$$

   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, et par continuité : $P(S_n = k) = \mathrm{e}^{-\mu_n} \frac{\mu_n^k}{k!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$, ce qui montre que S_n converge en loi vers la loi de POISSON de paramètre μ

4. On a, par indépendance, pour $N > n$,

$$V(S_N - S_n) = \sum_{k=n+1}^{N} V(X_k) = \sum_{k=n+1}^{N} \lambda_k \to \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k$$

   On utilise l'inégalité de TCHEBICHEFF.

$$P(|S_n - S| > \varepsilon) \leqslant \frac{V(S - S_n)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k}{\varepsilon^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Sujet n$^{\text{o}}$ 42

Toutes les variables aléatoires réelles considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et tout réel $t \in I$, où I est un intervalle à déterminer, on pose $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

1. Montrer que $[-1, 1]$ est inclus dans I.
2. Déterminer G_X lorsque X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer I.
3. Montrer que si X et Y sont indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$$

4. (a) Pour tout $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, établir l'encadrement : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k)t^{k-n} \leqslant t\,P(X > n)$.

   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_X(t) \underset{t\to 0}{=} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k)t^k\right) + o(t^n)$.

   (b) En déduire que si X et Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$, possèdent la même fonction génératrice alors elles suivent la même loi.

Soit $p \in]0, 1[$; on note $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_k et telle que $P(N = k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On définit les variables aléatoires $S_0 = 0$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $S(\omega) = S_{N(\omega)}$. On admet que S ainsi définie est une variable aléatoire.

5. (a) On note $E_{(N=n)}(\cdot)$ l'espérance conditionnelle sachant $(N = n)$.
   Montrer que : $\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$, $E_{(N=n)}(t^S) = (pt + q)^n$.
   En déduire que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a : $G_S(t) = G_N(pt + q)$.

   (b) Justifier que pour tout $t \in [0, 1]$, $G_{N-S}(t) = G_N(qt + p)$.

On suppose désormais que S et $N - S$ sont indépendantes et que G_N est dérivable en 1.
On pose pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = \ln(G_N(1 - t))$.

6. (a) Montrer que $f(0) = 0$ et que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = f(pt) + f(qt)$.

   (b) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(p^k q^{n-k} t)$.

7. Soit $\varepsilon > 0$.

   (a) Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in [0, \alpha]$, $|f(x) - f'(0)x| \leqslant \varepsilon x$.

   (b) On fixe $t \in [0, 1]$. En déduire que si n est assez grand :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], |f(p^k q^{n-k} t) - f'(0)p^k q^{n-k} t| \leqslant \varepsilon p^k q^{n-k}$$

   Conclure que $f(t) = f'(0)t$.

   (c) En déduire que N suit une loi de Poisson.

Solution du sujet n° 42

1. Si $|t| \leqslant 1$, $|P(X=n)t^n| \leqslant P(X=n)$, ce qui montre que G_X est au moins définie sur $[-1,1]$.
2. Si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, on a $\forall t \in [0;1]\,, G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$ et $I = \mathbb{R}$.
3. $\forall t \in [0;1]\,, G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = \mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(t^Y) = G_X(t)G_Y(t)$ par indépendance de X et Y (et donc de t^X et t^Y par le lemme des coalitions).
4. (a) On a : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} P([X=k])t^{k-n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k)t = tP(X>n)$ car $k-n \geqslant 1$ et $t \in [0,1]$.

   Donc : $G_X(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k P(X=k) = t^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^{k-n}P(X=k) = o(t^n)$, car $P(X>n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (b) Si X et Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$, possèdent la même fonction génératrice, alors par unicité du DL, elles suivent la même loi.
5. (a) La loi conditionnelle de S conditionné par $[N=n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Par le théorème de transfert
$$\mathbb{E}_{[N=n]}(t^S) = \sum_{k=0}^{n} t^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pt)^k q^{n-k} = (pt+q)^n$$
   On a alors par la formule de l'espérance totale pour $t \in [0,1]$,
$$G_S(t) = E(t^s) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_{[N=n]}(t^S)P(N=n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(pt+q)^n P(N=n) = G_N(pt+q)$$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(q)$. On applique alors l'égalité précédente à $N-S$ en inversant les rôles de p et de q.
6. (a) On a $f(0) = \ln(G_N(1)) = \ln(1) = 0$. Et $\forall t \in [0;1]\,, f(t) = \ln(G_{N-S}(1-t)G_S(1-t))$ d'après la question 1.b car $N-S$ et S sont indépendantes. D'où : $f(t) = \ln(G_N(q(1-t)+p)G_N(p(1-t)+q)) = \ln(G_N(1-qt)G_N(1-pt)) = f(qt)+f(pt)$.

   (b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en utilisant dans l'hérédité la question précédente.
7. (a) f est dérivable en 0 car G_N est dérivable en 1. Alors elle admet pour développement limité : $f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)$ d'où puisque $f(0) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in [0,\alpha]$, $|f(x) - f'(0)x| \leqslant \varepsilon x$.

