

QUESTIONS SANS PRÉPARATION

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On définit les deux variables D_1 et D_2 par :

$$D_1 = \lfloor 10X \rfloor \quad \text{et} \quad D_2 = \lfloor 10^2X - 10D_1 \rfloor$$

(on rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel x .)

- a) Que représentent les variables D_1 et D_2 ?
 - b) Déterminer les lois des variables D_1 et D_2 .
 - c) D_1 et D_2 sont-elles indépendantes ?
-

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1$ est strictement croissante.
 2. En déduire que si P est un polynôme réel tel que : $P(X^2 + 1) = [P(X)]^2 + 1$ et $P(0) = 0$, alors $P = X$.
-

Soit n un entier tel que $n \geq 1$ et p un nombre réel tel que $p \in]0, 1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé et telles que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et Y est à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$.

Que pensez-vous de l'équivalence suivante ?

$$Y \text{ suit la loi } \mathcal{B}(n, p) \text{ si et seulement si } X + Y \text{ suit la loi } \mathcal{B}(2n, p)$$

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit t un réel strictement positif. Montrer que la variable aléatoire $\exp(tX)$ admet une espérance et la calculer.
 2. Soit $n \in \mathbb{N}$, prouver que : $P(X \geq n) \leq e^{-tn} E(\exp(tX))$.
 3. En déduire que : $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \leq e^n \left(\frac{\lambda}{n}\right)^n$.
-