CHAPITRE

5

EXEMPLES DE QUESTIONS COURTES

Question sans préparation 1

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On considère le système d'inconnues u et v :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{c} u+v=1 \\ Xu+Yv=Z \end{array} \right.$$

Déterminer la probabilité que (S) possède une infinité de solutions.

Question sans préparation 2

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, à valeurs positives telle que $xf'(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(f(x)\right)$.

1. Montrer, en étudiant la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x^\alpha}$, que pour tout $\alpha > 0$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$.
2. En déduire que pour tout $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} dt$ converge.

Question sans préparation 3

Soit un entier $n \geqslant 2$. On considère n^2 variables aléatoires indépendantes $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ qui sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $\omega \in \Omega$, on définit la matrice carrée $M(\omega)$ d'ordre n par $M(\omega) = \left[X_{i,j}(\omega)\right]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Soient Y et Z les variables aléatoires définies par $Y = Tr(M) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_{k,k}$ et $Z = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_{i,j}X_{j,i}$.

   Déterminer les lois suivies par Y et Z.
2. On introduit la variable aléatoire U qui correspond à la trace de M^2, c'est à dire $U(\omega) = Tr(M(\omega)^2)$ pour $\omega \in \Omega$. Calculer l'espérance et la variance de Y et de U.

Question sans préparation 4

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big)$.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes positives, admettant chacune un espérance. Prouver que si la suite $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.
2. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\quad \mathbb{P}\big(Y_n = 2^{-n}\big) = \frac{1}{2^{-n}+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big(Y_n = 2^{n}\big) = \frac{1}{2^{n}+1}\,.$$
Étudier la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la convergence de la suite $\big(\mathbb{E}(Y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Conclure.

Question sans préparation 5

On considère un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 2$. On suppose que F et G sont deux sous espaces vectoriels de E qui vérifie les conditions suivantes :

$$(*) \qquad F\cap G = \{0\}\,,\; F\cap G^{\perp} = \{0\}\,,\; F^{\perp}\cap G = \{0\} \;\text{ et }\; F^{\perp}\cap G^{\perp} = \{0\}\,.$$

1. Pour $n = 2$, donner un exemple de deux sous espaces F et G qui vérifient les conditions $(*)$.
2. On revient au cas général où F et G vérifie $(*)$. Montrer que n est nécessairement pair et dans ce cas donner un exemple de deux tels sous espaces.

Question sans préparation 6

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ qui est strictement décroissante et qui converge vers 0 en $+\infty$. Pour $x \geqslant 0$, on pose
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - xf(x).$$

1. Étudier la fonction F. Préciser le comportement de F en $+\infty$ lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.
2. Prouver que si la fonction F est majorée sur $\mathbb{R}_+$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Question sans préparation 7

Soit une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements tels que : $A_0 = \Omega$, et $\forall n \geqslant 1,\; P(A_n|A_{n-1}\cap\cdots\cap A_0) = \frac{1}{n+1}$. Soit la variable aléatoire X définie par : $\forall \omega \in \Omega,\; X(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N} | \omega \notin A_n\}$.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer son espérance et sa variance.

Question sans préparation 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n+1$ fois une pièce équilibrée. Pour tout $k \in [\![1, 2n+1]\!]$, soit A_k l'événement « le lancer k a donné Pile et on a obtenu $(n+1)$ Piles à l'issue des k premiers lancers ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$, pour $k \in [\![1, 2n+1]\!]$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2^k}\binom{k-1}{n} = \frac{1}{2}$.

Question sans préparation 9

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour chaque $n \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire Y_n en posant $Y_n(\omega) = [X_1(\omega) \times \cdots \times X_n(\omega)]^{\frac{1}{n}}$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Y_n. Étudier la convergence de la suite $(E(Y_n))$.
2. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable certaine.

Question sans préparation 10

Toutes la variables aléatoirs de l'exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit un entier $k \geqslant 1$. Soit T une variable aléatoire telle que $T(\Omega) = [\![1, k]\!]$.
On considère $k+1$ variables aléatoires $(X_i)_{0\leqslant i\leqslant k}$ qui suivent une même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que toutes ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes.
On définit enfin une variable aléatoire Y par : $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \sum\limits_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$.

1. Montrer que si, pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, X_i a une espérance, alors Y a une espérance.
2. Donner une expression de $E(Y)$ en fonction de $E(X_i)$ et $E(T)$.

Question sans préparation 11

1. Soit $t > 0$. Montrer que $I(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{t+x}\,\mathrm{d}x$ existe,

   et qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\forall t > 0 :\ 0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{t+x}\,\mathrm{d}x \leqslant M$.

2. Montrer que $I(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -\ln(t)$.

   On pourra utiliser l'identité $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{t+x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{t+x} + \dfrac{1}{t+x}$ *pour* $t > 0$ *et* $x \geqslant 0$.

Question sans préparation 12

Soient X_1, X_2, Y des variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probablisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On suppose que X_1 (respectivement X_2) suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$, (resp. $\mathcal{P}(\lambda_2)$) et que Y est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $P(Y=1) = p$.
Pour tout $\omega \in \Omega$ on définit la matrice :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1^2(\omega) & X_2^2(\omega) \\ Y(\omega)X_1^2(\omega) & X_2^2(\omega) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la probabilité que M admette des valeurs propres réelles.
2. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.