   (b) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et $t \in [0,1]$, $p^k q^{n-k} t \leqslant (\max(p,q))^n$, or $(\max p,q))^n$ tend vers 0, donc à partir d'un certain rang, $\forall k \in \{0,...,n\}$ et $\forall t \in [0,1]$, $p^kq^{n-k}t \in [0;\alpha]$.

   On a alors : $|f(p^kq^{n-k}t) - f'(0)p^kq^{n-k}t| \leqslant \varepsilon p^kq^{n-k}t \leqslant \varepsilon p^kq^{n-k}$ car $t \in [0;1]$. Alors, à partir d'un certain rang :
$$|f(t)-f'(0)t| = \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(p^kq^{n-k}t) - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}f'(0)t\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|f(p^kq^{n-k}t)-f'(0)p^kq^{n-k}t|$$
   d'où $|f(t)-f'(0)t| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon p^kq^{n-k} = \varepsilon$ et ceci pour tout $\varepsilon > 0$, donc on a : $f(t) - f'(0)t = 0$.

   (c) On a donc : $\forall t \in [0;1]\,, f(t) = f'(0)t = \ln(G_N(1-t)) \Leftrightarrow G_N(1-t) = e^{f'(0)t} \Leftrightarrow G_N(x) = e^{f'(0)(1-x)}$ avec $x = 1-t$. D'où : $G_N(x) = e^{-f'(0)(x-1)}$. D'après les questions 1a et 1d, $N \rightsquigarrow \mathcal{P}(-f'(0))$. On a bien $-f'(0) > 0$.

Sujet n° 45

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à densité, indépendantes et de même loi, de densité f et de fonction de répartition F nulle sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On suppose que les variables X_k admettent une espérance m $(m > 0)$.
On note a un réel strictement positif et N l'application de Ω dans $\mathbb{N}$ définie par, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$N(\omega) = \begin{cases} k & \text{si } k \text{ est le plus petit entier tel que } X_k(\omega) > a \\ 0 & \text{si un tel événement ne se produit jamais} \end{cases}$$

1. (a) Vérifier que N est une variable aléatoire.
   (b) Calculer $P([N = 0])$.
   (c) Donner la loi de N et la valeur de $\mathbb{E}(N)$.
2. On définit l'application Y de Ω dans $\mathbb{R}$ par : $\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = X_{N(\omega)}\big(\omega\big)$.
   On admet que Y est une variable aléatoire.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y.
   (b) Vérifier que Y est à densité et donner une densité de Y.
3. Un joueur effectue des parties successives d'un jeu de telle sorte qu'à l'issu de la k-ième partie $(k \in \mathbb{N}^*)$ le total de ses gains est égal à X_k, où les $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifient les hypothèses du début de l'énoncé.
   À chacun des tours du jeu, il doit miser une somme fixe c pour participer $(0 < c < m)$.
   Il décide de s'arrêter quand, pour la première fois, la variable X_k dépasse un seuil a $(a > 0)$ qu'il s'est fixé à l'avance.
   On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
   (a) Vérifier que G admet une espérance et que :
   $$\mathbb{E}(G) = \frac{1}{1 - F(a)} \left[-c + \int_a^{+\infty} t f(t) dt \right]$$
   (b) On note K la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
   $$\forall a > 0, \quad K(a) = \int_a^{+\infty} t f(t) dt - a[1 - F(a)]$$
   Étudier les variations de K, en précisant les limites aux bornes.
   (c) En déduire qu'il existe une valeur a_0 de a (qu'on ne cherchera pas à calculer) pour laquelle $\mathbb{E}(G)$ est maximal.

Solution du sujet n° 45

1. (a) N est bien une application et, si k non nul : $[N=k]=[X_1 \leqslant a] \cap \ldots [X_{k-1} \leqslant a] \cap [X_k > a]$ qui est bien un événement comme intersection fini d'événements. De plus $[N=0]=\bigcap_{k=1}^{+\infty}[X_k \leqslant a]$.
   $[N=0]$ est donc un événement comme intersection dénombrable d'événements.

   (b) On a donc : $P([N=0])=P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}[X_k \leqslant a]\right)$ et d'après le corollaire du théorème de la limite monotone : $P([N=0])=\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \leqslant a]\right)$.
   Or les variables X_k sont indépendantes donc $P([N=0])=\big(F(a)\big)^n$. Comme F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $0 \leqslant F(a) < 1$. On en déduit $P([N=0])=0$.

   (c) Pour $k=1$, on a $[N=1]=[X_1>a]$ d'où : $P([N=1])=P([X_1>a])=1-F(a)$.
   Pour $k \geqslant 2$: $[N=k]=[X_1 \leqslant a] \cap \ldots [X_{k-1} \leqslant a] \cap [X_k > a]$ et par indépendance :
   $P([N=k])=\big(F(a)\big)^{k-1}\big(1-F(a)\big)$. N suit la loi géométrique $\mathcal{G}(1-F(a))$ et $\mathbb{E}(N)=\dfrac{1}{1-F(a)}$.

