TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE

3

PROBABILITÉS

Sujet 3.1

Pour tout x réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\}$ la différence $x - \lfloor x \rfloor$.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes à valeurs dans $[0,1[$, qui suivent la loi uniforme sur cet intervalle.

1. Déterminer la loi de $X+Y$ puis de $\lfloor X+Y \rfloor$ et calculer l'espérance $E\big(\lfloor X+Y \rfloor\big)$.
2. Déterminer la loi de $\{X+Y\}$.

   On considère une suite $(X_k)_{k \geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes de même loi que X.

   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

3. (a) Écrire une fonction Python `simulPE2S_n(n)` qui réalise la simulation de $\lfloor S_n \rfloor$.

   (b) On exécute le programme suivant

```
y = np.zeros(10)
for n in range(1,11):
        esp = 0
        for k in range(10000):
                esp += simulPE2S_n(10*n)
                y[n-1] = esp/10000
print(y)
```

   qui affiche `[ 4.5009 9.5047 14.4965 19.4956 24.464 29.5111 34.4629 39.4877 44.4961 49.4689]`
   En admettant que $E\left(\lfloor S_n \rfloor\right)$ est une fonction affine de n, faire une conjecture sur cette espérance.

4. (a) Établir que pour tout entier n et tout x réel, $\lfloor n+x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.

   (b) Montrer que pour tout x réel et $y \in [0,1[$, $\{x+y\} = \{\{x\}+y\}$.

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de $\{S_n\}$ puis $E\left(\lfloor S_n \rfloor\right)$.

6. (a) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\{S_n\}}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

   (b) En déduire que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\lfloor S_n \rfloor}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers $\dfrac{1}{2}$.

Solution du sujet 3.1

1. $X+Y$ est à valeurs dans $[0,2[$ et une densité de $X+Y$ est h, définie par, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t) \mathrm{d}t = \int_0^1 f_X(x-t) \mathrm{d}t$$

Or $f_X(x-t) = 1$ si $x-t \in [0,1]$, 0 sinon. D'où :

$$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \text{ ou } x > 2 \\ x \text{ si } x \in [0,1] \\ 2-x \text{ si } x \in]1,2] \end{cases}$$

$\lfloor X+Y \rfloor(\Omega) \subset \{0,1\}$ et $P(\lfloor X+Y \rfloor = 0) = P(X+Y \in [0,1[) = P(X+Y<1) = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.
Donc $P(\lfloor X+Y \rfloor = 1) = \frac{1}{2}$ aussi, d'où $\lfloor X+Y \rfloor \rightsquigarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, et $E(\lfloor X+Y \rfloor) = \frac{1}{2}$.

2. On utilise le SCE $\Big(\lfloor X+Y \rfloor = 0, \lfloor X+Y \rfloor = 1\Big)$. Si $x \in [0;1[$,

$$\begin{aligned} P(\{X+Y\} \leqslant x) &= P\Big((\{X+Y\} \leqslant x) \cap (\lfloor X+Y \rfloor = 0)\Big) + P\Big((\{X+Y\} \leqslant x) \cap (\lfloor X+Y \rfloor = 1)\Big) \\ &= P(0 \leqslant X+Y \leqslant x) + P(1 \leqslant X+Y \leqslant 1+x) = \int_0^x t\mathrm{d}t + \int_1^{1+x} (2-t)\mathrm{d}t = x. \end{aligned}$$

Si $x<0$, $P(\{X+Y\} \leqslant x) = 0$, et si $x \geqslant 1, P(\{X+Y\} \leqslant x) = 1$. D'où $\{X+Y\} \rightsquigarrow \mathcal{U}([0;1[)$.

3. (a)

```python
import numpy.random as rd, numpy as np
def simulPE2S_n(n):
        S=0
        for k in range(n):
                S+=rd.random()
        return np.floor(S)
        #ou S=sum(rd.random(n))

```

   (b) On conjecture que $E(\lfloor S_n \rfloor)$ est égal à $\frac{n-1}{2}$.

4. (a) On a : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, d'où $n + \lfloor x \rfloor \leqslant n + x < (n + \lfloor x \rfloor) + 1$.
   (b) $\{x+y\} = \{\lfloor x \rfloor + \{x\} + y\} = \lfloor x \rfloor + \{x\} + y - \lfloor \lfloor x \rfloor + \{x\} + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \{x\} + y - \lfloor x \rfloor - \lfloor \{x\} + y \rfloor = \{\{x\} + y\}$

5. On montre par récurrence sur n que $\{S_n\} \rightsquigarrow \mathcal{U}([0;1[)$. Pour $n=2$, c'est la question 2.
Pour l'hérédité : $\{S_{n+1}\} = \{S_n + X_{n+1}\} = \{\{S_n\} + X_{n+1}\}$, avec $\{S_n\} \rightsquigarrow \mathcal{U}([0;1[)$ et $X_{n+1} \rightsquigarrow \mathcal{U}([0;1[)$, les deux variables étant indépendantes. On applique la question 2.
De plus, $S_n = \lfloor S_n \rfloor + \{S_n\}$, d'où par linéarité : $E(\lfloor S_n \rfloor) = E(S_n) - E(\{S_n\}) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$.

6. (a) $\forall \varepsilon > 0, P(\frac{\{S_n\}}{n} \geqslant \varepsilon) = P(\{S_n\}) \geqslant n\varepsilon) = 0$ si $n\varepsilon > 1$, donc pour n assez grand. D'où le résultat.
   (b) La suite $\left(-\dfrac{\{S_n\}}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0,
   et la loi faible des grands nombres montre que $\frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{2}$,
   d'où puisque $\frac{\lfloor S_n \rfloor}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{\{S_n\}}{n}$, $\frac{\lfloor S_n \rfloor}{n}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{2}$.

Sujet 3.2

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Si A est un événement de cet espace, on note 1_A la variable indicatrice de l'événement A.
- X est une variable à valeurs positives admettant **une espérance non nulle**. On note F sa fonction de répartition.
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables indépendantes à valeurs positives suivant toutes la même loi que X.
- Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X_k$ et F_n la fonction de répartition de S_n.
- Pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout $t > 0$, on note $N_t(\omega)$ le plus petit entier $n \geqslant 0$ tel que $S_n(\omega) > t$.
  On admet que N_t est une variable aléatoire.
- Pour tout $t > 0$, on note $M(t) = \mathbb{E}(N_t)$ lorsque cette espérance existe.

1. Soit $t > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(N_t = n) = F_{n-1}(t) - F_n(t)$.
2. On suppose dans cette question seulement que X suit la loi exponentielle de paramètre 1.
   (a) Écrire une fonction Python `N(t)` qui réalise une simulation de la variable N_t (la fonction `exponential(1)` de la bibliothèque `random` de `numpy` simule la loi $\mathcal{E}(1)$).
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}(N_t = n) = \displaystyle\int_0^t \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-x}dx - \int_0^t \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}dx.$
   (c) En déduire la loi de N_t, l'existence de $M(t)$ et sa valeur.

On revient au cas général.

3. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(X > a) > 0$. On note alors $p = \mathbb{P}(X > a)$.
4. (a) Montrer que $\mathrm{e}^{-X} \leqslant \exp\left(-a1_{[X>a]}\right)$. En déduire que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-X}) \leqslant 1 - p(1 - \mathrm{e}^{-a})$.
   (b) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que :
$$\forall n \geqslant 1,\ F_n(t) \leqslant \mathrm{e}^t \left[\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-X})\right]^{n+1}$$
5. Montrer que $M(t)$ est défini pour tout $t > 0$ et que : $M(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(t)$.

Solution du sujet 3.2

1. $(N_t = n)$ est réalisé si et seulement si $(S_n > t)$ est réalisé et $(S_{n-1} \leqslant t)$ aussi, c'est à dire $(S_n > t) \cap \overline{(S_{n-1} > t)} = (S_n > t) \setminus (S_{n-1} > t)$. D'où $P(N_t = n) = P(S_n > t) - P(S_{n-1} > t)$ car $(S_{n-1} > t) \subset (S_n > t)$. Ainsi, $P(N_t = n) = (1 - F_n(t)) - (1 - F_{n-1}(t)) = F_{n-1}(t) - F_n(t)$.
2. (a)

```python
import numpy.random as rd
def N(t):
        s=0
        n=0
        while s<=t:
                s=s+rd.exponential(1)
                n+=1
        return n

```

   (b) On a $S_{n-1} \rightsquigarrow \gamma(n)$, d'où, pour $t > 0$, $F_{n-1}(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} \mathrm{d}x$.

   De même $F_n(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{x^n}{n!} e^{-x} \mathrm{d}x$, d'où le résultat par la question 1.

   (c) On intègre par parties $F_{n-1}(t)$, et on obtient : $P(N_t = n) = \dfrac{t^n}{n!} e^{-t}$, d'où $N_t \rightsquigarrow \mathcal{P}(t)$.
   Ainsi $E(N_t) = t$.
3. Comme X est positive, on a $P(X \leqslant 0) = P(X = 0)$; donc $P(X \leqslant 0) < 1$, puisque sinon on aurait $E(X) = 0$, ce qui est absurde.
   De plus, $[X \leqslant 0] = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[X \leqslant \frac{1}{n}\right]$, d'où, par décroissance, $P([X \leqslant 0]) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(\left[X \leqslant \frac{1}{n}\right])$.
   Ainsi : $\exists k \in \mathbb{N}^*, P(\left[X \leqslant \frac{1}{k}\right]) < 1$, d'où $P(X > \frac{1}{k}) > 0$.
4. (a) La variable X est positive, d'où $X \geqslant a\mathbf{1}_{[X>a]}$ par disjonction des cas $[X > a]$ et $[X \leqslant a]$.
   D'où $-X \leqslant -a\mathbf{1}_{[X>a]}$ et on compose par l'exponentielle. D'où l'existence de l'espérance, et :

$$E(\mathrm{e}^{-X}) \leqslant E(\exp(-a\mathbf{1}_{[X>a]})) = P(X > a)e^{-a} + P(X \leqslant a) = pe^{-a} + 1 - p = 1 - p(1 - e^{-a}).$$

   (b) L'espérance $E(e^{-S_n})$ existe et vaut $\left(E(e^{-X})\right)^{n+1}$ car $e^{-S_n} = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} e^{-X_k}$.

   D'où d'après Markov :

$$F_n(t) = P(S_n \leqslant t) = P(e^{-S_n} \geqslant e^{-t}) \leqslant \frac{E(e^{-X})^{n+1}}{e^{-t}}.$$

5. D'après la question 1 cela revient à étudier la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n(F_{n-1}(t) - F_n(t))$.

