5

QUESTIONS COURTES

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse :

a) Si A est inversible, alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A\,X = Y$.

b) Si A est inversible, alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe un $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A\,X = Y$.

c) Si pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A\,X = Y$, alors A est inversible.

d) Si pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe un $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A\,X = Y$, alors A est inversible.

e) Si A est inversible, alors il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A\,X = U$.

f) S'il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A\,X = U$, alors A est inversible.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre $p > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Justifier que la variable aléatoire $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance, qu'on notera m.

b) Calculer l'espérance de $\dfrac{S_k}{S_n}$ en fonction de m.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA{\times}A = {}^tB{\times}B$.

1. Montrer que A et B ont même rang.

2. On suppose B inversible. Montrer qu'il existe U telle que ${}^tU \times U = I_n$ et $A = U \times B$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 telle que f et f' soient bornées.

Existence et calcul de $E(Xf(X) - f'(X))$.

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce, la probabilité d'obtenir Pile étant égale à $0 < p < 1$ et celle d'obtenir Face égale à $1 - p$.
Soit X_n le résultat du n-ième lancer.
Les événement $A_n = [X_n \neq X_{n-1}]$ sont-ils indépendants ?

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit (a, b) une famille orthonormée de E. Soit f l'application définie par

$$f : x \to \langle x, a\rangle b - \langle x, b\rangle a.$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$.
2. L'application f est-elle diagonalisable ?

Soit p un réel de $]0,1[$ et U une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi uniforme sur $]0,1]$ et X la variable aléatoire définie par :

$$X = \left\lfloor \frac{\ln(U)}{\ln(1-p)} \right\rfloor + 1$$

où $\lfloor y \rfloor$ désigne la partie entière de y

Déterminer la loi de X.

Soient deux variables aléatoires discrètes X, Y à valeurs dans $\mathbb{R}$, indépendantes de même loi, et admettant une espérance $M \neq 0$ et une variance $V \neq 0$.
Calculer l'espérance et la variance de XY en fonction de M et V.
Les variables $X + Y$ et XY sont-elles indépendantes ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On définit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = M - \phi(M)A.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\phi(A)$ pour que f soit bijective.