2. (a) Comme N est le premier indice k où $X_k > a$, on a $Y(\Omega)=[a,+\infty[$.
   Pour $y \geqslant a$, on utilise le système complet d'événements $\{[N=n]\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et la formule des probabilités totales.
   On a donc, pour $y \geqslant a$: $F_Y(y)=\sum_{n=1}^{+\infty} P\big([Y \leqslant y] \cap [N=n]\big)=\sum_{n=1}^{+\infty} P\big([X_N \leqslant y] \cap [N=n]\big)$.
   D'où $F_Y(y)=\sum_{n=1}^{+\infty} P\big([X_n \leqslant y] \cap [N=n]\big)=\sum_{n=1}^{+\infty} P\big([X_1 \leqslant a] \cap \ldots \cap [X_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant y]\big)$.
   Par indépendance, on a donc finalement : $F_Y(y)=\dfrac{F(y)-F(a)}{1-F(a)}\mathbb{1}_{[a,+\infty[}$.

   (b) On vérifie facilement que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en a.
   On trouve une densité en dérivant sur $]-\infty,a[$ et sur $]a,+\infty[$ et ajoutant une valeur arbitraire en a.
   On obtient par exemple comme densité $f_Y(y)=\dfrac{f(y)}{1-F(a)}\mathbb{1}_{[a,+\infty[}$.

3. (a) On a : $G=X_N-cN$ avec $\mathbb{E}(X_N)=\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)dt=\int_a^{+\infty} t f(t)dt$
   La variable G admet donc une espérance et, par linéarité : $\mathbb{E}(G)=\mathbb{E}(X_N))-c\mathbb{E}(N)$. En remplaçant, on trouve bien : $\mathbb{E}(G)=\dfrac{1}{1-F(a)}\left[-c+\int_a^{+\infty} t f(t)dt\right]$.

   (b) On trouve $K'(a)=-[1-F(a)]$ qui est négatif.
   De plus : $\lim_{a\to 0^+} K(a)=m$ et $a(1-F(a))=a\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Or : $0 \leqslant a\int_a^{+\infty} f(t)dt \leqslant \int_a^{+\infty} t f(t)dt$.
   Comme $\int_a^{+\infty} t f(t)dt$ est un reste d'intégrale convergente, on a donc $\lim_{a\to+\infty} a(1-F(a)=0$.
   Conclusion : $\lim_{a\to+\infty} K(a)=0$.

   (c) On a donc $\mathbb{E}(G)=H(a)$ avec : $H(a)=\dfrac{1}{1-F(a)}\left[-c+\int_a^{+\infty} t f(t)dt\right]$.
   On trouve, après calcul : $H'(a)=\dfrac{f(a)}{(1-F(a))^2}\left[-c+\int_a^{+\infty} t f(t)dt-a(1-F(a)\right]=\dfrac{f(a)}{(1-F(a))^2}[-c+K(a)]$.
   $H'(a)$ est donc du signe de $-c+K(a)$. Le tableau de variation de H montre alors qu'il existe un maximum atteint en un point a_0.

Sujet n$^{\text{o}}$ 47

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Pour chaque $k\in\mathbb{N}^*$, la variable X_k suit une loi gamma de paramètre ν_k ($\nu_k>0$).

1. Donner l'espérance et la variance de X_k.
2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n=X_1\times\cdots\times X_n$. Déterminer $Y_n(\Omega)$. Déterminer $E(Y_n)$ et de $E(Y_n^2)$.
3. (a) Soit ε un réel strictement positif. Justifier l'inégalité

$$P\left(Y_n\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{\nu_1\times\cdots\times\nu_n}{\varepsilon}.$$

   (b) On suppose que les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(\nu_k)$ tendent vers $-\infty$, quand $n\to+\infty$.
   Qu'en déduit-on pour la suite (Y_n) ?

4. Dans cette question on suppose que la série de terme général $\dfrac{1}{1+\nu_k}$ est convergente.
   On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui possèdent des moments d'ordre 2, alors la variable XY admet une espérance et :

$$|E(XY)|\leqslant\sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}.$$

   (a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $\nu_1\times\cdots\times\nu_n\geqslant\nu_1\times\cdots\times\nu_{n_0}$ pour tout $n\geqslant n_0$ (dans un premier temps on pourra étudier la convergence de la suite (ν_n)). On pose $r=\dfrac{1}{2}(\nu_1\times\cdots\times\nu_{n_0})$.

   (b) Montrer que $Y_n\leqslant\dfrac{1}{2}E(Y_n)+Y_n\mathbb{1}_{[Y_n\geqslant r]}$ pour tout $n\geqslant n_0$ (où, pour tout événement $A\in\mathcal{A}$, on a noté $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon).
   En déduire que pour $n\geqslant n_0$ on a

$$P(Y_n\geqslant r)\geqslant\frac{1}{4}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{1+\nu_k}\right).$$

   (c) On note u_n le membre de droite de l'inégalité précédente. Montrer que la suite $(\ln(u_n))$ est convergente.

   (d) Déduire de ce qui précède que la suite (Y_n) ne converge pas en probabilité vers 0.