   On sépare la somme partielle en deux et on réindexe :

$$\sum_{n=1}^{N} n(F_{n-1}(t) - F_n(t)) = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)F_n(t) - \sum_{n=1}^{N} nF_n(t)) = \sum_{n=0}^{N-1} F_n(t) - NF_N(t).$$

   L'inégalité de la question 4b montre que $NF_N(t)$ tend vers 0, et que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} F_k(t)$ converge par comparaison à une série géométrique, d'où la conclusion.

Sujet 3.3

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit un réel $q \geqslant 2$. Soit N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre q.

1. On pose $X = q^N$. Montrer que X admet des moments $\mathbb{E}(X^m)$ à tout ordre $m \in \mathbb{N}$ et les calculer.

On pose $c_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $c_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-q^k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = n!c_n$.

2. Montrer que la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire une majoration de la suite $(|a_n|)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ |c_{n+1}x^{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|c_n x^n|$.
   (b) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$; on note $f(x)$ sa somme.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $f(qx) = (1-x)f(x)$.
5. En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n q^{n(m+1)} = 0$.
6. Montrer l'existence d'une variable aléatoire U à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(U=n) = \mathbb{P}(N=n)\left(1 + \frac{a_n}{2}\right).$$
7. On pose $Y = q^U$. Les variables X et Y ont-elles la même loi ?
8. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(X^m) = \mathbb{E}(Y^m)$.

Solution du sujet 3.3

1. Par $\boxed{\text{théorème de transfert,}}$ on a :

$$E(X^m) = \mathbb{E}(q^{mN}) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{mk}\mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{mk}\mathrm{e}^{-q}\frac{q^k}{k!} = \mathrm{e}^{-q}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(q^{m+1})^k}{k!} = \mathrm{e}^{-q}\times\mathrm{e}^{q^{m+1}} = \mathrm{e}^{q^{m+1}-q}.$$

2. Comme $q \geqslant 2$, on a $1 - q^k < 0$, donc :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{n+1}{q^{n+1}-1} = \frac{n+1}{(q-1)(1+q+\cdots+q^n)} \leqslant \frac{n+1}{1\times(1+1+\cdots+1)} = 1.$$

Ainsi $(|a_n|)$ est décroissante, donc : $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ |a_n| \leqslant |a_0| = 1.}$

3. (a) Si $x = 0$ c'est évident, sinon, comme $\dfrac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_nx^n|} = \dfrac{|x|}{q^{n+1}-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$

par définition de la limite, il existe n_0 tel que $\dfrac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_nx^n|} \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour $n \geqslant n_0$.

(b) Par récurrence évidente sur $n \geqslant n_0$, on en déduit que : $|c_nx^n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}|c_{n_0}x^{n_0}|$.
Par comparaison avec une série géométrique convergente, on en déduit la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_nx^n$.

4. On a :

$$(1-x)f(x) = f(x) - xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_nx^n - \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n - c_{n-1})x^n$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1}\left(\frac{1}{1-q^n} - 1\right)x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_nq^nx^n = f(qx).$$

5. On a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_nq^{n(m+1)} = f(q^{m+1})$. Montrons par récurrence sur $m \geqslant 0$, la relation : $f(q^{m+1}) = 0$.

- C'est vrai si $m = 0$, en prenant $x = 1$ dans la question précédente : $f(q) = (1-1)f(1) = 0$
- Si c'est vrai à l'ordre m, alors en prenant $x = q^{m+1}$ dans la question précédente, on a : $f(q^{m+2}) = (1 - q^{m+1})f(q^{m+1}) = 0$, donc c'est vrai à l'ordre $m + 1$.

6. La suite $\left(\mathbb{P}(N = n)\left(1 + \frac{a_n}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive car $|a_n| \leqslant 1$. Et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N = n)\left(1 + \frac{a_n}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N = n) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N = n)a_n$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-q}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}q^n = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-q}\sum_{n=0}^{+\infty}c_nq^n = 1,$$

d'après la question 5, avec $m = 0$.

7. Les variables N et U n'ont pas la même loi puisque $\frac{a_n}{2} \neq 0$, donc $X = q^N$ et $Y = q^U$ n'ont pas la même loi non plus, puisque la fonction $t \mapsto q^t$ est injective sur $\mathbb{R}_+$.

8. Par théorème de transfert, par un calcul analogue à celui de Q6, on a :

$$E(Y^m) = \mathbb{E}(q^{mU}) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{mn}\mathbb{P}(N = n)\left(1 + \frac{a_n}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{mn}\mathbb{P}(N = n) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} q^{mn}P(N = n)a_n$$
$$= \mathbb{E}(X^m) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-q}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}q^{n(m+1)} = \mathbb{E}(X^m) + 0,\ \text{d'après Q5.}$$

Sujet 3.4

Soit $p \in]0,1]$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Rappeler la formule donnant $\mathbb{P}(X_1 = k)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ et tout entier $k \geqslant n+1$, $\displaystyle\sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{n-1} = \binom{k-1}{n}$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \dbinom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} & \text{si} \quad k \geqslant n, \\ \\ 0 & \text{si} \quad k < n \end{cases}$$

Dans la suite, **on admet** que si l'on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} x^j$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,1[,\ \sum_{j=n}^{+\infty} j(j-1)\cdots(j-n+1)x^{j-n} = f^{(n)}(x).$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, bornée et à dérivée bornée.
Soit N un majorant de $|f'|$ et M un majorant de $|f|$.

4. Dans cette question on prend $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$.
   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$ est convergente.
   (b) En déduire que la série : $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$ est convergente.

Pour tout $x \in]0,1]$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors :

$$K_{f,n}(x) = x^n \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k.$$

5. Pour tout $n \geqslant 1$, établir l'existence de $\mathbb{E}\left(f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right)$ et comparer cette espérance à $K_{f,n}(p)$.
6. Soit ε un réel strictement positif.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{p}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{K}{n}$ où K est une constante à déterminer.
   (b) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leqslant N.\varepsilon + M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right).$$
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(K_{f,n}(p))$.

Solution du sujet 3.4

1. Pour $k = 0$, on $\mathbb{P}(X_1 = k) = 0$ et pour tout $k \geqslant 1$, on a $\mathbb{P}(X_1 = k) = p(1-p)^{k-1}$.
2. Pour n fixé, par récurrence sur k à l'aide la formule du triangle de Pascal.
3. Par récurrence sur $n \geqslant 1$. Initialisation immédiate. Supposons l'égalité vraie au rang n :
   Pour $k < n+1$, on a $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = 0$, car $X_k(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Si $k \geqslant n+1$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \mathbb{P}(S_n + X_{n+1} = k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(\{S_n = i\} \cap \{X_{n+1} = k-i\}) \\
&= \sum_{i=n}^{k-1} \mathbb{P}(S_n = i) \times \mathbb{P}(X_{n+1} = k-i), \text{ (indépendance et support des variables)} \\
&= \sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n} \times p(1-p)^{k-i-1}, \text{ (hypothèse de récurrence)} \\
&= p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)} \sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{n-1} = p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)} \binom{k-1}{n}, \text{ (d'après 2)}
\end{aligned}$$

4. (a) Comme $1 - x \in]-1, 1[$, après décalage d'indice, la formule admise donne la convergence de la série — et sa somme $(n-1)! f^{(n)}(1-x)$.

   (b) La valeur absolue du terme général de la série est majorée par $\sup |f| \binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$.
   Donc la série est absolument convergente.

5. Comme f est bornée sur $[1, +\infty[$, l'espérance de $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ existe. Par le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{n+k}{n}\right) \mathbb{P}(S_n = n+k) b \\
&\overset{Q.3}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k = K_{f,n}(p)
\end{aligned}$$

6. (a) Les variables $(X_k)_{k \geqslant n}$ ont une espérance (qui est $\frac{1}{p}$) et une variance (qui est $\frac{q}{p^2}$).
   L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet donc de conclure que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{q}{np^2\varepsilon^2}$.

   (b) Par inégalité des accroissements (avec $|f'| \leqslant N$) : $\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leqslant N\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right|$ $(\star)$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| &\leqslant \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| \leqslant \varepsilon}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon}\right) \\
&\leqslant \mathbb{E}\left(N\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| \leqslant \varepsilon}\right) + 2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right) \text{ (l'inégalité triangulaire et } (\star)) \\
&\leqslant \mathbb{E}\left(N\varepsilon \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| \leqslant \varepsilon}\right) + 2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right) \leqslant N\varepsilon + 2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right)
\end{aligned}$$

   (c) Au final, pour tout $n \geqslant 1$ on a : $|K_{n,f}(p) - f\left(\frac{1}{p}\right)| \leqslant N\varepsilon + \frac{2M}{np^2\varepsilon^2}$.
   Pour n assez grand le deuxième terme est majoré par ε. Donc le premier membres est aussi petit que l'on veut pour n assez grand. Ainsi $(K_{f,n}(p))_n$ converge vers $f\left(\frac{1}{p}\right)$.

Sujet 3.5

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire sur cet espace admettant une espérance.

On dit qu'une variable aléatoire X est sous-gaussienne si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(\mathrm{e}^{tX})$ existe et s'il existe $\theta > 0$ tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ E(\mathrm{e}^{tX}) \leqslant \mathrm{e}^{\theta^2 t^2}$$

1. Montrer que si X suit une loi normale centrée alors elle est sous-gaussienne.

2. Montrer que si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, elle n'est pas sous gaussienne.

On suppose que X est sous-gaussienne et que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables de même loi que X, ces variables étant toutes définies sur le même espace probabilisé.On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \max(|X_1|, ..., |X_n|)$.

3. Montrer que pour tout $t > 0$, $X \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{tX} - 1}{t}$. En déduire que $E(X) \leqslant 0$ puis que $E(X) = 0$.
4. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{tZ_n} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tX_k} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-tX_k}$.

   (b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(\mathrm{e}^{tZ_n})$ existe et vérifie :

$$E(\mathrm{e}^{tZ_n}) \leqslant 2n\mathrm{e}^{\theta^2 t^2}$$

5. (a) Montrer que $E(Z_n)$ existe et que pour tout t réel, $E(\mathrm{e}^{tZ_n}) \geqslant \mathrm{e}^{tE(Z_n)}$.

   (b) En déduire que tout tout $t > 0$, $E(Z_n) \leqslant \dfrac{\ln(2n)}{t} + \theta^2 t$.

   (c) En conclure que $E(Z_n) \leqslant 2\theta\sqrt{\ln(2n)}$.

