Chapitre 5

Exemples de questions courtes

Question sans préparation 1

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}X_k$$

Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.

Question sans préparation 2

Soit (σ_n) une suite de réels strictement positifs.
On considère une suite (X_n) de variables aléatoires telles que, pour tout entier naturel n, X_n suit la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma_n^2)$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $(\sigma > 0)$.
Montrer que :

$$X_n \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,\sigma^2) \iff \lim_{n\to+\infty}\sigma_n = \sigma$$

Question sans préparation 3

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n-1)!}\int_{n+\sqrt{n}}^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx$.

Question sans préparation 4

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Reconnaître la loi de $Y = \lfloor X\rfloor + 1$. En déduire $\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor)$ et $V(\lfloor X\rfloor)$.

Question sans préparation 5

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f\in E$, on pose :

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} T$.

Question sans préparation 6

Soit $\in \mathbb{N}^*$. Soit l'ensemble $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^n = 0\}$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{N}$.

1. Quelles sont les matrices symétriques qui appartiennent à $\mathcal{N}$?
2. En déduire que $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Question sans préparation 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ et soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M - \mathrm{tr}(M)A$.
À quelles conditions sur A l'application f est-elle bijective ?

Question sans préparation 8

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/ AM = MA\}$.

1. Vérifier rapidement que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer
$$\max_{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \dim C(A) \text{ et } \min_{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \dim C(A)$$

Question sans préparation 9

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On note Φ sa fonction de répartition.
Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))dt$.

Question sans préparation 10

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Soit U l'application définie sur E par :
$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ U(f)(x) = \int_0^x \cos(t) f(x-t) dt$$

1. Montrer que U est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $U(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.