Solution du sujet n° 47

1. D'après le cours, on a $E(X_k) = V(X_k) = \nu_k$, et par la formule de Huygens $E(X_k^2) = \nu_k + \nu_k^2$.
2. Les variables X_k étant positives, il est clair que Y_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (support). Comme les variables $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, il vient $E(Y_n) = E(X_1) \times \cdots \times E(X_n) = \nu_1 \times \cdots \times \nu_n$.
   Avec le lemme des coalitions et la formule de Huygens, on obtient
$$E(Y_n^2) = E(X_1^2) \times \cdots \times E(X_n^2) = \prod_{k=1}^{n} (V(X_k) + E(X_k)^2) = \prod_{k=1}^{n} (\nu_k + \nu_k^2).$$
3. (a) Comme Y_n est positive et admet une espérance, en appliquant l'inégalité de Markov, on obtient
$$P\left(Y_n \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{E(Y_n)}{\varepsilon} = \frac{\nu_1 \times \cdots \times \nu_n}{\varepsilon}.$$
   (b) D'après la question précédente et l'hypothèse, on a $P\left(Y_n \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(\nu_k)\right) \longrightarrow 0.$
   On en déduit que la suite de variables aléatoires positives (Y_n) converge en probabilité vers 0.
4. (a) Comme la série de terme général $\dfrac{1}{1+\nu_k}$ est convergente, la suite $\dfrac{1}{1+\nu_k}$ converge nécessairement vers 0^+, et par conséquent la suite (ν_k) tend vers $+\infty$. Il existe donc un entier n_0 a partir duquel $\nu_n \geqslant 1$. On voit donc que cet entier n_0 convient pour satisfaire l'inégalité exigée pour tout $n \geqslant n_0$.
   (b) Compte tenu de la définition de r, pour $n \geqslant n_0$ nous avons
$$Y_n = Y_n \mathbb{1}_{[Y_n < r]} + Y_n \mathbb{1}_{[Y_n \geqslant r]} \leqslant \frac{1}{2} E(Y_n) + Y_n \mathbb{1}_{[Y_n \geqslant r]}.$$
   Comme l'espérance est croissante, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance qui nous a été donnée, pour $n \geqslant n_0$ on obtient
$$0 \leqslant \frac{1}{2} E(Y_n) \leqslant E\left(Y_n \mathbb{1}_{[Y_n \geqslant r]}\right) \leqslant \sqrt{E\left(Y_n^2\right)} \sqrt{E\left(\mathbb{1}_{[Y_n \geqslant r]}\right)} = \sqrt{E\left(Y_n^2\right)} \sqrt{P(Y_n \geqslant r)}.$$
   Ce qui conduit à
$$P(Y_n \geqslant r) \geqslant \frac{1}{4} \prod_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{1+\nu_k} = \frac{1}{4} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{1+\nu_k}\right)$$
   (c) On a $\ln(u_n) = -2\ln(2) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1-(1+\nu_k)^{-1})$. On voit que $\ln(1-(1+\nu_k)^{-1})$ est toujours négatif et est équivalent à $-(1+\nu_k)^{-1}$ qui est le terme général d'une série convergente. Le cours nous permet alors de conclure que la suite $(\ln(u_n))$ tend vers un réel ℓ.
   (d) Des questions précédentes, on déduit que la suite (Y_n) ne converge pas en probabilité vers 0 puisque $r > 0$ et que la suite (u_n) converge vers $e^\ell > 0$. Comme la suite (u_n) est décroissante, on pouvait aussi dire que pour $n \geqslant n_0$
$$P(Y_n \geqslant r) \geqslant u_n \geqslant e^\ell > 0.$$

Sujet n° 50

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ qui sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X_n suit la loi uniforme sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right]$. Pour $n \geqslant 1$, on considère les variables aléatoires

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2, \qquad T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i - X_j)^2 \text{ et } U_n = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |X_i - X_j|\,.$$

1. Donner l'espérance et la variance de X_n.
2. Justifier chacune des inégalités suivantes :

$$|Y_n| \leqslant 1, Z_n \leqslant \frac{1}{3} \text{ et } U_n \leqslant 1.$$

3. Exprimer la variable aléatoire T_n en fonction des variables aléatoires Y_n et Z_n.
4. Soit M un réel. On considère une suite croissante de variables aléatoires $(V_n)_{n\geqslant 1}$ telles que $V_n(\omega) \leqslant M$ pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $n \geqslant 1$.
   (a) Soit $\omega \in \Omega$. Justifier la convergence de la suite $(V_n(\omega))_{n\geqslant 1}$. On notera $V(\omega)$ la limite de cette suite.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit l'événement E_n en posant $E_n = [V_n \leqslant x]$. Prouver que $[V \leqslant x] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$.
   En déduire que V est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (c) Montrer que la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers V.
5. En déduire que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ (respectivement $(U_n)_{n\geqslant 1}$) converge en loi vers une variable aléatoire Z (respectivement U).
6. *Soit* $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ *(*$n \geqslant 2$*). On admet l'inégalité suivante :*

$$\max_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} |x_k - x_\ell|^2 \leqslant \frac{2}{n} \sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} (x_k - x_\ell)^2.$$