Solution du sujet 3.5

1. $E(e^{tX})$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda e^{tx}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$ converge, ce qui est le cas seulement si $\lambda > t$.
   Donc X n'est pas sous-gaussienne.
2. $E(e^{tX})$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{tx}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$ converge.
   Or $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{x^2}{2\sigma^2} + tx = -\frac{1}{2}\left((\frac{x}{\sigma})^2 - 2tx\right) = -\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma} - \sigma t)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$.
   D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{tx}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma}-\sigma t)^2}\mathrm{d}x$ converge.
   Le changement de variable $u = \frac{x}{\sigma} - \sigma t$ nous ramène à la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$, qui converge d'après le cours.
   D'où $E(e^{tX})$ existe pour tout réel t et vaut $e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$. $\theta = \sigma^2/2$ convient pour prouver que X est sous-gaussienne.
3. Par convexité de la fonction exponentielle, on a : $e^x \geqslant 1 + x$, pour $x \in \mathbb{R}$, d'où $e^{tX} \geqslant 1 + tX$, soit $e^{tX} - 1 \geqslant tX$, et avec $t > 0$, $\dfrac{e^{tX} - 1}{t} \geqslant X$. D'où $\dfrac{E(e^{tX}) - 1}{t} \geqslant E(X)$, puis $\dfrac{e^{\theta^2 t^2} - 1}{t} \geqslant E(X)$.
   Or $\dfrac{e^{\theta^2 t^2} - 1}{t}$ est équivalent à $\theta^2 t$ lorsque t tend vers 0, d'où, en passant à la limite : $0 \geqslant E(X)$.
   De plus, $-X$ est aussi sous-gaussienne, doù $0 \geqslant -E(X)$, c'est à dire $E(X) \geqslant 0$. On a donc : $E(X) = 0$.
4. (a) $\forall \omega \in \Omega, \exists i : Z_n(\omega) = |X_i(\omega)| = X_i(\omega)$ ou $-X_i(\omega)$. D'où $\forall t \in \mathbb{R}, tZ_n(\omega) = tX_i(\omega)$ ou $-tX_i(\omega)$.
   Ainsi $e^{tZ_n(\omega)} \leqslant e^{tX_i(\omega)} + e^{-tX_i(\omega)}$ et a fortiori $e^{tZ_n(\omega)} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{tX_k(\omega)} + \sum_{k=1}^{n} e^{-tX_k(\omega)}$.

   (b) Par domination, $E(e^{tZ_n})$ existe et $E(e^{tZ_n}) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(e^{tX_k}) + \sum_{k=1}^{n} E(e^{-tX_k}) \leqslant 2ne^{\theta^2 t^2}$.
5. (a) On a, pour $t > 0$, $0 \leqslant Z_n \leqslant \dfrac{e^{tZ_n} - 1}{t}$, d'où $E(Z_n)$ existe. De plus, par convexité de $x \mapsto e^{tx}$:
   $$\forall t \in \mathbb{R}, e^{tx} \geqslant e^{tE(Z_n)} + te^{tE(Z_n)}(x - E(Z_n)),$$
   ainsi $e^{tZ_n} \geqslant e^{tE(Z_n)} + te^{tE(Z_n)}(Z_n - E(Z_n))$, on prend l'espérance, et on obtient : $E(e^{tZ_n}) \geqslant e^{tE(Z_n)}$.

   (b) D'après ce qui précède, on a : $e^{tE(Z_n)} \leqslant 2ne^{\theta^2 t^2}$,
   donc : $tE(Z_n) \leqslant \ln(2n) + \theta^2 t^2$, c'est à dire $E(Z_n) \leqslant \dfrac{\ln(2n)}{t} + \theta^2 t$.

   (c) La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(2n)}{t} + \theta^2 t$ a pour dérivée $t \mapsto -\dfrac{\ln(2n)}{t^2} + \theta^2$.
   Donc elle admet un minimum sur $]0; +\infty[$ atteint en $t = \frac{\sqrt{\ln(2n)}}{\theta}$ qui vaut $2\theta\sqrt{\ln(2n)}$.

Sujet 3.6

Soient p et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui prend ses valeurs dans $I = [\![1, p]\!]$.
Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $x_k = \mathbb{P}([X = k])$ et on suppose que $x_k \in]0, 1[$.
On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ qui sont définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et qui suivent toutes la même loi que X.

Pour chaque $\omega \in \Omega$, on introduit l'ensemble $E(\omega) = \{X_1(\omega)\} \cup \cdots \cup \{X_n(\omega)\}$
(ensemble dont les éléments sont les nombres $X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$ — pas forcément distincts).

1. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on introduit la variable aléatoire Y_k définie, par :
$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_k(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in E(\omega) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (a) Déterminer la loi de Y_k en fonction de x_k. De quel type de loi s'agit-il ?
   (b) Donner l'espérance et la variance de Y_k.
2. Soit Z la variable aléatoire telle que $Z(\omega)$ est le nombre d'éléments de $E(\omega)$ (c.a.d. $Z(\omega) = \text{card}(E(\omega))$).
   (a) Exprimer Z en fonction des variables $Y_1, \cdots, Y_p$.
   (b) Calculer l'espérance de Z.
   (c) Soient k et l deux entiers distincts appartenant à $[\![1, p]\!]$.
   Que vaut la covariance de Y_k et Y_l en fonction de x_k et x_l ?
   (d) Déterminer la variance de Z.
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^p$ par : $f(t_1, \cdots, t_p) = p - \sum_{k=1}^{p} (1 - t_k)^n$.
On pose $\mathcal{K} = [0, 1]^p$, $\mathcal{O} =]0, 1[^p$ et $\mathcal{C} = \left\{ t \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{k=1}^{p} t_k = 1 \right\}$.
   (a) Justifier l'existence d'un maximum global de f sur $\mathcal{K} \cap \mathcal{C}$ que l'on notera M.
   (b) Prouver que si u est un point de $\mathcal{K} \cap \mathcal{C}$ tel que $M = f(u)$, alors u appartient nécessairement à $\mathcal{O} \cap \mathcal{C}$.
   (c) Montrer qu'il existe un unique point $u \in \mathcal{K} \cap \mathcal{C}$ tel que $M = f(u)$. Déterminer la valeur de M.
   (d) Quelle est la loi que doit suivre X pour maximiser l'espérance de Z ?
4. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui sont définies sur le même espace probabilisé et qui suivent toutes la même loi que X donnée dans le préambule de l'exercice. Pour $n \geqslant 2$, on considère la variable aléatoire Z_n telle que $Z_n(\omega)$ est le nombre d'éléments de l'ensemble $\{X_1(\omega)\} \cup \cdots \cup \{X_n(\omega)\}$ pour $\omega \in \Omega$. Montrer que la suite (Z_n) converge en probabilité vers une variable certaine.

Solution du sujet 3.6

1. (a) La variable Y_k prend ses valeurs dans $\{0,1\}$ et $\mathbb{P}(Y_k=1)=1-\mathbb{P}(Y_k=0)=1-(1-x_k)^n$, la variable Y_k suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-x_k)^n$.

   (b) Il s'agit d'une variable de Bernoulli, le cours nous dit alors que : $\mathbb{E}(Y_k)=1-(1-x_k)^n$ et que $\mathbb{V}(Y_k)=[1-(1-x_k)^n](1-x_k)^n$.

2. (a) Il est clair que $Z=Y_1+\cdots+Y_p$.

   (b) Par linéarité de l'espérance, il vient $\mathbb{E}(Z)=\mathbb{E}(Y_1)+\cdots+E(Y_p)=p-\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(1-x_k)^n$.

   (c) Comme k et ℓ sont distincts, la variable Y_kY_ℓ est une variable de Bernoulli de paramètre

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Y_kY_\ell=1)\\ =&1-\mathbb{P}(Y_kY_\ell=0)=1-\mathbb{P}([Y_k=0]\cup[Y_\ell=0])=1-(1-x_k)^n-(1-x_\ell)^n+\mathbb{P}([Y_k=0]\cap[Y_\ell=0])\\ =&1-(1-x_k)^n-(1-x_\ell)^n+\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i\notin\{k,\ell\}]\right)=1-(1-x_k)^n-(1-x_\ell)^n+(1-x_k-x_\ell)^n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d'où }\operatorname{Cov}(Y_k,Y_l)&=\mathbb{E}(YkY_\ell)-\mathbb{E}(Y_k)\mathbb{E}(Y_\ell)\text{ (f. de Koenig-Huygens)}\\ &=1-(1-x_k)^n-(1-x_l)^n+(1-x_k-x_l)^n-[1-(1-x_k)^n][1-(1-x_l)^n]\\ &=(1-x_k-x_l)^n-(1-x_k)^n(1-x_l)^n.\end{aligned}$$

   (d) Avec la bilinéarité de la covariance et les questions 1. (b), 2. (a) et 2. (c), il vient

$$\mathbb{V}(Z)=\operatorname{Cov}(Z,Z)=\sum_{k=1}^{p}[1-(1-x_k)^n](1-x_k)^n+\sum_{(k,l)\in[\![1,p]\!]^2;k\neq\ell}[(1-x_k-x_l)^n-(1-x_k)^n(1-x_l)^n]$$

3. (a) Comme la fonction f est continue sur le fermé borné $\mathcal{K}\cap\mathcal{C}$, elle y admet un maximum global M.

   (b) Supposons que u n'appartient pas $\mathcal{O}\cap\mathcal{C}$, alors il existe $\ell\in[\![1,p]\!]$ tel que $u_\ell\in\{0,1\}$, par symétrie on peut considérer que $\ell=1$.
   Si $u_1=1$, alors comme $u\in\mathcal{K}\cap\mathcal{C}$, on doit avoir $u_2=\cdots=u_p=0$. On considère la fonction h_1 sur $[0,1]$ définie par $h_1(t)=f(1-t,t,0,\cdots,0)$, on a $h_1(0)=M\geqslant h_2(t)$ et on voit facilement que h_1 est strictement croissante sur $[0,\frac{1}{2}[$, ce qui est absurde. On raisonne de la même manière lorsque $u_1=0$ en remarquant que l'on peut maintenant supposer que $u_2\in]0,1[$ et on introduit la fonction h_0 sur $[0,u_2]$, où $h_0(t)=f(t,u_2-t,u_3,\cdots,u_p)$, qui est strictement croissante sur $[0,\frac{u_2}{2}[$, ce qui conduit à une contradiction. On a donc bien $u\in\mathcal{O}\cap\mathcal{C}$.

   (c) Si $f(u)=M$, on a vu que $u\in\mathcal{O}$, c'est en particulier un extrema de la fonction f (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathcal{O}$ sous la contrainte linéaire $u_1+\cdots+u_p=1$, par suite $\nabla f(u)\in\operatorname{Vect}((1,\cdots,1))$. On en déduit que $(1-u_1)^{n-1}=\cdots=(1-u_p)^{n-1}$, d'où $u_1=\cdots=u_p=\dfrac{1}{p}$. Il existe donc un unique point $u\in\mathcal{K}\cap\mathcal{C}$ tel que $f(u)=M$. Enfin, on trouve $M=f(\frac{1}{p},\cdots,\frac{1}{p})=p\left[1-(1-\frac{1}{p})^n\right]$.

