

QUESTIONS COURTES

Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = {}^tA$.

Quand la matrice A est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ?

Montrer que A est une matrice orthogonale.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Soit g une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} . On suppose que $Xg(X)$ et $g'(X)$ admettent une espérance.

a) Montrer que $E(g'(X)) = E(Xg(X))$.

b) En déduire la valeur des moments de X .

Soit f une fonction T -périodique, avec $T > 0$, dérivable sur \mathbb{R} .

On suppose que f s'annule en p points distincts de $[0, T[$. Montrer que f' s'annule en au moins p points de $[0, T[$ distincts de ceux de f .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - k)$.

a) Montrer qu'il existe un unique réel $r_n \in]0, 1[$ tel que $P'_n(r_n) = 0$.

b) Montrer que $\frac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{x - k}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$.

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi géométrique de paramètre p .

Déterminer la probabilité de l'événement $3X = 2Y$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans \mathbb{N} ; pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $P(X = k) = p_k$.

On suppose que X vérifie la propriété suivante :

$$\exists a \in \mathbb{R}_-, \exists b \in \mathbb{R}_+^* \text{ tels que } \forall k \in \mathbb{N}^*, p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

La variable aléatoire X peut-elle suivre :

- a) une loi exponentielle ? b) une loi de Poisson ? c) une loi binomiale ?
d) une loi géométrique ?
-

On considère un certain jeu de casino et on note X la variable aléatoire égale au gain du casino à chaque partie jouée. Un joueur joue une partie et il note X_0 la variable aléatoire égale à la somme qu'il perd.

Pour mesurer sa malchance, celui-ci observe les pertes $X_1, X_2, \dots, X_n \dots$ des joueurs suivants, en supposant que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X .

Il s'intéresse alors à l'indice du premier joueur qui perd plus que lui, autrement dit à la variable aléatoire N du plus petit indice n tel que $X_n > X_0$ soit réalisé.

a) Justifier que $P(N > n - 1) = \frac{1}{n}$.

- b) Le joueur a-t-il raison de penser qu'il est vraiment malchanceux ?
-

Soit λ, μ deux réels fixés avec $\lambda \neq 0$ et P_0 un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit une suite $(P_n)_n$ de polynômes par son premier terme P_0 et la relation : pour tout $n \geq 0$, $P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P_n'$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $P_n \in \mathbb{R}_2[X]$

b) Soit n fixé, et $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Existe-t-il $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_n = Q$?

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AMB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.