   (a) En déduire que $U^2 \leqslant 2Z$.
   (b) Montrer l'existence d'une suite réelle $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergeant vers 0 et telle que pour tout $\omega \in \Omega$,

$$Z_n(\omega) \leqslant Z(\omega) \leqslant Z_n(\omega) + v_n$$

   Justifier l'existence de l'espérance de Z et la déterminer.
   (c) Montrer que :

$$P\left(U > \frac{2}{3}\right) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Solution du sujet n° 50

1. Comme X_n suit une loi uniforme sur $\left[-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right]$, il vient $E(X_n) = 0$ et $V(X_n) = \frac{1}{12 \times 4^{n-1}} = \frac{1}{3 \times 4^n}$.

2. On a successivement : $|Y_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |X_n| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, $0 \leqslant Z_n \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$ et $U_n \leqslant \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1}{2^{i \wedge j - 1}} = 1$.

3. On voit que $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (X_i^2 + X_j^2 - 2X_iX_j) = \frac{1}{n}\left[nZ_n + nZ_n - 2Y_n^2\right] = 2Z_n - \frac{2}{n}Y_n^2$.

4. (a) Soit $\omega \in \Omega$, la suite $(V_n(\omega))_{n \geqslant 1}$ est croissante et majorée, elle est donc convergente.

   (b) La croissance de la suite $(V_n)_{n \geqslant 1}$ implique l'inclusion $[V \leqslant x] \subseteq E_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, d'où $[V \leqslant x] \subseteq \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$. Si ω appartient à cette intersection, on a $V_n(\omega) \leqslant x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et par passage à la limite $V(\omega) \leqslant x$. On a donc l'inclusion inverse et finalement l'égalité. Comme chaque $E_n \in \mathcal{A}$ puisque V_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on voit que $[V \leqslant x] \in \mathcal{A}$ comme intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$. Il en résulte que V est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (c) La suite $(E_n)_{n \geqslant 1}$ est clairement décroissante. La question précédente et le théorème de la limite monotone donnent $F_V(x) = P([V \leqslant x]) = \lim_{n \to +\infty} P(E_n) = \lim_{n \to +\infty} F_{V_n}(x)$. La suite $(V_n)_{n \geqslant 1}$ converge donc en loi vers V.

5. En 2, on a montré que les variables aléatoires Z_n et U_n étaient bornées, de plus, les suites $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ et $(U_n)_{n \geqslant 1}$ sont croissantes. La question précédente nous assure qu'elles convergent en loi respectivement vers deux variables aléatoires Z et U.

6. (a) Avec l'inégalité donnée, on voit que $U_n(\omega)^2 \leqslant T_n(\omega) = 2Z_n(\omega) - \frac{2}{n}Y_n(\omega)^2$ (cf. la question 3). D'après la question 2, on a $Y_n(\omega)^2 \leqslant 1$, il suffit donc de passer à la limite pour obtenir l'inégalité souhaitée.

   (b) Par croissance, on a $Z_n \leqslant Z$ et comme $|X_n(\omega)| \leqslant \frac{1}{2^n}$, on peut prendre $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3 \times 4^n}$. On voit que $E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$. Comme Z_n est positive, on remarque au passage que ceci implique que l'espérance de Z existe par domination. Par croissance de l'espérance, on obtient $E(Z_n) \leqslant E(Z) \leqslant E(Z_n) + v_n$ et par passage à la limite on trouve $E(Z) = \frac{1}{9}$.

   (c) En utilisant la question 6.(a), la positivité de U et l'inégalité de Markov, il vient :

$$P\left(U > \frac{2}{3}\right) = 1 - P\left(U \leqslant \frac{2}{3}\right) = 1 - P\left(U^2 \leqslant \frac{4}{9}\right) \geqslant 1 - \frac{9E(U^2)}{4} \geqslant 1 - \frac{9E(Z)}{2} = \frac{1}{2}.$$

SUJET N° 53

Dans tout l'exercice les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit $p \in]0,1[$. On notera $q = 1 - p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient X_n et Y_n des variables aléatoires telles que X_n suit

la loi binomiale de paramètres (n, p) et $Y_n = n - X_n$.
On considère également une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, N est indépendante de X_n.
On considère enfin les variables aléatoires $X_N : \omega \mapsto X_{N(\omega)}(\omega)$ et $Y_N : \omega \mapsto Y_{N(\omega)}(\omega)$.

1. Quelle est la loi de Y_n pour tout $n \in \mathbb{N}$?
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\quad P(X_N = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X_n = k)P(N = n).$
3. Soit $\lambda > 0$. On suppose, **dans cette question uniquement**, que N suit la loi de POISSON de paramètre λ.
   (a) Déterminer les lois de X_N et Y_N.
   (b) Montrer que X_N et Y_N sont indépendantes.
4. Dans cette question, on suppose **uniquement** que X_N et Y_N sont indépendantes.
   (a) montrer qu'il existe deux suites de réels (u_k) et (v_j) telles que :
   $$\forall (k, j) \in \mathbb{N}^2 \quad P(N = k + j) = \frac{u_k v_j}{(k + j)!}.$$
   Indication : on pourra considérer $P\left((X_N = k) \cap (Y_N = j)\right)$, pour $j, k \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que la suite $(k!P(N = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
   (c) En déduire que N suit une loi de POISSON.