   (d) Avec la question précédente et 2. (b), on voit que la seule loi de X qui maximise l'espérance de Z est la loi uniforme sur $[\![1,p]\!]$.

4. On se doute qu'il s'agit de la variable certaine égale à p. Soit $\varepsilon>0$, comme $p-Z_n\geqslant0$ on déduit de 1. (b) et de l'inégalité de Markov que

$$\mathbb{P}(|Zn-p|\geqslant\varepsilon)=\mathbb{P}(p-Z_n\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{p-\mathbb{E}(Z_n)}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{p}(1-x_k)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

car tous les x_k appartiennent à $]0,1[$. La suite (Z_n) converge donc vers la variable certaine égale à p.

Sujet 3.7

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{k \geqslant 0} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} \mathrm{e}^{-n}$ converge.

On pose alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad T_n(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} \mathrm{e}^{-n}$$

On définit les deux fonctions f_α et g de E par : $\forall t \geqslant 0,\ f_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}$ avec $\alpha \geqslant 0$ et $g(t) = \dfrac{1}{1+t}$.

2. Pour tout $\alpha \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $T_n(f_\alpha)$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n(f_\alpha)$.

3. Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$. On note $R_{n,N} = \sum_{k=N+1}^{+\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} \mathrm{e}^{-n}$.
   (a) Donner la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0, x]$ ($x > 0$) à l'ordre N pour la fonction exponentielle.
   (b) Établir que $0 \leqslant R_{n,N} \leqslant \dfrac{n^{N+1}}{(N+1)!}$.

4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose pour n entier non nul, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbb{E}\left[g\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$ à l'aide de $T_n(g)$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$ et $A_n = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right\}$.
   En considérant $(A_n, \overline{A_n})$ montrer que $\mathbb{E}\left[g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right]$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
   En déduire la limite de $(T_n(g))_{n \geqslant 1}$.

Solution du sujet 3.7

1. Soit M un majorant de $|f|$. On a $\forall(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\quad \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \frac{n^k}{k!} \mathrm{e}^{-n} \leqslant M \frac{n^k}{k!} \mathrm{e}^{-n}$,
d'où la convergence absolue de la série d'après la convergence de la série exponentielle.
Ainsi la suite $(T_n(f))_n$ est bien définie pour tout $f \in E$.

2. Soit $(n,\alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$. On a $T_n(f_\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha \frac{k}{n}} \frac{n^k}{k!} \mathrm{e}^{-n}$ d'où
$$T_n(f_\alpha) = \exp\left[n\left(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{n}} - 1\right)\right] = \exp\left[n\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\alpha} = f_\alpha(1).$$

3. (a) La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{N!}\int_0^x \mathrm{e}^t (x-t)^N dt$.

   (b) En remarquant $0 \leqslant g(t) \leqslant 1$ pour tout $t \geqslant 0$, il vient
$$0 \leqslant R_{n,N} \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} \mathrm{e}^{-n} = \left(\mathrm{e}^n - \sum_{k=0}^{N} \frac{n^k}{k!}\right) \mathrm{e}^{-n}$$
D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a
$$\mathrm{e}^n - \sum_{k=0}^{N} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{N!}\int_0^n \mathrm{e}^t (n-t)^N dt \leqslant \frac{\mathrm{e}^n n^{N+1}}{(N+1)!}.$$
D'où $\forall(n,N) \in \mathbb{N}^2$ $0 \leqslant R_{n,N} \leqslant \dfrac{n^{N+1}}{(N+1)!}$.

4. (a) Par le théorème de stabilité, on a S_n suit la loi $\mathcal{P}(n)$, d'où, par le théorème de transfert :
$$\mathbb{E}\left[g\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \times \mathbb{P}(S_n = k) = T_n(g).$$

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|g|$ est majorée par 1, il vient
$$\mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right| \mathbb{1}_{A_n}\right] \leqslant 2\mathbb{P}(A_n) = 2P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(X_1)\right|\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
d'après la loi faible des grands nombres puisque X_1 possède une variance.
Pour $\eta > 0$, par continuité de g en 1, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $|x-1| < \varepsilon \Longrightarrow |g(x) - g(1)| \leqslant \eta$. D'où
$$\mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right| \mathbb{1}_{\Omega\setminus A_n}\right] = \mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-1\right|<\varepsilon}\right] \leqslant \eta \times \mathbb{P}(\Omega \setminus A_n)$$
Donc il existe un rang N tel que pour tout entier $n \geqslant N$,
$$\mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right| \mathbb{1}_{A_n}\right] + \mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right| \mathbb{1}_{\Omega\setminus A_n}\right] \leqslant 2\mathbb{P}(A_n) + \eta\mathbb{P}(\Omega\setminus A_n) \leqslant 3\eta$$
Donc $\mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right|\right]$ converge 0. Par linéarité, $\mathbb{E}\left[\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(1)\right|\right] \longrightarrow 0$
Par inégalité triangulaire pour l'espérance, il s'ensuit $T_n(g) = \mathbb{E}\left[g\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] \longrightarrow g(1) = \dfrac{1}{2}$.

SUJET 3.8

Soient A, B, C et D quatre variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Les variables B et C suivent la loi de BERNOULLI de paramètre $p \in]0,1[$, et les variables A et D suivent la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Pour $\omega \in \Omega$, on définit la matrice carrée $M(\omega)$ en posant

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ C(\omega) & D(\omega) \end{pmatrix}.$$

1. On introduit les deux variables aléatoires X et Y définies par $X(\omega) = A(\omega) + D(\omega) = \mathrm{Tr}(M(\omega))$ et $Y(\omega) = A(\omega) \times D(\omega) - B(\omega) \times C(\omega) = \det(M(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$.
   (a) Si $\omega \in \Omega$, montrer que $M(\omega)^2 = X(\omega)M(\omega) - Y(\omega)I$ où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.
2. Dans cette question, on considère l'ensemble $\mathcal{P}$ des matrices carrées d'ordre 2 qui sont des matrices de projecteurs.
   (a) Caractériser les matrices de $\mathcal{P}$.
   (b) Quelles sont les matrices $M(\omega)$ qui sont multiples de la matrice identité ?
   (c) Caractériser à l'aide de $X(\omega)$ et de $Y(\omega)$ le fait que $M(\omega) \in \mathcal{P}$ et ne soit pas un multiple de I. (*On pourra utiliser la question 1. (a)*)
   (d) Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \in \mathcal{P}\}$.
3. On note $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{D}$) l'ensemble des matrices inversibles (resp. diagonalisables) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \in \mathcal{I}\}$.
   (b) Soit $\omega \in \Omega$, montrer que λ est une valeur propre de $M(\omega)$ si et seulement si $\lambda^2 - X(\omega)\lambda + Y(\omega) = 0$.
   (c) On introduit la variable aléatoire $\Delta = X^2 - 4Y$. Montrer que Δ est à valeurs positives. Calculer $P(\Delta = 0)$.
   (d) Déterminer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \in \mathcal{D}\}$.

Solution du sujet 3.8

1. (a) En partant du membre de droite et en simplifiant, on arrive exactement sur le produit matriciel qui représente $M(\omega)^2$.

   (b) Par linéarité de l'espérance, on trouve $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(A) + \mathbb{E}(D) = 2\mathbb{E}(A) = \boxed{0.}$
   En utilisant la formule de Koenig-Huygens et l'indépendance des variables A et D, on obtient $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(D) = 2\mathbb{V}(A) = 2\mathbb{V}(A) = 2\left[\mathbb{E}(A^2) - \mathbb{E}(A)^2\right] = \mathbb{E}(A^2)$.
   Or A^2 est une variable de Bernoulli, d'où $\mathbb{V}(X) = 2\mathbb{P}([A^2 = 1]) = \boxed{\frac{4}{3}.}$

   Par indépendance, on a $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(AD) - \mathbb{E}(BC) = \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(D) - \mathbb{E}(B)\mathbb{E}(C) = -\mathbb{E}(B)^2 = \boxed{-p^2.}$
   Le lemme des coalitions nous dit que les variables AD et BC sont indépendantes, d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{V}(AD) + \mathbb{V}(BC) = \mathbb{E}(A^2D^2) - \mathbb{E}(AD)^2 + \mathbb{E}(B^2C^2) - \mathbb{E}(BC)^2 \\ &= \mathbb{E}(A^2)\mathbb{E}(D^2) - \mathbb{E}(A)^2\mathbb{E}(D)^2 + \mathbb{E}(B^2)\mathbb{E}(C^2) - \mathbb{E}(B)^2\mathbb{E}(C)^2 = \mathbb{P}(A^2=1)^2 + p^2 - p^4 = \frac{4}{9} + p^2(1-p^2)\end{aligned}$$

2. (a) Ce sont les matrices Q de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $Q^2 = Q$.

   (b) Comme les variables A et D (resp. B et C) sont à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ (resp. $\{0, 1\}$), les seules matrices de $M(\Omega)$ qui sont multiples de la matrice identité sont 0, I et $-I$.

   (c) Si $M(\omega) \in \mathcal{P}$ et n'est pas un multiple de I, la famille $\{I, M(\omega)\}$ est libre et il résulte alors de 1. (a) et 2. (a) que l'on doit avoir $X(\omega) = 1$ et $Y(\omega) = 0$. Réciproquement, si $X(\omega) = 1$ et $Y(\omega) = 0$, on voit que $M(\omega)$ est nécessairement un projecteur qui n'est pas un multiple de I.

   (d) On en tire que $\mathbb{P}([M \in \mathcal{P}]) = \mathbb{P}(M = 0) + \mathbb{P}(M = I) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0])$. Or, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0] &= \mathbb{P}([A + D = 1] \cap [AD = BC = 0]) + \mathbb{P}([A + D = 1] \cap [AD = BC = 1]) \\ &= \mathbb{P}([A + D = 1] \cap [AD = BC = 0]) = \mathbb{P}([A = 1] \cap [D = 0])\mathbb{P}([BC = 0]) \\ &+ \mathbb{P}([A = 0] \cap [D = 1])\mathbb{P}([BC = 0]) = \frac{2(2q - q^2)}{9}.\end{aligned}$$

   D'où $\mathbb{P}([M \in \mathcal{P}]) = \dfrac{p^2 + q^2}{9} + \dfrac{2(2q - q^2)}{9} = \dfrac{1}{9}\left[p^2 - q^2 + 4q\right] = \dfrac{3 - 2p}{9}$.

