CHAPITRE

5

EXEMPLES DE QUESTIONS COURTES

Question sans préparation 1

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit (λ_n) une suite monotone strictement positive. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre λ_n . Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Question sans préparation 2

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction d'une variable réelle F définie par

$$F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t$$

2. Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t$$

Question sans préparation 3

Soit X une variable aléatoire positive, qui admet une espérance, de densité f définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(X > t) \; dt.$

Question sans préparation 4

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que $A^2(A - I_n) = 0$ et $A(A - I_n) \neq 0$.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

Question sans préparation 5

Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, qui suivent toutes la même loi telle que $E(X_n) = V(X_n) = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Pour tout entier $n > t$, comparer les événements $(T_n < t)$ et $(|T_n - n| \geqslant n - t)$.
2. Calculer $P\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} (T_n < t)\right)$.

Question sans préparation 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini , pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par : $\varphi(M) = {}^tM$.

Déterminer la trace d'une matrice représentative de φ.

Question sans préparation 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Trouver des solutions de l'équation $X^6 = A$, où $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
A-t-on unicité de la solution lorsque celle ci existe ?

Question sans préparation 8

Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout entier naturel n non nul, Z_n suit la loi $\gamma(n)$.
Montrer que la suite $\left(\dfrac{Z_n - n}{\sqrt{Z_n}}\right)$ converge en loi et préciser la loi limite.

Question sans préparation 9

Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f''(t)\mathrm{d}t$ soient convergentes.
Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Question sans préparation 10

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big)$.

1. Expliciter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(u) = \int_0^1 \Big[\max(x, u)\Big]\,\mathrm{d}x$$

2. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Comparer

$$J = \mathbb{E}\left(\int_0^1 \max(x, U)\,\mathrm{d}x\right) \quad \text{et} \quad I = \int_0^1 \mathbb{E}\big(\max(x, U)\big)\,\mathrm{d}x$$