Solution du sujet n^o 53

1. On a $Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et, pour tout $k \in Y_n(\Omega)$:

$$P(Y_n = k) = P(X_n = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} q^k = \binom{n}{n-k} p^{n-k} q^k.$$

donc Y_n suit la loi binomiale de paramètres (n, q).

2. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[N = n], n \in \mathbb{N}\}$, donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(X_N = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left([X_N = k] \cap [N = n]\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left([X_n = k] \cap [N = n]\right) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X_n = k)P(N = n)$$

par indépendance de N avec chaque variable X_n.

3. (a) D'après l'écriture de la question précédente on a, par indépendance,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_N = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X_n = k)P(N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$
$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^j}{j!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \text{ en posant } j = n - k$$

Par conséquent, X_N suit la loi de Poisson de paramètre λp.
De même, Y_N suit la loi de Poisson de paramètre λq.

(b) D'une part $X_N + Y_N = N$ et d'autre part, N est indépendante de chaque X_i. Par conséquent, pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$P([X_N = k] \cap [Y_N = j]) = P([N = k + j] \cap [X_{k+j} = k]) = P(N = k + j)P(X_{k+j} = k)$$
$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \times \frac{(k+j)!}{k!\,j!} p^k q^j = e^{-\lambda(p+q)} \frac{\lambda^k p^k}{k!} \times \frac{\lambda^j q^j}{j!}$$
$$= P(X_N = k)P(Y_N = j)$$

Les variables X_N et Y_N sont indépendantes.

4. (a) Pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$P([X_N = k] \cap [Y_N = j]) = P(N = k + j)P(X_{k+j} = k) = P(N = k + j) \frac{(k+j)!}{k!j!} p^k q^j.$$

En utilisant l'indépendance de X_N et Y_N, on obtient :

$$P(X_N = k)P(Y_N = j) = P(N = k + j) \frac{(k+j)!}{k!j!} p^k q^j.$$

On pose alors $u_k = \dfrac{P(X_N = k)k!}{p^k}$ et $v_j = \dfrac{P(Y_N = j)j!}{q^j}$, on obtient l'égalité demandée.

(b) On remarque tout d'abord que $v_0 \neq 0$.
En effet, si on suppose que $v_0 = 0$, alors d'après le résultat précédent, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$k!\,P(N = k) = u_k v_0 = 0$, ce qui est impossible.
On en déduit alors, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\quad (k+1)!P(N = k+1) = v_1 u_k = \dfrac{v_1}{v_0} \times k!P(N = k)$.
La suite $(k!P(N = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\lambda = \dfrac{v_1}{v_0}$.

(c) Il existe alors C telle que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(N = k) = C \dfrac{\lambda^k}{k!}$.
Comme la somme de toutes les probabilités donne 1, on obtient $C = e^{-\lambda}$ et donc N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Sujet n$^{\text{o}}$ 57

On dispose de trois pièces de monnaie : une pièce numérotée 0 pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » vaut $\dfrac{1}{2}$ et celle d'obtenir « face » vaut également $\dfrac{1}{2}$, une pièce numérotée 1 donnant « face » à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2 donnant « pile » à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier « pile » et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier « face ». On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais « pile » et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais « face ».

On suppose que l'expérience est modélisée avec un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1,1,'uin',0,m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).

   On décide de coder « pile » par 1 et « face » par 0.

   Compléter le script Scilab suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece=grand(1,1, 'uin', ---, ---)
x=1
if piece==0
        lancer=grand(1,1, 'uin', ---, ---)
        while lancer==0
           lancer=---
           x=---
        end
elseif piece==1 then x=---
end
disp(x)
```

   Justifier aussi pourquoi le programme ne comporte pas de ligne : `elsif piece==2 then - - -`.

2. (a) Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

   (b) Justifier sans calcul que Y suit la même loi que X.

3. Covariance de X et Y.

   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire XY.

   (b) Établir que XY possède une espérance, donner sa valeur, puis vérifier que $\text{Cov}\,(X, Y) = 0$.

4. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

5. Déterminer la loi de $|X - Y|$.

SOLUTION DU SUJET N° 57

1. L'égalité piece==0 signifie que l'on joue avec la pièce équilibrée et piece==1 signifie que l'on joue avec la pièce donnant "face" à coup sûr, donc X prendra la valeur 0. Par suite :