3. (a) On sait que $M(\omega) \in \mathcal{I}$ si et seulement si $Y(\omega) \neq 0$. En passant à l'événement contraire, il vient $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \notin \mathcal{I}\}) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(AD = BC)$. Comme la variable BC prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$, avec les propriétés d'indépendance on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M \in \mathcal{I}) &= 1 - \mathbb{P}([AD = 1] \cap [BC = 1]) - \mathbb{P}([AD = 0] \cap [BC = 0]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([AD = 1])\mathbb{P}(BC = 1) - \mathbb{P}([AD = 0])\mathbb{P}([BC = 0]) \\ &= 1 - \left(\frac{2}{9}\right)p^2 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right)(2q - q^2) = \frac{4 + 3p^2}{9}\end{aligned}$$

   (b) Comme λ est une valeur propre de $M(\omega)$ si et seulement si la matrice $M(\omega) - \lambda I$ est non inversible, ce qui équivaut à $\lambda^2 - X(\omega)\lambda + Y(\omega) = 0$.

   (c) On voit que $\Delta = (A + D)^2 - 4AD + 4BC = (A - D)^2 + 4BC \geqslant 0$ puisque BC est à valeurs positives. Ceci implique également que $\mathbb{P}(\Delta = 0) = \mathbb{P}([A = D] \cap [BC = 0]) = \mathbb{P}([A = D])\mathbb{P}([BC = 0]) = (\mathbb{P}([A = D = -1]) + \mathbb{P}([A = D = 0]) + \mathbb{P}([A = D = 1]))(1 - p^2) = \dfrac{1 - p^2}{3}$.

   (d) Si $\Delta(\omega) = 0$ et $M(\omega) \in \mathcal{D}$, alors $M(\omega)$ est multiple de l'identité, et lorsque $\Delta(\omega) \neq 0$ on voit avec 3. (b) que $M(\omega)$ admet deux valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable. D'où avec 2. (b), on aboutit à $\mathbb{P}(M \in \mathcal{D}) = \dfrac{q^2}{3} + 1 - P(\Delta = 0) = \dfrac{q^2 + p^2 + 2}{3} = 1 - 2\dfrac{pq}{3}$.

Sujet 3.9

Soit $p \in]0,1[$. Soit $(p_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'éléments de $]0,1[$.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et telles que :

- X_0 est la variable certaine qui vaut 1 ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n ;
- on a : $\mathbb{P}(X_1 = X_0) = p$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \in \{0,1\}$, on a : $\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = p$.

1. Calculer p_1.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $p_n = \dfrac{1}{2}(1 + (2p-1)^n)$.
3. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi.
4. À quelle condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ les variables X_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes ?

On note $(\mathcal{I})$ la propriété suivante :

$$(\mathcal{I}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0,1\},\ \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+i} = k) = \mathbb{P}(X_i = 1).$$

5. En supposant $(\mathcal{I})$ vérifiée, calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X_{n+i}, X_n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$.
6. Montrer que si, pour tout $n \geqslant 2$, la variable X_n ne dépend que de X_{n-1}, mais pas de $X_{n-2}, \ldots, X_0$, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 2$, tout $j \in [\![0, n-2]\!]$ et tout $k \in \{0,1\}$, les variables X_n et X_j sont indépendantes pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}$, alors la propriété $(\mathcal{I})$ est vérifiée.

Solution du sujet 3.9

1. Comme $X_0 = 1$ on a : $p = \mathbb{P}(X_1 = X_0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = p_1$.
2. Par la formule des probabilités totales avec le SCE $(X_n = 0)$, $(X_n = 1)$, on a :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 0) \\ &= p \times p_n + (1-p)(1-p_n) = (2p-1)p_n + (1-p). \end{aligned}$$

   On en déduit la formule demandée soit par récurrence sur $n \geqslant 1$, soit par la méthode de calcul du terme général d'une suite arithmético-géométrique.

3. Comme $2p - 1 \in]-1, 1[$, on a : $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi $\boxed{\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$
4. Comme X_n et X_{n+1} suivent des loi de Bernoulli, elles sont indépendantes si et seulement si :

$$\mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \iff p = p_{n+1} \iff 2p - 1 = (2p-1)^{n+1} \iff \boxed{p = \frac{1}{2}}$$

   car $x^m = x$ ssi $m = 1$ (mais pas ici) ou $x = 0$ ou $x = 1$ ou ($x = -1$ et m impair) ; or ici $2p - 1 \in]-1, 1[$.
   Autre idée : s 'il y indépendance, alors $p = \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ pour tout $k \in [\![0, 1]\!]$. Donc, par somme sur k, on obtient $2p = 1$. Réciproque facile.

5. Comme X_n et X_{n+i} sont des variables de Bernoulli, alors X_nX_{n+i} suit la loi de Bernoulli de paramètre :

$$\mathbb{P}\big((X_n = 1) \cap (X_{n+i} = 1)\big) = \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+i} = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) = p_i \times p_n.$$

   Donc par la formule de Koenig-Huyghens, on a :

$$\mathrm{Cov}(X_{n+i}, X_n) = \mathbb{E}(X_{n+i}X_n) - \mathbb{E}(X_{n+i})\mathbb{E}(X_n) = p_i \times p_n - p_{n+i} \times p_n = \boxed{p_n(p_i - p_{n+i}).}$$

6. Montrons par récurrence sur $i \in \mathbb{N}^*$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1\},\ \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+i} = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1)$.
   - Pour $i = 1$ la propriété est vraie par hypothèse de l'énoncé puisque $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ (d'après Q1).
   - Si la propriété est vrai à l'ordre $i \geqslant 1$, alors, par la formule des probabilités totales avec le SCE $(X_{n+i} = 0)$, $(X_{n+i} = 1)$, on a :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+i+1} = k) = \frac{\mathbb{P}\big((X_{n+i+1} = k) \cap (X_n = k)\big)}{\mathbb{P}(X_n = k)} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(X_n = k)} \sum_{\ell=0}^{1} \mathbb{P}_{[X_n=i]}\big((X_{n+i+1} = k) \cap (X_n = k) = \ell\big) \times \mathbb{P}(X_{n+i} = \ell) \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(X_n = k)} \sum_{\ell=0}^{1} \mathbb{P}_{[X_{n+i}=\ell]}(X_{n+i+1} = k)\mathbb{P}_{[X_{n+i}=\ell]}(X_n = k)\mathbb{P}(X_{n+i} = \ell) \text{ (indépendance)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{1} \mathbb{P}_{[X_{n+i}=\ell]}(X_{n+i+1} = k)\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+i} = \ell) \text{ (formule de Bayes)} \\ &= \underbrace{pp_i}_{\text{si } \ell=k} + \underbrace{(1-p)(1-p_i)}_{\text{si } \ell\neq k} \text{ par HR} \\ &= (2p-1)p_i + (1-p) = p_{i+1} = P(X_{i+1} = 1) \text{ d'après la relation de récurrence de Q2.} \end{aligned}$$

Sujet 3.10

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels non nuls. On considère l'ouvert $\mathcal{O} = (\mathbb{R}^*)^n$ de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$.

On note $\mathcal{C}$ la partie de $\mathcal{O}$ constituée des points $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $h(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

1. Justifier que la fonction f est de classe C^2 et déterminer en tout point $M = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ le gradient $\nabla f(M)$ et la matrice hessienne $\nabla^2 f(M)$.
2. On considère la fonction f_1 restriction de f à $\mathcal{C}$ et on suppose que f_1 admet en un point M_0 un extremum local. Déterminer les coordonnées de M_0.
3. Soit $M \in \mathcal{C}$. Pour tout $t \in [0, 1]$ on pose $g(t) = f(M_0 + tU)$ où $U = M - M_0$.
   (a) Justifier que g est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et donner $g'(t)$ et $g''(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.
   (b) Démontrer que f_1 admet un minimum global en M_0.
4. Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ un paramètre réel inconnu. Soient $Z_1, \ldots, Z_n$, n variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et qui admettent un moment d'ordre 2. On suppose que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a
   $$\mathbb{E}(Z_i) = \theta a_i \text{ et } \mathbb{V}(Z_i) = 1.$$
   Pour $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :
   $$X_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Z_i,$$
   et on suppose que X_n est un estimateur sans biais de θ.
   (a) Déterminer une relation satisfaite par les nombres $\beta_1, \ldots, \beta_n$.
   (b) Pour quelles valeurs de $\beta_1, \ldots, \beta_n$ la variance de X_n est-elle minimale ?

On note pour la suite de l'exercice $\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*$ les valeurs trouvées.

5. On pose $X_n^* = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^* Z_i$.
   Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels non nuls tels que $Y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Z_i$ soit un estimateur sans biais de θ.
   (a) Démontrer que la variance de Y_n n'est pas nulle.
   (b) On note ρ le coefficient de corrélation linéaire de X_n^* et Y_n.
   Rappeler pourquoi $|\rho| \leqslant 1$ puis démontrer que $\rho > 0$.

Solution du sujet 3.10

1. La fonction f est de classe C^2 car polynomiale et on trouve sans peine, en notant $I_n$la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que : $\nabla f(M) = (2x_1, \dots, 2x_n)$ et $\nabla^2 f(M) = 2I_n$.
2. C'est un problème d'extremum sous contrainte linéaire. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\nabla f(M_0) = \lambda \nabla h(M_0)$. En notant $M_0 = (x_1, \dots, x_n)$, on a :
$$\begin{cases} 2x_1 & = \lambda a_1 \\ & \vdots \\ 2x_n & = \lambda a_n \end{cases}.$$
Comme $M_0 \in \mathcal{C}$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 1$, donc $\displaystyle\frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, somme qui est non nulle.
Il vient alors $\lambda = \dfrac{2}{s}$ et $x_j = a_j/s$ (où $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2$) pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.
3. (a) Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$, un théorème de cours affirme que g est de classe C^2 avec, pour $t \in [0, 1]$:
$$g'(t) = \langle \nabla f(M_0 + tU), U \rangle \text{ et } g''(t) = q_{M_0+tU}(U),$$
où q_{M_0+tU} est la forme quadratique associée à la matrice hessienne de f au point $M_0 + tU$.
(b) Comme f est de classe C^2, on peut utiliser la formule de Taylor intégrale à l'ordre 1 pour g entre 0 et 1. On a donc : $g(1) - g(0) = g'(0) + \displaystyle\int_0^1 (1-t) g''(t) \,\mathrm{d}t$.
Mais on a $g(1) = f(M_0 + U) = f(M)$ et $g(0) = f(M_0)$. De plus $g'(0) = 0$ puisque $\nabla f(M_0)$ est orthogonal à l'hyperplan $h(x_1, \dots, x_n) = 0$. Il reste donc :
$$f(M) - f(M_0) = \int_0^1 (1-t) q_{M_0+tU}(U) \,\mathrm{d}t.$$
Enfin, $\nabla^2 f(M_0 + tU) = 2I_n$, donc ses valeurs propres sont strictement positives : pour tout W non nul dans $\mathbb{R}^n$, on a $q_{M_0+tU}(W) > 0$.
4. (a) Comme X_n est un estimateur sans biais de θ, on a $\mathbb{E}(X_n) = \theta$ d'où, puisque $\theta \neq 0$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i = 1$.
(b) Comme les variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_n$ sont indépendantes, les variables $\beta_1 Z_1, \dots, \beta_n Z_n$ le sont aussi. Il vient alors : $\mathbb{V}(X_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\beta_i Z_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \mathbb{V}(Z_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = f(\beta_1, \dots, \beta_n)$.
Selon la question 3, $\mathbb{V}(X_n)$ est donc minimale pour : $\beta_1 = a_1/s, \dots, \beta_n = a_n/s$, où $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2$.
5. (a) Par indépendance, on a : $\mathbb{V}(Y_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\alpha_i Z_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \underbrace{\mathbb{V}(Z_i)}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$.
(b) • D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathrm{Cov}(X_n^*, Y_n)^2 \leqslant \mathbb{V}(X_n^*)\mathbb{V}(Y_n)$, donc $|\rho| \leqslant 1$.
• D'après ce qui précède, X_n^* est l'estimateur sans biais de θ de variance minimale parmi les estimateurs sans biais de θ de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i Z_i$. Or, pour tout λ réel, $T_n = X_n^* + \lambda(Y_n - X_n^*)$ est un estimateur de θ de cette forme, qui est de plus sans biais. Il en résulte que :
$$\mathbb{V}(X_n^*) \leqslant \mathbb{V}(T_n) = \mathbb{V}(X_n^*) + 2\lambda \,\mathrm{Cov}(X_n, Y_n - X_n^*) + \lambda^2 \mathbb{V}(Y_n - X_n^*).$$
Par suite, $2\lambda \,\mathrm{Cov}(X_n^*, Y_n - X_n^*) + \lambda^2 \mathbb{V}(Y_n - X_n^*) \geqslant 0$, pour tout λ réel.
Il vient ainsi : $\mathrm{Cov}(X_n^*, Y_n - X_n^*) = 0$, ce qui donne $\mathrm{Cov}(Y_n, X_n^*) = \mathbb{V}(X_n^*) > 0$.

