Chapitre 5

Exemples de questions courtes

Soit l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui, à toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $\begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$.

1. φ est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que A est définie positive, ce qui signifie qu'elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \ \ {}^tXAX > 0.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $B^2 = A$.
2. En déduire pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'inégalité

$$||X||^4 \leqslant < X, AX > \times < X, A^{-1}X > .$$

Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n telles que A possède n valeurs propres distinctes. On suppose que $AB = BA$ et que $A^5 = B^5$. Montrer que $A = B$.

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle \ , \ \rangle$ et u et v deux vecteurs orthogonaux de normes 1. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \langle u, x\rangle v + \langle v, x\rangle u$$

On appelle trace de f la trace de la matrice de f dans une base quelconque.
Calculer $\mathrm{tr}(f)$.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et N l'application définie sur E par, pour tout $P \in E$

$$N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$$

1. Montrer que $N(P)$ est bien défini.

2. Montrer que $N(P) = 0$ entraîne $P = 0$.

3. Soit $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P) = P(1)$.

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in E$

$$|\Phi(P)| \leqslant C \times N(P)$$

Soient $f \in \mathbb{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$ converge. Soient $a > 0$ et $b > 0$.

1. Montrer l'existence et calculer $\displaystyle\lim_{u \to -\infty} \int_u^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))\, dx$.

2. En déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{(1 + a\mathrm{e}^x)(1 + b\mathrm{e}^x)} dx$.

Soit $\sigma > 0$. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et de même loi telles que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ E(X_k) = 1 \text{ et } V(X_k) = \sigma^2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Z_n = \dfrac{2}{\sigma}\big(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}\big)$.
Montrer que la suite (Z_n) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On considère deux variables aléatoires X, Y non nulles, définies sur le même espace probabilisé, admettant chacune un moment d'ordre 2 . On note

$$M(X, Y) = \begin{pmatrix} V(X) & \operatorname{cov}(X, Y) \\ \operatorname{cov}(X, Y) & V(Y) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les valeurs propres de $M(X, Y)$ sont positives ou nulles.

2. Que peut t-on dire de X, Y si $M(X, Y)$ n'est pas inversible ?

Soient $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $q = 1 - p$. Soient trois variables aléatoires X, Y, Z définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui sont indépendantes, de lois respectives $\mathcal{B}(n, p)$, $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(n, q)$.
On définit la matrice aléatoire M par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ 0 & Z(\omega) \end{pmatrix}$$

Calculer la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Une famille d'événements $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est appelée *quasi-complète* si :

- les événements (A_i) sont deux à deux incompatibles ;
- $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1$.

La formule des probabilités totales est-elle vérifiée par une famille quasi-complète d'événements ?