```
piece=grand(1,1,'uin',0,2)
x=1
if piece==0
        lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
        while lancer==0
           lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
           x=x+1
        end
elseif piece==1 then x=0
end
disp(x)
```

   Si l'on joue avec la pièce 2, il est certain que X prend la valeur 1 mais comme la variable informatique x a été initialisée à 1, il n'y a rien à ajouter.

2. (a) On utilise la formule des probabilités totales ou on explique... Dans les deux cas, on trouve : $\forall n \geqslant 2, P(X=n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n, P(X=1) = \frac{1}{2}$ et avec la somme des probabilités, on a finalement $P(X=0) = \frac{1}{3}$. Un calcul fait avec prudence à cause des deux premiers termes donne $E(X) = 1$.
   (b) X et Y suivent la même loi : symétrie des pièces truquées et équilibre de la pièce numéro 0.

3. (a) Remarquons tout d'abord que, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $(XY)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
   $(XY=0) = (X=0) \cup (Y=0)$, donc XY peut prendre la valeur 0 .
   On a $([X=1] \cap [Y=1]) = \varnothing$, ce qui montre que XY ne peut pas prendre la valeur 1.
   D'autre part, XY peut prendre toutes les autres valeurs entières donc $(XY)(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{1\}$.
   On a vu que $(XY=0) = (X=0) \cup (Y=0)$ donc, par incompatibilité : $P(XY=0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
   $([X=1], [Y=1])$ est un système complet d'événements et la formule des probabilités totales donne : $\forall n \geqslant 2, P(XY=n) = P([XY=n] \cap [X=1]) + P([XY=n] \cap [Y=1])$.
   On en déduit : $\forall n \geqslant 2, P(XY=n) = P([Y=n] \cap [X=1]) + P([X=n] \cap [Y=1])$. Comme n est supérieur ou égal à 2, on a : $(Y=n) \subset (X=1)$ et $(X=n) \subset (Y=1)$.
   On obtient donc : $\forall n \geqslant 2, P(XY=n) = P(Y=n) + P(X=n) = 2P(X=n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   (b) On a : $\forall n \geqslant 2, nP(XY=n) = \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
   La série de terme général $nP(XY=n)$ est donc absolument convergente et XY possède une espérance. Après calculs, on obtient : $E(XY) = 1$. Donc $\text{Cov}(X,Y)$ existe et vaut $1 - 1 \times 1 = 0$.

4. $P([X=1] \cap [Y=1]) = 0$ et $P(X=1)P(Y=1) = \frac{1}{4}$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

5. $|X-Y|$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De plus, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :
   $$(|X-Y|=n) = ([X=1] \cap [Y=n+1]) \cup ([Y=1] \cap [X=n+1])$$
   $$\cup ([X=1] \cap [Y=-n+1]) \cup ([Y=1] \cap [X=-n+1]).$$
   Si $n=1$, on a : $P(|X-Y|=1) = P(Y=2) + P(Y=0) + P(X=2) + P(X=0) = \frac{5}{6}$.
   Si n est supérieur ou égal à 2, il reste : $P(|X-Y|=n) = P(Y=n+1) + P(X=n+1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Sujet n° 59

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ telle que $\big(\mathbb{P}(X_n = k)\big)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est proportionnelle à $(k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

1. Déterminer la loi de X_n et calculer son espérance et sa variance.
2. Expliciter la fonction génératrice G_n de X_n définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \Big[\mathbb{P}(X_n = k)\, t^k\Big]$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n = \exp\big(X_n/n\big)$.

3. Exprimer $\mathbb{E}(Y_n)$ à l'aide de G_n et déterminer sa limite quand $n \longrightarrow +\infty$.
4. On donne $\ln(2) \approx 0,69$. Comparer

$$L = \lim_{n \to +\infty} \Big[\mathbb{E}\big(\exp(X_n/n)\big)\Big] \quad \text{et} \quad L' = \lim_{n \to +\infty} \Big[\exp\Big(\mathbb{E}\big(X_n/n\big)\Big)\Big].$$

5. (a) Justifier que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
   (b) Retrouver ainsi la comparaison précédente.

Solution du sujet n° 59

1. Si $\big(\mathbb{P}(X_n = k)\big) = \alpha(k)$, on a :

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha\, k \implies \alpha = \frac{2}{n\,(n+1)}$$

d'où,

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2}{n\,(n+1)} = \frac{2n+1}{3}$$

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^3}{n\,(n+1)} = \frac{n\,(n+1)}{2} \quad \text{d'où} \quad \mathbb{V}(X_n) = \frac{n^2+n-2}{18}$$

2. Par dérivation de $t \mapsto \sum_{k=1}^{n} t^k$, pour $t \neq 1$, on a :

$$G_n(t) = \frac{2}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, t^k = \frac{2\,t}{n\,(n+1)} \, \frac{n\, t^{n+1} - (n+1)\, t^n + 1}{(1-t)^2}$$

Et par ailleurs $G_n(1) = 1$.

3. Par théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} \Big[\mathrm{e}^{k/n}\, \mathbb{P}(X_n = k) \Big] = G_n\big(\mathrm{e}^{1/n}\big)$$

puis par développement limité,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{2\,\mathrm{e}^{1/n}}{n\,(n+1)} \, \frac{n\,\mathrm{e}^{1+1/n} - (n+1)\,\mathrm{e} + 1}{(1-\mathrm{e}^{1/n})^2} = 2\,\mathrm{e}^{1/n} \, \frac{n\,\mathrm{e}\,(\mathrm{e}^{1/n} - 1) + 1 - \mathrm{e}}{n\,(n+1)\,(1-\mathrm{e}^{1/n})^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