Sujet 3.11

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big)$.

1. Dans un casino, un jeu se déroule de la façon suivante :
   un croupier mélange trois cartes, qui sont l'As de Cœur, le deux de Cœur et le Valet de Pique et les présente sur la table face cachée.
   Un joueur choisit une carte au hasard. Si celle-ci est un Cœur, il gagne la somme correspondante (respectivement 1 Euro pour l'As ou 2 Euros pour le deux) et rejoue, le croupier mélangeant à nouveau les trois cartes ; si la carte tirée est le Valet de Pique, le jeu s'arrête.

   (a) Montrer que la probabilité que le Valet de Pique n'apparaisse jamais est nulle.

   On note N la variable aléatoire représentant le nombre de cartes de Cœur tirées jusqu'à l'apparition du Valet de Pique (événement qui se produit donc presque sûrement), et on note S la somme des Euros obtenus.

   (b) Déterminer la loi de N.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de S sachant $(N = n)$.

   (d) Calculer l'espérance conditionnelle de S sachant $(N = n)$.

   (e) Quel prix minimum le casino doit-il faire payer une telle partie pour ne pas être perdant en moyenne ?

On admet que si $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de réels positifs tels que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_k a_{n,k}$ converge (on pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$),
- la série $\displaystyle\sum_n A_n$ converge

alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}\right)$ existe et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}\right)$.

2. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $M \in \mathbb{N}^*$, et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $[\![0, M]\!]$. On suppose que les variables aléatoires $(N, X_0, X_1, \ldots, X_i, \ldots)$ sont mutuellement indépendantes.
   On admet qu'on définit une variable aléatoire discrète sur Ω en posant
   $$\forall\, \omega \in \Omega\,, \quad T(\omega) = \sum_{i=0}^{N(\omega)} X_i(\omega)\,.$$

   (a) Justifier que si N a une espérance, alors T a une espérance.

   (b) On suppose que N admet une espérance. Montrer que $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X_0)\,\mathbb{E}(N+1)$.

   (c) Retrouver alors l'espérance de la variable aléatoire S de la première question.

Solution du sujet 3.11

1. (a) Le probabilité que les n premiers tirages ne donnent pas le Valet de Pique est $(2/3)^n$.
Par le th. de continuité monotone, la probabilité que le Valet n'apparaisse pas, est $\lim\limits_{n\to+\infty}(2/3)^n = 0$.
Le Valet de Pique apparaît presque sûrement.

   (b) On a $N(\Omega) = \mathbb{N}$, et $N+1$ est le temps d'attente du premier succès dans un schéma de Bernoulli de probabilité de succès $1/3$ par équiprobabilité des trois cartes, donc $N+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1/3)$.

   (c) Si $N = n$, on a tiré n cartes de Cœur, chacune rapportant un ou deux Euros,
donc, sachant $(N = n)$, S prend ses valeurs dans $[\![n, 2n]\!]$.
Pour $k \in [\![n, 2n]\!]$, $(S = k)$ est réalisé si et seulement si on a obtenu x As et y deux, avec x et y dans $\mathbb{N}$ vérifiant
$$\begin{cases} x+y &= n \\ x+2y &= k \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 2n-k \\ y &= k-n \end{cases}$$
On doit donc placer $k-n$ deux parmi n cartes tirées, donc le nombre de tirages favorables est $\binom{n}{k-n}$, parmi 2^n tirages posssibles (il y a deux cartes de Cœur), soit
$$\forall\, k \in [\![n, 2n]\!]\,, \quad \mathbb{P}_{(N=n)}(S=k) = \frac{\binom{n}{k-n}}{2^n}\,.$$

   (d) Sachant $(N = n)$, S est d'univers image fini et positif, et a donc une espérance.
$$\mathbb{E}\big(S/(N=n)\big) = \sum_{k=n}^{2n} k\,\frac{\binom{n}{k-n}}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}(n+j)\binom{n}{j} \underset{(*)}{=} E(Y+n) = n + \frac{n}{2} = \frac{3n}{2},$$
$(*)$ par thm de transfert en reconnaissant la loi d'une variable $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$.
Autre idée : reconaître que la loi sachant $(N = n)$ de $S - n$ est binomiale.

   (e) La série de terme général $\mathbb{E}\big(S/(N=n)\big)\,\mathbb{P}(N=n)$ converge donc, par formule de l'espérance totale,
$$\mathbb{E}(S) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big[\mathbb{E}\big(S/(N=n)\big)\,\mathbb{P}(N=n)\Big] = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{3n}{2}\,\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] = 3$$
Le prix minimum à demander est donc de 3 Euros.

2. (a) On a $\forall\omega\,,\ 0 \leqslant T(\omega) = \sum\limits_{i=0}^{N(\omega)} X_i(\omega) \leqslant M\,\big[N(\omega)+1\big]$, d'où T a une espérance si N a une espérance.

   (b) On a $T(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Par σ-additivité, indépendance, permutation de sommes (résultat admis) et théorème de transfert,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\big[k\,\mathbb{P}(T=k)\big] = \sum_{k=0}^{+\infty}\left[k\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}\big((T=k)\cap(N=n)\big)\right] = \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}k\,\mathbb{P}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}X_i = k\right)\cap(N=n)\right)\right]\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}k\,\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n}X_i = k\right)\mathbb{P}(N=n)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\mathbb{P}(N=n)\sum_{k=0}^{+\infty}k\,\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n}X_i = k\right)\right]\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\mathbb{P}(N=n)\,\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n}X_i\right)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big[\big[\mathbb{P}(N=n)\big]\,(n+1)\,\mathbb{E}(X_0)\Big] = \mathbb{E}(N+1)\,\mathbb{E}(X_0)\end{aligned}$$
Autre idée : par la formule de l'espérance totale, avec le sce $(N = n)_n$ (plus rapide et plus simple).

(c) Dans le jeu de la question 1., on considère la variable aléatoire discrète X_i valant 1, 2 ou 0 selon que l'on tire l'As de Cœur, le deux de Cœur ou le Valet de Pique au i-ième tirage. Les (X_i) sont indépendantes de même loi uniforme (bornée) et d'espérance 1.

On a bien alors $S = \sum_{i=0}^{N} X_i$, et 2.b) donne $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N+1)\,\mathbb{E}(X_0) = 3 \times 1 = 3$.

SUJET 3.12

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité 1/2 et face avec la probabilité 1/2). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'événement « le k-ième lancer de la pièce donne pile » et par F_k l'événement « le k-ième lancer de la pièce donne face ».
On appelle « série » une succession de lancers consécutifs amenant le même côté de la pièce. La série n°1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n°2 commence au lancer suivant la fin de la série n°1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
Par exemple :

$$\textbf{Exemple :} \quad \underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n° 3}} \cap F_8 \cap \cdots .$$

L'objet de cet exercice est d'étudier le nombre de séries obtenues.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'événement de l'exemple dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4\,.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les lois de N_1 et N_2.
2. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?
3. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Justifier que l'on a l'égalité : $(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}$.
   En déduire que : $\mathbb{P}\left((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_n = k) \cap P_n\right)$.

Dans la suite, on admet de même que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ les relations :

$$\begin{cases} \mathbb{P}\left((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_n = k) \cap F_n\right) \\ \mathbb{P}\left((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_n = k-1) \cap P_n\right) \\ \mathbb{P}\left((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_n = k-1) \cap F_n\right) \end{cases}$$

4. Montrer que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$:

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1)\,.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction pour tout x réel par : $G_m(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(N_m = k)x^k$.

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $G_{n+1}(x) = \dfrac{1+x}{2} G_n(x)$.
6. Déterminer la loi de la variable aléatoire $N_n - 1$ à partir de l'expression de G_n.

