

QUESTIONS COURTES

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$ converge.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) indépendantes, X de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et Y de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (m, μ) pour que

$$P(Y \leq X) \geq \frac{1}{2}$$

Soit E un espace euclidien de dimension n . Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. On note S (resp. T) la matrice de f (resp. g) dans une base orthonormale \mathcal{B} de E . On suppose que S est symétrique et A antisymétrique.

Montrer que

$$\forall x \in E, \quad \|(f - g)(x)\| = \|(f + g)(x)\|.$$

Soit E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad P(zz') = P(z)P(z') \quad (*).$$

- Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}_1[X]$ éléments de E .
 - Déterminer tous les polynômes éléments de E .
-

Dans une file d'attente de n personnes, résultant de la distribution au hasard de ces personnes, se trouvent deux amis Jean et Paul. Quelle est la probabilité que Jean soit séparé de Paul par m personnes ? Quel est le nombre de personnes le plus probable qui séparent Jean et Paul ?

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On note F_n (resp. F) la fonction de répartition de X_n (resp. X). On pose

$$d(X_n, X) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$$

a) On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(X_n, X) = 0$. Montrer que (X_n) converge en loi vers X .

b) Montrer que la réciproque est fautive (on pourra penser à des lois exponentielles).

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (f(t))^n dt$, et on suppose que la suite $(I_n)_n$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leq 1$.
2. En considérant la suite $(I_{2n})_n$, montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) \in \{-1, 0, 1\}$.
3. En déduire f .

On retourne une à une les cartes d'un jeu ordinaire (32 cartes). Quel est le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour voir le premier as ?

1. Soit $u \geq 1$. Comparer $\ln u$ et $u - 1$.
2. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x > 0$, $f(x) > 1$. Montrer que pour tout $x > 0$

$$[f'(x) \geq \frac{1}{\ln(fx)}] \Rightarrow [f(x) \geq 1 + \sqrt{2x}]$$