4.
$$\mathbb{E}\left(\exp\Big(\frac{X_n}{n}\Big)\right) = \mathbb{E}(Y_n) \xrightarrow[n\,\infty]{} 2 \quad \text{et} \quad \exp\left[\mathbb{E}\Big(\frac{X_n}{n}\Big)\right] = \exp\left[\frac{2n+1}{3n}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\Big(\frac{2}{3}\Big) < 2$$

car $\ln(2) \approx 0,69 > 2/3$; donc $L' < L$.

5. (a) Car $(\exp)'' = \exp > 0$.

   (b) Par convexité, par récurrence sur $n \geqslant 1$, on en déduit que, pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$\left(\forall k,\ p_k \in [0,1] \text{ et } \sum_{k=1}^{n} p_k = 1\right) \implies \exp\left[\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right] \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[p_k \exp(x_k)\right].$$

   Avec $x_k = k/n$ et $p_k = \mathbb{P}(X = k)$, on obtient :

$$\exp\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\, p_k\right] \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[p_k \, \exp\Big(\frac{k}{n}\Big)\right]$$

   d'où l'inégalité large à la limite : $L' \leqslant L$.

Sujet n° 61

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour toute variable aléatoire X, on note φ_X l'application définie pour tout réel t tel que la série converge, par

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$$

1. Montrer que φ_X est définie au moins sur le segment $[-1, 1]$.
2. Un exemple. On suppose dans cette question que $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1/2$. Calculer φ_X ainsi que son domaine de définition I.
3. Montrer que φ_X admet un développement limité en 0 à tout ordre et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)t^k + o(t^n)$$

4. Dans cette question, la variable aléatoire Y vérifie $\varphi_Y(t) = 2 - \sqrt{2 - t}$.
   (a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre n de $t \to (1 + t)^{1/2}$.
   (b) En déduire le développement limité en 0 à l'ordre n de φ_Y.
   (c) Déterminer la loi de Y.
5. On suppose maintenant que les deux variables aléatoires précédentes X (définie dans la question 2) et Y sont indépendantes. On note $S = X + Y$. Déterminer la loi de S.

Solution du sujet n° 61

1. Pour tout $t \in [-1,1]$, on a $|P(X=n)t^n| \leqslant P(X=n)$. La série numérique $\sum_n P(X=n)$ étant convergente, φ_X est définie sur un intervalle I contenant $[-1,1]$, donc 0.

2. On a $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $P(X=k)=P(X+1=k+1)=\dfrac{1}{2^{k+1}}$. Ainsi $\varphi_X(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-t/2}=\frac{1}{2-t}$.
   Ce calcul est valable pour $|t|<2$ (série géométrique de raison $t/2$.)

3. On peut écrire $\varphi_X(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)t^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)t^k=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)t^k+R_n(t)$.

   On a $R_n(t)=t^{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}a_{n+1-k}t^{n+1-k}=o(t^n)$ au voisinage de 0. En effet pour $|t|<1$

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty}a_{n+1-k}t^{n+1-k}\right|\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}|t|^{n+1-k}=\frac{1}{1-|t|}$$

   Donc φ_X admet un développement limité en 0 à tout ordre et par unicité du DL, $\dfrac{\varphi_Y^{(n)}(0)}{n!}=P(X=n)$.

   (a) Le développement limité en 0 de $x\mapsto(1+x)^\alpha$ étant au programme, on sait que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et x au voisinage de 0,

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n)$$

   Ici pour $\alpha=1/2$, il vient $(1+t)^{1/2}=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(2k)!}{(2k+1)(k!)^2 4^k}t^k+o(t^n)$.

   (b) On remarque que la fonction φ_Y est égale à $2-\sqrt{2}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{1/2}$. Grâce à la question précédente (en remplaçant t par $-t/2$), on obtient

$$\varphi_Y(0)=2-\sqrt{2},\ \text{ et } a_n=\frac{\sqrt{2}}{(2n-1)8^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

   (c) Par unicité du DL et la dernière question, $P(Y=n)=\dfrac{\sqrt{2}}{(2n-1)8^n}\binom{2n}{n}$.

4. on remarque de $\varphi_X(t)=E(t^X)$. Par le lemme des coalitions et l'indépendance de X et Y :

$$\varphi_S(t)=\varphi_{X+Y}(t)=E(t^X)E(t^Y)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=\frac{1}{1-t/2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-1/2}$$

   Un calcul analogue au calcul précédent donne

$$\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-1/2}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{8^n}\binom{2n}{n}t^n,\ \text{ pour } |t|<1$$

   et

$$\varphi_S(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{8^n}\binom{2n}{n}\right)t^n,\ \text{ pour } |t|<1$$

   Finalement $P(S=n)=\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{8^n}\binom{2n}{n}$.