Solution du sujet 3.12

1. La variable aléatoire N_1 représente le nombre de séries apparues en un lancer, elle ne peut donc prendre que la valeur 1. La variable aléatoire N_2 représente le nombre de séries apparues lors des deux premiers lancers, elle prend donc la valeur 1 si les 2 premiers lancers donnent le même résultat, la valeur 2 s'ils donnent des résultats différents. On a
$$\mathbb{P}(N_2 = 1) = \mathbb{P}((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2}$$
Et $\mathbb{P}(N_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(N_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
En conclusion, N_1 suit la loi certaine de valeur 1 et N_2 suit la loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Au cours des n premiers lancers, au moins une série apparaît (celle contenant le résultat du premier lancer) et, au maximum, n séries apparaissent (car chaque série contient au moins un résultat).
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Si l'événement $P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, alors le n-ième et le $(n+1)$-ième lancers donnent le même résultat, donc le $(n+1)$-ième résultat contribue à la série contenant le n-ième résultat et on a $N_n = N_{n+1}$. On a donc l'égalité entre les deux événements.
Puisque les événements $(N_n = k)$ et P_n sont indépendants du $(n+1)$-ième lancer, on en déduit que
$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n)\mathbb{P}(P_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n)$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les événements $P_n \cap P_{n+1}$, $F_n \cap F_{n+1}$, $F_n \cap P_{n+1}$ et $P_n \cap F_{n+1}$ est un système complet d'événements pour les n-ième et $(n+1)$-ième lancers. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Par la formule des probabilités totales, on a donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{n+1} = k) &= \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \\ &\quad + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k-1) \cap F_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_n = k-1) \cap P_n) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1) \qquad \text{(FPT avec le SCE } [P_n, F_n])\end{aligned}$$
5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a
$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_{n+1} = k)x^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k)x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k-1)x^k$$
Or, $\mathbb{P}(N_n = n+1) = 0$. Par ailleurs, en effectuant un changement d'indice dans la seconde somme, on obtient
$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(N_n = k-1)x^k = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(N_n = j)x^{j+1} = x\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(N_n = j)x^j = xG_n(x)$$
car $\mathbb{P}(N_n = 0) = 0$. On en conclut le résultat demandé.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(G_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\dfrac{1+x}{2}$ et de premier terme $G_1(x) = x$.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(x) = x\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$G_n(x) = x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{1}{2^{n-1}}x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{n-1}}x^k\,.$$
Par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale sur un intervalle, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{P}(N_n = k) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1}$, soit $N_n - 1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, 1/2)$

Sujet 3.13

Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé .
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace, mutuellement indépendantes, de loi géométrique de paramètre p.

On note C la variable aléatoire définie pour tout $\omega \in \Omega$, par

$$C(\omega) = \begin{cases} \max\left\{n \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_n(\omega)\right\} & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}^*,\ X_k(\omega) > X_{k+1}(\omega) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X_1 \geqslant k)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $[C = n]$ à l'aide des événements $[X_i \leqslant X_{i+1}]$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}((X_2 \geqslant X_1) \cap (X_1 = k))$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(C \geqslant 2)$.
4. (a) En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'inclusion suivante :

$$[C = 0] \subset [X_1 \leqslant X_2] \cap [X_3 \leqslant X_4] \cap \cdots \cap [X_{2n-1} \leqslant X_{2n}]$$

   montrer que $\mathbb{P}(C = 0) = 0$.

   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(C = 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(q) = \dfrac{(1-q)^n}{(1-q)(1-q^2) \times \cdots \times (1-q^n)}$.

5. Pour n et k appartenant à $\mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\mathbb{P}(X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k) = u_n(q) \times q^{n(k-1)}$$

6. Montrer que $\mathbb{P}(C \geqslant n) = u_n(q)$.
7. En simplifiant $\frac{1-q}{1-q^k}$ pout tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $u_n(q) \leqslant \dfrac{1}{(1+q)^{n-1}}$.
8. Montrer que C admet une espérance si et seulement si la série de terme général $u_n(q)$ converge.
   Exprimer alors $\mathbb{E}(C)$ en fonction des nombres $u_n(q)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $u_n(q) \geqslant \dfrac{1}{n!}$.
   En déduire une minoration de $\mathbb{E}(C)$.

Solution du sujet 3.13

1. D'après le cours : $\mathbb{P}(X_1 \geqslant k) = \displaystyle\sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = i) = \sum_{i=k}^{+\infty} q^{i-1}p = \frac{q^{k-1}}{1-q} \times p$ d'où $\mathbb{P}(X_1 \geqslant k) = q^{k-1}$.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, on a : $\{C = n\} = \{X_1 \leqslant X_2\} \cap \{X_2 \leqslant X_3\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} \leqslant X_n\} \cap \overline{\{X_n \leqslant X_{n+1}\}}$.
3. Par indépendance de X_1 et X_2 :
$$\mathbb{P}((X_2 \geqslant X_1) \cap (X_1 = k)) = \mathbb{P}(X_2 \geqslant k) \cdot \mathbb{P}(X_1 = k) = q^{k-1} \cdot q^{k-1}p = (q^2)^{k-1}p.$$
D'où : $\mathbb{P}(C \geqslant 2) = \mathbb{P}(X_2 \geqslant X_1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_2 \geqslant X_1) \cap (X_1 = k)) = p \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = \frac{1-q}{1-q^2} = \frac{1}{1+q}$.
4. (a) L'inclusion est claire. Les événements de droite sont indépendants et ont tous la même probabilité, calculée à la question 2 : $\mathbb{P}(X_i \leqslant X_{i+1}) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant X_2) = \mathbb{P}(C \geqslant 2) = \dfrac{1}{1+q}$.
   On en déduit : $\mathbb{P}(C = 0) \leqslant \left(\dfrac{1}{1+q}\right)^n$, d'où $\mathbb{P}(C = 0) = 0$ (en faisant tendre n vers $+\infty$).
   (b) On a $\mathbb{P}(C = 0) + \mathbb{P}(C = 1) + \mathbb{P}(C \geqslant 2) = 1$. Donc $P(\mathbb{C} = 1) = \dfrac{q}{1+q}$.
5. Récurrence sur n : Pour $n = 1$, il vient $u_1(q) = \dfrac{1-q}{1-q} = 1$ et $\mathbb{P}(X_1 \geqslant k) = q^{k-1}$.
   Supposons la propriété vraie au rang n. Alors, par indépendance de X_1 avec $(X_{n+1}, \ldots, X_2)$:
$$\mathbb{P}(X_{n+1} \cdots \geqslant X_1 \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant i) \cdot \mathbb{P}(X_1 = i) \text{ (f. proba tot. avec le SCE } (X_1 = i)_i)$$
$$= \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant i) \cdot \mathbb{P}(X_1 = i) \quad \text{car } (X_{n+1}, \ldots, X_2) \text{ et } (X_n, \ldots, X_1) \text{ sont id. distribués}$$
$$= \sum_{i=k}^{+\infty} u_n(q) \times (q^n)^{i-1} \times q^{i-1}p \text{ (par HR)}$$
$$= p \times u_n(q) \times \sum_{i=k}^{+\infty} (q^{n+1})^{i-1} = u_n(q) \times \frac{1-q}{1-q^{n+1}} \times \left(q^{n+1}\right)^{k-1} = u_{n+1}(q) \times \left(q^{n+1}\right)^{k-1} \text{ (CQFD).}$$
6. Par conditionnement avec le SCE $(X_i = i)_{i \in \mathbb{N}*}$ puis par indépendance :
$$\mathbb{P}(C \geqslant n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant k) \times \mathbb{P}(X_1 = k) = u_{n-1}(q) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^{n-1}\right)^{k-1} \times q^{k-1}p = u_n(q)$$
7. Car $\frac{1-q}{1-q^k} = \dfrac{1}{1+q+\cdots+q^{i-k}} \leqslant \dfrac{1}{1+q}$ si $k \geqslant 1$ (et le quotient vaut 1 pour $k = 1$).
8. Par l'inégalité précédente, $u_N(q) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où :
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(C = n) = \sum_{n=1}^{N} n\left(\mathbb{P}(C \geqslant n) - \mathbb{P}(C \geqslant n+1)\right) = \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(C \geqslant n) - \sum_{n=2}^{N+1} (n-1)\mathbb{P}(C \geqslant n)$$
$$= \sum_{n=2}^{N+1} \mathbb{P}(C \geqslant n) + \mathbb{P}(C \geqslant 1) - \mathbb{P}(C \geqslant N+1) = \sum_{n=1}^{N} u_n(q) - u_{N+1}(q) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(q) = \mathbb{E}(C).$$
9. Pour $n \geqslant 2$: $u_n(q) = \dfrac{1}{(1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1})} \geqslant \dfrac{1}{2 \times 3 \times \cdots \times n} = \dfrac{1}{n!}$
   et donc $\mathbb{E}(C) = f(q) \geqslant 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 1$.

Sujet 3.14

Dans cet exercice, λ désigne un réel strictement positif.
Pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on considère un n- échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ.

On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $J_n = \lambda S_n$.

1. Calculer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(S_n\right)$, $\mathbb{V}\left(S_n\right), \mathbb{E}\left(J_n\right)$ et $\mathbb{V}\left(J_n\right)$.
2. (a) Déterminer une densité de la variable aléatoire J_n.

   (b) Soit $n \geqslant 3$ un entier. Démontrer que les variables aléatoires $\dfrac{1}{J_n}$ et $\dfrac{1}{J_n^2}$ admettent chacune une espérance et donner leurs valeurs respectives.

   (c) Soit $n \geqslant 3$ une entier. On pose $\widehat{\lambda_n} = \dfrac{n}{S_n}$.
   Justifier que $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur de λ. Est-il sans biais ? Est-il convergent ?
3. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi\left(u_\alpha\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

   (a) Démontrer que la variable aléatoire N_n définie par $N_n = \lambda \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

   (b) Justifier que, pour n assez grand, on a approximativement : $\mathbb{P}\left([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha]\right) = 1 - \alpha$.

   (c) Montrer que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]$ est un intervalle de confiance de λ au risque α.

Solution du sujet 3.14

1. La variable aléatoire S_n admet bien une variance comme somme de variables aléatoires qui admettent des moments d'ordre 2. Puis on a $\mathbb{E}(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \frac{n}{\lambda}$ et, par indépendance, $\mathbb{V}(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = \frac{n}{\lambda^2}$ d'où $\mathbb{E}(J_n) = n$ et $\mathbb{V}(J_n) = \lambda^2 V(S_n) = n$.

2. (a) On a $J_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda X_k$. Mais, pour $k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ donc $\lambda X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Par indépendance, on a donc $J_n \hookrightarrow \gamma(n)$ et une densité de J_n est : $f_{J_n} : t \mapsto \dfrac{t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}}{(n-1)!}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)$.

   (b) Sous réserve de convergence (absolue), par transfert : $\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{J_n}(t)\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n-1)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)}$.
   Puis, sous réserve de convergence (absolue), on a, toujours par le théorème de transfert :
$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} f_{J_n}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!}\Gamma(n-2) = \frac{1}{(n-1)(n-2)}.$$

   (c) • La variable aléatoire $\widehat{\lambda_n} = \dfrac{n}{S_n}$ est une fonction du n-échantillon i.i.d. $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi $\mathcal{E}(\lambda)$: c'est un estimateur de λ. De plus $\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_n}\right) = n\lambda\mathbb{E}\left(\frac{1}{J_n}\right) = \dfrac{n\lambda}{n-1}$ donc $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur biaisé de λ.

   • On a : $\mathbb{V}\left(\widehat{\lambda_n}\right) = \mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_n}^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda_n}\right)\right)^2 = \dfrac{n^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)} - \left(\dfrac{n\lambda}{n-1}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   Ainsi, comme le biais de $\widehat{\lambda_n}$ converge vers 0, $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur convergent de λ.
   Autre idée : $\left(\frac{S_n}{n}\right)_n$ converge en proba vers 0 (loi faible des GN) et on compose par $x \mapsto \frac{1}{x}$ (continue).

3. (a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ a pour espérance n/λ et pour variance n/λ^2. Les $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes et ont une variance non nulle. Ainsi (théorème central-limite) la variable aléatoire centrée réduite $\dfrac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} = N_n$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

   (b) Pour n assez grand, on peut supposer que $N_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi :
$$\mathbb{P}\left(-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha\right) \approx \Phi\left(u_\alpha\right) - \Phi\left(-u_\alpha\right) = 2\Phi(u_\alpha) - 1 = 1 - \alpha.$$

   (c) On a les équivalences :
$$\begin{aligned}
\lambda \in \left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right] \quad &\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\frac{n}{S_n} \leqslant \lambda \leqslant \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\frac{n}{S_n} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\frac{n}{\lambda} \leqslant S_n \leqslant \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\frac{n}{\lambda} \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\frac{n}{\lambda} \leqslant S_n - \frac{n}{\lambda} \leqslant \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\frac{n}{\lambda} \\
&\Leftrightarrow \quad -u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha
\end{aligned}$$

   Donc $\mathbb{P}\left(\lambda \in \left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]\right) = \mathbb{P}\left(-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha\right) \approx 1 - \alpha$ pour n assez grand.

SUJET 3.15

On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par, $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \displaystyle\int_0^1 ((1-t)\mathrm{e}^t)^n dt$.

On admet que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Enfin, on pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$, : $P_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

1. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}t^n dt = n!(1-P_n(x))$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1-P_n(n) = \dfrac{\mathrm{e}^{-n}n^{n+1}}{n!}I_n$.
   (c) Donner un équivalent de $1-P_n(n)$ quand n tend vers $+\infty$.
   (d) Écrire une fonction Python `f(n)` qui renvoie la valeur $P_n(n)$ pour n entier naturel non nul donné. On pourra utiliser la fonction `exp` (exponentielle) mais pas la fonction `factorial` (factorielle).
2. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi de POISSON de paramètre 1.

   On pose alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.
   (a) Quelle est la loi suivie par S_n pour tout n de $\mathbb{N}^*$?
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n(n) = \frac{1}{2}$. En déduire un équivalent de $n!$

Soit X une variable aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $\mathcal{M}(X) = \{x \in \mathbb{R} / \mathbb{P}(X < x) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant x)\}$.

3. (a) Montrer que :$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = P_{n+1}(x) + P'_{n+1}(x)$.
   (b) Montrer que $(P_n(n))_{n\geqslant 2}$ et $(P_{n-1}(n))_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.
   (c) En déduire que si X est une variable aléatoire suivant la loi de POISSON de paramètre n, où n est un entier supérieur à 2, alors $\mathcal{M}(X) = \{n\}$.

Solution du sujet 3.15

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et n de $\mathbb{N}^*$. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n, à la fonction $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec $a = x$ et $b = 0$.
$g(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(0-x)^k}{k!} g^{(k)}(x) + \int_x^0 \frac{(0-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)dt.$
Soit ici $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\mathrm{e}^{-x} + \int_0^x \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}dt = 1$ soit $n!(1 - P_n(x)) = \displaystyle\int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}dt.$
Autre idée : récurrence...
(b) $1 - P_n(n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^n t^n \mathrm{e}^{-t}dt$. Le changement de variable $t = n(1-u)$ donne le résultat.
(c) $1 - P_n(n) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \times \dfrac{\mathrm{e}^{-n} n^{n+1}}{n!}$.
(d)

```python
def f(n):
    u,s=1,0
    for i in range(n+1):
            s=s+u
            u=u*n/(i+1)
    return s/exp(n)
```

2. (a) Par théorème de stabilité, on sait que $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$.
(b) $P_n(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} = P(S_n \leqslant n) = P(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(0) = \frac{1}{2}$ (en utilisant le TCL)
Donc $1 - P_n(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$. D'où $n! \sim \sqrt{2\pi n} \times (\frac{n}{e})^n$ (d'après Q1c).

3. (a) $P'_{n+1}(x) = -P_{n+1}(x) + \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = -P_{n+1}(x) + P_n(x).$
(b) Soit $n \geqslant 2$. $P_{n+1}(n+1) - P_n(n) = P_{n+1}(n+1) - P_{n+1}(n) - P'_{n+1}(n)$.
Taylor avec reste int. à l'ordre 1 : $P_{n+1}(n+1) = P_{n+1}(n) + P'_{n+1}(n) + \displaystyle\int_n^{n+1} (n+1-t)P''_{n+1}(t)dt.$
Donc $P_{n+1}(n+1) - P_n(n) = \displaystyle\int_n^{n+1} (n+1-t)P''_{n+1}(t)dt.$
Or $\forall t \in [n, n+1], P''_{n+1}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}t^n}{(n+1)!}(t - (n+1)) \leqslant 0$. Avec égalité uniquement si $t = n+1$.
Donc $P_{n+1}(n+1) - P_n(n) < 0$.
De même : $P_n(n+1) - P_{n-1}(n) = P_n(n+1) - P_n(n) - P'_n(n) = \displaystyle\int_n^{n+1} (n+1-t)P''_n(t)dt.$
Or : $\forall t \in [n, n+1], P''_n(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}t^{n-1}}{n!}(t-n) \geqslant 0$. Et on a encore $P_n(n+1) - P_{n-1}(n) > 0$.
Donc $(P_{n-1}(n))_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante et $(P_n(n))_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante..
Enfin : $\forall n \geqslant 2, P_n(n) - P_{n-1}(n) = \mathrm{e}^{-n}\dfrac{n^n}{n!} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$
Donc les deux suites $(P_{n-1}(n))_{n\geqslant 2}$ et $(P_n(n))_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes et convergent vers 1/2.
(c) L'entier $n \in \mathcal{M}(X)$ car : $\mathbb{P}_{n-1}(n) < \dfrac{1}{2} < \mathbb{P}_n(n) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X < n) < \dfrac{1}{2} < \mathbb{P}(X \leqslant n)$.
Si $x < n : \mathbb{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant n-1) < \dfrac{1}{2}$. Donc $x \notin \mathcal{M}(X)$. Si $x > n : \mathbb{P}(X < x) \geqslant \mathbb{P}(X \leqslant n) > \dfrac{1}{2}$.
Donc $x \notin \mathcal{M}(X)$.

Sujet 3.16

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $X^2 - (a+c)X + ac + b$ est un polynôme annulateur de A.
   (b) Donner un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de la matrice A pour qu'elle soit inversible.
   (d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de la matrice A pour que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$.
   (e) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de la matrice A pour qu'elle soit diagonalisable.
2. Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $0 < p < 1$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$
$$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ Y^2(\omega) & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer l'événement « A est diagonalisable ». Calculer sa probabilité.
   (b) Calculer la probabilité que $A^2 = 0$.
3. Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes telles que X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ et Y suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$
   Pour tout t réel, pour tout $\omega \in \Omega$, on pose
$$A_t(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ -t/4 & Y(\omega) \end{pmatrix}$$
   On note D_t l'événement « la matrice A_t est diagonalisable ».
   (a) Calculer $P(D_0)$.
   (b) Exprimer $\mathbb{P}(D_t)$ à l'aide de F_X la fonction de répartition de X.

Solution du sujet 3.16

1. (a) Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} a^2-b & a+c \\ -b+c^2 & c^2-b \end{pmatrix}$, d'où
$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A = A^2 - (a+c)A = (ac+b)I_2 = \det(A)I_2.$$
   (b) Les polynômes de degré 0 ne sont annulateurs que pour la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas ici. Un polynôme de degré un $\alpha(X-\lambda)$ est annulateur de A ssi $A = -\alpha I_2$ ce qui n'est pas le cas ici. Donc le polynôme trouvé à la question précédente est annulateur de degré minimal.
   (c) La matrice A est inversible si et seulement si $0 \neq \det(A) = ac+b$.
   (d) Le système de 4 équations $A^2 = 0$ se simplifie en $a+c = ac+b = 0$.
   (e)
   - Si la matrice A admet deux valeurs propres distinctes ($\Delta = (a-c)^2 - 4b > 0$, elle est diagonanilisable .
   - Si la matrice A admet une unique valeur propre, elle n'est pas diagonalisable, car, sinon, elle serait déjà diagonale.
   - Si la matrice A n'admet pas de valeurs propres elle n'est pas diagonalisable.

   La CNS demandée est donc $(a-c)^2 - 4b > 0$.
2. (a) Par la question précédente, l'événement « A est diagonalisable » est $D = [(X-1)^2 + 4Y^2 > 0]$. Comme $(X-1)^2 + 4Y^2 \geqslant 0$, par indépendance et lois suivies, on a :
$$\mathbb{P}(\overline{D}) = \mathbb{P}([(X-1)^2+4Y^2 = 0]) = \mathbb{P}([(X-1)^2 = 0] \cap [Y^2 = 0]) = \mathbb{P}(X=1) \times \mathbb{P}(Y=0) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(D) = 1$$
   (b) Toujours par la question précédente $[A^2 = 0] = [X = 1] \cap [X + Y^2 = 0]$. Donc :
$$\mathbb{P}(A^2 = 0) = \mathbb{P}([(X=1)] \cap [(X=0)] \cap [(Y=0)]) = 0$$
   Autre idée : sans calcul, remarquer directement que, comme $A \neq 0$, on a $D \subset \overline{[A^2 = 0]}$.
3. (a) Par la première question $\mathbb{P}(D_0) = \mathbb{P}(X \neq Y)$. Or la variable X charge deux points alors que la variable Y est continue et ne charge pas les points. Ainsi $\mathbb{P}(D_0) = 1$.
   (b) De nouveau $\mathbb{P}(D_t) = \mathbb{P}((X-Y)^2 - t > 0)$. On calcule donc pour $t > 0$
$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X-Y)^2 > t) &= \mathbb{P}([(X-Y)^2 > t] \cap [Y=0]) + \mathbb{P}([(X-Y)^2 > t] \cap [Y=1]) \\ &= \mathbb{P}([X^2 > t] \cap [Y=0]) + \mathbb{P}([(1-X)^2 > t] \cap [Y=1]) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X^2 > t) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([(1-X)^2 > t]) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X > \sqrt{t}) + \mathbb{P}(X < 1-\sqrt{t})\right) \end{aligned}$$
   Donc
$$\mathbb{P}(D_t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}F_X(\sqrt{t}) + \frac{1}{2}F_X(1-\sqrt{t})$$
   Bien entendu, $\mathbb{P}(D_t) = 1$ lorsque $t \leqslant 0$. En conclusion
$$\mathbb{P}(D_t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}F_X(\sqrt{t}) + \frac{1}{2}F_X(1-\sqrt{t}) & \text{si} \quad t > 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ 1-\sqrt{t} & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$